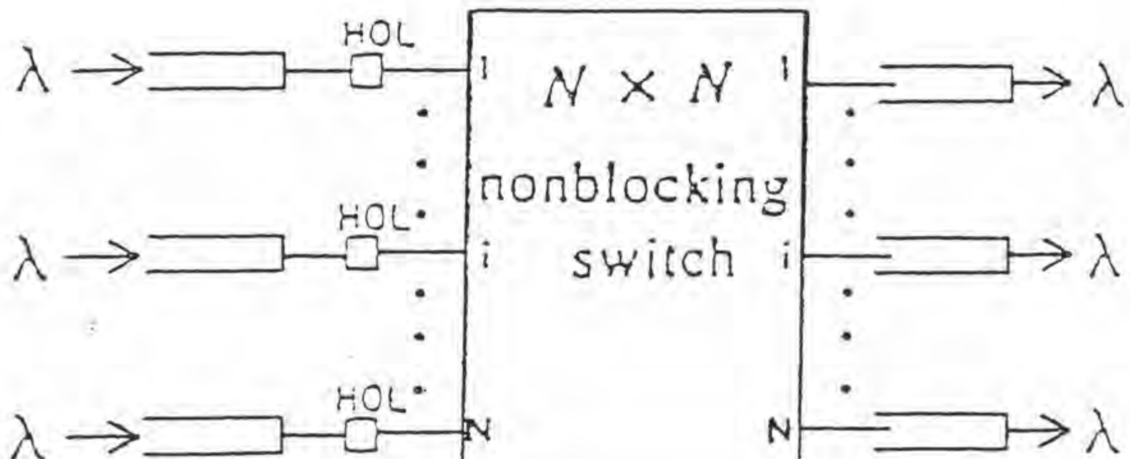
บทที่ 4

การนำแบบจำลองแถวคอย M/M/C มาประยุกต์เป็นเส้นทางสวิตช์ NxN ไม่มีการติดขัดภายใน

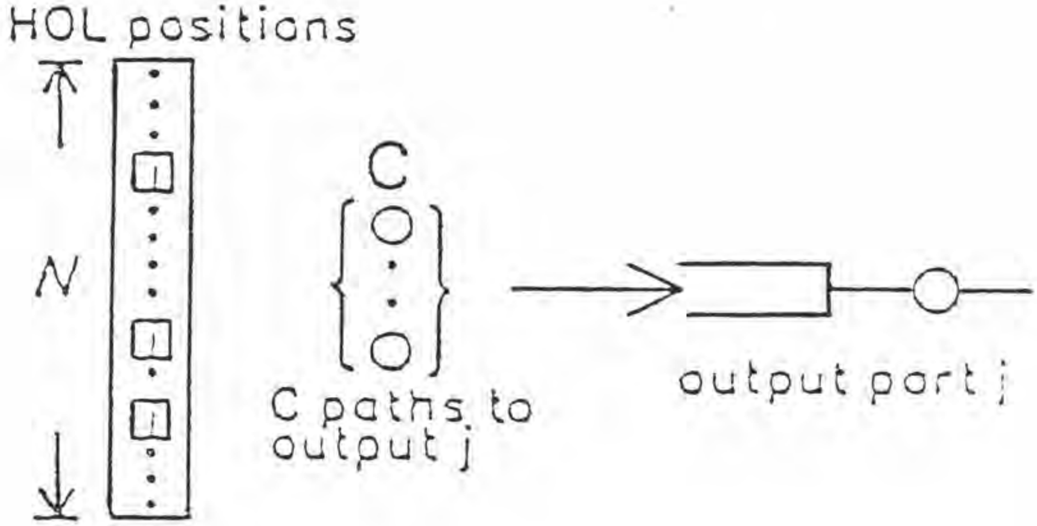
4.1 การสวิตช์กลุ่มข้อมูลชนิด NxN ไม่มีการติดขัดภายใน

การสวิตช์กลุ่มข้อมูลชนิด NxN ไม่มีการติดขัดภายในหมายถึงกลุ่มม้อมูลที่เข้ามา N ด้านเข้าสามารถออกปลายทางได้ N ทาง ถ้ากลุ่มข้อมูลไม่ต้องการออกปลายทางที่ซ้ำกัน แต่ความเป็นจริงแล้วมีกลุ่มข้อมูลด้านขาเข้าที่มาจากเส้นทางที่ต่างกันมากกว่าหนึ่งต้องการออกที่ขาออกเดียวกัน ทำให้เกิดการแย่งกันออกซึ่งปกติแล้วตามคุณสมบัติของสวิตช์กลุ่มข้อมูลมีเพียงหนึ่งกลุ่มสามารถผ่านเส้นทางสวิตช์ไปได้ขณะหนึ่งร่องเวลาเท่านั้น ส่วนที่เหลือจะต้องรอส่งในช่วงเวลาถัดไป อย่างไรก็ตาม สามารถลดปัญหานี้ได้ด้วยการเพิ่มทางผ่านสวิตช์ไปยังขาออกให้มากขึ้น ด้วยการใช้ทฤษฎีการจัดแถวคอยของแบบจำลอง M/M/C มาประยุกต์แทนเส้นทางผ่านสวิตช์โดยให้กลุ่มข้อมูลที่หัวแถวของด้านขาเข้าที่ต้องการออกขาออกเดียวกันสามารถออกได้ครั้งละ C เส้นทางในเวลาเดียวกันรูปที่ 4.1 แสดงแบบจำลองของการสวิตช์กลุ่มข้อมูลชนิดไม่มีการติดขัดภายในแบบจัดให้มีแถวคอยทางด้านขาเข้าและด้านขาออก จากรูปพิจารณากลุ่มข้อมูลที่หัวแถวคอยของทุกเส้นทางขาเข้าอาจมีกลุ่มข้อมูลที่หัวแถวคอยจำนวนมากกว่าหนึ่งต้องการออกเส้นทางออกเดียวกัน



รูปที่ 4.1 แบบจำลองการสวิตช์กลุ่มข้อมูลชนิด NxN ไม่มีการติดขัดภายใน

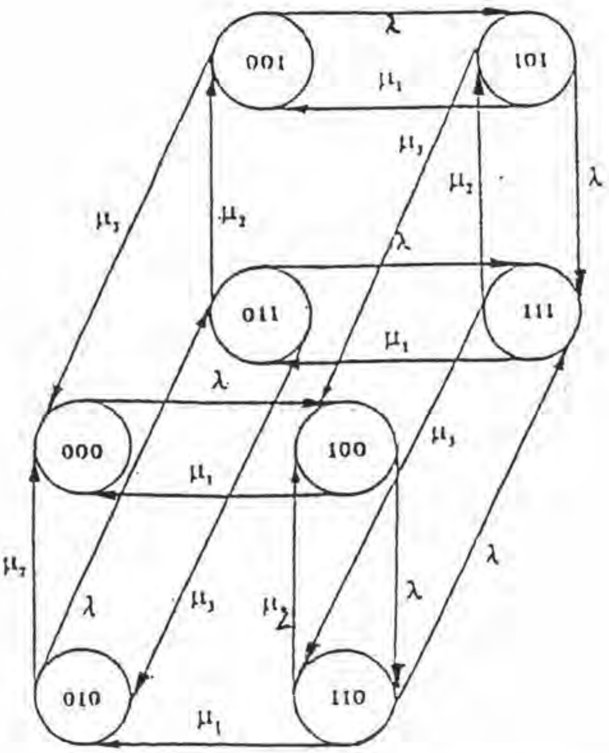
จำนวนกลุ่มข้อมูลที่หัวแถวคอยทั้งหมดที่ต้องการออกด้านออกเดียวกัน จัดให้อยู่ในแบบแถวคอยเสมือนที่มีเส้นทางออกได้จำนวน C เส้นทางในเวลาเดียวกันรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 แถวคอยเสมือนของกลุ่มข้อมูลที่หัวแถวคอยต้องการออกขาออกเดียวกัน

4.2 <u>กำหนดให้ C มีจำนวนเป็น 3 เส้นทางสวิตช์โดยจัดให้ผ่านไปด้านออกได้ 2 วิธี</u>

4.2.1 กำหนดให้ผ่านเส้นทางสวิตช์ 1, 2, 3 ตามลำดับเข้าก่อนออกก่อน การทำงานเมื่อมีจำนวนกลุ่มข้อมูลที่หัวแถวคอยของขาเข้าทั้งหมดต้องการออกที่ด้านออกเดียวกัน สมมุติให้เป็นแถวคอยเสมือนทางด้านขาเข้าให้กลุ่มข้อมูลที่เข้ามาที่ทางผ่านสวิตช์ตามวิธีการของปัวส์ซองด้วยอัตราความเร็ว λ กลุ่มข้อมูลต่อหน่วยเวลามีอัตราความเร็ว μ_1 , μ_2 , μ_3 ในการส่งกลุ่มข้อมูลผ่านเส้นทางสวิตช์ 1 , 2 และ 3 ตามลำดับเท่ากับกลุ่มข้อมูลต่อหน่วยเวลา รูปที่ 4.2 นำมาเขียนแผนภาพการเปลี่ยนแปลงสถานะการทำงานของ 3 เส้นทางสวิตช์เพื่อนำมาคำนวณความน่าจะเป็นในสภาวะคงที่ของกลุ่มข้อมูลที่ไม่มีอยู่ในระบบได้ ตามรูปที่ 4.3 สมมุติให้กลุ่มข้อมูลที่ออกจากแถวคอยเสมือนต้องการส่งผ่าน C เส้นทางสวิตช์ไปยังขาออกที่ต้องการจะเริ่มต้นส่งผ่านเส้นทางที่ 1 , 2 และ 3 ตามลำดับเสมอ ใช้หลักการของไบนารี 3-cube จัดสถานะ 3 สถานะการทำงานของทางผ่านสวิตช์ดังนี้ (000) , (100) , (010) , (111) , (011) , (001) และ (101) ให้ตำแหน่งที่ 1 , 2 และ 3 ของ 3-cube แสดงว่ามีกลุ่มข้อมูลส่งผ่านเส้นทางสวิตช์ที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ ในแต่ละตำแหน่งมีค่าเป็น 0 และ 1 เท่านั้น ซึ่งหมายถึงว่า (1 ทำงาน, 0 ไม่ทำงาน)



รูปที่ 4.3 แผนภาพการเปลี่ยนแปลงสถานะการทำงานของ 3 เส้นทางสวิตช์

จากรูปที่ 4.3 นำมาเขียนสมการความสัมพันธ์อัตราการเข้าของกลุ่มข้อมูลเท่ากับอัตราออกของกลุ่มข้อมูลที่สถานะการเกิดนั้น คือ

$$\lambda P_{000} = \mu_1 P_{100} + \mu_2 P_{010} + \mu_3 P_{001} \qquad 4.1$$

$$(\lambda + \mu_1) P_{100} = \lambda P_{000} + \mu_2 P_{110} + \mu_3 P_{101} \qquad 4.2$$

$$(\lambda + \mu_2) P_{010} = \mu_1 P_{110} + \mu_3 P_{011} \qquad 4.3$$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_{110} = \lambda_1 P_{100} + \mu_3 P_{111} \qquad 4.4$$

$$(\lambda + \mu_2 + \mu_3) = \mu P_{111} + \lambda P_{010} \qquad 4.5$$

$$(2\lambda + \mu_1) P_{101} = \lambda P_{001} + \mu_2 P_{111} \qquad 4.6$$

$$(\lambda + \mu_3) P_{001} = \mu_1 P_{101} + \mu_2 P_{011} \qquad 4.7$$

จากสมการที่ (4.1) ถึงสมการ (4.7) สามารถนำมาหาค่าความน่าจะเป็นของการมีกลุ่มข้อมูลที่สถานะต่างๆในพจน์ของ P_{000} ได้โดยการแก้สมการทางพีชคณิต หาค่า $P_{000}, P_{001}, P_{010}, P_{100}, P_{101}, P_{110}$ และ P_{111} หรือกำหนดให้ $P_{000} = P_0$, $P_{001} = P_1$, $P_{010} = P_2$ $P_{011} = P_3$, $P_{100} = P_4$, $P_{101} = P_5$, $P_{110} = P_6$ และ $P_{111} = P_7$ สามารถคำนวณได้คือ

กำหนดให้

$$(\lambda+\mu_1) = x$$
$$(\lambda+\mu_2) = y$$
$$(\lambda+\mu_3) = z$$

นำไปแทนค่าในสมการสมดุล (4.1)ถึง(4.7)

$$\lambda P_0 = \mu_1 P_4 + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_1 \qquad 4.8$$
$$xP_4 = \lambda P_0 + \mu_2 P_6 + \mu_3 P_5 \qquad 4.9$$
$$yP_2 = \mu_1 P_6 + \mu_3 P_3 \qquad 4.10$$
$$(x+\mu_2)P_6 = \lambda P_4 + \mu_3 P_7 \qquad 4.11$$
$$zP_1 = \mu_1 P_5 + \mu_2 P_3 \qquad 4.12$$
$$(\lambda+x)P_5 = \lambda P_1 + \mu_2 P_7 \qquad 4.13$$
$$(y+\mu_3) = \mu_1 P_7 + \lambda P_2 \qquad 4.14$$

จาก (4.14)

$$P_7 = \frac{1}{\mu_1}\left[(y+\mu_3)P_3 - \lambda P_2\right] \qquad 4.15$$

จาก (4.10)

$$P_6 = \frac{1}{\mu_1}\left[yP_2 - \mu_3 P_3\right] \qquad 4.16$$

จาก (4.12)

$$P_5 = \frac{1}{\mu_1}\left[zP_1 - \mu_2 P_3\right] \qquad 4.17$$

จาก (4.18)

$$P_4 = \frac{1}{\mu_1}\left[\lambda P_0 - \mu_2 P_2 - \mu_3 P_1\right] \qquad 4.18$$

หาค่า P_1, P_2 และ P_3 ในรูปของเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} \mu_3(x+z) & \mu_2(x+y) & -2\mu_2\mu_3 \\ \lambda\mu_3 & [y(x+\mu_2)(\mu_2+\mu_3)] & -\mu_3(x+y+\mu_2\mu_3) \\ [z(x+\lambda)-\lambda\mu_1] & \lambda\mu_2 & -\mu_2(x+y+2\mu_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 P_0 \\ \lambda^2 P_0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 4.19$$

ดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์เมตริกซ์ (Δ)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_3(x+z)C_{11} & \mu_2(x+y)C_{12} & -2\mu_2\mu_3 C_{13} \\ \lambda\mu_3 C_{21} & [y(x+\mu_2)+\lambda(\mu_2+\mu_3)]C_{22} & -\mu_3(x+y+\mu_2+\mu_3)C_{23} \\ [z(x+\lambda)-\mu_1\lambda]C_{31} & \lambda\mu_2 C_{32} & -\mu_2(x+y+2\mu_3)C_{33} \end{vmatrix} \qquad 4.20$$

พิจารณา ΔP_1;

$$\Delta P_1 = \begin{vmatrix} \lambda^2 P_0 & \mu_2(2\lambda+\mu_1+\mu_2)C_{12} & -2\mu_2\mu_3 C_{13} \\ \lambda^2 P_0 & \lambda^2+\lambda(\mu_1+3\mu_2+\mu_3)+\mu_2(\mu_1+\mu_2)C_{22} & -\mu_3(2\lambda+\mu_1+2\mu_2+\mu_3)C_{23} \\ 0 & \lambda\mu_2\mu_3 C_{32} & -\mu_2(2\lambda+\mu_1+\mu_2+2\mu_3)C_{33} \end{vmatrix} \quad 4.21$$

$$\Delta P_1 = \lambda^2 P_0 C_{22}C_{33} + C_{12}C_{23}(0) + C_{13}\lambda^2 P_0 C_{32} - (0)C_{22}C_{13} - C_{32}C_{23}\lambda^2 P_0 - C_{33}\lambda^2 P_0 C_{12}$$

$$\Delta P_1 = \lambda^2\mu_2 P_0[2\lambda^3 + \lambda^2(3\mu_1+3\mu_2+2\mu_3) + \lambda(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2) + 2\mu_1\mu_2 + 2\mu_1\mu_3 + 3\mu_2\mu_3 \quad 4.22$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
C_{22}C_{33} &= [\lambda^2+\lambda(\mu_1+3\mu_2+\mu_3)+\mu_2(\mu_1+\mu_2)][-\mu_2(2\lambda+(\mu_1+\mu_2+2\mu_3)] \\
C_{13}C_{32} &= -2\lambda\mu_2^2\mu_3 \\
C_{23}C_{32} &= -[2\lambda^2\mu_2\mu_3 + \lambda(\mu_1\mu_2\mu_3 + 2\mu_2^2\mu_3 + \mu_2\mu_3^2)] \\
C_{12}C_{33} &= -\mu_2^2[4\lambda^2+\lambda(4\mu_1+4\mu_2+4\mu_3)+(\mu_1^2+\mu_2^2+2\mu_1\mu_2+2\mu_1\mu_3+2\mu_2\mu_3]
\end{aligned} \quad 4.23$$

พิจารณา ΔP_2 ;

$$\Delta P_2 = \begin{vmatrix} \mu_3[2\lambda+\mu_1+\mu_3)]C_{11} & \lambda^2 P_0 & -2\mu_2\mu_3 C_{13} \\ \lambda\mu_3 C_{12} & \lambda^2 P_0 & -\mu_3[2\lambda+(\mu_1+2\mu_2+\mu_3)]C_{23} \\ \lambda^2+2\lambda\mu_3+\mu_3(\mu_1+\mu_3)C_{31} & 0 & -\mu_2[2\lambda+(\mu_1+\mu_2+2\mu_3)]C_{33} \end{vmatrix} \quad 4.24$$

$$\begin{aligned}
\Delta P_2 &= \lambda^2 P_0(C_{11}C_{33} + C_{23}C_{31} - C_{13}C_{31} - C_{21}C_{33}) \\
\Delta P_2 &= -\mu_3\lambda^2 P_0[2\lambda^3 + \lambda^2(\mu_1+2\mu_2+5\mu_3) + (\mu_2^2+4\mu_3^2+3\mu_1\mu_2+4\mu_1\mu_3+ \\
&\quad 4\mu_1\mu_3+4\mu_2\mu_3) + (\mu_3^3+\mu_1^2\mu_2+\mu_1^2\mu_3+\mu_1\mu_2^2+2\mu_1\mu_3^2+2\mu_2\mu_3^2+\mu_2^2\mu_3+3\mu_1\mu_2\mu_3)]
\end{aligned} \quad 4.25$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
C_{11}C_{33} &= \mu_3[2\lambda+\mu_1+\mu_3]\,[-\mu_2(2\lambda+\mu_1+\mu_2+2\mu_3)] \\
C_{23}C_{31} &= -\mu_3[2\lambda+\mu_1+2\mu_2+\mu_3]\,[\lambda^2+2\lambda\mu_3+\mu_3(\mu_1-\mu_3)] \\
C_{12}C_{31} &= [-2\mu_2\mu_3]\,[\lambda^2+2\lambda\mu_3+\mu_3(\mu_1+\mu_3)] \\
C_{21}C_{33} &= [2\mu_3]\,[-\mu_2(2\lambda+\mu_1+\mu_2+2\mu_3]
\end{aligned} \quad 4.26$$

พิจารณา ΔP_3;

$$\Delta P_3 = \begin{vmatrix} \mu_3[2\lambda+\mu_1+\mu_3]C_{11} & \mu_2[2\lambda+\mu_1+\mu_2]C_{12} & \lambda^2 P_0 \\ \lambda\mu_3 C_{21} & \lambda^2+\lambda(\mu_1+3\mu_2+\mu_3)+\mu_2(\mu_1+\mu_2)C_{22} & \lambda^2 P_0 \\ \lambda^2+2\lambda\mu_3+\mu_3(\mu_1+\mu_3)C_{31} & \lambda\mu_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta P_3 = \lambda^2 P_0(C_{12}C_{31}+C_{21}C_{32}-C_{22}C_{31}-C_{11}C_{32})$$

$$\Delta P_3 = -\lambda^2 P_0[\lambda^4+\lambda^3(\mu_1+\mu_2+3\mu_3)+\lambda^2(3\mu_3^2+3\mu_1\mu_3+3\mu_2\mu_3+ \\ \lambda(\mu_3^3+\mu_1^2\mu_3+2\mu_1\mu_3^2+2\mu_1\mu_3^2+2\mu_1\mu_2\mu_3)]$$

4.27

เมื่อ

$$C_{12}C_{31} = \mu_2[2\lambda+\mu_1+\mu_3][\lambda^2+2\lambda\mu_3+\mu_3(\mu_1+\mu_3)]$$
$$C_{21}C_{32} = \lambda^2\mu_2\mu_3$$
$$C_{22}C_{31} = [\lambda^2+\lambda(\mu_1+3\mu_2+\mu_3)+\mu_2(\mu_1+\mu_2)][\lambda^2+2\lambda\mu_3+\mu_3(\mu_1+\mu_3)]$$
$$C_{11}C_{32} = \mu_3[2\lambda+(\mu_1+\mu_3)][\lambda\mu_2]$$

4.28

ดังนั้น

$$P_1 = \frac{\Delta P_1}{\Delta} \qquad 4.29$$

$$P_2 = \frac{\Delta P_2}{\Delta} \qquad 4.30$$

$$P_3 = \frac{\Delta P_3}{\Delta} \qquad 4.31$$

นำสมการ (4.29) , (4.30) แทนใน (4.18)

$$P_4 = \frac{1}{\mu_1\Delta}[\lambda\Delta P_0-\mu_2\Delta P_2-\mu_3\Delta P_1] \qquad 4.32$$

นำสมการ (4.29) , (4.31) แทนในสมการ (4.17)

$$P_5 = \frac{1}{\mu_1\Delta}[(\lambda+\mu_3)\Delta P_1-\mu_2\Delta P_3] \qquad 4.33$$

นำสมการ (4.30) ,(4.31) แทนใน (4.16)

$$P_6 = \frac{1}{\mu_1\Delta}[(\lambda+\mu_2)\Delta P_2-\mu_3\Delta P_3] \qquad 4.34$$

นำสมการ (4.30),(4.31) แทนใน (4.15)

$$P_7 = \frac{1}{\mu_1\Delta}[(\lambda+\mu_2+\mu_3)\Delta P_3-\lambda\Delta P_2] \qquad 4.35$$

จาก $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ 4.36

แทนค่า P_0 - P_7 ในสมการ (4.36)

$$P_0 + \frac{\Delta P_1}{\Delta} + \frac{\Delta P_2}{\Delta} + \frac{\Delta P_3}{\Delta} + \frac{1}{\mu_1 \Delta}[\lambda \Delta P \lambda_0 - \mu_2 \Delta P_2 - \mu_3 \Delta P_1] + \frac{1}{\mu_1 \Delta}[(\lambda + \mu_3)\Delta P_1 - \mu_2 \Delta P_3]$$

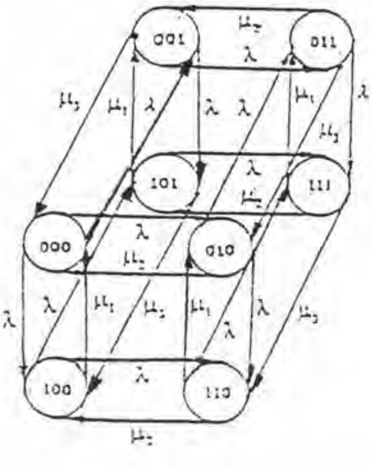
$$+ \frac{1}{\mu_1 \Delta}[(\lambda + \mu_2)\Delta P_2 - \mu_3 \Delta P_3] + \frac{1}{\mu_1 \Delta}[\lambda - \mu_2 + \mu_3)\Delta P_3 - \lambda \Delta P_2] \quad = 1$$

$$P_0 = 1\{ \frac{\Delta P_1}{\Delta}\frac{(\lambda + \mu_1 + 2\mu_3)}{\mu_1} - \frac{\Delta P_2}{\Delta}\frac{(\mu_1 + 2\mu_2)}{\mu_1} - \frac{\Delta P_3}{\Delta}\frac{(\mu_1 + \lambda)}{\mu_1} \,][\, 1 - \frac{\lambda}{\mu_1} \,]^{-1} \qquad 4.37$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}\Delta \; = & -\mu_2\mu_3[6\lambda^2 + 10\lambda^3(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \lambda^2(6\mu_1^2 + 6\mu_2^2 + 6\mu_3^2 + 13\mu_1\mu_2 + 19\mu_1\mu_3 \\ & + 16\mu_2\mu_3) + \lambda(\mu_1^3 + \mu_2^3 + \mu_3^3 + 7\mu_1^2\mu_2 + 7\mu_1^2\mu_3 + 6\mu_2^2\mu_3 + 7\mu_1\mu_2^2 + 7\mu_1\mu_3^2 \\ & + 5\mu_1\mu_3^2 + 15\mu_1\mu_2\mu_3) + (\mu_1^3\mu_2 + \mu_1^3\mu_3 + 2\mu_1^2\mu_2^2 + 2\mu_1^2\mu_3^2 + 4\mu_1^2\mu_2\mu_3 \\ & + 4\mu_1\mu_2^2\mu_3 + 4\mu_1\mu_2\mu_3^2 + \mu_1\mu_2^3 + \mu_1\mu_3^3 + \mu_2^3\mu_3 + 2\mu_2^2\mu_3^2 + 4\mu_2\mu_3^3]\end{aligned}$$

4.2.2 กำหนดให้ผ่านเส้นทางสวิตช์ 1,2 และ 3 อย่างสุ่ม การทำงานของเส้นทางสวิตช์แบบสุ่มนั้นเมื่อมีกลุ่มข้อมูลที่หัวแถวคอยด้านเข้าจำนวนมากกว่าหนึ่งกลุ่มข้อมูลต้องการออกที่ปลายทางเดียวกันก็สามารถที่จะผ่านสวิตช์ใดก่อนก็ได้ ในจำนวน 3 เส้นทางที่ว่างอยู่สามารถแสดงแผนแบบการเปลี่ยนแปลงสถานะการทำงานได้ดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 แผนภาพการเปลี่ยนแปลงสถานะการทำงานของ 3 เส้นทางสวิตช์แบบสุ่ม

จะเห็นว่าลำดับการทำงานของเส้นทางสวิตช์จะรับกลุ่มข้อมูลจากหัวแถวคอยด้านเข้าส่งไปยังด้านออกใดๆ ตามเส้นทาง 2,1,3 หรือ 3,1,2 หรือ 1,3,2 หรือ 3,2,1 จากรูปที่ 4.4 นำมาเขียนสมการอัตราการเข้าของกลุ่มข้อมูลเท่ากับอัตราการออกของกลุ่มข้อมูล คือ

$$3\lambda P_{000} = \mu_1 P_{100} + \mu_2 P_{010} + \mu_3 P_{001} \tag{4.38}$$

$$(3\lambda + \mu_2) P_{010} = \lambda P_{000} + \mu_1 P_{110} + \mu_3 P_{011} \tag{4.39}$$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_{110} = \lambda P_{100} + \lambda P_{010} + \mu_3 P_{111} \tag{4.40}$$

$$(2\lambda + \mu_1) P_{100} = \lambda P_{000} + \mu_2 P_{110} + \mu_3 P_{101} \tag{4.41}$$

$$(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) P_{111} = \lambda P_{101} + \lambda P_{011} + \lambda P_{110} \tag{4.42}$$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_3) P_{101} = \lambda P_{001} + \lambda P_{100} + \mu_2 P_{111} \tag{4.43}$$

$$(2\lambda + \mu_3) P_{001} = \lambda P_{000} + \mu_1 P_{101} + \mu_2 P_{011} \tag{4.44}$$

จากสมการที่ (4.38) ถึง (4.44) นำมาหาค่าความน่าจะเป็นของการมีกลุ่มข้อมูลในสถานะต่างๆในพจน์ของ P_{000} ได้ดังนี้

กำหนดให้

$$(2\lambda + \mu_1) = x$$

$$(2\lambda + \mu_2) = y$$

$$(2\lambda + \mu_3) = z$$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2) = m$$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_3) = n$$

จากสมการ (4.38) ถึง (4.44) เขียนได้ใหม่เป็น

$$3\lambda P_0 = \mu_2 P_2 + \mu_1 P_4 + \mu_3 P_1 \tag{4.45}$$

$$y P_2 = \lambda P_0 + \mu_1 P_6 + \mu_3 P_3 \tag{4.46}$$

$$m P_6 = \lambda P_4 + \lambda P_2 + \mu_3 P_7 \tag{4.47}$$

$$x P_4 = \lambda P_0 + \mu_2 P_6 + \mu_3 P_5 \tag{4.48}$$

$$(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) P_7 = \lambda P_6 + \lambda P_3 + \lambda P_5 \tag{4.49}$$

$$n P_5 = \lambda P_1 + \lambda P_4 + \mu_2 P_7 \tag{4.50}$$

$$z P_1 = \lambda P_0 + \mu_1 P_5 + \mu_2 P_3 \tag{4.51}$$

จากสมการ (4.49)

$$P_7 = \rho (P_6 + P_3 + P_5) \tag{4.52}$$

จากสมการ (4.46)

$$P_6 = \frac{1}{\mu_1}[yP_2 - \lambda P_0 - \mu_2 P_3] \quad 4.53$$

จากสมการ (4.51)

$$P_5 = \frac{1}{\mu_1}[zP_1 - \lambda P_0 - \mu_2 P_3] \quad 4.54$$

จากสมการที่ (4.45)

$$P_4 = \frac{1}{\mu_1}[3\lambda P_0 - \mu_2 P_2 - \mu_3 P_1] \quad 4.55$$

นำค่า (4.53) และ (4.54)แทนใน (4.52)

$$P_7 = \frac{\rho}{\mu_1}[yP_2 + zP_1 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)P_3 - 2\lambda P_0] \quad 4.56$$

เมื่อ $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$

นำสมการ (4.56) (4.53) และ (4.55) แทนใน (4.47)

$$(my + \lambda\mu_2 - \lambda\mu_1 - \rho\mu_3 y)P_2 = (3\lambda^2 - m\lambda - 2\rho\mu_3\lambda)P_0 + (\rho\mu_3 z - \lambda\mu_3)P_1 + [\rho\mu_3(\mu_1 - \mu_2 - \mu_3) + m\mu_3]P_3 \quad 4.57$$

นำสมการ (4.53),(4.54) และ (4.55) แทนใน (4.48)

$$[6\lambda^2 + \lambda(2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)]P_0 = \mu_3[4\lambda + (\mu_1 + \mu_3)]P_1 + \mu_2[4\lambda + (\mu_1 + \mu_2)]P_2 - 2\mu_2\mu_3 P_3 \quad 4.58$$

นำสมการ (4.54) , (4.55) และ (4.56) แทนใน (4.50)

$$(nz - \lambda\mu_1 + \lambda\mu_3 - \rho\mu_2 z)P_1 + (\lambda\mu_2 + \rho\mu_2 y)P_2 + (-n\mu_2 - \rho\mu_2(\mu_1 - \mu_2 - \mu_3)P_3 = (-2\rho\mu_2 + 3\lambda^2 + \lambda\mu_1)P_0 \quad 4.59$$

นำสมการ (4.57) , (4.58) และ (4.59) เขียนในรูปเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [4\lambda^2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2 - 2 + \rho\mu_3)]P_0 \\ [6\lambda^2 + \lambda(2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)]P_0 \\ [3\lambda^2 + \lambda\mu_1 - 2\rho\mu_2]P_0 \end{bmatrix} \quad 4.60$$

เมื่อ

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= -\mu_3\left[\lambda(2\rho-1)+\rho\mu_3\right] \\
C_{12} &= 2\lambda^2+\lambda(\mu_1+4\mu_2-2\rho\mu_3)+\mu_2(\mu_1+\mu_2-\rho\mu_3) \\
C_{13} &= \mu_3\left[\lambda+(\mu_1+\mu_2\rho\mu_1-\rho\mu_2-\rho\mu_3)\right] \\
C_{21} &= \mu_3\left[4\lambda+(\mu_1+\mu_3)\right] \\
C_{22} &= \mu_2\left[4\lambda+(\mu_1+\mu_2)\right] \\
C_{23} &= -2\mu_2\mu_3 \\
C_{31} &= 2\lambda^2+\lambda+(\mu_1+4\mu_3-\rho\mu_2+\mu_3(\mu+\mu_3-\rho\mu_2) \\
C_{32} &= -\mu_2\left[\lambda(2\rho-1)+\rho\mu_2\right] \\
C_{33} &= -\mu_2\left[\lambda+(\mu_1+\mu_3)+\rho\mu_1-\rho\mu_2-\rho\mu_3\right]
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

ดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์เมตริกซ์

$$
\Delta = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \tag{4.62}
$$

$$
\Delta = C_{11}C_{22}C_{33}+C_{12}C_{23}C_{31}+C_{13}C_{21}C_{32}-C_{13}C_{22}C_{31}-C_{11}C_{23}C_{32}-C_{12}C_{21}C_{33}
$$

เมื่อกำหนดให้

$$v = 4\lambda^2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2 - 2\rho\mu_3)$$
$$u = 6\lambda^2 + \lambda(2\mu_1 + \mu \ + \mu_3)$$
$$w = 3\lambda^2 + \lambda\mu_1 - 2\rho\mu_2$$

$$\Delta P_1 = \begin{vmatrix} vP_0 & C_{12} & C_{13} \\ uP_0 & C_{22} & C_{23} \\ wP_0 & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta P_1 = P_0(vC_{22}C_{33} + wC_{12}C_{23} + uC_{13}C_{32} - wC_{13}C_{22} - vC_{23}C_{32} - uC_{12}C_{33} \qquad 4.63$$

$$\Delta P_2 = \begin{vmatrix} C_{11} & vP_0 & C_{13} \\ C_{21} & uP_0 & C_{23} \\ C_{31} & wP_0 & C_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta P_2 = P_0(uC_{11}C_{33} + vC_{23}C_{31} + wC_{13}C_{21} - uC_{13}C_{31} - wC_{11}C_{23} - vC_{21}C_{23} \qquad 4.64$$

$$\Delta P_3 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & vP_0 \\ C_{21} & C_{22} & uP_0 \\ C_{31} & C_{23} & wP_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta P_3 = P_0(wC_{11}C_{22} + uC_{12}C_{31} + vC_{21}C_{32} - vC_{22}C_{31} - uC_{11}C_{32} - wC_{12}C_{21} \qquad 4.65$$

ดังนั้นค่า P_1 , P_2 และ P_3 คือ :

$$P_1 = \frac{AP_0}{\Delta} \qquad 4.66$$

$$P_2 = \frac{BP_0}{\Delta} \qquad 4.67$$

$$P_3 = \frac{CP_0}{\Delta} \qquad 4.68$$

เมื่อ

$$A = v(C_{22}C_{33} - C_{23}C_{32}) + u(C_{13}C_{32} - C_{12}C_{33}) + w(C_{12}C_{23} - C_{13}C_{22})$$
$$B = v(C_{23}C_{31} - C_{21}C_{33}) + u(C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31}) + w(C_{13}C_{21} - C_{11}C_{23}) \qquad 4.69$$
$$C = v(C_{21}C_{32} - C_{22}C_{31}) + u(C_{12}C_{31} - C_{11}C_{32}) + w(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})$$

นำค่า P_1, P_2 และ P_3 แทนในสมการ (4.55),(4.54),(4.53) และ (4.56)

$$P_4 = \frac{P_0}{\mu_1\Delta}\left[3\lambda\Delta - \mu_2 B - \mu_3 A\right] \qquad 4.70$$

$$P_5 \quad = \quad \frac{\mathrm{P}_0}{\mu_1\Delta}\left[(2\rho + \mu_3)A - \lambda\Delta - \mu_2 C\right] \qquad 4.71$$

$$P_6 \quad = \quad \frac{\mathrm{P}_0}{\mu_1\Delta}\left[(2\lambda + \mu_2)B - \lambda\Delta - \mu_3 C\right] \qquad 4.72$$

$$P_7 \quad = \quad \frac{\rho\mathrm{P}_0}{\mu_1\Delta}\left[(2\lambda + \mu_2)B + (2\lambda + \mu_3)A + (\mu_1 - \mu_2 - \mu_3)C - 2\Delta\right] \qquad 4.73$$

จาก(4.36)

$$P_0 + \frac{AP_0}{\Delta} + \frac{BP_0}{\Delta} + \frac{CP_0}{\Delta} + \frac{P_0}{\Delta\mu_1}\left[\ 3\lambda\Delta - \mu_2 B - \mu_3 A\ \right] + \frac{P_0}{\mu_1\Delta}\left[\ (2\lambda + \mu_3)A - \lambda\mu - \mu_2 C\ \right]$$

$$+ \frac{P_0}{\mu_1\Delta}\left[\ (2\lambda + \mu_2)B - \lambda\Delta - \mu_3 C\ \right] + \frac{\rho P_0}{\mu_1\Delta}\left[\ (2\lambda + \mu_2)B + (2\lambda + \mu_3)A\right.$$

$$\left. + (\mu_1 - \mu_2 - \mu_3)C - 2\lambda\Delta\ \right] \qquad = \qquad 1$$

$$\mathrm{P}_0 \quad = \quad \mu_1\Delta\left[\ (\mu_1 - \lambda)\Delta + (2\lambda + \mu_1 + \rho(2\lambda + \mu_3)A\right.$$

$$\left. + (2\lambda + \mu_1 + \rho(2\lambda + \mu_2)B + (\rho + 1)(\mu_1 - \mu_2 - \mu_3)C\ \right]^{-1}$$

4.74

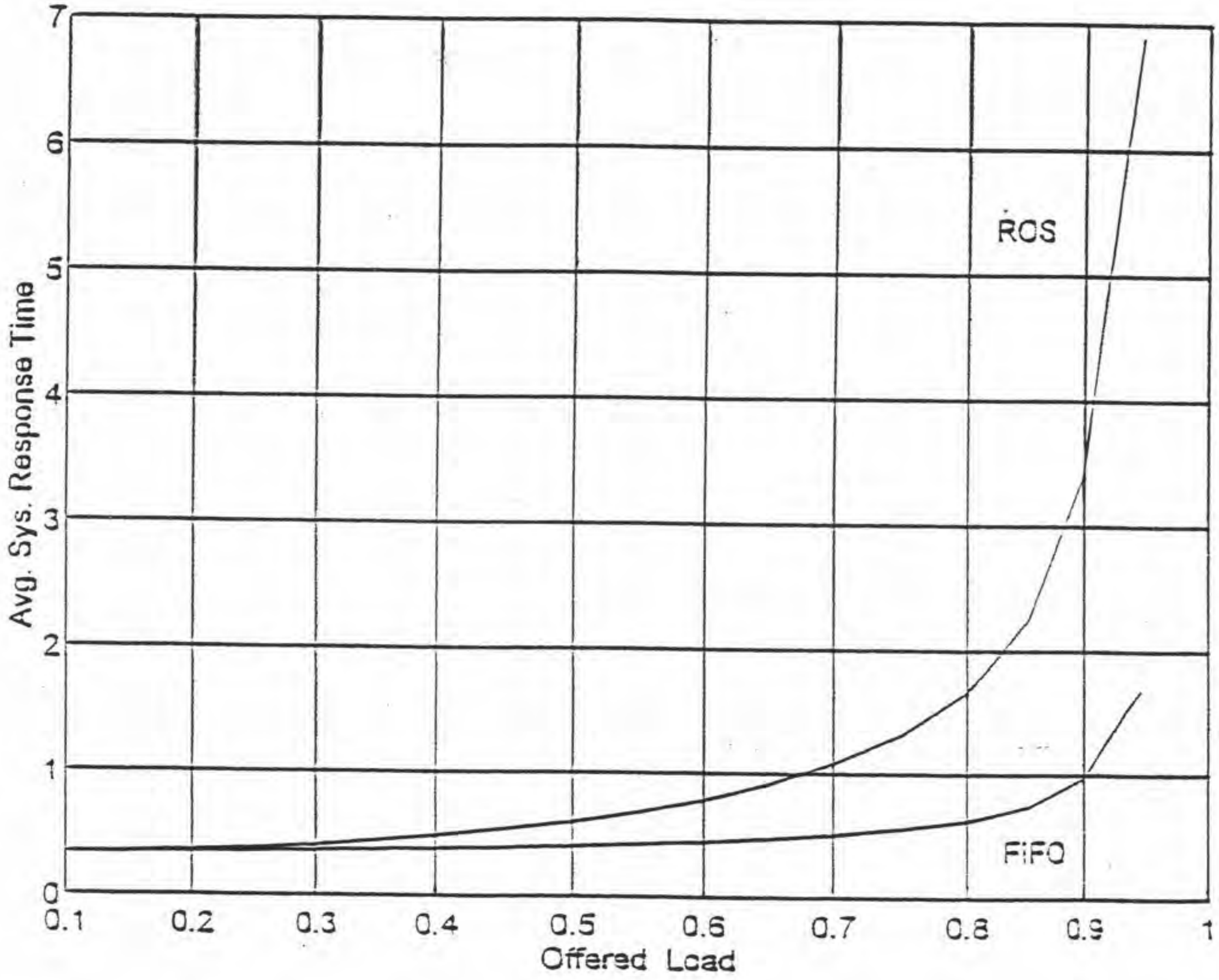
ตามที่ได้จัดเส้นทางสวิตช์ทั้งสองวิธีดังกล่าวมาแล้วและได้หาค่าความน่าจะเป็นของ P_{000} ในสภาวะคงที่ ตามสมการที่ (4.37) และ (4.74) ในการพิจารณาเวลาเฉลี่ยการทำงานของระบบได้จากทฤษฎีของลิตเติลจำนวนเฉลี่ยของกลุ่มข้อมูลในระบบคือ

$$E[N] \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbf{p}_k \qquad 4.75$$

และเวลาเฉลี่ยในการทำงานได้จาก

$$E[R] \quad = \frac{1}{\mu} + \frac{P_0(c\rho)^c}{c!(1-\rho)} \qquad 4.76$$

ใช้สมการที่(4.76) หาเวลาเฉลี่ยในการทำงานของระบบทั้งสองวิธี แล้วนำมาเปรียบเทียบกันได้ตามรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 เวลาเฉลี่ยในการทำงานของระบบที่จัดเส้นทางสวิตช์เข้าก่อนออกก่อนและเส้นทางสวิตช์แบบสุ่ม

ขั้นต่อไปพิจารณากำหนดให้กลุ่มข้อมูลที่หัวแถวคอย ที่ต้องการออกปลายทางเดียวกันออกผ่านเส้นทางสวิตช์ได้ C เส้นทางด้วย วิธีการแบบเข้าก่อนออกก่อน และ แบบสุ่มสามารถนำไปเปรียบเทียบใช้แบบจำลองของแถวคอยชนิด M/M/C เวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการส่งกลุ่มข้อมูลผ่านเส้นทางสวิตช์หาได้จาก [19]

$$\overline{W_s} = \frac{\mu(\lambda/\mu)^c P_0}{(c-1)!(C\mu-\lambda)^2} + \frac{1}{\mu} \qquad 4.77$$

พิจารณาให้แถวคอยทางด้านขาเข้าของการสวิตช์กลุ่มข้อมูลเป็นแบบ M/G/1 ซึ่งเวลาเฉลี่ยที่ส่งกลุ่มข้อมูลไปยังหัวแถวคอยหาได้จาก

$$\overline{W_i} = \overline{\mathrm{W_s}} + \frac{\lambda\overline{W_s^2}}{2(1-\lambda\overline{W_s})} \qquad 4.78$$

เมื่อ $\overline{W_s^2}$ คือโมเมนต์ที่สองของเวลาเฉลี่ยของระบบที่ใช้วิธีการจัดเข้าก่อนออกก่อนแบบสุ่มซึ่งหาได้จาก [20]

$$\overline{W_s^2}_{FIFO} = \frac{2(\lambda/\mu)^c}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2}\left[\ \frac{\mu}{c\mu-\lambda}+1\ \right]P_0 + \frac{2}{\mu^2} \qquad 4.79$$

และ

$$\overline{W_s^2}_{ROS} = \frac{2(\lambda/\mu)^c}{(c-1)!(c\mu-2)^2}P_0\left[\ \frac{2c\mu^2}{(c\mu-\lambda)(2c\mu-\lambda)^2}+1\ \right] + \frac{2}{\mu^2} \qquad 4.80$$

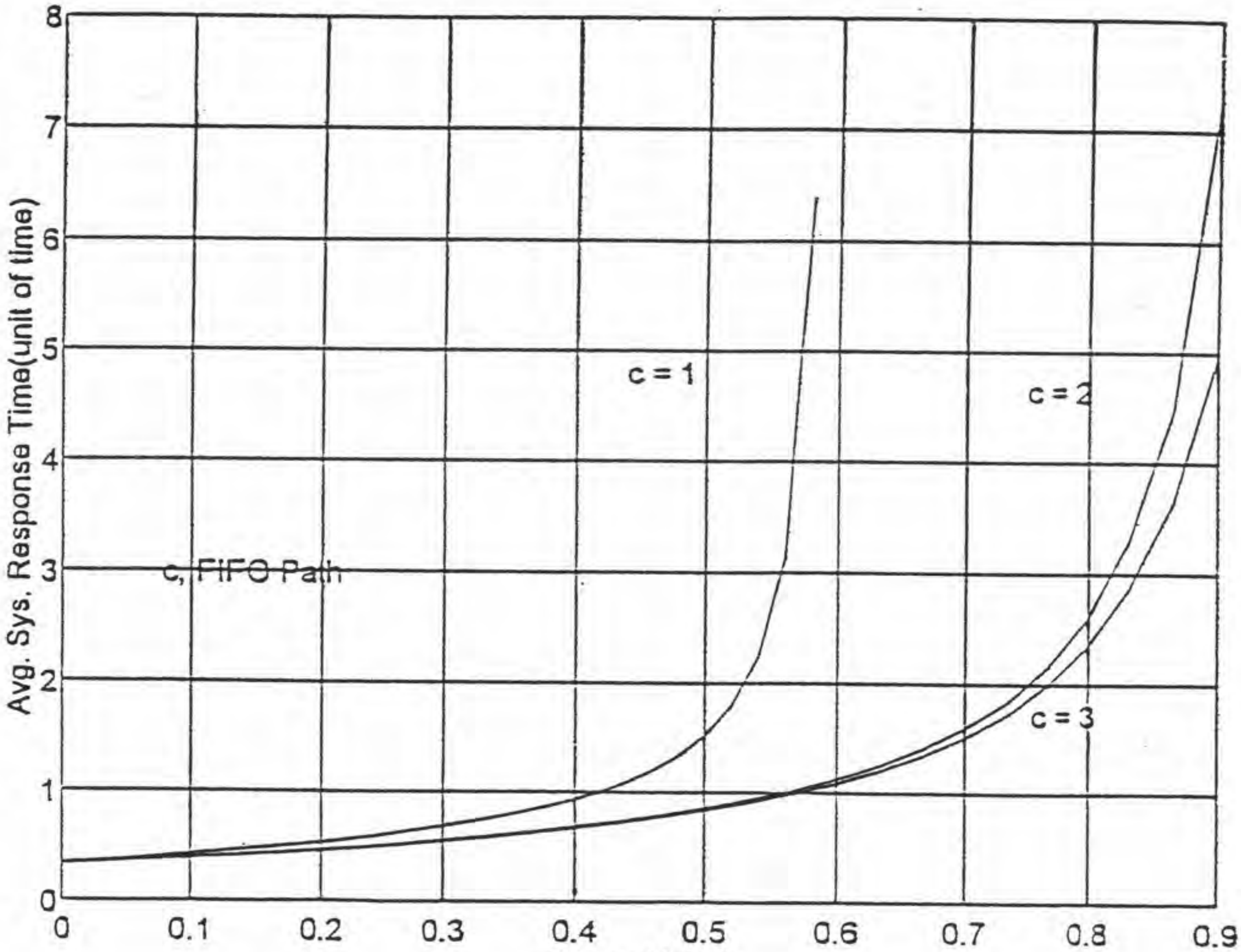
หลังจากที่ผ่านเส้นทางสวิตช์จำนวน C ออกไปยังปลายทางก็จะพักรอที่แถวคอยทางด้านออกสามารถพิจารณาเป็นแบบจำลองของ M/M/1 เวลาเฉลี่ยในการส่งกลุ่มข้อมูลออกไปยังปลายทางได้จาก

$$\overline{W_o} = \frac{\rho/\mu}{1-\rho} \qquad 4.81$$

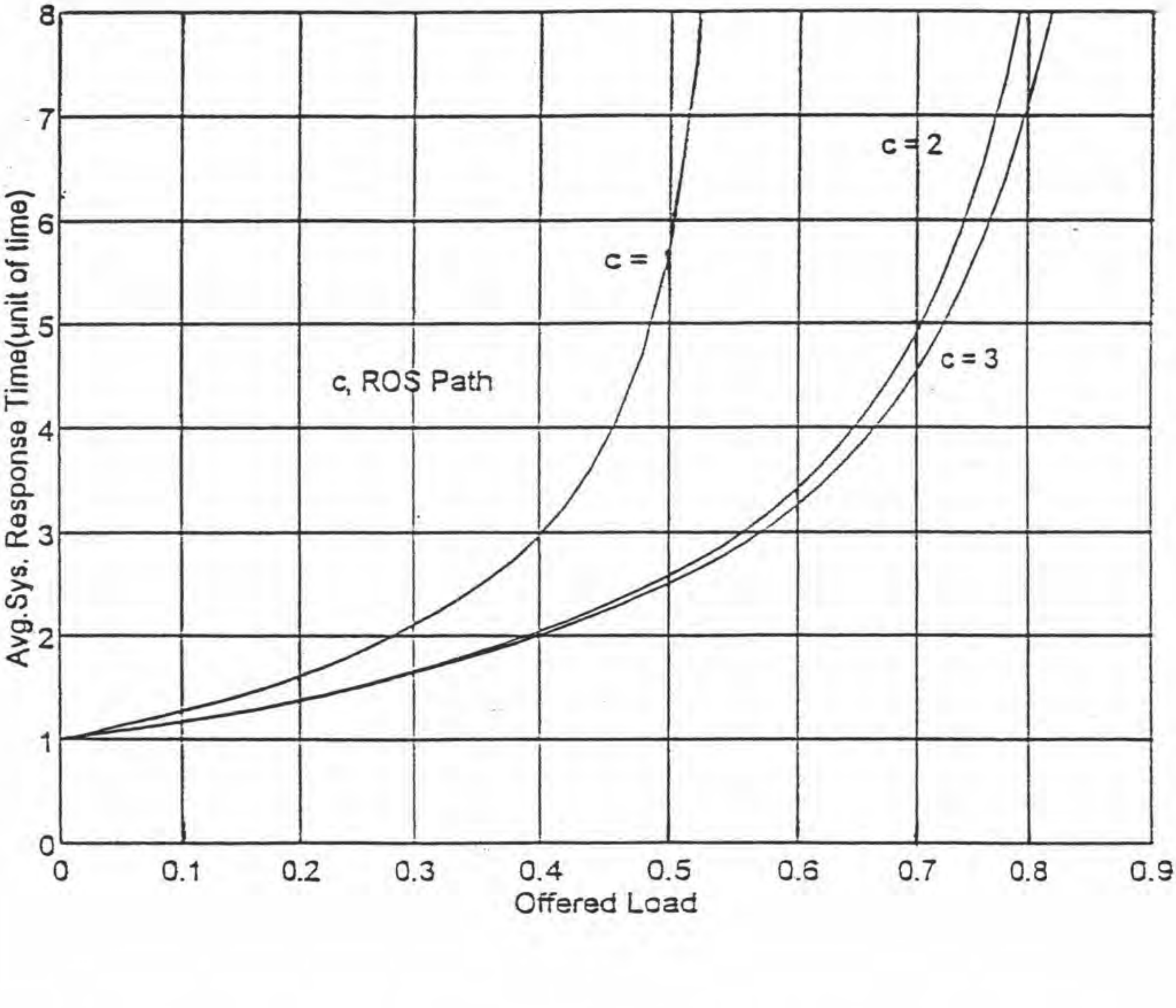
ดังนั้นเวลาที่ใช้ทั้งหมดของระบบ (SYSTEM RESPONSE TIME) D คิดตั้งแต่กลุ่มข้อมูลเข้ามาด้านเข้าจนกระทั่งออกไปยังปลายทางได้

$$\overline{D} = \overline{\mathrm{W_i}} + \overline{W_o} \qquad 4.82$$

เมื่อกำหนดให้เส้นทางสวิตช์จำนวน C เท่ากับ 3 เส้นทางนำสมการที่ (4.77) ถึง (4.82) มาใช้หาเวลาที่ใช้ในระบบทั้งสองวิธีโดยที่พิจารณา C เท่ากับ 1, 2 และ 3 รูปที่ 4.6 และ 4.7 แสดงเวลาเฉลี่ยในการทำงานของระบบด้วยวิธีการจัดแบบเข้าก่อนออกก่อน และแบบสุ่มตามลำดับ

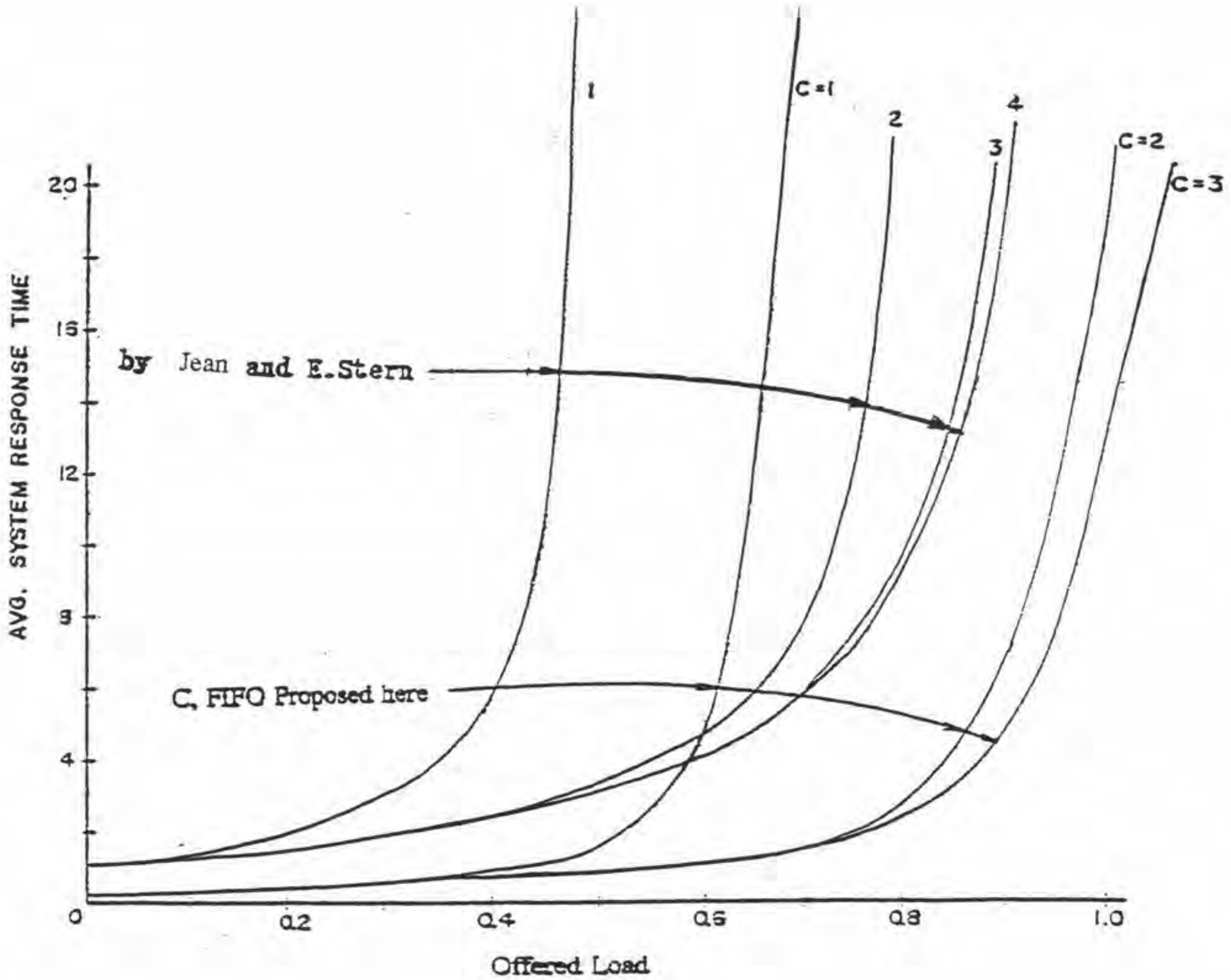


รูปที่ 4.6 เวลาเฉลี่ยในการทำงานของระบบที่มีเส้นทางสวิตช์ทำงานแบบเข้าก่อนออกก่อนเมื่อ $C = 1, 2, 3$ และ $\lambda = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$

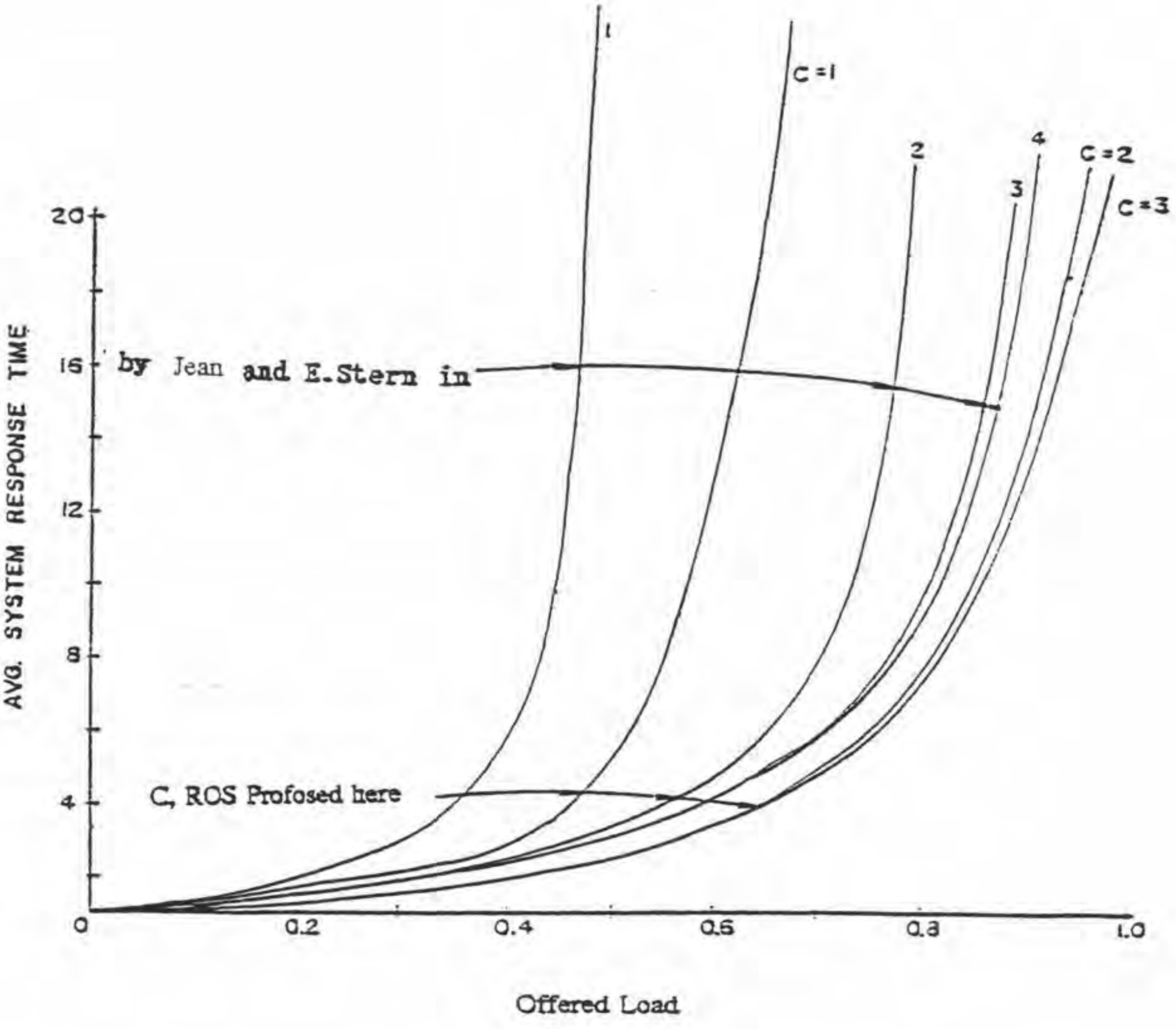


รูปที่ 4.7 เวลาเฉลี่ยในการทำงานของระบบที่มีเส้นทางสวิตช์ ทำงานแบบสุ่มเมื่อ C = 1,2,3 และ $\lambda = 1, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$

จากรูปที่ 4.6 และ 4.7 จะเห็นว่าเวลาที่ใช้ในระบบการจัดแบบให้เส้นทางสวิตช์ทำงานตามลำดับเข้าก่อนออกก่อนจะน้อยกว่าเวลาที่ใช้จัดให้เส้นทางสวิตช์ทำงานแบบสุ่มในการจัดรูปแบบเส้นทางสวิตช์ โดยใช้แบบจำลองของแถวคอยชนิด M/M/C ให้กลุ่มข้อมูลไปได้ครั้งละ C ขณะเวลาเดียวกันมีผู้ที่ได้ศึกษาและทำการวิจัยมาแล้ว คือ JEAN S.C CHEN และ THOMAS E. STERN ซึ่งสามารถจัดอยู่ในลักษณะของงานประเภทเดียวกันกับการวิจัยในวิทยานิพนธ์เล่มนี้จึงนำผลของการวิจัยที่ได้ไปเปรียบเทียบกัน แสดงได้ตามรูปที่ 4.8 และ 4.9



รูปที่ 4.8 เปรียบเทียบเวลาเฉลี่ยในการทำงานของระบบของ JEAN และ E. STERN กับผลของการวิจัยนี้เมื่อเส้นทางสวิตช์ทำงานแบบเข้าก่อนออกก่อน



รูปที่ 4.9 เปรียบเทียบเวลาเฉลี่ยในการทำงานของระบบของ JEAN และ E.STERN กับผลการวิจัยนี้เมื่อเส้นทางสวิตช์ทำงานแบบสุ่ม

พิจารณารูปที่ 4.8 และ 4.9 ปรากฏว่าผลของการวิจัยนี้สามารถทำงานได้เร็วกว่าร้อยละ 20 เมื่อจัดให้เส้นทางสวิตช์ทำงานแบบเข้าก่อนออกก่อนและเร็วกว่าร้อยละ 15 กรณีเส้นทางสวิตช์ทำงานแบบสุ่ม จะเห็นว่าในการหาเวลาเฉลี่ยที่ใช้ของระบบนี้จะคิดเฉพาะเวลาที่ส่งกลุ่มข้อมูลจากด้านขาเข้าไปยังด้านออกเท่านั้นยังไม่ได้พิจารณาถึงการจัดเรียงลำดับกลุ่มข้อมูลที่ด้านออก (RESEQUENCING) ซึ่งจะได้กล่าวในบทที่ 5 ต่อไป