

## บทที่ 6

### การวิเคราะห์ระบบควบคุมอัตโนมัติแบบไม่ต่อเนื่อง

#### การจำลองแขนกลเป็นระบบแบบไม่ต่อเนื่อง

ในบทนี้ เราจะใช้เมตริกซ์ของค่าเกนตัวเดียวกับที่หาได้จากบทที่ 4 จากการออกแบบระบบแบบต่อเนื่อง ในการหาค่าลักษณะของระบบควบคุมแบบป้อนกลับที่เป็นแบบผสม ซึ่งจะมีคาบเวลาในการสุ่มเป็นตัวแปรเพียงตัวเดียวในการวิเคราะห์ เราจึงจะวิเคราะห์ดูว่า POLES ของระบบควบคุมแบบป้อนกลับที่เป็นแบบผสมนั้น จะเปลี่ยนแปลงตามคาบเวลาในการสุ่มอย่างไร

จากสมการที่ (3.19) เรามีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลเป็น

$$\dot{X} = AX + BU \quad \text{---(6.1)}$$

เราสามารถทำสมการที่ (6.1) ให้อยู่ใน รูปแบบที่ไม่ต่อเนื่อง (DISCRETE-TIME MODEL) ได้เป็น

$$X(k+1) = PX(k) + QU(k) \quad \text{---(6.2)}$$

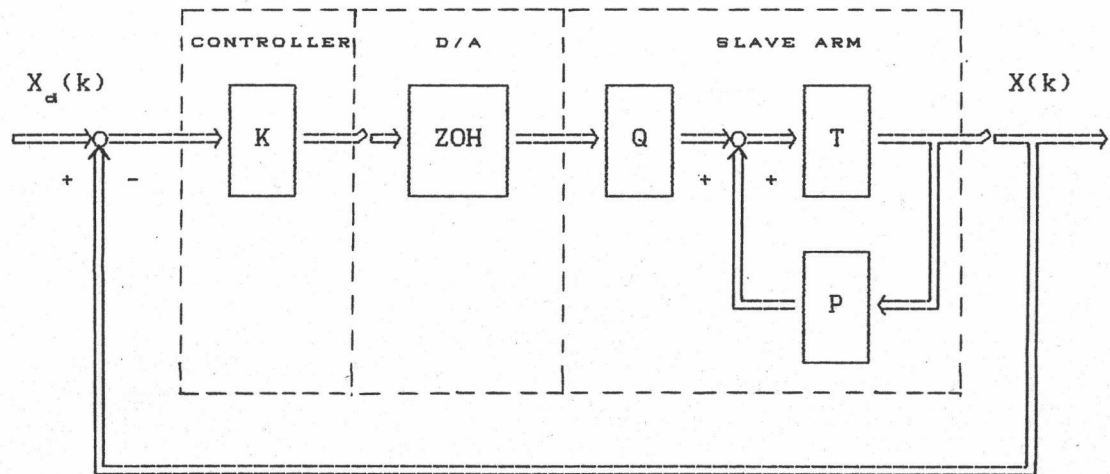
โดยที่

$$P = e^{AT} = I + AT + \frac{(AT)^2}{2!} + \dots$$

$$Q = \int_0^T e^{A^*t} B dt$$

T = คาบเวลาในการสุ่ม (SAMPLING TIME)

รูปแบบดังกล่าวสามารถเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมได้ดังรูปที่ 6.1



รูปที่ 6.1 บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมอัตโนมัติแบบไม่ต่อเนื่อง

คำตอบในรูปของเวลาสำหรับสมการที่ (6.2) คือ

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(0)d\tau \quad \text{---(6.3)}$$

หรือ

$$X(t) = P(t)X(0) + Q(t)U(0)$$

จะเห็นว่า ค่าของ  $U$  ระหว่างช่วงเวลาในการสุ่มจะมีค่าคงที่ โดยที่ขณะเวลาที่สุ่ม  
( $t=T$ )

$$X(T) = P(T)X(0) + Q(T)U(0)$$

และเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

$$X(k+1) = PX(k) + QU(k)$$

ค่า  $P$  และ  $Q$  นี้จะคงที่สำหรับคาบเวลาในการสุ่มหนึ่ง ๆ ซึ่งเราสามารถคำนวณหาได้จาก

$$P(T) = e^{AT} = I + AT + \frac{(AT)^2}{2!} + \dots$$

$$= \text{INVERSE LAPLACE OF } [SI - A]^{-1}$$

$$[SI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s & 0 & 1/s(s-a_{33}) & 0 \\ 0 & 1/s & 0 & 1/s(s-a_{44}) \\ 0 & 0 & 1/(s-a_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(s-a_{44}) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$P(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(1-e^{a_{33}T})/a_{33} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -(1-e^{a_{44}T})/a_{44} \\ 0 & 0 & e^{a_{33}T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{a_{44}T} \end{bmatrix}$$

เราทราบว่า

$$Q = \int_0^T P(\tau) B d\tau$$

หาได้

$$P(\tau)B = \begin{bmatrix} -b_{31}(1-e^{a_{33}\tau})/a_{33} & 0 \\ 0 & -b_{42}(1-e^{a_{44}\tau})/a_{44} \\ b_{31}e^{a_{33}\tau} & 0 \\ 0 & b_{42}e^{a_{44}\tau} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$Q(T) = \begin{bmatrix} (-b_{31}/a_{33})[T-(e^{a_{33}T}-1)/a_{33}] & 0 \\ 0 & (-b_{42}/a_{44})[T-(e^{a_{44}T}-1)/a_{44}] \\ b_{31}(e^{a_{33}T}-1)/a_{33} & 0 \\ 0 & b_{42}(e^{a_{44}T}-1)/a_{44} \end{bmatrix}$$

ทำการกระจาย POWER SERIES ใน  $P(T)$  และ  $Q(T)$  จาก

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + \dots$$

จะได้ว่า

$$P(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T+a_{33}T^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T+a_{44}T^2/2 \\ 0 & 0 & 1+a_{33}T+a_{33}^2T^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a_{44}T+a_{44}^2T^2/2 \end{bmatrix}$$

และ

$$Q(T) = \begin{bmatrix} b_{31}T^2/2 & 0 \\ 0 & b_{42}T^2/2 \\ b_{31}(T+a_{33}T^2/2) & 0 \\ 0 & b_{42}(T+a_{44}T^2/2) \end{bmatrix}$$

ระบบแขนกลที่ต่อเนื่องจึงสามารถเขียนในรูปแบบที่ไม่ต่อเนื่องเป็น

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T+a_{33}T^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T+a_{44}T^2/2 \\ 0 & 0 & 1+a_{33}T+a_{33}^2T^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a_{44}T+a_{44}^2T^2/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}$$



$$+ \begin{bmatrix} b_{31}T^2/2 & 0 \\ 0 & b_{42}T^2/2 \\ b_{31}(T+a_{33}T^2/2) & 0 \\ 0 & b_{42}(T+a_{44}T^2/2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \quad \text{---(6.4)}$$

เราจะพิจารณาระบบในสมการที่ (6.4) เป็น 2 กรณี คือ

1. เวลาที่ใช้ในการคำนวณมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับคาบเวลาในการสุ่ม
2. เวลาที่ใช้ในการคำนวณมีค่าเท่ากับคาบเวลาในการสุ่ม

ซึ่งกรณีเหล่านี้เป็นขอบเขตจำกัดของการควบคุมแบบไม่ต่อเนื่อง โดยที่เวลาที่ใช้ในการคำนวณจริงจะมีค่าอยู่ระหว่าง 2 กรณีนี้

กรณีที่ 1 เวลาที่ใช้ในการคำนวณมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับคาบเวลาในการสุ่ม เขียนกฎการควบคุมแบบไม่ต่อเนื่องได้เป็น

$$U(k) = K[X_d(k) - X(k)]$$

ใช้ค่าเกน K เดียวกับที่หาได้จากระบบแบบต่อเนื่องในบทที่ 4 จะได้

$$X(k+1) = [P - QK]X(k) + QKX_d(k)$$

$$X(k+1) = P_1X(k) + QKX_d(k) \quad \text{---(6.5)}$$

ระบบจะมี STATE TRANSITION MATRIX ซึ่งจะแสดงคุณลักษณะทางพลศาสตร์ของระบบเมื่อไม่มีสัญญาณเข้า เป็น

$$P_1 = P - QK$$

เราทราบค่า Q และ K มาแล้ว ดังนั้น แทนค่าของ Q และ K จะได้

$$QK = \begin{bmatrix} \omega_1^2 T^2/2 & 0 & (2\zeta_1 \omega_1 + a_{33})T^2/2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 T^2/2 & 0 & (2\zeta_2 \omega_2 + a_{44})T^2/2 \\ \omega_1^2 (T + a_{33} T^2/2) & 0 & (2\zeta_1 \omega_1 + a_{33})(T + a_{33} T^2/2) & 0 \\ 0 & \omega_2^2 (T + a_{44} T^2/2) & 0 & (2\zeta_2 \omega_2 + a_{44})(T + a_{44} T^2/2) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$P_1 = P - QK$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \omega_1^2 T^2/2 & 0 & T - 2\zeta_1 \omega_1 T^2/2 & 0 \\ 0 & 1 - \omega_2^2 T^2/2 & 0 & T - 2\zeta_2 \omega_2 T^2/2 \\ -\omega_1^2 (T + a_{33} T^2/2) & 0 & 1 - 2\zeta_1 \omega_1 (T + a_{33} T^2/2) & 0 \\ 0 & -\omega_2^2 (T + a_{44} T^2/2) & 0 & 1 - 2\zeta_2 \omega_2 (T + a_{44} T^2/2) \end{bmatrix}$$

แปลงสมการที่ (6.5) ให้อยู่ในรูปของตัวแปรแซท (Z-DOMAIN) ได้

$$ZX(z) - Zx(0) = P_1 X(z) + QKX_d(z)$$

$$[ZI - P_1] X(z) = Zx(0) + QKX_d(z)$$

$$X(z) = [ZI - P_1]^{-1} Zx(0) + [ZI - P_1]^{-1} QKX_d(z)$$

เราจะหา CHARACTERISTIC EQUATION ของสมการข้างต้น ได้เป็น

$$\begin{aligned} \det[ZI - P_1] &= [Z^2 + \{-2 + \omega_1^2 T^2/2 + 2\zeta_1 \omega_1 (T + a_{33} T^2/2)\}Z + \{1 \\ &\quad + \omega_1^2 T^2/2 - 2\zeta_1 \omega_1 (T + a_{33} T^2/2) + (1 + \zeta_1 \omega_1 T) a_{33} \omega_1^2 T^3/2\}] \\ &\quad \cdot [Z^2 + \{-2 + \omega_2^2 T^2/2 + 2\zeta_2 \omega_2 (T + a_{44} T^2/2)\}Z + \{1 \\ &\quad + \omega_2^2 T^2/2 - 2\zeta_2 \omega_2 (T + a_{44} T^2/2) + (1 + \zeta_2 \omega_2 T) a_{44} \omega_2^2 T^3/2\}] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

เราจะเปรียบเทียบระบบในกรณีที่ 1 นี้ กับระบบป้อนกลับแบบต่อเนื่องที่แสดงโดยสมการที่ (4.6) ดังนั้น เพื่อให้สามารถเปรียบเทียบกันได้ เราต้องทำการจัดรูปของสมการ

ที่ (4.6) ใหม่ให้อยู่ในรูปแบบที่ไม่ต่อเนื่อง จากสมการที่ (4.6) จะได้ว่า

$$X = A_d X + BKX_d$$

ซึ่งจะได้คำตอบเป็น

$$X(t) = e^{A_d t} X(0) + \int_0^t e^{A_d(t-\tau)} BKX_d(\tau) d\tau$$

$$X(t) = P_d(t)X(0) + Q_d(t)X_d(0)$$

พิจารณาว่า ค่าของสัญญาณเข้า  $X_d$  ระหว่างช่วงเวลาในการสุ่มจะมีค่าคงที่ ดังนั้น  
ที่ขณะเวลาที่สุ่ม ( $t=T$ )

$$X(T) = P_d(T)X(0) + Q_d(T)X_d(0)$$

หรือเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

$$X(k+1) = P_d X(k) + Q_d X_d(k) \quad \text{---(6.7)}$$

เราจะหา  $P_d$  ได้ว่า

$$\begin{aligned} P_d(T) &= e^{A_d T} \\ &= \text{INVERSE LAPLACE OF } [sI - A_d]^{-1} \end{aligned}$$

แต่

$$[sI - A_d]^{-1} = \begin{bmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ \omega_1^2 & 0 & s+2\zeta_1\omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & s+2\zeta_2\omega_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[SI-A_d]^{-1} = \begin{bmatrix} (s+2\zeta_1\omega_1)/\Delta_1 & 0 & 1/\Delta_1 & 0 \\ 0 & (s+2\zeta_2\omega_2)/\Delta_2 & 0 & 1/\Delta_2 \\ -\omega_1^2/\Delta_1 & 0 & s/\Delta_1 & 0 \\ 0 & -\omega_2^2/\Delta_2 & 0 & s/\Delta_2 \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\Delta_1 = s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2$$

จะได้

$$P_d = \begin{bmatrix} \Gamma_1^+ & 0 & \Gamma_1/\omega_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2^+ & 0 & \Gamma_2/\omega_2 \\ -\omega_1\Gamma_1 & 0 & -\Gamma_1^- & 0 \\ 0 & -\omega_2\Gamma_2 & 0 & -\Gamma_2^- \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\Gamma_1 = \frac{e^{-\zeta_1\omega_1 T}}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \sin(\omega_1\sqrt{1-\zeta_1^2} T)$$

$$\Gamma_1^+ = \frac{e^{-\zeta_1\omega_1 T}}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \sin(\omega_1\sqrt{1-\zeta_1^2} T + \cos^{-1}\zeta_1)$$

$$\Gamma_1^- = \frac{e^{-\zeta_1\omega_1 T}}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \sin(\omega_1\sqrt{1-\zeta_1^2} T - \cos^{-1}\zeta_1)$$

ถ้าเราทำการกระจายสมาชิกในสมการของ  $P_d$  ด้วยอนุกรมเทเลอร์ (TAYLOR SERIES) โดยมี  $T$  เป็นตัวแปร รอบจุด  $T_0 = 0$  แล้วตัดเทอมที่มีอันดับมากกว่าหรือเท่ากับสามทิ้งไป จะได้

$$P_d[11] = 1 + 0T - \omega_1^2 T^2/2 + \dots$$

$$P_d[13] = 0 + 1T - 2\zeta_1\omega_1 T^2/2 + \dots$$

$$P_d[22] = 1 + 0T - \omega_2^2 T^2/2 + \dots$$

$$P_d[24] = 0 + 1T - 2\zeta_2\omega_2 T^2/2 + \dots$$

$$P_d[31] = 0 - \omega_1^2 T + 2\zeta_1\omega_1^3 T^2/2 - \dots$$



$$P_d[33] = 1 - 2\zeta_1\omega_1 T + (4\zeta_1^2 - 1)\omega_1^2 T^2/2 - \dots$$

$$P_d[42] = 0 - \omega_2^2 T + 2\zeta_2\omega_2^3 T^2/2 - \dots$$

$$P_d[44] = 1 - 2\zeta_2\omega_2 T + (4\zeta_2^2 - 1)\omega_2^2 T^2/2 - \dots$$

เมื่อเปรียบเทียบสมาชิกของ  $P_1$  และ  $P_d$  จะเห็นว่าครึ่งหนึ่งของจำนวนของสมาชิกจะตรงกับสามเทอมแรกของการกระจายด้วยอนุกรมเทเลอร์ แสดงว่า เป็น QUADRATIC APPROXIMATION ส่วนอีกครึ่งหนึ่งของจำนวนของสมาชิกจะตรงกับสองเทอมแรกของการกระจายด้วยอนุกรมเทเลอร์ แสดงว่า เป็น LINEAR APPROXIMATION

แปลงสมการที่ (6.7) ให้อยู่ในรูปของตัวแปรแซท (Z-DOMAIN) ได้

$$ZX(z) - Zx(0) = P_d X(z) + Q_d X_d(z)$$

$$[ZI - P_d]X(z) = Zx(0) + Q_d X_d(z)$$

$$X(z) = [ZI - P_d]^{-1} Zx(0) + [ZI - P_d]^{-1} Q_d X_d(z)$$

ซึ่งมี CHARACTERISTIC EQUATION เป็น

$$\begin{aligned} \det[ZI - P_d] &= [Z^2 + \{-2 + 2\zeta_1\omega_1 T - (2\zeta_1^2 - 1)\omega_1^2 T^2\}Z + \{1 - 2\zeta_1\omega_1 T \\ &\quad + 2\zeta_1^2\omega_1^2 T^2 - \zeta_1\omega_1^3 T^3 + \omega_1^4 T^4/4\}] \cdot [Z^2 + \{-2 + 2\zeta_2\omega_2 T \\ &\quad - (2\zeta_2^2 - 1)\omega_2^2 T^2\}Z + \{1 - 2\zeta_2\omega_2 T + 2\zeta_2^2\omega_2^2 T^2 - \zeta_2\omega_2^3 T^3 \\ &\quad + \omega_2^4 T^4/4\}] \\ &= 0 \end{aligned} \quad \text{---(6.8)}$$

กรณีที่ 2 เวลาที่ใช้ในการคำนวณมีค่าเท่ากับคาบเวลาในการสุ่ม เขียนกฎการควบคุมแบบไม่ต่อเนื่องได้เป็น

$$U(k+1) = K[X_d(k) - X(k)]$$

จะเห็นว่า มีความล่าช้าระหว่างสัญญาณเข้าและสัญญาณออกของ CONTROLLER อยู่ 1 คาบเวลาของการสุ่ม หรือเขียนรูปใหม่ได้เป็น

$$Y(k+1) = -KX(k) + KX_d(k)$$

$$U(k) = Y(k)$$

เราเขียนสมการรวมของระบบทั้งหมดได้เป็น

$$\begin{bmatrix} X(k+1) \\ Y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ -K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ Y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} X_d(k)$$

หรือ

$$V(k+1) = P_2 V(k) + Q_2 X_d(k) \quad \text{---(6.9)}$$

โดยที่

$$V(k) = \begin{bmatrix} X(k) \\ Y(k) \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} P & Q \\ -K & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}$$

แปลงสมการที่ (6.9) ให้อยู่ในรูปของตัวแปรแซท (Z-DOMAIN) ได้

$$ZV(z) - Zv(0) = P_2 V(z) + Q_2 X_d(z)$$

$$[ZI - P_2] V(z) = Zv(0) + Q_2 X_d(z)$$

$$V(z) = [ZI - P_2]^{-1} Zv(0) + [ZI - P_2]^{-1} Q_2 X_d(z)$$

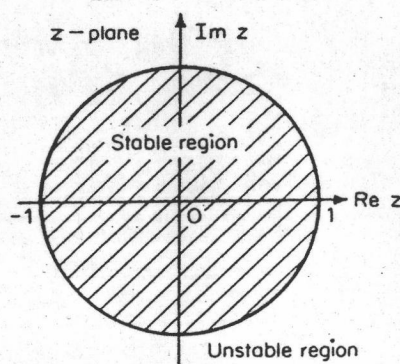
เราจะหา CHARACTERISTIC EQUATION ได้จาก  $\det[ZI - P_2]$  ได้เป็น

$$\begin{aligned} \det[ZI - P_2] = & [ Z^3 + (-2 - a_{33} T - a_{33}^2 T^2 / 2) Z^2 + \{1 + \omega_1^2 T^2 / 2 \\ & + (2\zeta_1 \omega_1 + 2a_{33}) (T + a_{33} T^2 / 2)\} Z + \{\omega_1^2 T^2 / 2 \\ & - (2\zeta_1 \omega_1 + a_{33}) (T + a_{33} T^2 / 2) + a_{33} \omega_1^2 T^3 / 2\} ] \cdot [ Z^3 \\ & + (-2 - a_{44} T - a_{44}^2 T^2 / 2) Z^2 + \{1 + \omega_2^2 T^2 / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(2\zeta_2\omega_2 + 2a_{44})(T + a_{44}T^2/2)Z + \{\omega_2^2 T^2/2 \\
& -(2\zeta_2\omega_2 + a_{44})(T + a_{44}T^2/2) + a_{44}\omega_2^2 T^3/2\} \\
& = 0 \qquad \qquad \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

### การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ

ในการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบนั้น ขอบเขตจำกัดของเสถียรภาพของระบบก็คือ ทางเดินของ POLES ทั้งหมดจะต้องอยู่ในวงกลมหนึ่งหน่วยบนระนาบของตัวแปรซ (Z-DOMAIN) ดังแสดงในรูปที่ 6.2 ดังนั้น เราจึงได้วิเคราะห์เสถียรภาพของระบบในกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 เปรียบเทียบกันโดยการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการหา POLES และเขียนทางเดินของ POLES ของกรณีที่ 1 จากสมการที่ (6.6) และกรณีที่ 2 จากสมการที่ (6.10) โดยให้ค่าความถี่ธรรมชาติ (NATURAL FREQUENCY ;  $\omega$ ) มีค่าคงที่เท่ากับ 10 rad/s แล้วให้คาบเวลาในการสุ่ม (SAMPLING TIME ; T) มีค่าเปลี่ยนแปลงไป ซึ่งผลดังกล่าว แสดงอยู่ในรูปที่ 6.3 และ รูปที่ 6.4 สำหรับแกนลข้อต่อที่ 1 และรูปที่ 6.5 และ รูปที่ 6.6 สำหรับแกนลข้อต่อที่ 2 จะเห็นได้ว่า สำหรับแกนลข้อต่อที่ 1 จะไม่มีเสถียรภาพที่  $T \sim 0.102$  sec ในกรณีที่ 1 และที่  $T \sim 0.045$  sec ในกรณีที่ 2 ส่วนแกนลข้อต่อที่ 2 พบว่า จะไม่มีเสถียรภาพที่  $T \sim 0.083$  sec ในกรณีที่ 1 และที่  $T \sim 0.135$  sec ในกรณีที่ 2

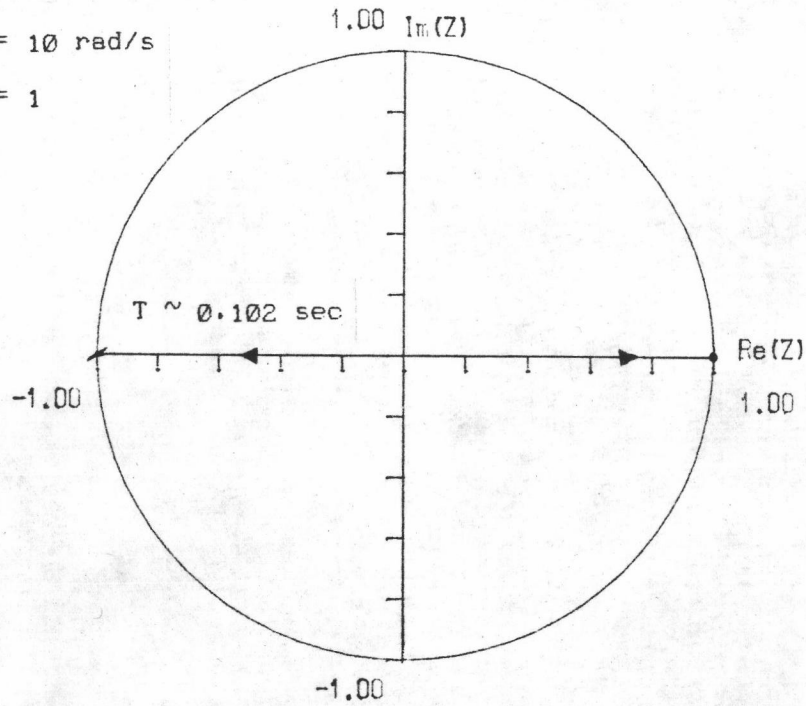


รูปที่ 6.2 แสดงบริเวณของ POLES ของระบบที่มีเสถียรภาพบนระนาบ Z-PLANE

## Graph of STABILITY for CASE 1

$$\omega = 10 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 1$$

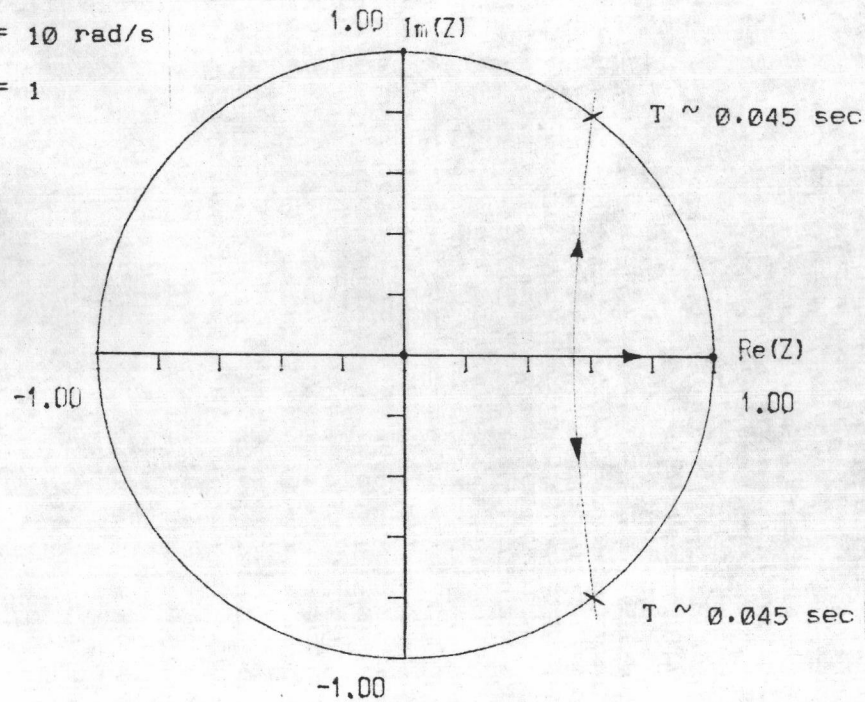


รูปที่ 6.3 แสดงทางเดินของ POLES ในกรณีที่ 1 สำหรับแกนกลข้อต่อที่ 1

## Graph of STABILITY for CASE 2

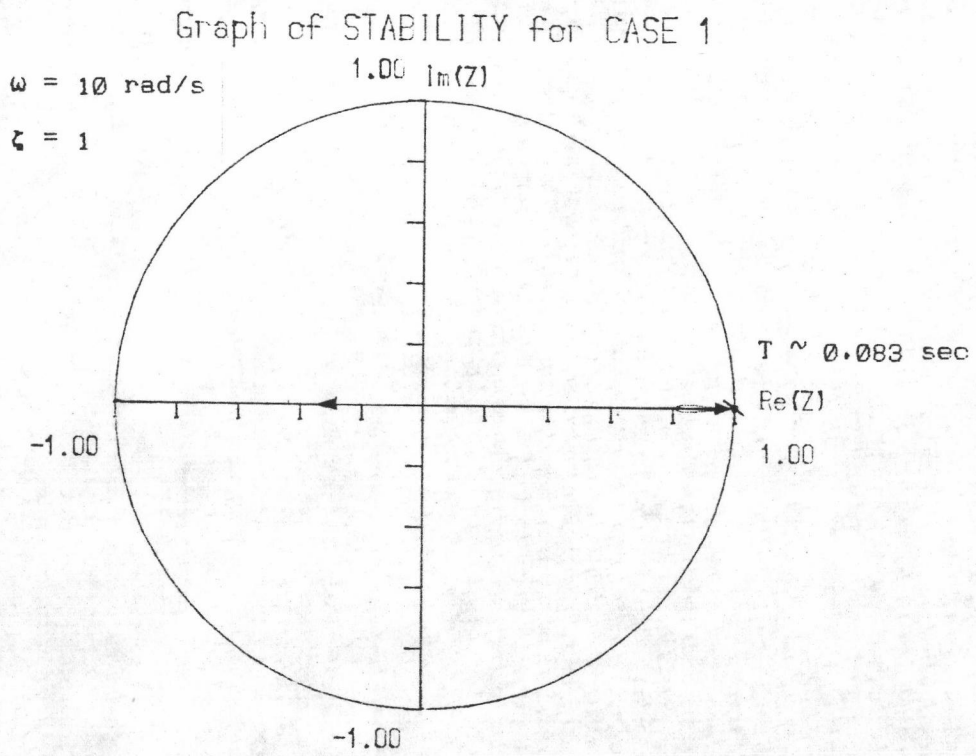
$$\omega = 10 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 1$$

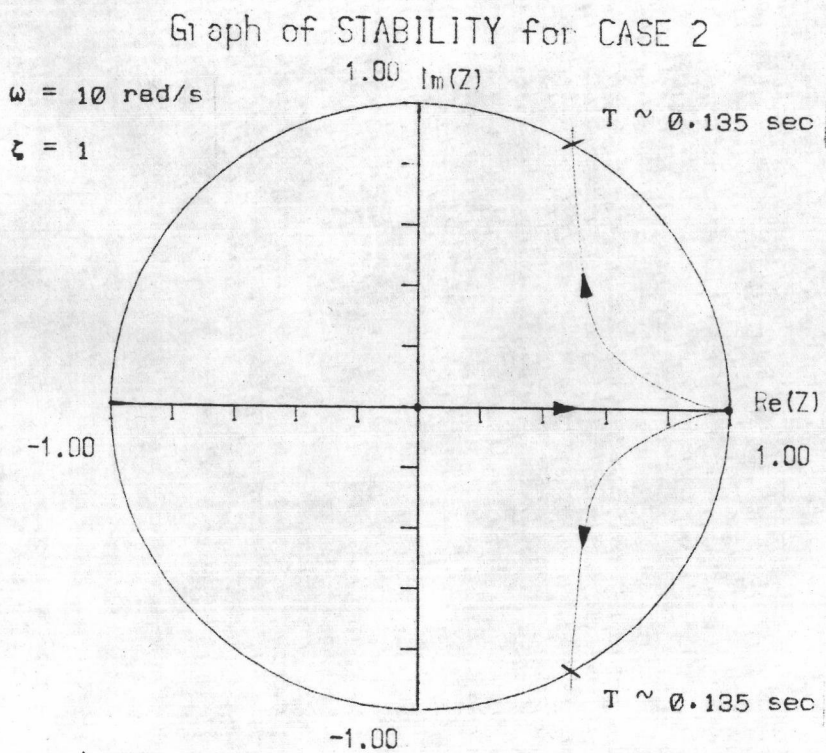


รูปที่ 6.4 แสดงทางเดินของ POLES ในกรณีที่ 2 สำหรับแกนกลข้อต่อที่ 1





รูปที่ 6.5 แสดงทางเดินของ POLES ในกรณีที่ 1 สำหรับแกนกลข้อต่อที่ 2



รูปที่ 6.6 แสดงทางเดินของ POLES ในกรณีที่ 2 สำหรับแกนกลข้อต่อที่ 2