AN ANALYTICAL STUDY OF THE GENERALIZED

BINOMIAL THEOREM USING GAMMA FUNCTIONS

IN THE SERIES COEFFICIENTS

(การศึกษาแบบอนาลิติคของทฤษฎีทวินาม เมื่อใช้แกมม่าฟังค์ชั่นในอนุกรมสัมประสิทธิ์)

by

Nuanchan Intaravicha

B.Sc. (Hons.) Chulalongkorn University, 1962

Thesis

Submitted in partial fulfillment of the requirements for the

Degree of Master of Science

in

The Chulalongkorn University Graduate School

Department of Mathematics

March, 1970

(B.E. 2513)

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Degree of Master of Science.

T. Nilanidhi

....

Dean of the Graduate School

Thesis Committee ....Chairman

....

....

....

Thesis Supervisor Dr. R.H.B. EXELL.

Date March, 17 th, 1970.

ABSTRACT

The binomial coefficients ${}^nC_r$, which are defined for integral values of n and r, may be represented by gamma functions thus :

$$ {}^nC_r = f(r,n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)}. $$

The function f(r,n) is defined at all points of the r,n - plane except on the singular lines n = -1, -2, -3, ... The singularities of f(r,n) at the lattice points of the r,n - plane may be removed along the straight lines through the lattice points. But the values of f(r,n) at the lattice points required to remove the singularity depends on the slope of the line. The singularities cannot be removed between the lattice points on the singular lines.

In the fourth quadrant, the formula for removing the singularities is

$$ f(r,n) = \lim_{\epsilon\to 0} f(r+\epsilon, -k+m\epsilon) = (-1)^r \, {}^{k+r-1}C_r(1 - \tfrac{1}{m}), $$

where k is a positive integer, r is a non-negative integer, and m is the slope of the line. In the third quadrant, we have two formulas:

$$ f(r,n) = \lim_{\epsilon\to 0} f(-j+\epsilon, -k+m\epsilon) = \begin{cases} (-1)^{j-k} \; {}^{j-1}C_{k-1}(\tfrac{1}{m}), & \text{where } j \geqslant k \\ 0, & \text{where } j < k. \end{cases} $$

and both j and k are positive integers.

Pascal 's rule $f(r,n)+f(r+1, n) = f(r+1, n+1)$ is shown to hold for all non-singular points (r,n) and for the singular lattice points provided a constant value of m is used to remove the singularities.

It is further shown that the binomial series generated by the coefficients at the singular lattice points is convergent only when m equals 1 or ∞

Three-dimensional graphs are depicted to show the binomial coefficients at the lattice points, and the shape of the function $f(r,n)$ in the region $-1 \leqslant r \leqslant +1$, $-1 < n \leqslant +1$.

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์เรื่องนี้ เป็นการศึกษาเกี่ยวกับค่า $^{n}C_{r}$ ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของการกระจายแบบทวินาม โดยการนำแกมม่าฟังค์ชั่นมาเกี่ยวข้องด้วย ดังนี้

$$^{n}C_{r} = f(r,n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)}$$

จากสูตรใหม่นี้ เราไม่สามารถหาค่าฟังค์ชั่น $f(r,n)$ ณ.จุดที่อยู่บนเส้น Singular lines ได้คือ บนเส้น $n = -1, -2, -3, \ldots\ldots\ldots$ เหตุการณ์เช่นนี้ เราเรียกว่าเกิด Singularity

การเกิด Singularity บนจุดแลคทีส (lattice Points) สามารถแก้ไขได้ โดยการหาค่าลิมิต ของฟังค์ชั่นตามแนวเส้นตรงที่ลากผ่านจุดนั้น ซึ่งค่าลิมิตนี้จะขึ้นอยู่กับค่าความชันของเส้นตรงที่ลากผ่าน แต่เราไม่สามารถจะหาค่าลิมิต ของฟังก์ชั่น ณ.จุดที่อยู่ระหว่างจุดแลคทีสสองจุดได้

สูตรสำหรับหาค่าลิมิตของฟังค์ชั่น แบ่งออกเป็นสองส่วน คือ จุดที่อยู่ใน quadrant ที่ ๔ มีสูตรเป็น

$$f(r,n) = \lim_{\epsilon \to 0} f(r+\epsilon, -k+m\epsilon)$$

$$= (-1)^{r}\ {}^{k+r-1}C_{r}\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

เมื่อ k เป็นเลขจำนวนเต็มบวก, r เป็นเลขจำนวนเต็มบวกและ ๐, m เป็นค่าความชันของเส้นตรง ส่วนจุดที่อยู่ใน quadrant ที่ ๓ จะมีสูตรเป็น

$$f(r,n) = \lim_{\epsilon \to 0} f(-j+\epsilon\ ,\ -k+m\,\epsilon)$$

$$= \begin{cases} (-1)^{j-k}\ {}^{j-1}C_{k-1}\ (\frac{1}{m}) \\ \qquad\qquad j \geq k \\ 0, \qquad\quad j < k \end{cases}$$

เมื่อ j และ k เป็นเลขจำนวนเต็มบวกทั้งคู่

นอกจากจะหาค่าลิมิตของฟังก์ชันได้ทุก ๆ จุด Singular lattice points แล้ว ยังแสดงให้เห็นว่าค่าของฟังก์ชั่น บนจุดต่าง ๆ บนพื้นราบ (r,n) จะคล้องตามกฎของ Pascal (Pascal's rule) เสมอ นั่นคือ

$$f(r,n) + f(r+1,\ n) = f(r+1,\ n+1)$$

แม้ว่าจุดนั้นจะเป็นจุด Singular lattice points ก็ตาม

ความรู้ที่ได้อีกอย่างหนึ่งคือ ถ้าเราใช้ความชันของเส้นตรงเท่ากับ 1 หรือ ∞ และใช้ค่าลิมิตของฟังก์ชันที่ได้ประกอบกันเป็นอนุกรมทวินาม เราจะได้อนุกรมชนิดลู่เข้า แต่ถ้าเราใช้ค่า m อื่น ๆ นอกจากสองค่านี้แล้วเราจะได้อนุกรมชนิดลู่ออกเสมอ

ในบทสุดท้าย ได้แสดงภาพชนิดสามมิติ ของค่าสัมประสิทธิ์ทวินาม ณ.จุด Singular lattice Points โดยการใช้ค่าความชันเท่ากับ 1 และ ∞ และภาพของค่าสัมประสิทธิ์ทวินามในบริเวณใกล้จุดกำเนิด (origin)

ACKNOWLEDGEMENTS

I have much pleasure in expressing here my gratitude to the following persons.

Dr. R.H.B. Exell, my thesis supervisor, for his kindness and generous help with instruction and many ideas at all times, and also for writing the program mentioned in Chapter IV.

Mrs. Wanida Israngkul Na Ayudhya, for lending me her thesis of which this thesis is the extended work.

TABLE OF CONTENTS

Page

LIST OF FIGURES