

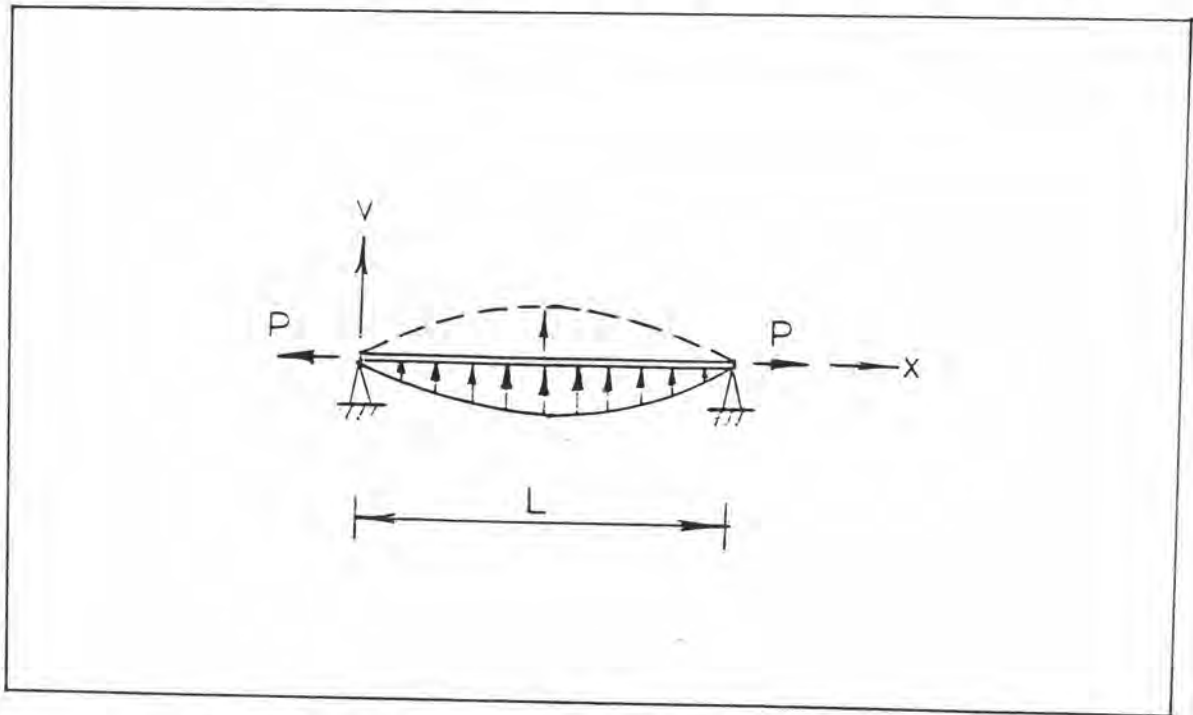


บทที่ 3

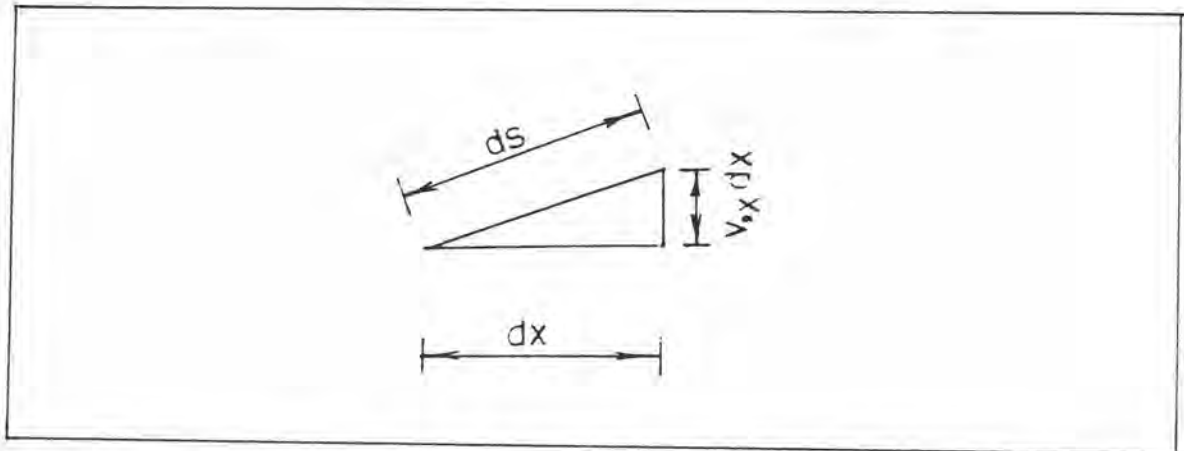
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในงานวิจัย

สตีฟเนสเมตริกซ์ (Stiffness Matrix) ของเสา

พิจารณาองค์อาคารในรูป 3.1 เมื่อเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งด้านข้าง v โดยที่ v เป็นฟังก์ชันของ x , $v = v(x)$, ความยาวอนุพันธ์ (Differential Length) dx จะเปลี่ยนเป็นความยาว ds และ ds มากกว่า dx โดยที่



รูป 3.1 องค์อาคารคานาแบบคานาสองจุดรองรับแบบหมุดทั้ง 2 ข้าง (Simple Support)



รูป 3.2 ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตขององค์อาคารอนุพันธ์ (Differential Element) ที่มีความยาว dx

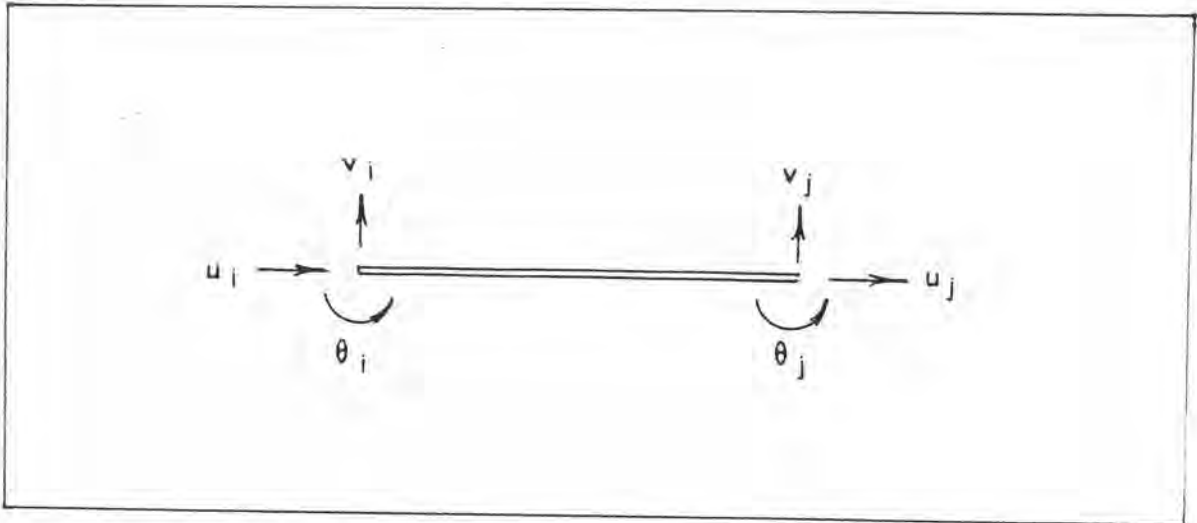
$$ds = (1 + (v_{,x})^2)^{1/2} dx \cong \left(1 + \frac{1}{2} (v_{,x})^2 \right) dx \quad (3.1)$$

ในที่นี้สัญลักษณ์ $()_{,x}$ หมายถึง $d()/dx$ และ ค่าประมาณตอนท้าย ของสมการ (3.1) ได้จากสองพจน์แรกของการกระจายไบนอมิยัล (Binomial Expansion) ค่าประมาณนี้จะจริงเมื่อ $(v_{,x})^2 \ll 1$ ซึ่งจำกัดให้ใช้ได้กับปัญหาที่เกิดมุมหมุนเล็กๆ (Small Rotation) ที่จุดต่อ (Node) ขององค์อาคารเท่านั้น ดังนั้น ความเครียดเมมเบรนตามแนวแกน (Axial Membrane Strain) อันเนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งด้านข้าง มีค่า

$$e_m = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{1}{2} (v_{,x})^2 \quad (3.2)$$

พจน์ $\frac{1}{2} (v_{,x})^2$ มีความสำคัญในการวิเคราะห์องค์อาคารโดยพิจารณาความไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิตและเป็นพจน์ที่เพิ่มขึ้นมาจากการวิเคราะห์องค์อาคารโดยใช้ทฤษฎีเชิงเส้น (Linear Analysis) ความเครียดนี้เป็นส่วนที่เกิดเพิ่มเติม

จากความเครียดเนื่องจากการตัดซึ่งกล่าวไว้ในทฤษฎีคานเบื้องต้น (Elementary Beam Theory)



รูปที่ 3.3 องค์อาคารรับแรงตัดและแรงตามแนวแกนในระนาบ 2 มิติ แสดงการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย

สำหรับองค์อาคาร (รูปที่ 3.3) ที่มีการเปลี่ยนตำแหน่งตามแนวแกน $u = u(x)$ และการเปลี่ยนตำแหน่งด้านข้าง $v = v(x)$ ที่ระยะ y จากแกนศูนย์ถ่วง (Centroidal Axis) ของหน้าตัด จะเกิดความเครียดตามแนวแกนทั้งหมดเท่ากับ

$$\epsilon = u_{,x} - y v_{,xx} + \frac{1}{2} (v_{,x})^2 \quad (3.3)$$

เมื่อไม่คำนึงถึงผลของการเฉือน พลังงานความเครียด (Strain Energy) ในองค์อาคารจะเขียนได้ดังนี้

$$U = \int_V \frac{1}{2} E (\epsilon_x)^2 dv = \int_L \int_A \frac{E (\epsilon_x)^2}{2} dA dx \quad (3.4)$$

แทนค่าสมการ (3.3) ในสมการ (3.4) และใช้ประโยชน์ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\int_A dA = A, \int_L \int_A y dA g(x) dx = 0, \int_L \int_A y^2 dA g(x) dx = I, \int_A E u_{,x} dA = P \quad (3.5)$$

ในที่นี้ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ x และ P เป็นแรงตามแนวแกน มีค่าเป็นบวกเมื่อเป็นแรงดึง รวมทั้งละทิ้งพจน์ $(v_{,x})^4$ เนื่องจากมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับพจน์อื่น

$$U = \int_L \frac{1}{2} AE (u_{,x})^2 dx + \int_L \frac{1}{2} EI (v_{,xx})^2 dx + \int_L \frac{1}{2} P (v_{,x})^2 dx \quad (3.6)$$

จากวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) สามารถเขียนการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งขององค์อาคารให้อยู่ในรูปการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่ปลายได้ดังนี้ การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งตามแนวแกน,

$$u = [M] \{c\} \quad (3.7)$$

เมื่อ $[M]$ คือฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) ขององค์อาคารรับแรงตามแนวแกน

$$\{c\} \text{ คือการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่ปลาย} \\ = \{u_i, u_j\}^T$$

ดังนั้น

$$u_{,x} = [M_{,x}] \{c\} \quad (3.8)$$

เมื่อ $[M_{,x}]$ คืออนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $[M]$ เทียบกับ x

การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งด้านข้าง,

$$v = [N] \{q\} \quad (3.9)$$

เมื่อ $[N]$ คือฟังก์ชันรูปร่างขององค์อาคารรับแรงดัด
 $\{q\}$ คือการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย (Nodal Displacement)
 $= \{ v_i \ \theta_i \ v_j \ \theta_j \}^T$

ดังนั้น

$$v, x = [N, x] \{q\} \quad (3.10)$$

เมื่อ $[N, x]$ คืออนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $[N]$ เทียบกับ x

$$\text{และ } v, xx = [N, xx] \{q\} \quad (3.11)$$

เมื่อ $[N, xx]$ คืออนุพันธ์อันดับสองของ $[N]$ เทียบกับ x

แทนค่าสมการ (3.8), (3.10) และ (3.11) ลงในสมการ (3.6)

$$\begin{aligned} U = & \int_L \frac{1}{2} AE \{c\}^T [M, x]^T [M, x] \{c\} dx \\ & + \int_L \frac{1}{2} EI \{q\}^T [N, xx]^T [N, xx] \{q\} dx \\ & + \int_L \frac{1}{2} P \{q\}^T [N, x]^T [N, x] \{q\} dx \end{aligned} \quad (3.12)$$

เมื่อพิจารณาหลักการค่าสแตชันนารีของพลังงานศักย์รวม (The Principle of a Stationary of Total Potential Energy) สามารถเขียนความสัมพันธ์ของแรงกระทำภายนอกกับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย, $\{r\} =$

$\{u_i \ v_i \ \theta_i \ u_j \ v_j \ \theta_j\}^T$, ดังนี้

$$\{P\} = ([K_o^{ab}] + [K_G^{ab}]) \{r\} \quad (3.13)$$

$$\text{หรือ } \{P\} = [K_S] \{r\} \quad (3.14)$$

เมื่อ $[K_S]$ คือสติฟเนสเมตริกซ์ซีแคน (Secant Stiffness Matrix)

$$= [K_o^{ab}] + [K_G^{ab}] \quad (3.15)$$



$[K_o^{ab}]$ คือสตีฟเนสเมตริกซ์เชิงเส้น (Linear Stiffness Matrix) เป็นผลรวมของ $[K_o^a]$ และ $[K_o^b]$

$$\text{โดยที่ } [K_o^a] = \int AI[M,x]^T[M,x]dx \quad (3.16)$$

$$[K_o^b] = \int EI[N,xx]^T[N,xx]dx \quad (3.17)$$

$$[K_o^{ab}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \text{สมมาตร} & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

และ $[K_G^{ab}]$ คือสตีฟเนสเมตริกซ์เรขาคณิต (Geometric Stiffness Matrix) ที่ได้จากการนำ $[K_o^b]$ มาเพิ่มแถวและคอลัมน์ที่เป็น 0

$$\text{โดยที่ } [K_G^b] = \int P[N,x]^T[N,x]dx \quad (3.19)$$

ภาคผนวก ก. ให้ค่าเมตริกซ์ที่เกี่ยวข้องในการเขียน $[K_o^a]$, $[K_o^b]$ และ $[K_G^b]$

$$[K_G^{ab}] = \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ & & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 36 & -3L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

สมมาตร

P เป็น + เมื่อเป็นแรงดึง (Tensile Axial Force)

สำหรับเสาซึ่งมีเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งดังแสดงในรูป 3.4 นั้น สามารถหาสตีเฟเนสเมตริกซ์โดยการแปลง (Transformation) ด้วยวิธีมาตรฐานในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการ (3.14) ใช้ในการแก้ปัญหาไม่เชิงเส้นโดยวิธีทำซ้ำแบบแทนค่าโดยตรง ซึ่งเป็นวิธีหลักที่ใช้ในงานวิจัยนี้

สตีเฟเนสเมตริกซ์สัมผัส (Tangent Stiffness Matrix)

พิจารณาสมดุลย์แรงภายในและภายนอกขององค์อาคารทั่วไป

$$\{ \Psi \} = \int_V [\bar{B}]^T \{ \sigma \} dV - \{ f \} = 0 \quad (3.21)$$

เมื่อ $\{ \Psi \}$ คือผลรวมแรงภายในและภายนอก

[\bar{B}] นิยามจาก

$$\begin{aligned} d\{\epsilon\} &= [\bar{B}] d\{q\} \\ &= ([B_0] + [B_L]) d\{q\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

[B_0] เป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่าง $d\{c\}$ และ $d\{q\}$

[B_L] เป็นความสัมพันธ์ไม่เชิงเส้นระหว่าง $d\{c\}$ และ $d\{q\}$

{ σ } คือความเค้น (Stress) ที่เกิดขึ้นภายในองค์อาคาร

{ f } คือแรงภายนอกที่กระทำกับองค์อาคาร

{ q } คือการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งทั่วไป

สำหรับปัญหาสถิตศาสตร์ { f } มีค่าคงที่

สำหรับองค์อาคารที่ยังอยู่ในช่วงอีลาสติก

$$\{\sigma\} = E\{\epsilon\}$$

และ

$$d\{\sigma\} = E d\{\epsilon\} \quad (3.23)$$

จากสมการ (3.22)

$$d[\bar{B}] = d[B_L] \quad (3.24)$$

อนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการ (3.21) คือ

$$\begin{aligned} d\{\Psi\} &= \int_V d[\bar{B}]^T \{\sigma\} dV + \int_V [\bar{B}]^T d\{\sigma\} dV \\ &= \int_V d[\bar{B}]^T \{\sigma\} dV \\ &\quad + \int_V ([B_0] + [B_L])^T E ([B_0] + [B_L]) dV d\{q\} \\ &= [K_G] d\{q\} + [K_0] d\{q\} + [K_L] d\{q\} \\ &= [K_t] d\{q\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

เมื่อ [K_t] คือสตีฟเนสเมตริกซ์สัมผัส (Tangent Stiffness Matrix)

$$[K_G]d\{q\} = d[\bar{B}]^T\{\sigma\}dV \quad (3.26)$$

$[K_G]$ คือสตีฟเนสเมตริกซ์เรขาคณิต

$[K_0]$ คือสตีฟเนสเมตริกซ์เชิงเส้น

$$= \int_V ([B_0]^T E [B_0]) dV \quad (3.27)$$

$[K_L]$ คือสตีฟเนสเมตริกซ์พิจารณาการเปลี่ยนตำแหน่งด้านข้างที่มีค่ามาก เมื่อเทียบกับขนาดของโครงสร้าง (Large displacement Stiffness Matrix)

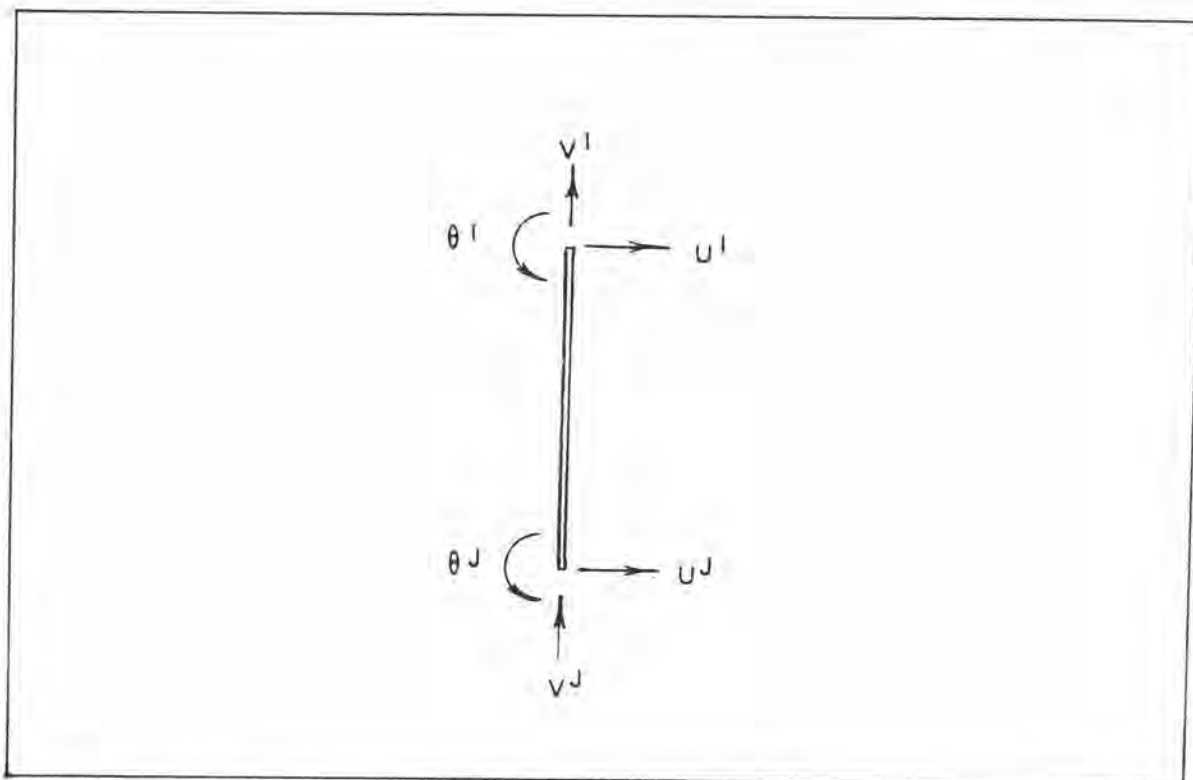
$$= \int_V ([B_0]^T E [B_L] + [B_L]^T E [B_L] + [B_L]^T E [B_0]) dV \quad (3.28)$$

สำหรับองค์อาคารรับแรงดัดและแรงตามแนวแกน $[K_G]$ ในสมการ (3.26) คือ $[K_G^{ab}]$ ในสมการ (3.20), $[K_0]$ ในสมการ (3.27) คือ $[K_0^{ab}]$ ในสมการ (3.18) และงานวิจัยนี้พิจารณาปัญหาที่มีการเปลี่ยนตำแหน่งมีค่าน้อย (Small Displacement) เมื่อเทียบกับขนาดของโครงสร้างเท่านั้น $[K_L]$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ $[K_0]$ และ $[K_G]$ สามารถละทิ้งได้

ดังนั้นเขียนสมการ (3.25) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} d\{\psi\} &= [K_t]d\{r\} \\ &= ([K_0^{ab}] + [K_G^{ab}]) d\{r\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

สมการ (3.27) ใช้ในการแก้ปัญหาไม่เชิงเส้นโดยวิธีทำซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสัน (Zienkiewicz และ Taylor 1991)

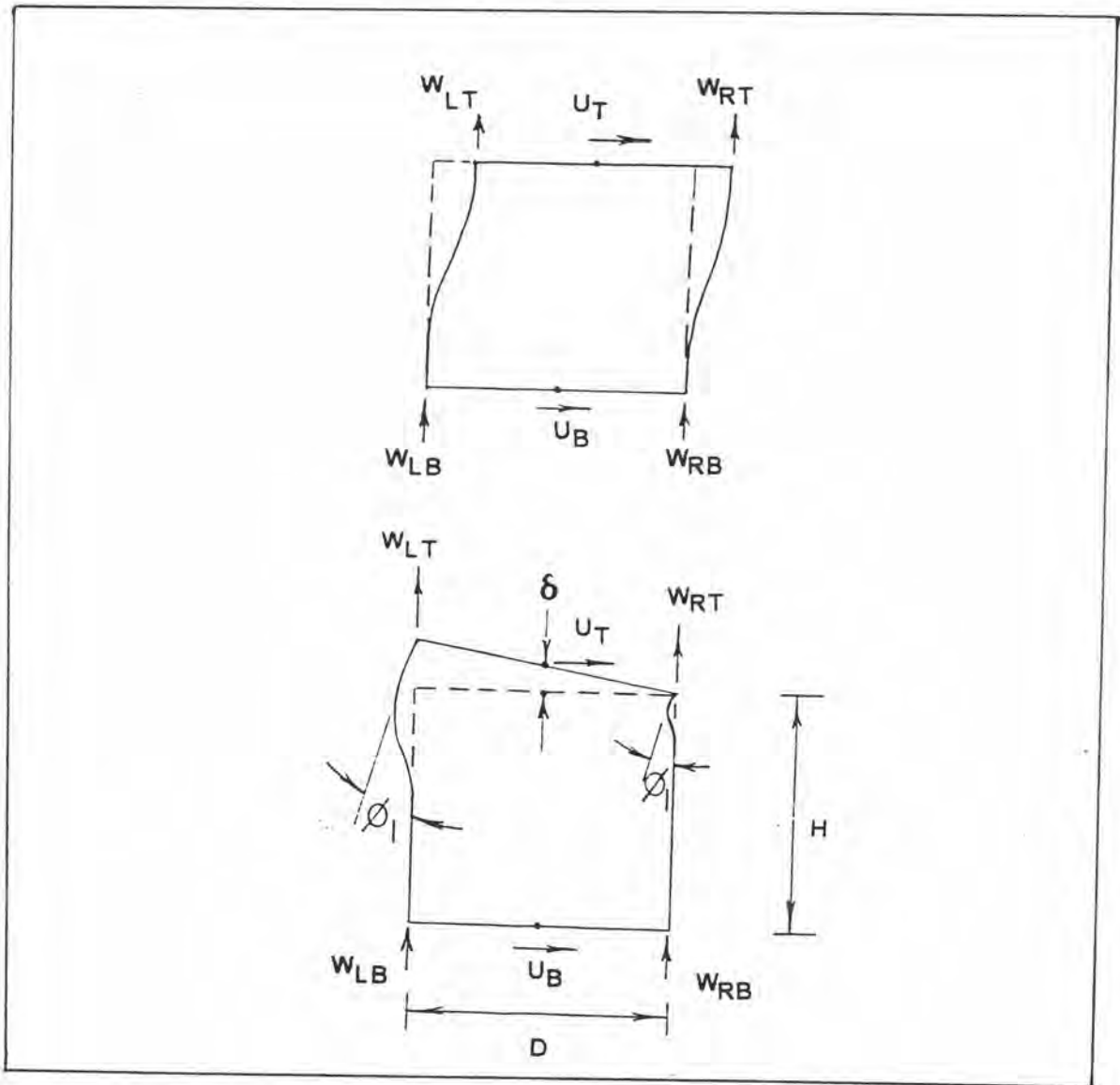


รูป 3.4 เสาและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายที่ใช้ในการวิจัยนี้

สตีเฟนเมตริกซ์ของผนังต้านแรงเฉือน

Wilson, Hollings และ Dovey (1975) ได้พัฒนาผนังต้านแรงเฉือนโดยใช้พื้นฐานของเอลิเมนต์เสา แต่มีพิกัดการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย 6 พิกัด ดังแสดงในรูปที่ 3.5 การสร้างสตีเฟนเมตริกซ์ของผนังทำได้โดยการแปลง (Transformation) สตีเฟนเมตริกซ์ของเสาที่มีพิกัดเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย $\{u \ \theta_i \ \theta_j\}^T$ ไปในพิกัดของผนัง $\{U_T \ W_{LT} \ W_{RT} \ U_B \ W_{LB} \ W_{RB}\}^T$ สตีเฟนเมตริกซ์ที่ได้ใช้นี้เป็นสตีเฟนเมตริกซ์เชิงเส้น โปรแกรม SUPER-ETABS ซึ่งพัฒนาขึ้นเพื่อวิเคราะห์ไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิตของโครงสร้างนั้น พิจารณาผล P- Δ โดยวิธีประมาณ โดยไม่ได้สร้างสตีเฟนเมตริกซ์เรขาคณิตของผนังต้านแรงเฉือน งานวิจัยนี้เสนอสตีเฟนเมตริกซ์เรขาคณิตของผนังต้านแรงเฉือน โดยการแปลงสตีเฟนเมตริกซ์เรขาคณิตของเสาในพิกัดการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย $\{U^C\} =$

$\{U^I \ \theta^I \ v^I \ u^J \ \theta^J \ v^J\}^T$ ไปยังพิกัดของผนัง $\{U^P\} =$
 $\{U_T \ W_{LT} \ W_{RT} \ U_B \ W_{LB} \ W_{RB}\}^T$



รูป 3.5 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายของผนังต้านแรงเฉือน

ในการนี้ ต้องพิจารณาความสัมพันธ์ ของดักรีความอิสระการเปลี่ยนตำแหน่งระหว่าง
เสา (รูป 3.4) และผนังต้านแรงเฉือน (รูป 3.5) ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} U_I \\ \theta_I \\ V_I \\ U_J \\ \theta_J \\ V_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/D) & (1/D) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2) & (1/2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1/D) & (1/D) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2) & (1/2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_T \\ W_{LT} \\ W_{RT} \\ U_B \\ W_{LB} \\ W_{RB} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\text{หรือ } \{ U^C \} = [a_{CP}] \{ U^P \} \quad (3.31)$$

จากหลักการแปลงสติฟเนสเมตริกซ์ (Transformation of Stiffness Matrix) สามารถเขียนสติฟเนสเมตริกซ์เชิงเส้นของผนังต้านแรงเฉือน, $[K_o^P]$, และสติฟเนสเมตริกซ์เรขาคณิตของผนังต้านแรงเฉือน, $[K_G^P]$, ได้ดังสมการ (3.32) และ (3.33) ตามลำดับ

$$[K_o^P] = [a_{CP}]^T [K_o^C] [a_{CP}]$$

$$[K_o^P] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 & k_2 & -k_1 & -k_2 & k_2 \\ & k_3+k_4 & -k_3+k_4 & k_2 & k_5-k_4 & -k_5-k_4 \\ & & k_3+k_4 & -k_2 & -k_5-k_4 & k_5-k_4 \\ & & & k_1 & k_2 & -k_2 \\ & & & & k_3+k_4 & -k_3+k_4 \\ \text{สมมาตร} & & & & & k_3+k_4 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$k_1 = (12EI)/H^3$$

$$k_4 = (EA)/(4H)$$

$$k_2 = (6EI)/(H^2D)$$

$$k_5 = (k_3)/2$$

$$k_3 = (4EI)/(HD^2)$$

$$\text{และ } [K_G^P] = [a_{CP}]^T [K_G^C] [a_{CP}]$$

$$[K_G^P] = \begin{bmatrix} k_6 & -k_7 & k_7 & -k_6 & -k_7 & k_7 \\ & k_8 & -k_8 & k_7 & -k_9 & k_9 \\ & & k_8 & -k_7 & k_9 & -k_9 \\ & & & k_6 & k_7 & -k_7 \\ \text{สมมาตร} & & & & k_8 & -k_8 \\ & & & & & k_8 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$k_6 = (36P)/(30H)$$

$$k_8 = (4PH)/(30D^2)$$

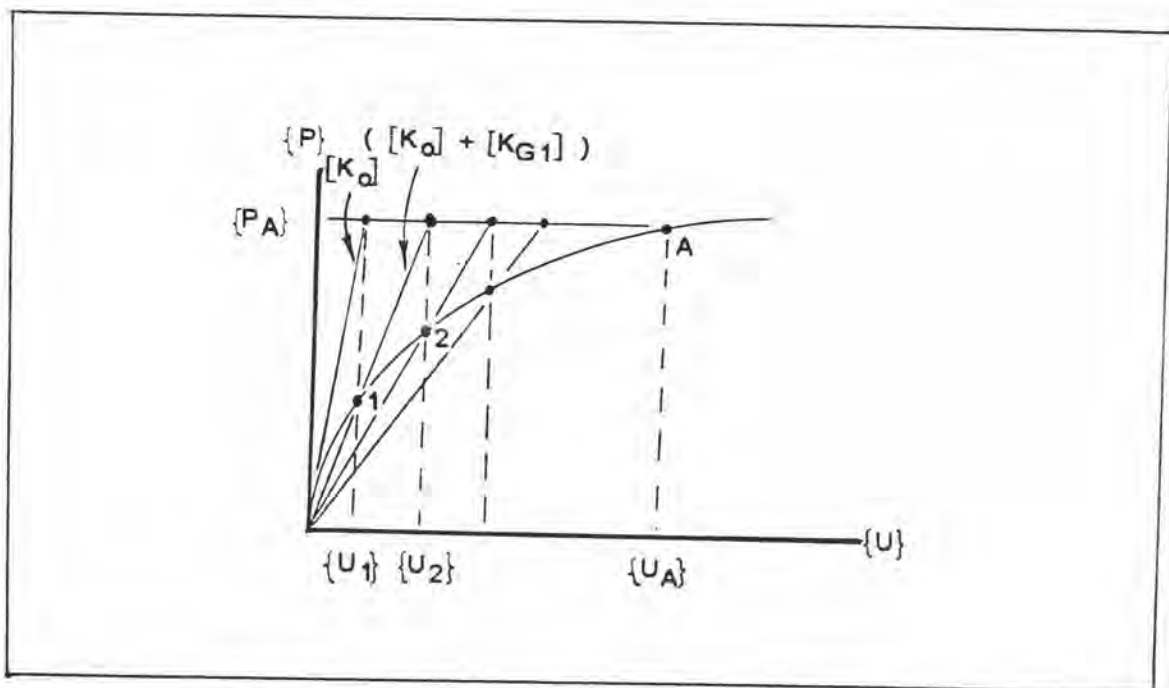
$$k_7 = (3P)/(30D)$$

$$k_9 = (k_8)/4$$

โดยที่ $[K_0^C]$ และ $[K_G^C]$ คือเมตริกซ์ในสมการ (3.18) และ (3.20) ที่แปลงการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลายให้เป็นดังรูป 3.4

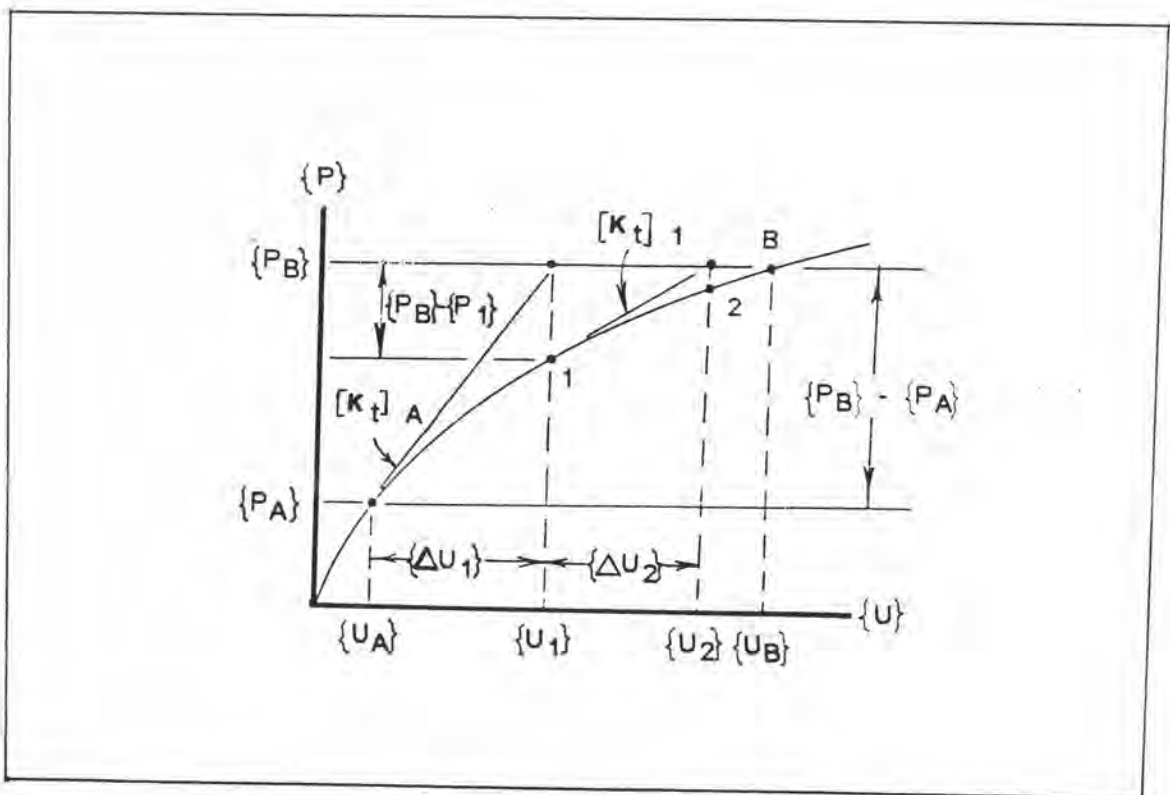
วิธีการทำซ้ำ และความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับ

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ปรับปรุง โปรแกรม SUPER-ETABS ให้วิเคราะห์ปัญหาไม่เชิงเส้น ด้วยวิธีทำซ้ำแบบแทนค่าโดยตรง (Iteration by Direct Substitution) กล่าวคือ สำหรับแรงกระทำ $\{P_A\}$ (รูป 3.6) จะเริ่มการทำซ้ำในรอบแรกโดยใช้ค่า $[K_G] = 0$ เพื่อหาการเปลี่ยนตำแหน่งโดยประมาณ $\{U_1\}$ จากสมการ (3.14) จากนั้นใช้ค่า $\{U_1\}$ คำนวณหา $[K_{G1}]$ ใหม่ เพื่อหา $\{U_2\}$ ในรอบการทำซ้ำที่สอง กระทำซ้ำเช่นนี้จนกระทั่ง $\{U_i\}$ ใกล้เคียงกับ $\{U_{i-1}\}$ ในรอบที่ i



รูป 3.6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของแรงกระทำและการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างวิธีวิเคราะห์แบบแทนค่าโดยตรง

เพื่อเป็นการเปรียบเทียบความละเอียดถูกต้อง ผู้วิจัยได้พัฒนาโปรแกรมย่อยเพื่อแก้ปัญหาไม่เชิงเส้นด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน ในวิธีการนี้ (รูปที่ 3.7) เราจะคำนวณ $\{U_1\} - \{U_A\}$ จากจุดสมดุล $(\{P_A\}, \{U_A\})$ ไปยัง $(\{P_B\}, \{U_1\})$ โดยใช้สติเฟเนสสัมพันธ์ $[K_t]_A$ ที่จุด A แทนในสมการ (3.29) จากนั้นจะหาแรงต้านทานภายใน $\{P_1\}$ ที่ตำแหน่ง $\{U_1\}$ แล้วคำนวณ $\{U_2\}$ จากแรงเสียดสมดุลย์ (Unbalanced Force) $\{P_B\} - \{P_1\}$ โดยใช้สติเฟเนสสัมพันธ์ $[K_t]_1$ กระทำซ้ำเช่นนี้จนกระทั่งคำตอบ เข้าใกล้คำตอบที่ถูกต้อง



รูป 3.7 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของแรงกระทำและการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างวิธีวิเคราะห์แรงนิวตัน-ราฟสัน

ในงานวิจัยนี้ใช้ค่ายูนิฟอร์มเวกเตอร์นอร์ม (Uniform Vector Norm) สำหรับตรวจสอบ ค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง ในแต่ละรอบการทำซ้ำ ว่าเข้าใกล้สู่ (Convergence) ค่าตอบถูกต้องหรือยัง ดังนี้

$$\frac{\|\Delta U_i\|}{\|U_i\|} = \frac{\max\{\Delta U_i\}}{\max\{U_i\}} \leq a \quad (3.34)$$

เมื่อ $\{\Delta U_i\} = \{U_i\} - \{U_{i-1}\}$ หากใช้วิธีทำซ้ำแบบแทนค่าโดยตรง
 หรือ $\{\Delta U_i\} = [K_{t,i-1}]^{-1}\{\Delta P\}$ หากใช้วิธีทำซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสัน
 i แสดงรอบที่การทำซ้ำ

a คือค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ มีค่าระหว่าง 10^{-2} ถึง 10^{-6} ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความต้องการ ถ้ากำหนดให้ต่ำมากก็จะได้คำตอบที่ถูกต้องมากยิ่งขึ้น