บทที่ 2

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในการศึกษาเพื่อหาวิธีการปรับค่าประมาณความน่าจะเป็นที่จะเสียชีวิต ซึ่งมีด้วยกัน 3 วิธี คือ วิธีการปรับแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก วิธีการปรับแบบวิทแทคเกอร์ วิธีการปรับแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักด้วยความแปรปรวนต่ำสุด ซึ่งทั้ง 3 วิธีดังกล่าวจะศึกษาเพื่อการปรับค่าประมาณความน่าจะเป็นที่ประมาณด้วย วิธีคณิตศาสตร์ประกันภัย โดยจะศึกษาภายใต้การแจกแจงของระยะเวลาที่จะมีชีวิตอยู่ต่อไปในอนาคต (Future Lifetime) T สองรูปแบบ คือ การแจกแจงแบบไวบูลล์ และการแจกแจงแบบกอมเพิรตซ์ และระยะเวลาการถอนตัว (Withdrawal Time) W อีกสองรูปแบบคือ การแจกแจงแบบสม่ำเสมอ และการแจกแจงแบบเบต้า ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการประมาณและวิธีการปรับต่าง ๆ เป็นลำดับ ดังต่อไปนี้

1. <u>วิธีการประมาณซ q_x แบบคณิตศาสตร์ประกันภัย</u>

วิธีการประมาณค่าแบบนี้เป็นวิธีการขั้นพื้นฐานที่เป็นที่นิยมแบบหนึ่ง เพราะขั้นตอนการคำนวณไม่ยุ่งยากซับซ้อน เพียงแต่อาศัยหลักการทางสถิติในการคำนวณค่าความน่าจะเป็น คือจำนวนคนที่เสียชีวิตหารด้วยจำนวนผู้เสี่ยงภัยทั้งหมด โดยมีสมมติฐานและรายละเอียดในการคำนวน ดังต่อไปนี้

กำหนดให้

m เป็น จำนวนคน (ขนาดตัวอย่าง) ที่เริ่มต้นอายุ x ปี

w เป็น จำนวนคนที่ออกจากกลุ่มโดยมิใช่เนื่องจากการตาย

k เป็น ดัชนีของคนที่ออกจากกลุ่มโดยมิใช่เนื่องจากการตาย

t_k เป็น ระยะเวลาที่จะอยู่จนกระทั่งออกจากกลุ่มของคนที่ k

d เป็น จำนวนคนที่เสียชีวิต ในระหว่างเวลาดังกล่าว

D เป็น ตัวแปรสุ่มของจำนวนคนที่เสียชีวิตในระหว่างเวลาดังกล่าว

จากการศึกษาความน่าจะเป็นที่จะเสียชีวิตภายใน 1 ปี ข้างหน้านั่นคือในช่วง $(x , x+1]$ ภายใต้วิธีการประมาณแบบคณิตศาสตร์ประกันภัย

กำหนดให้

คนที่ i เสียชีวิตที่อายุ $x+t_i$ ด้วยความน่าจะเป็นที่จะเสียชีวิต คือ ${}_t q_x = q_x$
คนที่ k ออกจากกลุ่มที่อายุ $x+t_k$ ด้วยความน่าจะเป็น คือ ${}_{1-t}q_{x+t} = (1-t_k)\,q_x$
จากสมการ ค่าคาดหวังของจำนวนคนที่จะเสียชีวิตในช่วง $(x, x+1]$ คือ

$$\mathrm{E}[D] = \sum_{i=1}^{m} q_x - \sum_{k=1}^{w} {}_{1-t}\,q_{x+t} = d \tag{2.1}$$

$$= m\,q_x - q_x \sum_{k=1}^{w} (1-t_k) = d$$

เราสามารถหาค่าประมาณ q_x ได้ดังนี้

$$q_x' = \frac{d}{m - \sum_{k=1}^{w} (1-t_k)} \tag{2.2}$$

จากนั้นคำนวณค่า q_x' ซ้ำจำนวน 2,000 รอบ แล้วคำนวณหาค่าเฉลี่ย และค่าที่ได้คือค่า q_x' ของแต่ละอายุตามต้องการ

2. <u>วิธีการปรับแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก (Moving - Weighted - Average Graduation)</u> [3]

วิธีการปรับแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก เป็นวิธีการปรับค่าประมาณ q_x' อย่างง่ายที่นิยมใช้กันมานาน เดิมมีชื่อเรียกว่ารูปแบบเส้นตรงเชิงประกอบ (linear compound formulars) ต่อมาได้รับการพัฒนาโดย อี แอล ดีฟอเรสท์ (E. L. DeForest) ซึ่งมีค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักเป็นค่าเฉลี่ยในการปรับค่าประมาณ และมีสมการพื้นฐานในการคำนวณดังนี้

$$q''_x = \sum_{r=-n}^{n} a_r\, q'_{x+r}$$

กำหนดให้ 1. a_r เป็นสัมประสิทธิ์แสดงขนาดและทิศทางจาก x ที่เป็นดัชนีของค่าประมาณ q'_x ที่สัมประสิทธิ์นี้คูณอยู่ และ

[3] Dick London " Gradution : The Revision of Estimates " Winsted, Connecticut : ACTEX Publications, 1985, p 33

$$a_r = a_{-r} \qquad , r = 1, 2, \ldots, n$$

2. ค่า n ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยจะทำการศึกษาที่ค่า n เริ่มต้นเป็น 3 และให้ n มีค่าเพิ่มขึ้นทีละ 1 ค่า n ใดที่ทำให้ค่าเฉลี่ยเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์น้อยกว่าจะเลือกค่าปรับที่ระดับค่า n นั้น

3. a_r ทั้งหมดได้มาจากสมการโพลิโนเมียลกำลังสอง (quadratic polynomial)

$$a_r = a + b\, r^2 \tag{2.3}$$

และ

$$a_0 + 2\sum_{1}^{n} a_r = 1 \quad \text{และ} \quad \sum_{1}^{n} r^2 a_r = 0 \tag{2.4}$$

$$a_r = (n^2 - r^2)\,[\,h + k\,(n^2 - r^2)] \tag{2.5}$$

ที่ h และ k หาได้จากสมการ (2.4) และ (2.5) สามารถเขียนสมการ (2.3) ในรูปใหม่ได้ดังนี้

$$a_0 + 2\sum_{1}^{n} a_r = a\,(2n + 1) + 2\,b\sum_{1}^{n} r^2 = 1 \tag{2.6}$$

และ

$$\sum_{1}^{n} r^2 a_r = a\sum_{1}^{n} r^2 + b\sum_{1}^{n} r^4 = 0 \tag{2.7}$$

แก้สมการทั้งสองข้างต้นเพื่อหาค่า a และ b ซึ่งจะได้สมการในการคำนวณค่า a_r เป็น

$$a_r = \frac{3(\,3n^2 + 3n - 1\,) - 15r^2}{(2n - 1)(2n + 1)(2n + 3)} \tag{2.8}$$

เราสามารถ คำนวนหาค่า q''_x ได้ดังต่อไปนี้

$$q''_x = \sum_{r=-n}^{n} a_r q'_{x+r} \tag{2.9}$$

3. <u>วิธีการปรับแบบวิทแทคเกอร์ (Whittaker Graduation)</u> [4]

การปรับโดยวิธีนี้ เป็นอีกวิธีหนึ่งที่เป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป โดยอาศัยหลักการของการถ่วงน้ำหนักและการหาผลต่างของค่าปรับที่ระดับต่างๆจากนั้นแก้สมการหาค่าต่ำสุดโดยการหาอนุพันธ์บางส่วน (Partial Derivatives) ของผลบวกของค่าทั้ง 2 ได้ทั้งหมด n สมการ ซึ่งวิธีการนี้คิดค้นโดย อี ที วิทแทคเกอร์ (E T Whittaker) โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

กำหนดให้

1. ค่าอายุ ในช่วงที่ศึกษานั้น เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวน ให้ $x = 1, \ldots, n$
2. ค่า z เป็นค่าแสดงดีกรีของ โพลิโนเมียล ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ จะศึกษาที่ $z = 1, 2, 3$ และ 4

$$M = F + hS = \sum_{x=1}^{n-z} w_x (q''_x - q'_x) + h \sum_{x=1}^{n-z} (\Delta^z q''_x)^2 \qquad (2.10)$$

โดยที่ $$w_x = \frac{n_x}{q'_x (1 - q'_x)} \qquad (2.11)$$

h เป็นค่าเฉลี่ยของค่า w_x

$$h = \frac{\sum_{x=1}^{n} w_x}{n}$$

กำหนดให้

$$w = \begin{bmatrix} w_1 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & w_x \end{bmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์ทะแยงมุม ขนาด $n \times n$

จากสมการ (2.10) หาค่า

$$\frac{\partial M}{\partial q''_x} = 0 \quad , x = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.12)$$

กำหนด

[4] Dick London " Gradution : The Revision of Estimates " Winsted, Connecticut : ACTEX Publications, 1985, p 53

$$q'' = [\, q_1''\ q_2'' \ldots\ q_n''\,]'$$
$$q' = [\, q_1'\ q_2' \ldots\ q_n'\,]'$$

K_z เป็น เมตริกซ์ที่ประกอบด้วย สัมประสิทธิ์ทวินามของอันดับ z

จากสมการ (2.10) เขียนในรูปเมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$(q''- q')'w\,(q''- q') \quad h\,(K_z\, q'')'\, K_z\, q'' = (q''- q')'w\,(q''- q') + h\, K_z'(q'')'\, K_z q''$$

จากคุณสมบัติของเมตริกซ์ที่ว่า $y'y$ จะได้ผลลัพธ์เป็น ผลรวมกำลังสองของค่าในแต่ละหน่วยของเวคเตอร์ y ดังนั้นสมการข้างต้นเขียนได้เป็น

$$(\, w + h\, K_z{}'K_z\,)q'' = w\, q' \qquad (2.13)$$

โดยการแก้สมการเมตริกซ์ ด้วยวิธีแฟคเตอร์ไรเซชัน (Factorization Method) เราสามารถหาค่า q_x'' ได้

4. <u>วิธีการปรับแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักด้วยความแปรปรวนต่ำสุด (Minimum Variance Moving - Weighted - Average Graduation)</u> [5]

โดยวิธีนี้ โคลิน เอ็ม แรมเซย์ (Colin M.Ramsay) เป็นผู้พัฒนาจากวิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก (Classical Moving - Weighted - Average) ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ a_r เป็นอิสระจากความแปรปรวน และ ความแปรปรวนร่วมของ ค่าประมาณ q_x แต่โดยวิธีของ แรมเซย์ ค่าสัมประสิทธิ์ a_r จะขึ้นอยู่กับความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมดังกล่าวซึ่งมีสมการพื้นฐานดังนี้

$$q_x'' = \sum_{r=-n}^{n} \hat{a}_r\, q'_{x+r}$$

จากวิธีการปรับแบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักซึ่ง

กำหนด

---

[5] Colin M. Ramsay " Minimum Variance Moving - Weighted - Average Graduation ", TSA , XLIII (1991), p323

1. a_r เป็นสัมประสิทธิ์แสดงขนาดและทิศทางจาก x ที่เป็นดัชนีของค่าประมาณ q_x' ที่สัมประสิทธิ์นี้คูณอยู่ ซึ่ง

$$a_r = a_{-r} \quad , r = 1, 2, \ldots, n$$

2. a_r ทั้งหมดได้มาจากสมการโพลิโนเมียลกำลังคู่ (even polynomial) และ

$$\sum_{r=-n}^{n} a_r = 1 \quad \text{และ} \quad \sum_{r=-n}^{n} r^2 a_r = 0 \tag{2.14}$$

และโดยวิธีค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักด้วยความแปรปรวนต่ำสุดมีข้อกำหนดเพิ่มเติมดังนี้

3. $a_r = 0$ สำหรับ $r = \pm(n+1), \pm(n+2), \ldots, \pm(n+z)$

4. $$R^2 = \frac{\sum_{r=-n}^{n} (\Delta^z a_r)^2}{\binom{2z}{2}} \tag{2.15}$$

มีค่าต่ำสุด

5. ค่า n และ z ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยจะทำการศึกษาที่ค่า n เริ่มต้นเป็น 3 และ ให้ n มีค่าเพิ่มขึ้นทีละ 1 ค่า n ใดที่ทำให้ค่าเฉลี่ยเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์น้อยกว่าจะเลือกการปรับที่ระดับค่า n นั้น และ z = 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับกำหนด

$A_z = \{$ โพลิโนเมียล a_r ตามข้อกำหนด 1, 2 และ 3 $\}$

$a_r^{\bullet} \in A_z$ ที่ทำให้ R_z^2 มีค่าต่ำสุด และ a_r' เป็น โพลิโนเมียลกำลังคู่ (even polynomial) ดีกรี 2z + 2

$$a_r^{\bullet} = [\, h_1 + k_1 (n^2 - r^2) \,] \prod_{j=1}^{z} [\, (n+j)^2 - r^2 \,] \tag{2.16}$$

ที่ h_1 และ k_1 เป็นค่าคงที่

$$R_z^2 = \frac{Var[\,\Delta^z Q_x''\,]}{Var[\,\Delta^z Q_x'\,]} = \frac{\sum_{r=-n}^{n} (\Delta^z a_r)^2}{\binom{2z}{2}} = R^2 \tag{2.17}$$

โดยที่

$$\Delta^z Q_x'' = \sum_{r=-n-z}^{n} (-1)^z (\Delta^z a_r)\, Q'_{x+z+r} \tag{2.18}$$

$\hat{a}_r \in A_z$ ที่ทำให้ R_z^2 มีค่าต่ำสุด โดย

$$\hat{a}_r = a_r^{\bullet} + h_x b_r^{\bullet} \tag{2.19}$$

โดยที่ h_x ขึ้นอยู่กับค่าของอายุ x ที่กำลังคำนวณและความแปรปรวนร่วมของ Q'_x

$b_r^{\bullet}$ เป็นโพลิโนเมียลกำลังคู่ ดีกรี 2z + 4

ในรูปขยาย

$$\hat{a}_r = \left\{ h_2 + k_2 (n^2 + r^2) + h [(n+1)^2 - r^2] (n^2 - r^2) \right\} \prod_{j=1}^{z} [(n+j)^2 - r^2] \tag{2.20}$$

โดยที่ h_2, k_2 และ h เป็นพารามิเตอร์อิสระ จากสมการ (2.14) จะได้ว่า

$$h_2 S_{n,z} + k_2 S_{n-1,z+1} + h S_{n-2,z+2} = 1 \tag{2.21}$$

$$h_2 S_{n,z+1} + k_2 S_{n-1,z+2} + h S_{n-2,z+3} = (n+z+1)^2 \tag{2.22}$$

โดยที่

$${}^{6}S_{n,m} = \sum_{r=-n}^{n} \prod_{j=1}^{m} [(n+j)^2 - r^2]$$

$$= (m!)^2 \begin{bmatrix} 2n+2m+1 \\ 2m+1 \end{bmatrix}$$

จากสมการ (2.21) และ (2.22) จะได้

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{n,z} & S_{n-1,z+1} \\ S_{n,z+1} & S_{n-1,z+2} \end{bmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ (n+z+1)^2 \end{pmatrix} - h \begin{pmatrix} S_{n-2,z+2} \\ S_{n-2,z+3} \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} h_1 \\ k_1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

---

[6] Colin M. Ramsay " Minimum Variance Moving - Weighted - Average Graduation " , TSA , XLIII (1991) , p 323 - 325

โดยที่ h_1 , k_1 , b_0 และ b_1 เป็นค่าคงที่ ซึ่ง h_1 และ k_1 ในที่นี้มีค่าเท่ากันกับค่าใน a_r^{*} และจะได้สมการ (2.20) ดังนี้

$$\hat{a}_r = a_r^{*} + h_x b_r^{*} \qquad (2.23)$$

โดยที่

$$b_r^{*} = \left\{ b_0 + [\, b_1 + (n-1)^2 - r^2 \,]\, (n^2 - r^2) \right\} \prod_{j=1}^{z} [\, (n+j)^2 - r^2 \,]$$

หลังจากนี้จะหาค่า h ที่ทำให้ Var $(\Delta^z Q_x'')$ มีค่าต่ำสุด

กำหนด

Σ_x เป็นเมตริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมขนาด (2n+1+z) × (2n+1+z) ของ $Q'_{x,z}$ ซึ่ง

$$Q'_{x,z} = [\, Q'_{x-n} \,,\, Q'_{x-n+1} \,,\, \ldots \,,\, Q'_{x+n+z} \,]$$

แต่ในที่นี้อายุ x และ z เป็นการศึกษากรณีที่ไม่มีความสัมพันธ์กัน เพราะฉะนั้น Σ_x จึงเป็นเมตริกซ์ทแยงมุมของความแปรปรวนของ Q'_x

$$K_z = (-1)^{z+j-i} \binom{z}{j-i}$$

เป็นเมตริกซ์ขนาด (2n+1+z) × (2n+1+z) ของผลต่างอันดับที่ z ที่ i และ j คือ ลำดับของ แถว และ สดมภ์ ตามลำดับซึ่ง

$$\binom{z}{k} = 0 \text{ สำหรับ } k < 0 \text{ และ } k > z$$

จากสมการ (2.23) สามารถเขียนในรูป เวคเตอร์ ได้ดังนี้

$$\hat{a} = a^{*} + h\, b^{*}$$

โดยที่

$$\hat{a} = [\, \hat{a}_{-n-z} \;\; \hat{a}_{-n-z+1} \;\; \ldots \;\; \hat{a}_{-n-z-1} \;\; \hat{a}_{-n+z} \,]'$$

$$a^{*} = [\, a^{*}_{-n-z} \;\; a^{*}_{-n-z+1} \;\; \ldots \;\; a^{*}_{-n-z-1} \;\; a^{*}_{-n+z} \,]'$$

$$b^{*} = [\, b^{*}_{-n-z} \;\; b^{*}_{-n-z+1} \;\; \ldots \;\; b^{*}_{-n-z-1} \;\; b^{*}_{-n+z} \,]' \qquad (2.24)$$

จากสมการ (2.18) จะได้

$$\Delta^z Q_x'' = (K\hat{a})' Q'_{x,z} \qquad \text{และ}$$

$$Var[\Delta^z Q_x''] = \hat{a}'K'\Sigma_x K\hat{a}$$

$$= (a^{*} + h\, b_r^{*})' K'\Sigma_x K (a^{*} + h\, b_r^{*})$$

จากข้อกำหนดของ Σ_x จะได้ว่า h ขึ้นอยู่กับความแปรปรวนของ Q'_x เท่านั้นจะได้

$$h = \frac{\sum_{r=-n-z}^{n} \sigma^2_{x+r+z} (\Delta^z a_r^{*})(\Delta^z b_r^{*})}{\sum_{r=-n-z}^{n} \sigma^2_{x+r+z} (\Delta^z b_r^{*})^2} \qquad (2.25)$$

โดยที่

$$\sigma^2_u = \mathrm{Var}(Q'_u)$$

$$= q'_u (1 - q'_u) / m \qquad (2.26)$$

เมื่อได้ h ตามที่ต้องการแล้วเราสามารถคำนวณหาค่า q_x'' ได้ดังนี้

$$q_x'' = \sum_{r=-n}^{n} \hat{a}_r q'_{x+r} \qquad (2.27)$$