บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีทางสถิติ

ตัวแปรสุ่มและการกระจายของความน่าจะเป็น

ถ้าให้ X เป็นตัวแปรซึ่งแทนผลที่เกิดขึ้นจากการทดลอง ซึ่งค่าของ X อาจเป็นค่าจริงหรือเป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าจริง เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าเป็นเลขจำนวนจริงใดๆ ที่เป็นค่าของเหตุการณ์ในมิติของตัวแทน เนื่องจากค่าของ X ที่เกิดขึ้นเป็นค่าแบบสุ่มจะได้ว่า X เป็นตัวแปรสุ่ม (Random Variable) ตัวแปรสุ่มนี้แบ่งได้เป็น 2 ชนิดคือ

1. ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง หรือตัวแปรสุ่มแบบเป็นช่วง (Discrete Random Variables) ค่าของตัวแปรสุ่มมีได้บางค่า และช่วงของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มเป็นเซตของจำนวนนับ

2. ตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง (Continueous Variables) เป็นตัวแปรสุ่มที่ค่าของตัวแปรสุ่มเป็นเซตของจำนวนจริงใด ๆ

ฟังก์ชันซึ่งแสดงว่าตัวแปรสุ่มค่าหนึ่ง ๆ จะมีค่าเท่ากับค่าใดด้วยความน่าจะเป็นเท่าใดนั้น เรียกว่าฟังก์ชันของความน่าจะเป็น (Probability Density Function) ซึ่งใช้สัญลักษณ์ $P(X=x)$, $p(x)$ หรือ $f(x)$ โดยที่ x คือสมาชิกของเซตของตัวแปรสุ่ม X และการกระจายของค่าของตัวแปรสุ่มเหล่านี้ เรียกว่าเป็นการกระจายของความน่าจะเป็น (Probability Distribution function) ของตัวแปรสุ่มนั้น ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งอยู่ในแซมเปิลสเปซ $S = R$ จะได้ว่า สำหรับตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง หรือตัวแปรสุ่มชนิดเป็นช่วง จะมีคุณสมบัติดังนี้คือ

1. $P(X=x) \geq 0 \qquad , x \in S$

2. $\sum_{x \in S} P(X=x) = 1$

3. $P(A) = \sum_{x \in A} P(X=x) \quad , A \subseteq S$

สำหรับตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง จะมีคุณสมบัติดังนี้คือ

1. $f(x) \geq 0 \qquad , x \in S$

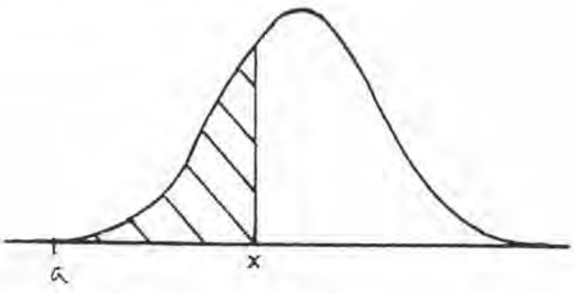
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3. $P(a < X < b) = \int_{b}^{a} f(x)dx$

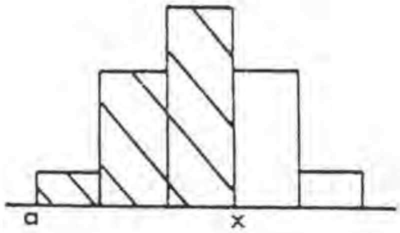
ความน่าจะเป็นสะสม (Cummulative Probability) หรือผลบวกของความน่าจะเป็นภายในช่วงของค่า X ในช่วงใดๆ หรือ ความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับค่านั้น ใช้สัญลักษณ์ว่า F(x) และเรียกฟังก์ชันของความน่าจะเป็นสะสมว่า การกระจายของความน่าจะเป็นสะสม (Cumulative Probability Distribution)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t<x} f(t)$$

ในกรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง F(x) คือพื้นที่ของ f(x) จากค่า-∞ ถึง x แสดงดังรูปที่ 2.1 และในกรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง F(x) คือพื้นที่จาก a ถึง x แสดงดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.1
แสดงการการกระจายแบบต่อเนื่อง



รูปที่ 2.2
แสดงการการกระจายแบบไม่ต่อเนื่อง

การกระจายของความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่อง

ในเรื่องของการกระจายความน่าจะเป็นทางสถิตินี้จะมีทั้ง การกระจายความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่อง และการกระจายความน่าจะเป็นแบบช่วงหรือแบบไม่ต่อเนื่องซึ่งในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงเฉพาะลักษณะของการกระจายที่เกี่ยวข้องในการหาระดับความเชื่อมั่นของทดสอบการเติบโตของความยาวรอยร้าวเนื่องจากความล้า โดยมีรูปแบบของการกระจายแบบต่อเนื่องแบบต่างๆ ดังนี้คือ

1. การกระจายแบบนอร์มอล (Normal Distribution)

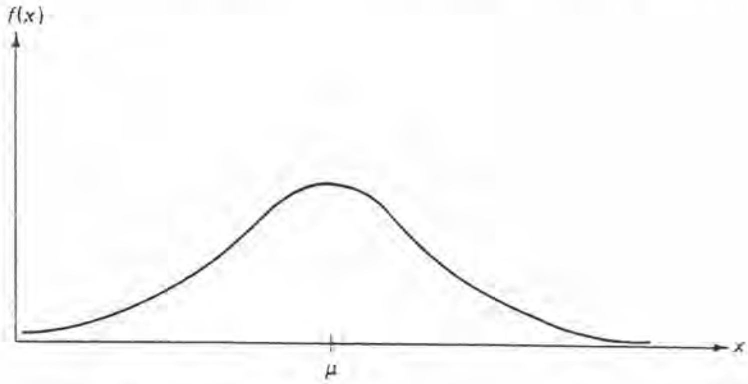
เป็นลักษณะของการกระจายแบบต่อเนื่องที่สำคัญ และเป็นที่นิยมที่สุด ซึ่งในบางงานเขียนก็อาจเรียกว่าเป็นการกระจายในลักษณะนี้ว่าเป็นการกระจายแบบเกาส์เสียน (Gaussian Distribution) รูปร่างการกระจายเป็นลักษณะทรงระฆังคว่ำ (Bell Shape) แสดงดังรูปที่ 2.3 โดยการกระจายแบบนอร์มอลนี้มีฟังก์ชันการกระจายกำหนดโดย

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-(1/2)(x-\mu)^2/\sigma^2} \qquad ; \ -\infty < x < \infty$$

โดยที่ x เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องที่มีการกระจายแบบนอร์มอล

μ คือค่าเฉลี่ยของประชากร

σ คือความแปรปรวน (Varience) ของประชากร



รูปที่ 2.3 แสดงเส้นของการกระจายแบบนอร์มอล

ลักษณะที่สำคัญของเส้นโค้งการกระจายแบบนอร์มอล

1. เส้นโค้งจะมีความถี่สูงรวมอยู่ที่ค่าเฉลี่ย (μ) และจะกระจายลดน้อยลงไปทางค่าสูง และค่าต่ำอย่างสม่ำเสมอ

2. เส้นโค้งจะมีลักษณะสมมาตรที่ μ ค่าออร์ดิเนตที่จุด $x = \mu \pm k$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่จะเท่ากัน เช่นความสูงของโค้ง $x = \mu + \sigma$ จะเท่ากับความสูงของเส้นโค้งที่จุด $x = \mu - \sigma$

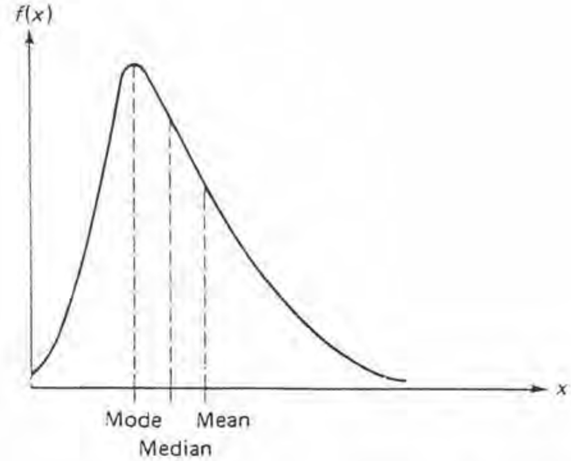
3. พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งที่อยู่เหนือแกน x จะมีค่าเท่ากับ 1

ในกรณีที่การกระจายแบบนอร์มอลมีค่า $\mu = 1$ และ $\sigma = 0$ จะได้การลักษณะการกระจายแบบนอร์มอลมาตรฐาน (Standard Normal หรือ Unit Normal Distribution) คือ

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-z^2/2}$$

2. การกระจายแบบล็อกนอร์มอล (Lognormal Distribution)

การกระจายแบบล็อกนอร์มอลนี้เป็นการกระจายที่เมื่อนำของค่าตัวแปรสุ่มมาแปลงให้เป็นค่าแบบล็อกแล้วทำให้ตัวแปรสุ่มเหล่านั้นมีการกระจายแบบนอร์มอล ซึ่งโดยทั่วไปแล้วการกระจายนี้จะมีคุณสมบัติพื้นฐานเหมือนการกระจายนอร์มอล และมักพบว่าการกระจายแบบล็อกนอร์มอลนี้มักพบในการกระจายของความล้มเหลวที่มีความไม่แน่นอน (Uncertainty) สูง เช่นความแปรปรวนของการกระจายของเวลาเฉลี่ยก่อนการล้มเหลว โดยมีรูปแบบการกระจายแสดงดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 แสดงเส้นโค้งของการกระจายแบบล็อกนอร์มอล

เมื่อ x เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าระหว่าง $0 < x < \infty$ เมื่อ $Y = \ln x$ มีการกระจายแบบนอร์มอลด้วยค่าเฉลี่ย μ_Y และความแปรปรวน σ_Y^2 จะได้ลักษณะของฟังก์ชันการกระจายแบบล็อกนอร์มอลเป็นดังนี้คือ

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_Y\sqrt{2\Pi}} e^{-(1/2)[(\ln x-\mu_Y)/\sigma_Y]^2} \quad ; \; x > 0$$

$$= 0 \quad ; \; \text{อื่นๆ}$$

จะได้ว่าค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเป็นดังนี้

$$E(x) = \mu x = e^{\mu_Y+(1/2)\sigma_Y^2}$$

$$V(x) = \sigma x = e^{2\mu_Y+\sigma_Y^2}(e^{\sigma_y^2} - 1)$$

การทดสอบการกระจายของความน่าจะเป็นของประชากร

โดยทั่วไปแล้วในการคำนวณต่างๆ มักพบว่ามักนิยมสมมติให้ประชากรมีการกระจายแบบนอร์มอล แต่ในความเป็นจริงแล้วข้อมูลบางอย่างก็อาจมีการกระจายในแบบอื่น ๆ ที่เหมาะสมกว่าการกระจายแบบนอร์มอล เช่นลักษณะการกระจายแบบล็อกนอร์มอล การกระจายแบบไวบูล การกระจายแบบเอกโปเนนเชียล ฯลฯ ดังนั้นเมื่อมีประชากรที่เราสนใจ จึงต้องมีการทดสอบเพื่อหาว่าประชากรที่ศึกษามีการกระจายทางสถิติเป็นแบบใด โดยวิธีที่ใช้ในการทดสอบนี้มีอยู่หลายวิธี แต่จะขอยกตัวอย่างเพียง 2 วิธีเท่านั้นคือ การทดสอบแบบไคร์สแควร์ (Chi-Squre Test, χ^2 Test) และการทดสอบโดยใช้กราฟ (Probability Plotting)

1. การทดสอบแบบไคร์สแควร์ (Chi-Squre Test, χ^2 Test)

สมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบคือ

H_0 : ตัวอย่างมาจากประชากรที่มีการกระจายของความน่าจะเป็นแบบ......

H_1 : ตัวอย่างไม่ได้มาจากประชากรที่มีการกระจายของความน่าจะเป็นแบบ.....

สถิติที่ใช้การทดสอบคือ

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}(O_i - E_i)^2 / E_i$$

เมื่อ k เป็นจำนวนข้อมูลที่มีค่าต่างกัน

O_i เป็นค่าความถี่ของข้อมูล (Observed Frequency)

E_i เป็นค่าความถี่ที่คาดหมายจากการกระจายของความน่าจะเป็นตามแบบที่ระบุ (Expected Frequency)

โดย χ^2 มีการกระจายแบบไคร์สแควร์ด้วยดีกรีความเป็นอิสระ v หรือ k-p-1 เมื่อ p คือจำนวนพารามิเตอร์ของการกระจายของความน่าจะเป็นของสมมติฐานของการกระจายที่ต้องประมาณค่าของตัวอย่าง ซึ่งจะยอมรับสมมติฐานหลัก H_0 ถ้า $\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha,k-p-1}$ ที่ได้จากตารางค่าของการกระจายความน่าจะเป็นแบบไคสแควร์ และจะปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho หาก $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,k-p-1}$

การประมาณค่าการกระจายความน่าจะเป็นของตัวอย่างนี้จะใกล้เคียงกับการกระจายที่แท้จริงของประชากร ต่อเมื่อค่าความถี่ของข้อมูลแต่ละค่ามีจำนวนมากกว่า หรือเท่ากับ 5 ซึ่งถ้าหากความถี่ของค่าใดที่มีจำนวนน้อยกว่า 5 ก็จะต้องรวมข้อมูลที่อยู่ใกล้เคียงต่อไปจนมีค่าความถี่มากกว่าหรือเท่ากับ 5

2. การทดสอบโดยใช้กราฟ (Probability Plotting)

วิธีการทดสอบโดยใช้กราฟนี้ก็เป็นอีกวิธีหนึ่งที่ใช้ในการทดสอบหาลักษณะการกระจายของข้อมูล ซึ่งเป็นวิธีที่ง่าย สามารถทดสอบได้อย่างรวดเร็ว และเหมาะที่จะใช้เมื่อมีข้อมูลจำนวนน้อยไม่พอเพียงสำหรับการทดสอบโดยใช้วิธีอื่น ๆ เช่นการทดสอบโดยวิธีไคร์สแควร์ โดยวิธีการพิจารณาลักษณะการกระจายของความน่าจะเป็นโดยกราฟนี้มีขั้นตอนการทดสอบดังนี้คือ

1. เลือกลักษณะการกระจายของความน่าจะเป็น ที่คาดว่าเหมาะสมกับลักษณะของข้อมูล

2. นำข้อมูลที่ ได้มาพล็อตค่าลงในกราฟที่สร้างขึ้นสำหรับการทดสอบลักษณะการกระจายของความน่าจะเป็นชนิดนั้นๆ เช่น กระดาษกราฟของการกระจายแบบนอร์มอล, การกระจายแบบล็อกนอร์มอล, การกระจายไวบูล ฯลฯ

3. ถ้ากราฟที่ได้มีลักษณะเป็นเส้นตรง แสดงว่าข้อมูลมีลักษณะการกระจายความน่าจะเป็นตามที่คาดไว้ ซึ่งข้อมูลที่จะนำไปพล็อตในกราฟจะเป็นฟังก์ชันของความน่าจะเป็นสะสม (Cummulative Probability), F(x) โดยที่

$$F(x) = \frac{i}{(N+1)}$$

เมื่อ i คือครั้งที่ทดสอบ

N คือจำนวนครั้งทั้งหมดที่ทดสอบ

ความคลาดเคลื่อนลักษณะเบี่ยงเบน (Tolerances)

โดยทั่วไปแล้วขนาดของชิ้นส่วนจะประกอบด้วยขนาดมาตรฐานที่ระบุ (Nominal Value) บวกลบด้วยค่าที่ยอมให้คลาดเคลื่อนได้ตามมิติ (dimension) ต่างๆ เช่น 1.530 $\pm$0.001 นิ้ว ซึ่งค่าดังกล่าวเรียกว่า "ค่าสูงสุด และ/หรือค่าต่ำสุดตามข้อกำหนด" (Specification limits) นอกจากนี้แล้วยังมีค่าอีกค่าหนึ่งที่เรียกว่า "ค่าสูงสุด และ/หรือค่าต่ำสุดของความคลาดเคลื่อนลักษณะเบี่ยงเบน" (Tolerance limits) ซึ่งเป็นค่าสูงสุด และ/หรือต่ำสุดที่ขบวนการผลิตสามารถผลิตได้โดยสามารถประกันได้ว่าจะมีชิ้นส่วนที่ผลิตได้ขนาดอยู่ภายในค่าสูงสุด และ/หรือต่ำสุด เหล่านี้ได้มากกว่า หรือเท่ากับ $(1-\alpha)100\%$ โดยที่ค่า α เป็นค่าที่ตกลงกันและยอมรับได้ (นั่นคือจะมีไม่เกิน α % ของชิ้นส่วนที่ไม่ได้ขนาดตามข้อกำหนด) ซึ่งในการออกแบบที่ดีนั้นต้องให้ได้ค่าเฉลี่ยของขนาดเฉลี่ยชิ้นส่วนเท่าขนาดที่ระบุตามข้อกำหนด และมีความเบี่ยงเบนมาตรฐานไม่เกิน α ของชิ้นส่วนที่ไม่ได้ขนาดตามข้อกำหนด

ในทางปฏิบัติในการหาความสามารถของกระบวนการผลิต หรือความคลาดเคลื่อนลักษณะเบี่ยงเบนคือ เราไม่ทราบว่ามิติต่างๆ มีการกระจายของความน่าจะเป็นแบบใด ค่าเฉลี่ยและค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าเท่าใด การแก้ปัญหาเกี่ยวกับลักษณะการกระจายของความน่าจะเป็น ได้โดย

1. วิธีสมมติว่าลักษณะการกระจายของความน่าจะเป็นของมิติเป็นแบบนอร์มอล ซึ่งวิธีนี้เป็นที่ยอมรับในการใช้งานด้านวิศวกรรม

2. ไม่สมมติให้ลักษณะการกระจายของความน่าจะเป็นของมิติ ซึ่งวิธีนี้เป็นวิธีที่ต้องใช้ข้อมูลจำนวนมากกว่าวิธีแรกมาก ซึ่งในบางครั้งอาจเป็นไปไม่ได้ในทางปฏิบัติ

สมมติว่ามิติ X มีการกระจายของความน่าจะเป็นแบบนอร์มอลซึ่งมีค่าเฉลี่ย μ และความเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ และมีการเก็บข้อมูล n ค่า วิธีที่น่าเป็นไปได้ในการหาคาสูงสุด และ/ หรือค่าต่ำสุดของความคลาดเคลื่อนลักษณะเบี่ยงเบน คือการแทน $\mu \pm K_{\alpha/2}\sigma$ ด้วย $\overline{X} \pm K_{\alpha/2}S$ นั่นคือประมาณค่า μ ด้วย $\overline{X}$ และประมาณ σ ด้วย S แต่เนื่องจากทั้ง $\overline{X}$ และ S เป็นค่าโดยประมาณไม่ใช่ค่าที่แท้จริงของ μ และ σ ดังนั้นเราจึงไม่อาจประกันได้ว่าจะมีเพียง α % เท่านั้นที่อยู่นอกช่วงดังกล่าว ซึ่งจากปัญหาดังกล่าวจึงทำให้มีผู้นำค่าคงที่ตัวใหม่ K มาใช้แทน $K_{\alpha/2}$ (หรือ K_{α}) ในการคำนวณค่าสูงสุด และ/หรือค่าต่ำสุดของความคลาดเคลื่อนลักษณะเบี่ยงเบนเป็น $\overline{X} \pm KS$ ซึ่งเรียกค่าสูงสุด และ/หรือต่ำสุดนี้เรียกว่า "ค่าสูงสุด และ/หรือต่ำสุดของความคลาดเคลื่อนลักษณะเบี่ยงเบนทางสถิติ (Statistical Tolerance Limits)" จะมีความหมายว่า จะมีความน่าจะเป็น γ ที่ช่วง $L = \overline{X} - KS$ ถึง $U = \overline{X} + KS$ จะมีไม่น้อยกว่า $(1-\alpha)$ 100% ของชิ้นส่วนที่ผลิตได้มีค่าของมิติเท่ากับค่าหนึ่งค่าใดของช่วง (L,U)

การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Varience, ANOVA)

การวิเคราะห์ความแปรปรวนเป็นเทคนิคที่ใช้ในการจัดสรรความแปรผัน (Variation) ที่เกิดขึ้นกับข้อมูลออกเป็นส่วนย่อย ๆ ตามแหล่งที่คาดว่าจะทำให้เกิดความแปรผัน โดยเนื่องจากความแตกต่างของข้อมูลนั้นไม่น่าจะมาจากสาเหตุของความแปรผันโดยธรรมชาติหรือความผันแปรแบบสุ่ม (Random Error) ของข้อมูลแต่เพียงอย่างเดียว แต่น่าจะมาจากปัจจัยโดยความผันแปรที่เกิดขึ้นเป็นดังสมการ

ความผันแปรทั้งหมด = ความผันแปรเนื่องจากปัจจัย + ความผันแปรโดยธรรมชาติของข้อมูล

สมมติว่าให้ปัจจัยที่คาดว่ามีผลต่อความผันแปรของข้อมูลมี k ระดับ และแต่ละระดับมีการทดลอง n ครั้ง จะได้ว่า

	ระดับ				
	1	2	3	. . . .	k
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	. . . .	x_{1k}
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	. . . .	x_{2k}
	x_{31}	x_{32}	x_{33}	. . . .	x_{3k}
	.	.	.	. . . .	.
	.	.	.	. . . .	.
	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	. . . .	x_{nk}
รวม	$T_{.1}$	$T_{.2}$	$T_{.3}$	. . . .	$T_{.k}$
เฉลี่ย	$\overline{X}_{.1}$	$\overline{X}_{.2}$	$\overline{X}_{.3}$	. . . .	$\overline{X}_{.k}$

โดย ผลรวมทั้งหมด $= T_{..} = \sum_{j=1}^{k} T_{.j}$

ค่าเฉลี่ยทั้งหมด $= \overline{X}_{..} = \sum_{j=1}^{k} \overline{X}_{.j} / k$

โดยที่ $T_{.j} = \sum_{i=1}^{n} X_{ij}$

$$\overline{X}_{.j} = T_{.j} / n = \sum_{i=1}^{n} X_{ij} / n$$

สมมติให้ทุกประชากรมีลักษณะการกระจายความน่าจะเป็นแบบนอร์มอล ที่มีความแปรปรวนเท่ากันคือ σ^2 และสมมติให้ μ_j เป็นค่าเฉลี่ยของประชากรที่ได้จากการทดลองที่ระดับ j จะได้ว่า

$$X_{ij} \sim N(\mu_j, \sigma^2) \quad ; \ i = 1,2,3 \ldots n$$
$$; \ j = 1,2,3 \ldots k$$

ถ้าแต่ละประชากรไม่มีความผันแปรใด ๆ เกิดขึ้นกับข้อมูล จะได้ว่าค่าของข้อมูลควรจะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของประชากร แต่เนื่องจากมีอิทธิพลเนื่องจากความผันแปรโดยธรรมชาติของข้อมูล หรือความผิดพลาดแบบสุ่ม ดังนั้นจะได้ว่า

$$Xij = \mu j + \varepsilon ij$$

โดยที่ εij เป็นความผิดพลาดแบบสุ่ม และ $\varepsilon ij \sim N(0,\sigma^2)$

ถ้าปัจจัยมีอิทธิพลก็จะทำให้ค่าเฉลี่ยของแต่ละประชากรมีค่าที่แตกต่างกันตามแต่ละระดับของปัจจัย นั่นคือ

$$\mu j = \mu + \alpha j$$

ซึ่งจะทำให้ได้

$$Xij = \mu + \alpha j + \varepsilon ij$$

โดยที่ αj เป็นอิทธิพลจากปัจจัย และ $\sum_{j=1}^{k} \alpha j = 0$

ในการทดสอบอิทธิพลของปัจจัย จะมีสมมติฐานในการทดสอบคือ

H_o : $\alpha 1 = \alpha 2 = \ldots = \alpha k = 0$

H_1 : $\alpha j \neq 0$ อย่างน้อย 1 ค่า

ซึ่งจากสมการเบื้องต้นของความผันแปรของข้อมูลจะได้

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(Xij - \overline{X}..)^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}.j - \overline{X}..)^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(Xij - \overline{X}.j)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{k} n(\overline{X}.j - \overline{X}..)^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(Xij - \overline{X}.j)^2$$

โดยที่

$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(Xij - \overline{X}..)^2$ เรียกว่าผลบวกกำลังสองทั้งหมด (Total Sum of Squares) ,SS_T, ซึ่งหมายถึงผลรวมทั้งหมดของผลต่างระหว่างค่าของข้อมูลกับค่าเฉลี่ยของข้อมูลยกกำลังสอง ซึ่งจำนวนข้อมูลที่ทดสอบทั้งหมดเป็น $N = nk$ ดังนั้น SS_T จะมีดีกรีของความอิสระเป็น $\nu_T = nk - 1$

$\sum_{j=1}^{k} n(\overline{X}.j - \overline{X}..)^2$ เรียกว่าผลบวกกำลังสองเนื่องจากอิทธิพลของปัจจัย,SS_{Tr} ซึ่งจำนวนปัจจัยในการทดสอบทั้งหมดเป็น k ปัจจัย ดังนั้น SS_{Tr} จะมีดีกรีของความอิสระเป็น $\nu_{Tr} = k - 1$

$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} (Xij + \overline{X}.j)^2$ เรียกว่าผลบวกกำลังสองเนื่องจากความผิดพลาดแบบสุ่ม ,SS_E ซึ่งแต่ละปัจจัยมีการทดสอบซ้ำ (replicates) n ครั้งในการทดสอบ การประมาณค่าของความผิดพลาดแบบสุ่มของการทดลองของแต่ละซ้ำมีดีกรีของความอิสระเป็น n - 1 และปัจจัยในการทดสอบมี k ปัจจัย ดังนั้น SS_E จะมีดีกรีของความอิสระเป็น $\nu_E = k(n - 1) = nk - k$

นั่นคือจะได้สมการพื้นฐานของการวิเคราะห์ความแปรปรวนโดย

$$SS_T = SS_{Tr} + SS_E$$

ซึ่งจากการที่ $\varepsilon ij \sim N(0,\sigma^2)$ และ $Xij \sim N(\mu j, \sigma^2)$ เมื่อหาลักษณะการกระจายความน่าจะเป็นของ SS จะได้ว่า

$$\frac{SS_T}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-1}$$

$$\frac{SS_{Tr}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{k-1}$$

$$\frac{SS_E}{\sigma^2} \sim \chi^2_{k(n-1)}$$

จากทฤษฎีถ้า $W_1 \sim \chi^2_a$ และ $W_2 \sim \chi^2_b$ และถ้า W_1 และ W_2 เป็นอิสระแก่กัน จะได้ว่า

$$\frac{W_1 / a}{W_2 / b} \sim F_{a,b}$$

นั่นคือจะได้ว่าเมื่อ Ho เป็นจริง

$$\frac{SS_{Tr} / \sigma^2(k-1)}{SS_E / \sigma^2 k(n-1)} \sim F_{k-1,nk-k}$$

$$\frac{SS_{Tr} / (k-1)}{SS_E / k(n-1)} \sim F_{k-1,nk-k}$$

$$\frac{MS_{Tr}}{MS_E} \sim F_{k-1,nk-k}$$

ซึ่งในการคำนวณเมื่อนำข้อมูลมาจัดทำเป็นตาราง ได้ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน ดังนี้

แหล่งความแปรผัน	ดีกรีของความอิสระ	ผลบวกกำลังสอง	ค่าเฉลี่ยผลบวกกำลังสอง	F
ปัจจัย	V_{Tr}	SS_{Tr}	MS_{Tr}	MS_{Tr}/MS_E
ความผิดพลาดแบบสุ่ม	V_E	SS_E	MS_E	
รวม	V_T	SS_T		

การถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression)

การวิเคราะห์การถดถอยเป็นวิธีทางสถิติวิธีหนึ่งในการหาสมการเส้นตรง หรือสมการเส้นโค้งของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม, y และตัวแปรอิสระ, x ซึ่งอาจมีเพียงตัวแปรเดียวหรือหลายตัวแปรก็ได้ ซึ่งในกรณีที่เป็นการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว จะเรียกว่าเป็นการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

สมการความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ x และตัวแปรตาม y หรือสมการ Probabilistic Mathematical Model เป็นดังสมการที่ 1 คือ

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + e \qquad \text{-------------------- } 1$$

ซึ่งสมการมีสมมติฐานดังนี้คือ

1. β_0 และ $\beta_1 x$ เป็นค่าคงที่ของสมการเส้นตรง

2. ตัวแปรตาม, y ซึ่งมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงกับตัวแปรอิสระ, x

3. ความเบี่ยงเบน e คือค่าความแตกต่างระหว่างค่า y ที่เกิดขึ้นจริงกับค่า y บนเส้นถดถอย, $\hat{y}$ นั่นคือ $e = y - \hat{y}$

4. ค่าของ e เป็นอิสระแก่กัน นั่นคือความเบี่ยงเบนออกจากเส้นถดถอยของข้อมูลตัวหนึ่งไม่มีผลต่อความเบี่ยงเบนของข้อมูลตัวอื่น ๆ ดดยที่ค่าเฉลี่ยของ e เป็น 0 และความแปรปรวนเป็น σ_e^2

5. e มีลักษณะการกระจายของความน่าจะเป็นแบบนอร์มอล

ถ้ากำหนดให้ $y|_x$ เป็นค่าของ y เมื่อ x มีค่าใด ๆ

$\mu_{y|x}$ เป็นค่าเฉลี่ยของ y เมื่อ x มีค่าใด ๆ

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\mu_{y|x} &= E(y|_x)\\ &= E(\beta_0 + \beta_1 x + e)\\ &= \beta_0 + \beta_1 x + 0\\ \mu_{y|x} &= \beta_0 + \beta_1 x \qquad \text{--------------------} \quad 2\end{aligned}$$

จะได้สมการที่ 2 เป็นสมการเส้นถดถอยของ y บน x โดยที่ β_0 และ β_1 เป็นค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยของประชากร (Population Regression Coefficients)

β_0 เป็นจุดตัดบนแกน y มีค่าเท่ากับ E(y) เมื่อ $x = 0$

β_1 เป็นความชันของเส้นถดถอย เป็นค่าที่แสดงให้ทราบว่าเมื่อ x มีค่าเปลี่ยนไป 1 หน่วยจะทำให้ E(y) มีค่าเปลี่ยนไป

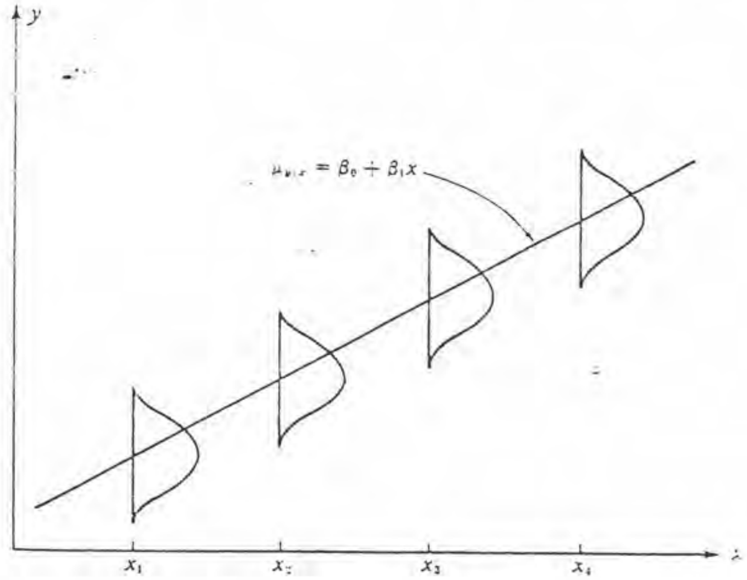
ซึ่งสมมติฐานของการถดถอบเชิงเส้นอย่างง่ายคือ

1. ค่าเฉลี่ยของประชากร (Population Mean) จะอยู่บนเส้นตรง $\mu_{y|x} = \beta_0 + \beta_1 x$

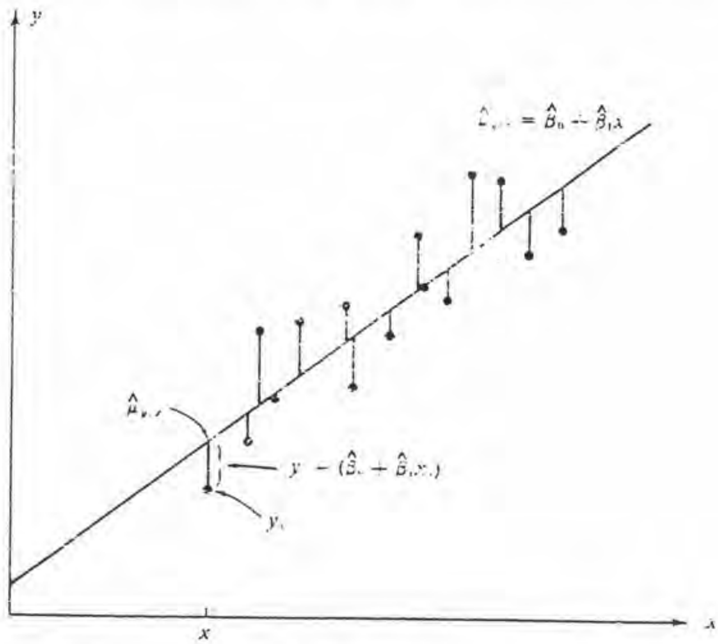
2. ความแปรปรวนของความเบี่ยงเบน(คือ $\sigma^2_{y|x} = \sigma^2_e$) มีค่าคงที่ไม่ว่า x จะมีค่าใด ๆ

3. ลักษณะของการกระจายความน่าจะเป็นของ e จะมีการกระจายแบบนอร์มอล

นั่นคือลักษณะการกระจายของความน่าจะเป็นของ y เป็นการกระจายแบบนอร์มอลที่มีค่าเฉลี่ย $\beta_0 + \beta_1 x$ และความแปรปรวน σ_e^2 แสดงดังรูปที่ 2.5 และรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.5 แสดงค่าเฉลี่ยของประชากร และลักษณะการกระจายของความน่าจะเป็นของ e



รูปที่ 2.6 แสดงค่าเฉลี่ยของประชากร และค่า y ที่จุดใด ๆ

การหาค่าพารามิเตอร์ β_0, β_1

วิธีการที่นิยมใช้ในการหาสมการเส้นตรงที่เป็นสมการความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y คือวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Sqaure Method) ซึ่งเป็นวิธีที่ทำให้ผลรวมกำลังสองของความเบี่ยงเบนในแนวดิ่งของเส้นถดถอยมีค่าน้อยที่สุด หรือทำให้ผลรวมกำลังสองของผลต่างระหว่าง y และ $\hat{y}$ มีค่าต่ำที่สุด โดย

สมมติให้มีการเก็บข้อมูล n คู่ ซึ่งประกอบด้วย $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ ให้

$\hat{\mu}_{y|x_i}$ เป็นค่าโดยประมาณของ $\mu_{y|x_i}$

$\hat{\beta}_0$ เป็นค่าโดยประมาณของ $\beta_0 = a$

$\hat{\beta}_1$ เป็นค่าโดยประมาณของ $\beta_1 = b$

นั่นคือจากสมการที่ 2 จะได้ว่า

$$\hat{\mu}_{y|x_i} = a + bx$$

ค่าเบี่ยงเบนของ y_i จากค่าเฉลี่ยของประชากรเท่ากับ $y_i - \hat{\mu}_{y|x_i}$ ดังนั้นผลบวกกำลังสองของค่าเบี่ยงเบนคือ $\sum_{i=1}^{n}(y_i - (a + bx_i))^2$

วิธีการกำลังสองน้อยที่สุดคือการหาค่า a และ b ซึ่งทำให้ผลบวกกำลังสองของค่าเบี่ยงเบนมีค่าน้อยที่สุด ซึ่งคำนวณได้จาก

$$\text{minimize} \quad \sum e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (a + bx_i))^2 = S$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{--------------------} \quad 3$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad \text{-------------------- } 4$$

จะได้สมการปกติ (Normal Eqaution) คือสมการที่ 3 และ 4 ซึ่งหาค่า a และ b ได้โดย

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

$\hat{\sigma}_e^2$ = ผลบวกกำลังสองของความเบี่ยงเบน/n-2

$$= \frac{\sum_{i=}^{n}(y_i - \hat{\mu}_{y|x_1})^2}{n-2}$$

$$= \frac{1}{n-2}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n} - \frac{b}{n}(n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i)\right]$$

และความแปรปรวนของสัมประสิทธิ์ความถดถอย คือ

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma_e^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_e^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

การทดสอบความมีนัยสำคัญของสัมประสิทธิ์เส้นถดถอย

จากการหาค่าสัมประสิทธิ์ a และ b ของสมการความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตาม, y และตัวแปรอิสระ, x ซึ่งวิธีการทดสอบเพื่อยืนยันความสัมพันธ์ในเชิงเส้นตรงระหว่างทั้งสองตัวแปรนั้นมีกระบวนการดังนี้คือ

สมมติฐานในการทดสอบกำหนดโดย

$Ho : \beta 1 = 0$

$H_1 : \beta 1 \neq 0$

ค่าทางสถิติสำหรับในการทดสอบคือ

$$t = \frac{b - \beta_1}{\sqrt{\sigma_e^2 / \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}$$

ในการทดสอบกำหนดระดับนัยสำคัญในการทดสอบ, α , และกำหนดขนาดข้อมูลในการทดสอบ, n , นำค่า α ที่กำหนดหาค่าวิกฤตจากตาราง t ที่ค่า $(-t_{\alpha/2,n-2}, t_{\alpha/2,n-2})$ ซึ่งจะยอมรับสมมติฐานหลัก, Ho , หากค่า t ที่คำนวณได้ตกอยู่ในบริเวณที่จะยอมรับสมมติฐานหลักที่ $(-t_{\alpha/2,n-2}, t_{\alpha/2,n-2})$ และจะปฏิเสธสมมติฐานหลักหากค่า t ที่คำนวณได้ไม่ตกอยู่ในบริเวณดังกล่าว ด้วยระดับนัยสำคัญ α

การหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับตัวแปรตาม y

จากสมการของ y, y(x) , และสมการพยากรณ์ของค่า y, $\hat{y}(x)$, คือ

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + e \qquad \text{--------------------} \; 5$$

$$\hat{y}(x) = a + bx \qquad \text{--------------------} \; 6$$

ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการพยากรณ์คือ $\hat{y}(x) - y(x)$ โดยความคลาดเคลื่อนนี้เกิดจาก

1. การใช้ $\mu y_{|x}$ ในการประมาณค่า y ซึ่งมีความคลาดเคลื่อนเป็น $\sigma^2_{(\beta_0+\beta_1 x)}$ และใช้ $\sigma^2_{(a+bx)}$ เป็นตัวประมาณค่าของ $\sigma^2_{(\beta_0+\beta_1 x)}$

2. ความแปรปรวนใน y เนื่องจาก x ซึ่งมีความคลาดเคลื่อนเป็น $\sigma^2_{y_{|x}}$ และใช้ σ^2_e เป็นตัวประมาณค่าของ $\sigma^2_{y_{|x}}$

จะได้ว่า $\mathrm{Var}[\hat{y}(x) - y(x)] = \mathrm{Var}[y(x)] + \mathrm{Var}[(\hat{y}(x)]$

$$= \sigma^2_e + \sigma^2_e \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \right)$$

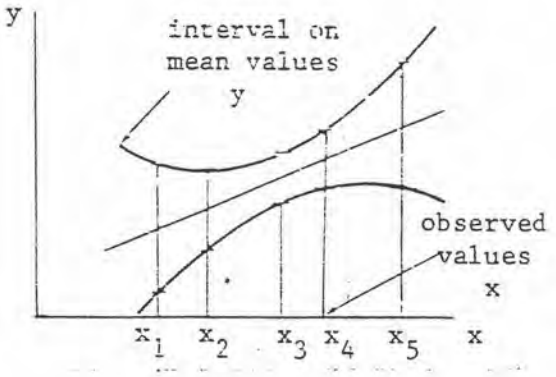
$$= \sigma^2_e \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \right)$$

และจากค่าความคลาดเคลื่อน, e , มีลักษณะการกระจายความน่าจะเป็นแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย 0 ดังนั้นจะได้ว่า ช่วงความเชื่อมั่น (1-α)100 % ของ y คือ

$$P\left(-t_{\alpha/2,n-2} \le \frac{\hat{y}(x) - y(x)}{\sigma_e \sqrt{(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_0 - \bar{x})^2}}} \le t_{\alpha/2,n-2} \right) = 1 - \alpha$$

นั่นคือช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\ \%$ สำหรับ y เมื่อ $x = x_0$ คือ

$$\hat{y}(x) \pm t_{\alpha/2,n-2}\sigma_e \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}}$$



รูปที่ 2.7 แสดงตัวอย่างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับตัวแปรตาม y

<u>กลศาสตร์การแตกหักในการศึกษาการขยายตัวของรอยร้าวจากความล้า</u>

กลศสาตร์การแตกหัก (Fracture Mechanics) เป็นศาสตร์ที่อธิบายเกี่ยวกับการวิเคราะห์สภาวะของความเค้นที่บริเวณรอยร้าว และเงื่อนไขของการเกิดความเสียหายเนื่องจากการเติบโตของความยาวรอยร้าว โดยอาศัยพื้นฐานจากศาสตร์ด้าน theory of elasticity และ theory of plasticity โดยได้กล่าวถึงสภาวะของความเค้นบริเวณรอยร้าว ว่าขึ้นอยู่กับ ความยาวรอยร้าว (crack length), ความเค้น (stress) และลักษณะรูปร่าง (geometry) ของชิ้นงานที่พิจารณา (กรณีที่ชิ้นงานมีขนาดจำกัด) ปัจจุบันจะพบการประยุกต์กลศาสตร์การแตกหักนี้ในงานต่าง ๆ เช่นงานด้านการวิเคราะห์ พยากรณ์ อายุและระยะเวลาการใช้งานของชิ้นส่วนอุปกรณ์ที่เกิดรอยร้าวขึ้นมาแล้ว โดยวิเคราะห์จากอัตราการเติบโตของรอยร้าว (crack growth rate) จนกระทั่งเกิดการเสียหาย (failure) ของชิ้นส่วนอุปกรณ์เมื่อรอยร้าวถึงความยาวรอยร้าววิกฤติ, งานด้านการซ่อมบำรุง ฯลฯ

ความล้า

การเติบโตของรอยร้าวอาจมีได้จากสาเหตุหลาย ๆ ประการ ซึ่งถ้ารอยร้าวนั้นเกิดจากภาระแบบสลับ (cyclic load) เราจะเรียกว่ารอยร้าวเนื่องจากความล้า ภาระแบบสลับนี้จะทำให้ความทนทานของชิ้นงานลดลงเรื่อย ๆ จนกระทั่งถึงจุดที่มีความเค้นรุนแรงมากขึ้นจนชิ้นงานไม่สามารถทนทานได้เกิดการแตกหักเสียหาย ลักษณะของการเกิดความล้านี้แบ่งได้เป็นช่วง 3 ช่วง แสดงดังรูปที่ 2.8 ดังนี้คือ

1. การกำเนิดของรอยร้าว (Crack Initiation)

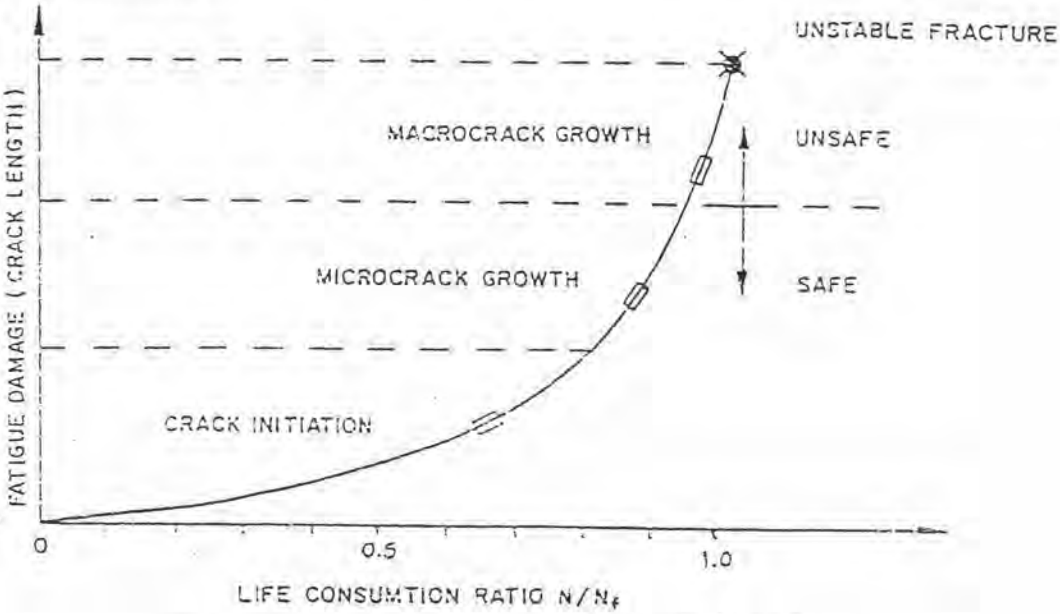
หากพิจารณาในระดับ microstructure ของวัสดุใดๆ จะพบว่าวัสดุจะมีลักษณะของการไม่เป็นเนื้อเดียวกัน (nonhomogenous) โดยธรรมชาติอยู่แล้ว ดังนั้นเมื่อวัสดุนั้น ๆ ถูกกระทำภายใต้สภาวะที่มีความเค้นแบบสลับ จึงทำให้ความเค้นที่กระทำต่อชิ้นงานก็มีความไม่สม่ำเสมอเช่นกัน ในบริเวณใดที่มีความเค้นสูงจะเป็นจุดเริ่มของการเกิดความเสียหายเกิดรอยร้าว รอยร้าวที่เกิดจะเติบโตไปในแนวระนาบที่ตั้งฉากกับ tensile stress และขยายต่อไปรวมกับ void หรือจุดเสียหายอื่น ๆ ใกล้เคียงกัน

2. การเติบโตของรอยร้าว (Crack Propagation)

เป็นช่วงที่เกิดรอยร้าวชัดเจนขึ้น สามารถทำการตรวจพบรอยร้าวได้

3. การแตกหัก (Final Fracture)

เป็นขั้นสุดท้ายของรอยร้าว ซึ่งเมื่อเกิดความยาวรอยร้าวที่ระดับหนึ่ง และสภาวะความเค้นที่เกิดก็มีความรุนแรง จนกระทั่งความยาวรอยร้าวถึงค่ารอยร้าววิกฤติ (critical crack length) จนชิ้นงานไม่สามารถทนทานต่อสภาวะความเค้นที่เกิดขึ้นได้ ก็ทำให้ชิ้นงานเกิดการแตกหักในที่สุด



รูปที่ 2.8 แสดงลักษณะของการเกิดความล้าทั้ง 3 ช่วง

ประเภทของความล้าที่พบอาจแบ่งได้เป็น (ฝ่ายบำรุงรักษาเครื่องกล การไฟฟ้าฝ่ายผลิตแห่งประเทศไทย)

1. Low cycle fatigue เป็นความล้าที่เกิดขึ้นเมื่อจำนวนรอบต่ำ เช่น การเดินเครื่อง, การหยุดเดินเครื่องของโรงไฟฟ้า

2. High cycle fatigue เป็นความล้าที่เกิดเมื่อจำนวนรอบสูง เช่น จากการหมุนของเพลา จากการสั่นสะเทือน

3. Themal fatigue เป็นความล้าจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ จากการ heating และ cooling ซ้ำไปมา เช่นจากการ overheat ของอุปกรณ์โรงไฟฟ้า

การขยายตัวของความยาวรอยร้าวเนื่องจากความล้า

ในการศึกษาพฤติกรรมของการเติบโตของความยาวรอยร้าวสำหรับวัสดุหนึ่ง ๆ จะใช้ข้อมูลจากการทดสอบอัตราการขยายตัวของความยาวรอยร้าวเนื่องจากความล้า ซึ่งจะหาความสัมพันธ์ระหว่าง อัตราการเติบโตของรอยร้าว (crack growth rate), $\frac{da}{dN}$ และค่า Stress intensity factor, ΔK โดย

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K)$$

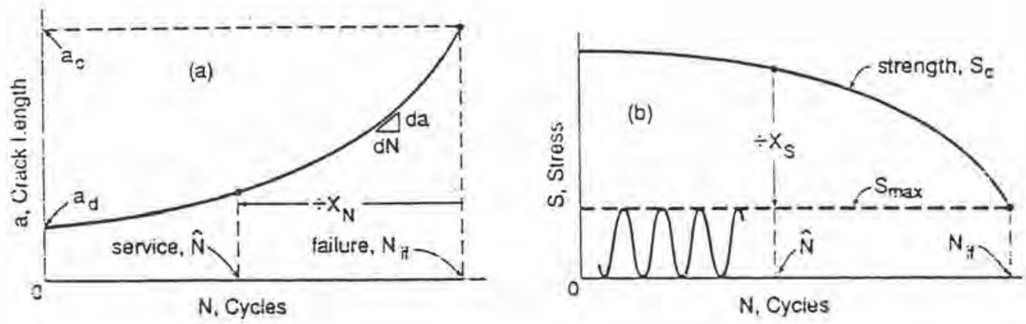
ค่า Stress intensity factor นี้เป็นฟังก์ชันของความยาวรอยร้าว ภาระ และลักษณะรูปร่าง แสดงได้โดยสมการ

$$K = S\sqrt{\pi a}\ .\ f(a/w) \qquad \text{--------------------} \quad 7$$

โดยที่ a เป็นความยาวรอยร้าว

S เป็น norminal stress

f(a/w) เป็นฟังก์ชันปัจจัยเนื่องจากรูปร่างของชิ้นทดสอบ จะแตกต่างกันไปตามรูปร่างของชิ้นทดสอบ



รูปที่ 2.9 (a) แสดงกราฟความยาวรอยร้าว และจำนวนรอบ จากความยาวรอยร้าวที่เริ่มตรวจสอบได้ และ (b) กราฟความเค้น และจำนวนรอบ

จากภาระที่ทำให้เกิดความล้านี้เป็นภาระสลับ นั่นคือจะมีค่าภาระสูงสุด (max load, Pmax) และภาระต่ำสุด (min load, Pmin) ซึ่งความเค้นที่เกิดภายในเนื้อวัสดุซึ่งคำนวณได้คือ nominal stresses Smax และ Smin ดังนั้นจะได้ค่าช่วง และ อัตราส่วนความเค้น (Stress ratio)

$$\Delta S = S_{max} - S_{min}$$

$$R = \frac{S_{min}}{S_{max}}$$

จากสมการที่ 7 จะได้

$$K_{max} = S_{max}\sqrt{\pi a} \,.\, f(a/w) \text{ และ } K_{min} = S_{min}\sqrt{\pi a} \,.\, f(a/w)$$

ได้ $\Delta K = Kmax - Kmin$

$$R = \frac{K_{min}}{K_{max}}$$

P.C. Paris ได้เสนอแนวความคิดเรื่องความสัมพันธ์ของอัตราการขยายตัวของความยาวรอยร้าว, $\frac{da}{dN}$ และค่าStress intensity factor, ΔK ซึ่งจะมีค่าแตกต่างกันไปตามวัสดุแต่ละชนิด ไว้ในต้นปี 1960 โดยความสัมพันธ์แสดงดังรูปที่ 2.10 และสมการความสัมพันธ์ที่เสนอไว้คือ

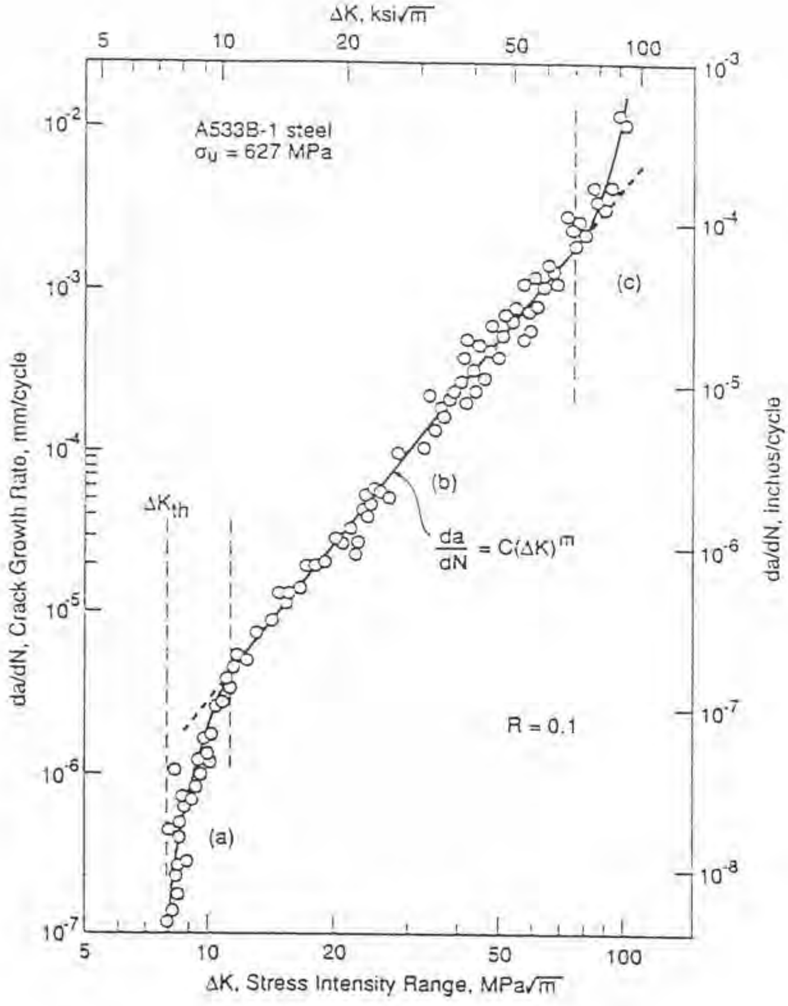
$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \qquad \text{-------------------- } 8$$

เมื่อ $\frac{da}{dN}$ เป็นอัตราการขยายตัวของความยาวรอยร้าว

C เป็นค่าคงที่

m เป็นความชันในมาตราล็อก (log-log plot)

K เป็นค่า Stress intensity factor



รูปที่ 2.10 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{da}{dN}$ และ ΔK

จากรูปข้างต้น จะแบ่งช่วงของกราฟได้เป็น 3 ช่วงคือ

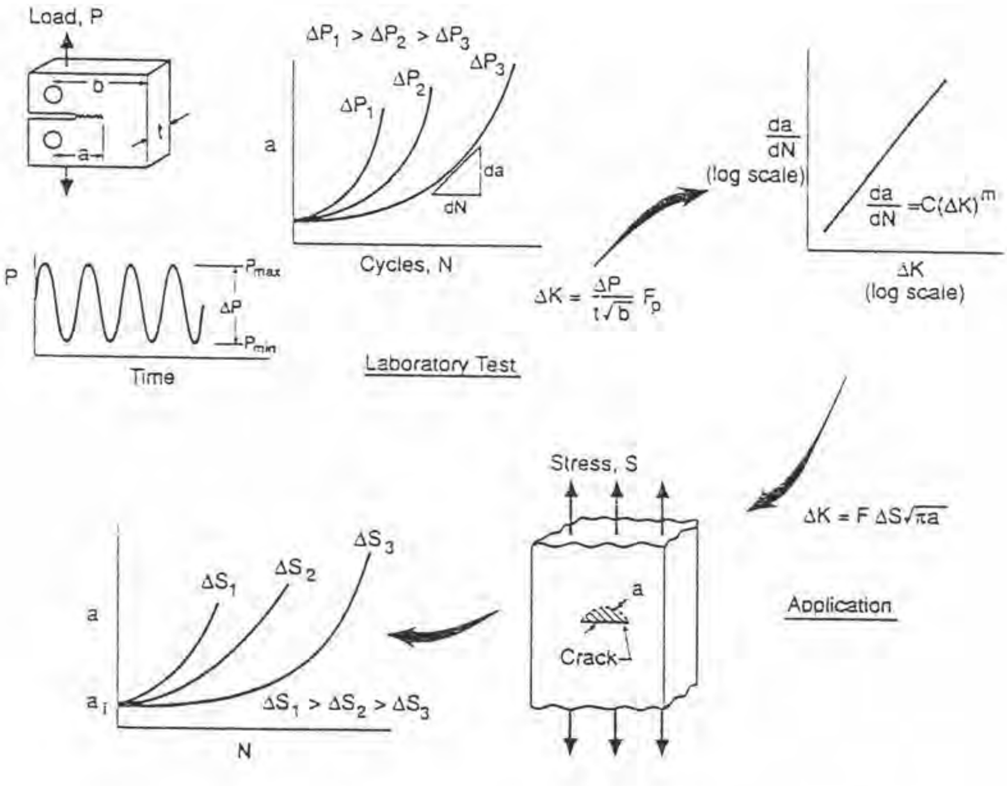
1. ช่วงที่ 1 (a) เป็นช่วง threshold, ΔK_{th} ซึ่งหากค่า Stress intensity factor ยังคงมีค่าต่ำกว่าค่า ΔK_{th} นี้อัตราการขยายตัวของรอยร้าวก็จะไม่เกิดหรือเกิดขึ้นน้อยมาก

2. ช่วงที่ 2 (b) เป็นช่วงของการเติบโตของรอยร้าว สามารถอธิบายโดยใช้สมการของพารีส ดังสมการที่ 8 ซึ่งได้มาจากการทดสอบอัตราการขยายตัวของความยาวรอยร้าวเนื่องจากความล้าภายใต้ภาระที่มีขนาด amplitude คงที่ ดังมาตรฐานการทดสอบ ASTM E647 แล้วนำข้อมูลมาปรับโค้งและหาความสัมพันธ์

3. ช่วงที่ 3 (c) เป็นช่วง unstable rapid growth คือเป็นช่วงที่มีการเติบโตของรอยร้าวอย่างรวดเร็ว จนกระทั่งเกิดความเสียหายของชิ้นงานในที่สุด

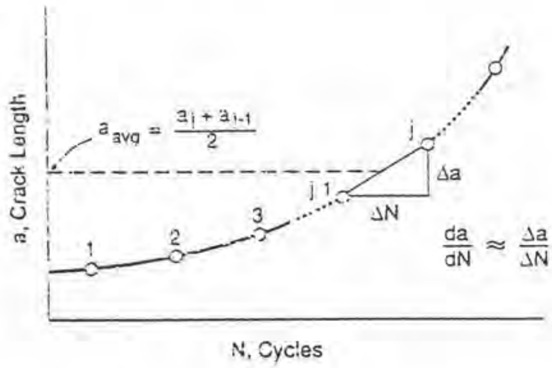
การทดสอบและการวิเคราะห์อัตราการขยายตัวของรอยร้าวเนื่องจากความล้า

ในการทดสอบอัตราการขยายตัวของรอยร้าวเนื่องจากความล้านี้ได้มีมาตรฐาน ASTM E647 (Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates) กำหนดวิธีการทดสอบไว้ จากการทดสอบจะได้ข้อมูลเบื้องต้นคือความยาวรอยร้าว (crack length, a) และจำนวนรอบ (cycle, N) นำข้อมูลดังกล่าวมาคำนวณหาค่า ΔK และนำมาหาความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการขยายตัวของรอยร้าว, $\frac{da}{dN}$ กับ ΔK โดยขั้นตอนการวิเคราะห์แสดงดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 แสดงขั้นตอนการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของ $\frac{da}{dN}$ และ ΔK

ซึ่งจากกระบวนการดังกล่าว จากข้อมูลการทดสอบซึ่งได้ของความยาวรอยร้าว (a) และจำนวนรอบ (N) นำมาหาความสัมพันธ์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวรอยร้าวต่อจำนวนรอบ $\frac{da}{dN}$ หรือ $\frac{\Delta a}{\Delta N}$ และค่าการเปลี่ยนแปลงของ stress intensity factor ,ΔK แสดงดังรูปที่ 2.12 โดยการคำนวณมีข้อสมมติให้ความสัมพันธ์ระหว่าง a และ N ในระหว่างจุดที่ติดกันเป็นเส้นตรง และเหมาะสมสำหรับช่วงระหว่างจุดที่เป็นช่วงสั้น ๆ



รูปที่ 2.12 แสดงการหา $\frac{da}{dN}$ จากกราฟความสัมพันธ์ a และ N

จากรูปพิจารณาที่จุด j จะได้

$$\left.\frac{da}{dN}\right)_j \approx \left(\frac{\Delta a}{\Delta N}\right)_j = \frac{a_j - a_{j-1}}{N_j - N_{j-1}}$$

$$\Delta K_j = f(a/w)\,\Delta S\,\sqrt{\pi a_{avg}}$$

$$\Delta K_j = \frac{\Delta P}{B\sqrt{w}}$$

โดยที่ $a_{avg} = \frac{a_j + a_{j-1}}{2}$

f(a/w) = เป็นฟังก์ชันปัจจัยเนื่องจากรูปร่างของชิ้นทดสอบ

B เป็นความหนาของชิ้นทดสอบ

W เป็นความกว้างของชิ้นทดสอบ = 2B

<u>งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง</u>

ในผลการทดสอบการเติบโตของความยาวรอยร้าวเนื่องจากความล้านี้ ในงานวิจัยหลาย ๆ ชิ้นพบว่า ถึงแม้ว่าผู้ทดสอบจะได้กำหนดเงื่อนของการทดสอบที่เหมือนกัน แต่ผลการทดสอบที่ได้มักมีการกระจายของข้อมูลที่ได้ ซึ่งในเรื่องของการกระจายความน่าจะเป็นของตัวแปรต่าง ๆ นั้นมีผู้วิจัยและสรุปผลไว้ดังนี้

1. ในส่วนของการกระจายความน่าจะเป็นของ $\frac{da}{dN}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ ΔK นี้พบว่ามีการกระจายแบบล็อกนอร์มอล (Pook, 1983; Palmberg, Blom และ Eggwertz, 1987) และ Artley, Vickler (1979) และ Ford (1983) พบว่ากระจายแบบล็อกนอร์มอลมีความเหมาะสมมากที่สุด ซึ่ง Shaw และ Lemay (Palmberz, 1987) ได้แสดงไว้ว่าในบางครั้งอาจพบว่าการกระจายของ $\frac{da}{dN}$ อาจเป็นแบบนอร์มอล หรือไวบูล

2. จำนวนรอบของการทดสอบ (Cycle, N) มีการกระจายของความน่าจะเป็นแบบล็อกนอร์มอล 3 พารามิเตอร์ (Vickler, Hillberry และ Goel , 1979)

3. ขนาดรอยร้าว (crack size) และความยาวรอยร้าว (crack length) มีการกระจายความน่าจะเป็นแบบล็อกนอร์มอล หรือเอกโปเนนเชียลก็ได้

4. ความเค้นมีการกระจายความน่าจะเป็นแบบไวบูล (Vickler, Hillberry และ Goel , 1979)

5. ในกรณีที่การทดลองไม่ได้มีการกำหนดความถี่ให้คงที่ ความถี่ที่เกิดขึ้นจะมีการกระจายความน่าจะเป็นแบบไวบูล หรือล็อกนอร์มอล หรือกัมเบล ก็ได้ (Vickler, Hillberry และ Goel , 1979)

6. ค่า Fracture Toughness มักกำหนดให้มีการกระจายของความน่าจะเป็นแบบนอร์มอล (Oberg และ Walin , 1986) แต่ก็อาจมีการกระจายแบบนอร์มอล หรือไวบูลก็ได้ (Vickler, Hillberry และ Goel , 1979)

วิธีการคำนวณหาค่าของ $\frac{da}{dN}$ มีผู้แสดงไว้หลายวิธีโดย Clark , Hudak (1975) และ Vickler, Hillberry, Goel (1979) ได้แสดงวิธีการคำนวณไว้ 6 วิธีคือ

1. Data Processing โดยการหาค่า $a = f(N)$

2. วิธี Graphical Procedure โดยการปรับโค้งของ $\frac{da}{dN}$ ที่ทำการพล็อตค่าของ a_i และ N_i และใช้ในการหาค่าความชันของโค้ง

3. วิธี Secant หรือวิธีจุดต่อจุด โดยเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมมากที่สุด โดยการประมาณค่าความชันของเส้นตรงของจุดสองจุดที่อยู่ติดกัน โดย

$$\frac{da}{dN} = \frac{a_{i+1} - a_i}{N_{i+1} - N_i}$$

4. วิธี Modified difference เป็นวิธีคำนวณจากจุด 2 จุด ที่ติดกันคือ

$a_{i-2} \leq a \leq ai_{+2}$

$$\frac{da}{dN} = \frac{1}{hA_2}\left(\begin{array}{l} -a_{i+2}\dfrac{A_3}{B_0} + a_{i+1}\left[\dfrac{1}{a_0} + \dfrac{a_2 B_2}{B_0}\right] + a_i\left[\dfrac{A_3 B_1}{B_0} - \dfrac{A_1}{C_0}\right] + \\ a_{i+1}\left[\dfrac{A_1 C_2}{C_0} - \dfrac{1}{A_0}\right] + a_{i-2}\left[\dfrac{A_1 C_1}{C_0}\right] \end{array} \right)$$

$A_0 = (\alpha+1)/6\alpha, \quad A_1 = \alpha(2-\alpha), \quad A_2 = (\alpha+1)^2, \quad A_3 = 2\alpha - 1$

$B_0 = \alpha\beta(1+\beta), \quad B_1 = \beta^2, \quad B_2 = 1 - \beta^2$

$h/\gamma = N_{i-1} - N_{i-2}, \quad h = N_i - N_{i-1}$

$\alpha h = N_{i-1} - N_i, \quad \alpha\beta h = N_{i+2} - N_{i+1}$

5. วิธี Incremental polynomial โดยการปรับค่าโพลีโนเมียลยกกำลังสอง (พาราโบลา) ยังเซตของข้อมูล 7 จุด โดย

$$a = b_0 + b_1\left(\frac{N - C_1}{C_2}\right) + b_2\left(\frac{N - C_1}{C_2}\right)^2$$

โดยที่ b_0 , b_1 และ b_2 เป็นค่าคงที่จากสมการถดถอย

$C_1 = 1/2(N_{i-3} - N_{i+3}) \quad C_2 = 1/2(N_{i+3} - N_{i-3})$ และ

$$\frac{da}{dN} = \frac{b_1}{C_2} + 2b_2\left(N_i - C_1\right) / C_2^2$$

6. วิธี Total polynomial เป็นวิธีที่ฟิตค่าโพลิโนเมียลกำลังสูงมาก ๆ เช่น 20 ถึง 70 จุดขึ้นไปโดย $\quad a = \sum_{i=1}^{n} \beta_1 f_i(N)$

โดยที่ $f_i(N)$ เป็นฟังก์ชันกำลัง (Power function) และพารามิเตอร์ βi ของสมการถดถอยหาได้จากวิธี Least Square

Pook (1976) ได้เสนอวิธีการวัดความยาวรอยร้าวที่ใช้กันในการทดลองมีดังนี้คือ

1. วิธีการวัดด้วยสายตา (Visual Measurement) วิธีนี้เป็นวิธีที่ง่าย และได้รับความนิยม แต่ก็มีความผิดพลาดได้ง่ายที่สุด ทำโดยการวัดความยาวรอยร้าวที่บริเวณชิ้นทดสอบโดยสายตาของผู้ทดสอบเอง

2. วิธีการวัดค่า Striation spacing ที่เกิดขึ้นบริเวณผิวงาน

3. วิธีการพิจารณาจากอายุรวมของชิ้นงานภายหลังการทดสอบ

4. วิธี Potential drop technique โดยการใช้ของเหลวความเข้มข้นสูง (high constant current) แทรกซึมรอยร้าวที่เกิดขึ้น ซึ่งจะทำให้เห็นจุดสิ้นสุดของรอยร้าว

5. การใช้รังสี Ultrasonic ซึ่งวิธีนี้เป็นวิธีที่ซับซ้อน แต่ก็มีผลของความเบี่ยงเบนของการวัดน้อยกว่าวิธีอื่น ๆ

Sinclair และ Dolan (1953) ทำการทดลองที่ระดับของ alternate stress 6 ระดับ พบว่าเมื่อนำอายุของชิ้นทดสอบ (ตามจำนวนรอบ) ที่ทดสอบมาวาดกราฟการกระจายความถี่ พบว่าจะมีลักษณะเบ้ขวา และไม่ใช่การกระจายแบบปกติ แต่ถ้านำผลอายุมาใส่ค่าล็อกการิทึมแล้ว จะพบว่ากราฟที่ได้มีการกระจายแบบปกติ นอกจากนี้แล้วผลการทดลองยังแสดงให้เห็นว่าที่ระดับของภาระสูง ๆ จะมีการกระจายของอายุชิ้นทดสอบมากกว่าภาระต่ำ

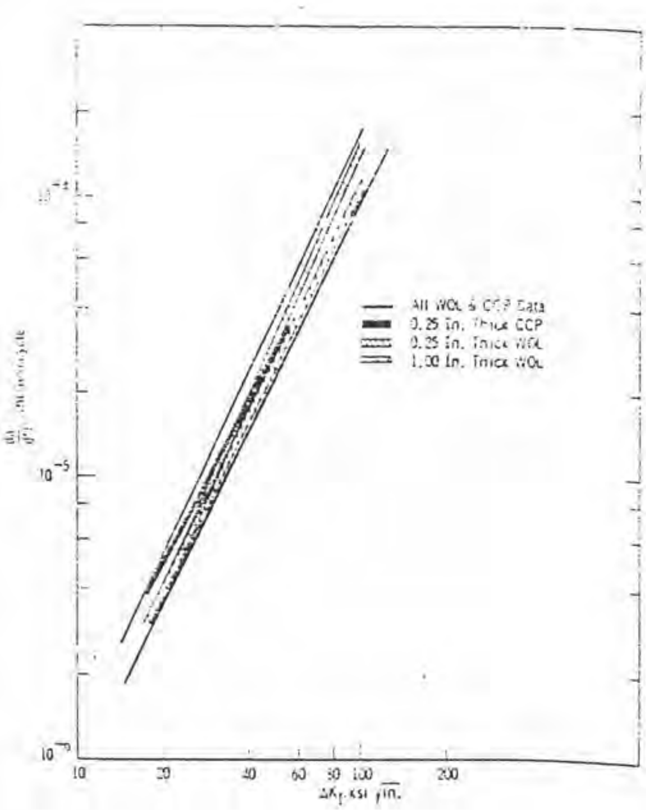
Clark และ Hudak (1975) ได้ทดลองหาการกระจายของข้อมูลการทดสอบอัตราการขยายตัวของความยาวรอยร้าวเนื่องจากความล้าโดยใช้ชิ้นทดสอบแบบ wedge-opening-loading (WOL) type และ compact type C(T) ผลการทดสอบจากห้องทดลอง 25 ห้องทดลอง โดยได้แบ่งความผันแปรในการทดสอบออกเป็น 2 แบบคือ ความผันแปรระหว่างห้องทดลอง (Interlaboratory Variability) และ ความผันแปรภายในห้องทดลอง (Interlaboratory Variability) ซึ่งได้เสนอวิธีการหาความผันแปรจาก โดย

1. วิธีกราฟ (Graphical) เพื่อพิจารณาเปรียบเทียบผลที่ได้จากแต่ละการทดสอง

2. หาค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ซึ่งจากวิธีนี้ก็อาจทำให้เกิดความผิดพลาดได้เนื่องจากวิธีการดังกล่าวเหมาะสมกับข้อมูลที่มีการกระจายความน่าจะเป็นแบบนอร์มอล แต่ผลการทดสอบของการขยายตัวของความยาวรอยร้าวนี้มีการกระจายแบบล็อกนอร์มอล ดังนั้นจึงต้องมีการแปลงข้อมูลให้มีการกระจายแบบนอร์มอลเสียก่อน

3. วิธี Least Square Line เพื่อหาค่าความเชื่อมั่นของแต่ละค่าของผลการทดลอง (local confidence) และหาค่าความเชื่อมั่นโดยรวม (global confidence) ดังรูปที่ 2.13 ซึ่งใน

การหาค่าความเชื่อมั่นนี้ใช้การจับกลุ่มค่าของ ΔK โดยการประมาณค่า ΔK ที่ช่วงประมาณ 20, 30, 40, 60 และ 80 ตามลำดับ ซึ่ง Clack และ Hudak ได้เลือกระดับความเชื่อมั่นที่ระดับ 95 % และหา Residual Variance (R^2) และค่า Variability Factor, VF

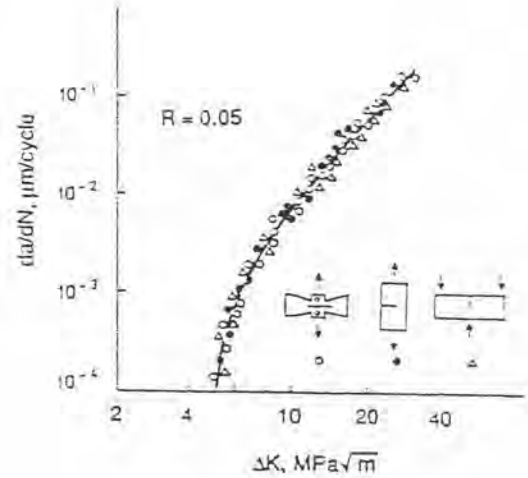


รูปที่ 2.13 แสดงระดับความเชื่อมั่นโดยรวม (global confidence) 95 % จากงานวิจัยของ Clark และ Hudak

Eason, Gilman, Jones และ Andrew (1992) ได้ศึกษาการสร้างโค้งอ้างอิง (reference curve) โดยให้ข้อมูลการทดสอบของวัสดุ A508 Class 2 และ A533B ferrtic steels จำนวน 1106 จุด โดยกำหนดให้ข้อมูลมีการกระจายแบบล็อกนอร์มอล ซึ่งจากการเปรียบเทียบวิธีการ 3 วิธีคือ Optimal data reduction , Secant และ 7-Point polynomial พบว่าวิธี Optimal data reduction method ให้ผลดีกว่าวิธีอื่นๆ จากนั้นได้หาระดับความเชื่อมั่นของข้อมูลการทดลอง ซึ่งผู้วิจัยได้แนะนำให้ใช้ระดับความเชื่อมั่น 95 % ของสมการถดถอย แต่ในกรณีที่มีการเก็บรวบรวมข้อมูลที่มากกว่านี้ที่ระดับความเชื่อมั่น 97.5 % จะมีความเหมาะสมมากกว่า

Volkmar (1993) ได้แสดงวิธี GR&R (Gage Repeatibility and Reproducibility) และ MSV (Masurement Systems Variability) ซึ่งเป็นวิธีการทางสถิติที่ใช้วัดความแปรปรวนของเครื่องมือวัด (Repratibility-Equipment Variation) ความแปรปรวนของผู้ใช้เครื่องมือวัด (Reproducibility-Operator Variation) และความแปรปรวนของสิ่งที่ทดสอบ (Part Variation) โดยทำการหาค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและเปอร์เซนต์ของสามส่วนข้างต้น และใช้เปอร์เซนต์ของ GR&R และ MSV ซึ่งได้จากค่าของรากที่สองของผลบวกกำลังสองของเปอร์เซนต์ของสามปัจจัย มาเป็นตัววัดประสิทธิภาพว่าอยู่ภายในขอบเขต หรือต่ำกว่าหรือสูงกว่าขอบเขตที่ตั้งไว้หรือไม่

Dowling (1993) ได้อธิบายถึงอิทธิพลของลักษณะรูปร่างของชิ้นทดสอบต่อกราฟ $\frac{da}{dN}$ และ ΔK โดยใช้ผลการทดสอบของ Klesnil ซึ่งทดสอบวัสดุเหล็กคาร์บอน 65 % (65 % carbon steel) นำผลการทดสอบที่ได้จากชิ้นทดสอบรูปร่างต่าง ๆ กันมาทำการพล็ตค่าเปรียบเทียบ จะได้เส้นกราฟที่อยู่ในแนวเดียวกัน ดังรูปที่ 2.14 ซึ่ง Dowling สรุปไว้ว่าในการทดสอบไม่จำเป็นต้องใช้ชิ้นทดสอบที่มีรูปร่างหลาย ๆ แบบในการทดลอง เนื่องจากรูปร่างของชิ้นทดสอบไม่มีอิทธิพลต่อผลการทดสอบ



รูปที่ 2.14 แสดงผลการทดสอบอัตราการขยายตัวของความยาวรอยร้าวจากชิ้นทดสอบลักษณะต่าง ๆ กัน