บทที่ 1

ทฤษฎีของ Reliability*

1.1 Reliability ทั่ว ๆ ไป

ความหมายอย่างง่าย ๆ ของ Reliability คือความสามารถของ equipment ที่ใช้งานแล้วจะไม่เกิดการขัดข้องหรือเสียหาย

Reliability ของการ failure มีอยู่ด้วยกัน 3 ชนิด ซึ่งไม่รวมถึงการเสียหายที่เกิดจากการสะเพร่า การเก็บรักษาและการ operate ที่ไม่ถูกต้อง

1. Early failures เกิดจากการผลิตและเทคนิคในการควบคุมไม่ดีพอ failure ชนิดนี้ สามารถจะแก้ได้โดย ขบวนการที่เรียกว่า "debugging" หรือ "burn in"

2. Wear out failures เกิดจากการสึกหรอของส่วนต่าง ๆ เนื่องจากใช้งานมานาน การป้องกันการ failure ชนิดนี้ จะต้องกำหนดอายุหรือเวลาของการเปลี่ยนใหม่ก่อนหน้าที่เครื่องมือจะเกิดการสึกหรอ

3. Chance failures เกิดโดย sudden stress เกินกว่าค่า design strength ของ component failure ชนิดนี้ มักจะเกิดขึ้นบ่อยแต่ไม่สม่ำเสมอ และไม่มีใครทำนายได้ว่า มันจะเกิดขึ้นเมื่อไร และเป็นการยากในการที่จะขจัด failure ชนิดนี้ นอกจากจะแก้ไขให้น้อยลงเท่านั้น

ตามทฤษฎี และจากการปฏิบัติของ Reliability มีข้อแตกต่างกันอยู่ 2 ข้อใหญ่ ๆ ระหว่าง early, wear out และ chance failures

1. แต่ละชนิดของการ failure จะเป็นไปตาม specific statistical distribution จะต้องใช้วิธีการคำนวณที่แตกต่างกันออกไป

2. จะต้องใช้วิธีแตกต่างกันในการที่จะขจัด failure ที่เกิดขึ้น

Early และ Wear out failures ที่เกิดขึ้น สามารถที่จะขจัดให้น้อยลงได้ในการที่จะขจัด early failures จะต้องทำการ test ก่อนใช้งานเป็นเวลานาน ๆ ส่วนในการที่จะขจัด wear out failures จะต้องทำ schedule ไว้ เพื่อจะได้ทราบว่าของสิ่งนั้นได้ operate มานานเท่าไรแล้ว เมื่อถึงกำหนดอายุจะต้องเปลี่ยนทันที

---

*Igor Bazovsky, Reliability Theory and Practice, Prentice Hall, Inc., 1961 p. 1-75

1.2 ความเกี่ยวเนื่องของวิธีการคำนวณค่าประมาณและค่าจริงของ Probability

P_{est} หรือ $\hat{P} = \frac{n}{N}$

$$P = \lim_{N \to \infty} \hat{P} = \lim_{N \to \infty} \frac{n}{N}$$

N คือจำนวนครั้งที่ทำการทดลอง

n คือจำนวนครั้งของผลที่ได้

P_{est} หรือ $\hat{P}$ คือค่า estimate probability

P คือค่า True probability

จากสูตรจะเห็นว่า ถ้าจำนวนครั้งในการทดลองมากพอ ค่าที่ได้ก็จะเป็น True probability และอาจกล่าวได้อย่างง่ายที่สุดว่า Reliability ก็คือ probability of success นั่นเอง

1.3 Exponential Case ของ Chance Failures

สูตรของ Exponential เขียนได้ดังนี้.-

$$R(t) = e^{-\lambda t} \qquad (1.1)$$

R(t) คือ Reliability ในเวลา t

λ คือ chance failure rate

t คือ arbitrary operating time

e คือ base ของ natural logarithm มีค่า = 2.71828 ....

สูตรนี้จะใช้ได้ในกรณีที่เกิด chance failure เท่านั้น ข้อสำคัญของสูตรนี้คือ เวลา t จะต้องไม่เกิน useful life ของ device

ตัวอย่าง เช่น device มี useful life 1,000 ชั่วโมง constant failure rate λ = 0.0001 ต่อชั่วโมง จงหา Reliability ของ device เมื่อ operate เป็นเวลา 10 ชั่วโมง

สูตร $R(t) = e^{-\lambda t}$

$$R(10) = e^{-0.0001 \times 10} = e^{-0.001} = 0.999$$

$$= 99.9\%$$

ถ้า device operate ถึง 1,000 ชั่วโมง

$$R(1000) = e^{-0.0001 \times 1000} = e^{-0.1} = 0.9048$$

$$= 90.48\%$$

จะเห็นว่า ถ้ายิ่ง operate มากชั่วโมงขึ้น Reliability ของ device จะยิ่งลดลงเรื่อย ๆ

1.3.1 Mean Time Between Failures (MTBF)

MTBF (m) เป็นส่วนกลับของ constant failure rate เขียนได้ดังนี้.-

$$m = \frac{1}{\lambda} \qquad (1.2)$$

ดังนั้น สูตรของ (1.1) เขียนใหม่ได้ดังนี้.-

$$R(t) = e^{-t/m} \qquad (1.3)$$

m มีหน่วยเป็นชั่วโมง

สมการ (1.3) นี้เรียกว่า probability of survival function สามารถจะนำมา plot curve ได้ โดยแทนค่า R บนแกนตั้ง ค่า t บนแกนนอน

รูปที่ 1.1 (a) เป็น upper portion curve ซึ่งอยู่ในช่วงที่ t ไม่เกิน m/10 curve ช่วงนี้จะเป็นเส้นตรง

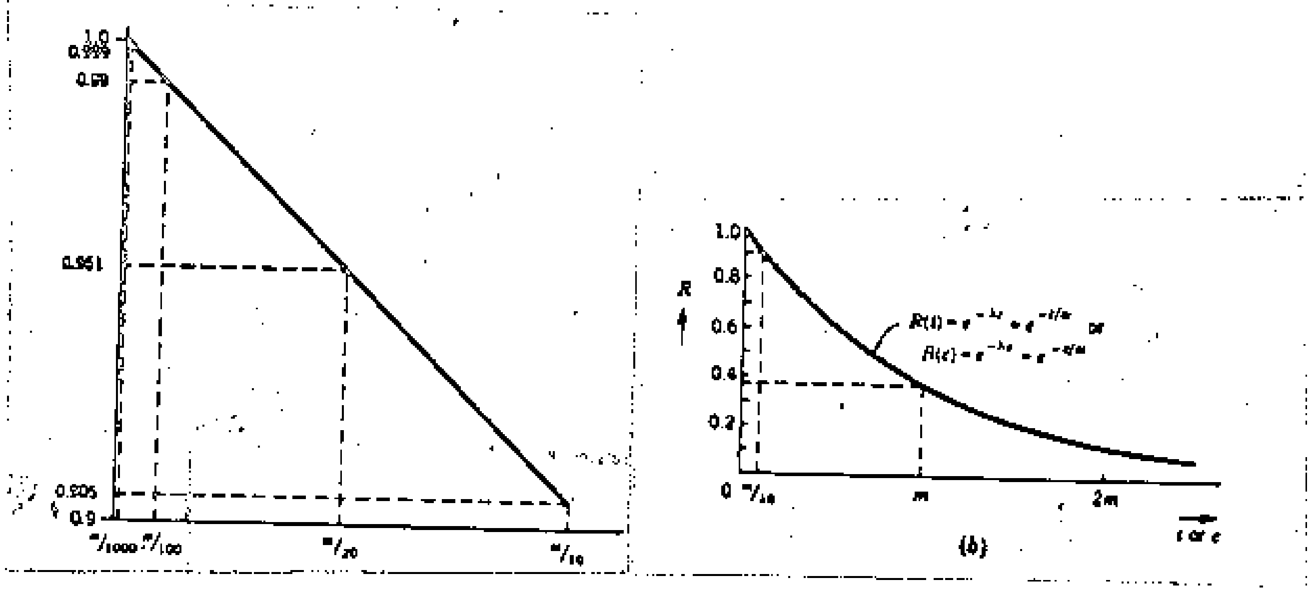
ดังนั้น Reliability prediction จะคิดในช่วง curve ของรูปที่ 1.1(a) เวลา operate ค่าของ mission time จะต้องน้อยกว่า useful life ของ device และน้อยกว่าค่าของ MTBF ด้วย

จาก Reliability curve จะมีอยู่ 2 – 3 จุดที่สำคัญ ซึ่งควรจะจำให้ได้ เพื่อช่วยให้สามารถ predict งานอย่างคร่าว ๆ ได้รวดเร็วขึ้น

จุดที่ 1 operating time t = m device จะมี probability 36.8% หรือประมาณ 37.0% ทางปฏิบัติ หมายความว่า ถ้าเรา operate 100 components ของ ของชนิดเดียวกันภายหลังจาก t = m ชั่วโมง จะมีอยู่ 37.0 components ที่ยังคง operate อยู่ ส่วนอีก 63.0 components failed ก่อนที่จะถึงเวลา t = m

จุดที่ 2 operating time t = m/10 R = 90%

จุดที่ 3 operating time t = m/100 R = 99%



(a) (b)

รูปที่ 1.1 The standardized reliability curve (a) Upper portion of the reliability curve (b) The curve

จุดที่ 4 operating time $t = m/1000$ $R = 99.9\%$

จุดที่ 5 operating time $t = m/10000$ $R = 99.99\%$

จุดที่ 6 operating time $t = m/100000$ $R = 99.999\%$

หรืออาจจะคิดกลับ ถ้าต้องการ Reliability 0.9999 operate 1 ชั่วโมง ค่าของ (MTBF) จะเท่ากับ 1,000 ชั่วโมง

m ไม่ได้มีความหมาย แค่ว่าเป็นเพียง time unit อย่างเดียว อาจจะมีความหมายมากกว่าเป็น time unit เมื่อมาใช้กับ equipment's operational

ตัวอย่างเช่น ในกรณีที่เป็น switching devices (switches, relays หรือ equipment อื่น ๆ) ควรวัดจำนวนการ operate เป็น cycle จะเหมาะสมกว่าการวัดเป็นชั่วโมง ดังนั้น reliability curve ทางแกน abscissa จึงใช้ cycle แทน time m จึงมีความหมายเป็นจำนวน cycle between failure และ $1/m$ คือ failure rate per one operating cycle ถ้า Reliability เป็น 0.99 หรือ 99% cycle between failure จะเท่ากับ $m/100$ cycle สูตรใหม่อาจจะเขียนได้ดังนี้.—

$$R\ (c) \quad = \quad e^{-\lambda c} \quad = \quad e^{-c/m} \qquad (1.4)$$

เมื่อ c เป็นจำนวน operating cycle

เพราะฉะนั้น reliability ของการ switching device 1 ครั้ง

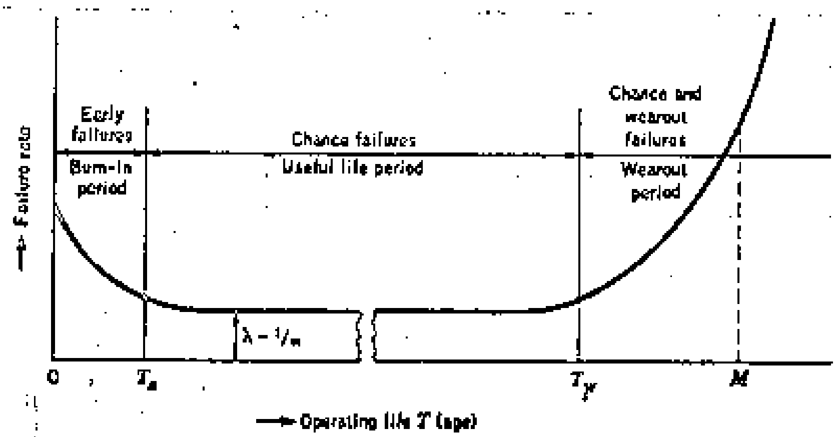
$$R\ (1) \quad = \quad (0.368)^{\lambda}$$

approximate $R\ (1) \quad = \quad 1 - \lambda$ เพราะค่า λ น้อยมาก

ซึ่ง Reliability สำหรับ single switching operation จะใช้มากสำหรับคำนวณ System Reliability

จากคำจำกัดความเบื้องต้นที่ได้กล่าวมาแล้ว สูตรของ exponential derive ทางคณิตศาสตร์มาจาก basic definition ของ probability นั่นเอง

1.4 Useful life ของ components



รูปที่ 1.2 Component failure rate as a function of age

พิจารณา curve รูป 1.2 ที่เวลา time T = 0 เริ่ม operate a very large number of new components ถ้า components เกิด weak และ fail ทีละส่วน failure rate จะลดลงอย่างรวดเร็วในระหว่าง burn in หรือ debugging period จนกระทั่งเกือบ constant ที่ time T_B แสดงว่า weak component died out จนกระทั่งถึง time T_W period ช่วง T_B และ T_W เรียกว่า "useful life" period หลังจาก time T_W wear out failure จะเริ่มเกิดขึ้นและ failure rate จะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว

กฎที่สำคัญของ Reliability คือควรเปลี่ยน component ที่เกิด fail ใน period ของ useful life และควรจะป้องกันโดยเปลี่ยน component ที่ end period ของ useful life ทั้ง ๆ ที่ component ยังไม่fail เพื่อขจัดปัญหา wear out failure ที่จะเกิดขึ้น

1.5 Wear out and Reliability

เพื่อขจัดความยุ่งยากใน system เราจะไม่ยอมให้เกิด wear out failure เป็นอันขาด จำเป็นจะต้องเปลี่ยน components ที่ใช้มาเป็นระยะเวลาเกือบเพื่อจะถึง mean life wear out failure จะอยู่ในกรณีของ normal distribution หรือ Gaussian failure distribution

จาก normal หรือ Gaussian failure distribution ประมาณว่าปรากฏการที่จะเกิด wear out นั้น ครึ่งหนึ่งจะเกิดก่อน และอีกครึ่งหนึ่งจะเกิดหลัง mean life ส่วน exponential distribution 63% failure จะเกิดก่อนค่าของ mean time between failure และ 37% จะเกิดที่หลังค่า mean time between failure

ในรูปที่ 1.3 แสดงถึงความแตกต่างของ characteristic ของ exponential และ normal distribution, จาก curve แสดงถึง density ที่ component เกิดfailure ใน time domain และไม่เปลี่ยนเอา component ที่ failure ออก ยอมให้ components ทั้งหมด die out

สมการของ exponential distribution

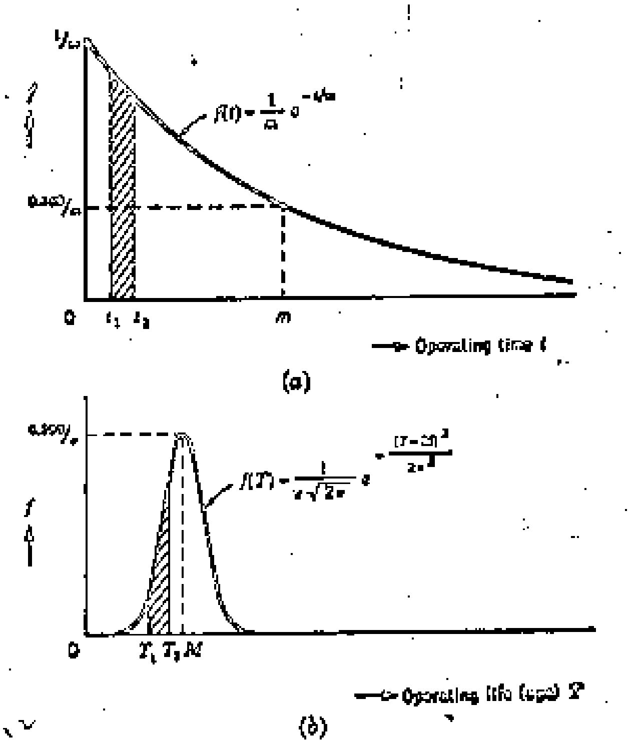
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (1.5)$$

t เป็นเวลาที่เกิด failure นับจากเริ่มต้นที่ origin เมื่อ t = 0 จะเห็นได้ว่า exponential component ไม่ขึ้นกับอายุของ component แต่เมื่อ operate ไปนาน ๆ มีการเสื่อมเกิดขึ้น failure rate จะเริ่มสูงขึ้น ส่วน wear out จะต้องเป็นไปตาม normal distribution

สมการของ normal distribution function

$$f(T) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-(T-M)^2/2 6^2} \qquad (1.6)$$

ค่า T เป็นอายุของ component



รูปที่ 1.3 The exponential and normal density functions.

(a) Exponential density function (b) Normal density function

ค่า M เป็น Mean life ของ component

ค่า σ เป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ life time

จากสมการที่ (1.6) จะเห็นว่า normal distribution ขึ้นอยู่กับอายุของ component และจาก density curve รูปที่ 1.3 ทดลองเอา population ของ components มา test บาง components ที่เกิด failure เราไม่เปลี่ยน จะเกิดloss ใน test period ก่อน mean time between failure (m) ดังในรูปที่ 1.3 curve (a) ส่วน normal distribution จะเกิดก่อนค่าของ mean age (M) ดังในรูปที่ 1.3 curve (b)

การคำนวณหาค่าของ propability of failure จะหาได้โดย integrate area ภายใต้ curve เหล่านี้

Exponential distribution

$$P_{t_2 - t_1} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt \qquad (1.7)$$

Normal distribution

$$P_{T_2 - T_1} = \int_{T_1}^{T_2} f(T)\, d\, T \qquad (1.8)$$

P คือ priori probability of failure ใน interval t_1 ถึง t_2 หรือ T_1 ถึง T_2

area ทั้งหมดภายใต้ curve จะเท่ากับ 1

นะนั้น probability of failure for the infinite time interval ภายใต้ density curve ทั้งหมดจะเท่ากับ 100%

$$P_{o-\infty} = \int_o^{\infty} f(t)\, d\, t = \int_o^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = -\frac{\lambda}{\lambda}\left[e^{-\lambda t}\right]_o^{\infty} = 1 \quad (1.9)$$

และ unreliability หรือ cumulative probability of failure ของ exponential case จาก $t = 0$ ถึง $t = t$ เขียนได้ดังนี้

$$Q(t) = \int_o^t f(t)\, dt \qquad (1.10)$$

$$Q(t) = \int_o^t \lambda e^{-\lambda t} dt = -\left[e^{-\lambda t}\right]_o^t = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (1.11)$$

โดยแปรค่าของ t ต่าง ๆ กัน เราจะสามารถ plot curve ได้ดังรูปที่ 1.4

จากสมการ (1.6)

$$f(T) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(T-M)^2/2\sigma^2}$$

แต่ $R(t) + Q(t) = 1$

จากสมการ (1.1)

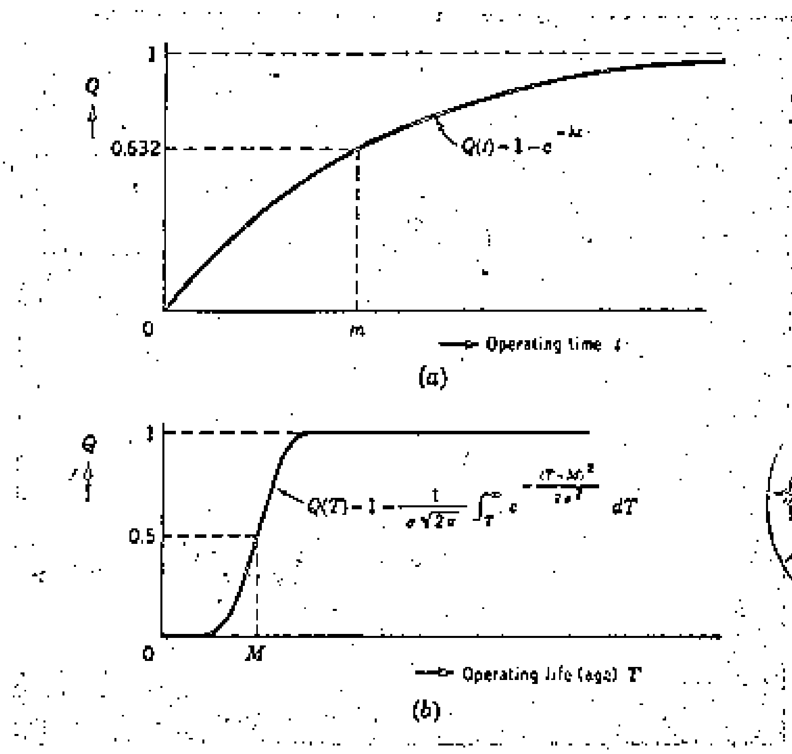
$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

เพราะฉะนั้น

$$R(T) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_T^{\infty} e^{-\frac{(T-M)^2}{2\sigma^2}} dT \qquad (1.12)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(T-M)^2}{N}} \qquad (1.13)$$

การป้องกันที่จะไม่ให้เกิดการ wear out คือต้องเปลี่ยน components ที่ใช้มาจนจะถึง



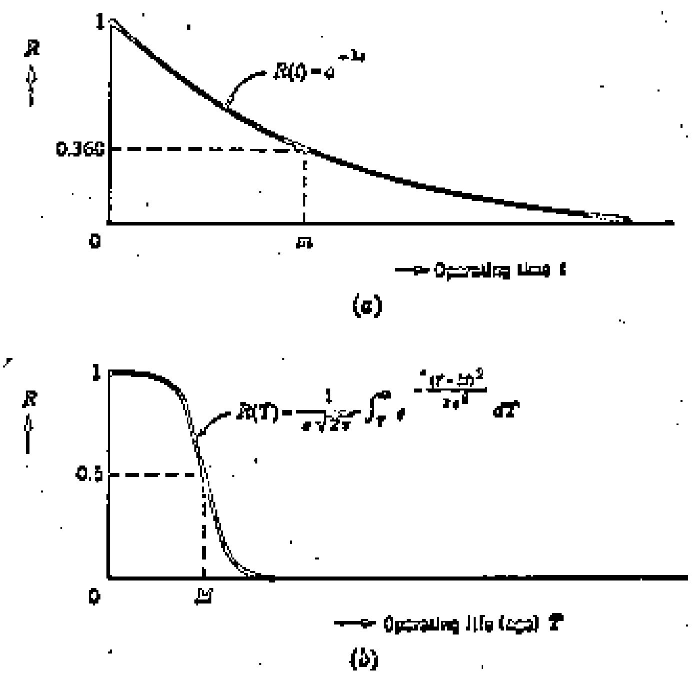
รูปที่ 1.4 Probability of failure (a) Exponential (b) Normal

mean life เสียก่อนที่จะให้เกิดการ failure ขึ้นใน system ซึ่งยังเป็นการช่วยให้เกิด system reliability ด้วย

จากรูปที่ 1.6 area ทั้งหมดภายใต้ curve f (T) จะเท่ากับ 100% ยกตัวอย่างเช่น ในกรณีแรก priori probability ของ components ที่เกิด fail ในช่วงเวลา $M - 3\sigma$ ถึง $M - 2\sigma$ เท่ากับ 2.14% และ components ที่มี probability to survive ตั้งแต่เวลา $T = 0$ ถึง $T = m - 3\sigma$ เท่ากับ 99.865% ส่วนในกรณีที่ 2, priori probability ของ components ที่เกิด fail ในช่วงเวลา $M + 2\sigma$ ถึง $M + 3\sigma$ เท่ากับ 2.14% และ probability to survive ตั้งแต่เวลา $T = 0$ ถึง $T = M + 2\sigma$ เท่ากับ 2.275%

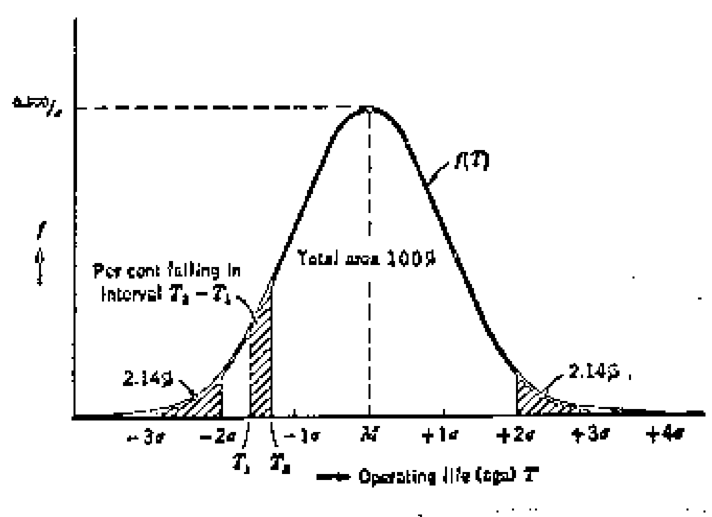
Conditional probability หรือ a posteriori probability of failure ในช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 คือ

$$F_{T_2 - T_1} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} f(T)\, dT}{R(T_1)} \qquad (1.14)$$



รูปที่ 1.5 Reliability curves (a) Exponential reliability function

(b) Normal Reliability function



รูปที่ 1.6 The 'a priori' probability of failure

<u>ในกรณีแรก</u>

$$F_{m-3\sigma} \text{ ถึง } m-2\sigma = \frac{0.0214}{0.99865} = 0.02143$$

และ probability of survival

$$R_{m-3\sigma \text{ ถึง } m-2\sigma} = 1 - F = 1 - 0.02143 = 0.97857$$

<u>ในกรณีที่ 2</u>

$$F_{m+2\sigma \text{ ถึง } m+3\sigma} = \frac{0.0214}{0.02275} = 0.941$$

$$R_{m+2\sigma \text{ ถึง } m+3\sigma} = 1 - 0.941 = 0.059$$

ฉะนั้น เราอาจจะเขียนสัญลักษณ์และสูตรของ probability of failure ได้ดังนี้

$$1.\ P_{T_2 - T_1} = \int_{T_1}^{T_2} f(T)\, dT = Q(T_2) - Q(T_1) \qquad (1.15)$$

คือ a priori probability of failure ในช่วงเวลาจาก T_1 ถึง T_2

$$2.\ P_{T_2 - T_1} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} f(T)\, dT}{R(T_1)} = \frac{P_{T_2 - T_1}}{R(T_1)} = \frac{Q(T_2) - Q(T_1)}{R(T_1)} \qquad (1.16)$$

คือ a posteriori หรือ conditional probability of failure ในช่วงเวลา $T_2 - T_1$

$$3.\ Q(T) = \int_{0}^{T} f(T)\, dT = 1 - \int_{T}^{\infty} f(T)\, dT = 1 - R(T) \qquad (1.17)$$

คือ cumulative probability of failure จาก $T = 0$ ถึง $T = T$

$\varphi(T)$: standardized wear out failure density function

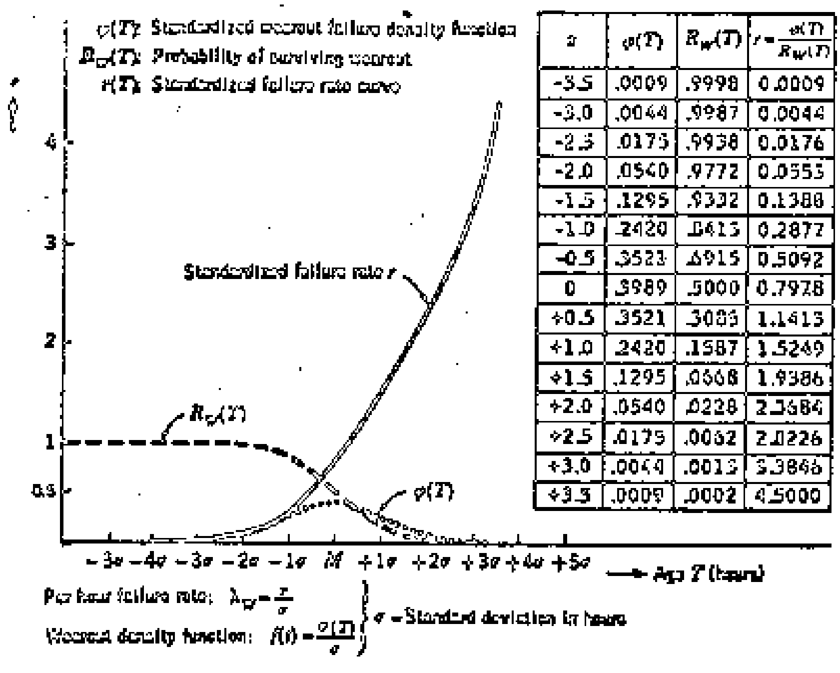
$R_w(T)$: Probability of surviving wear out

$r(T)$: standardized failure rate curve

$$\text{failure rate } \lambda = \frac{f(t)}{R(t)} \quad \text{หรือ} \quad \frac{f(T)}{R(T)} \qquad (1.18)$$

Standardized wear out failure density function ใน term ของ standard deviation $\varphi(T) = \sigma f(T)$ (1.19)

ค่าของ $\varphi(T)$ และ $R_w(T)$ สามารถจะใช้จาก normal table ได้โดยตรง ด้วยวิธีนี้เราจะ



z	φ(T)	$R_w(T)$	$r = \frac{\varphi(T)}{R_w(T)}$
-3.5	.0009	.9998	0.0009
-3.0	.0044	.9987	0.0044
-2.5	.0175	.9938	0.0176
-2.0	.0540	.9772	0.0553
-1.5	.1295	.9332	0.1388
-1.0	.2420	.8413	0.2877
-0.5	.3521	.6915	0.5092
0	.3989	.5000	0.7978
+0.5	.3521	.3085	1.1413
+1.0	.2420	.1587	1.5249
+1.5	.1295	.0668	1.9386
+2.0	.0540	.0228	2.3684
+2.5	.0175	.0062	2.8226
+3.0	.0044	.0013	3.3866
+3.5	.0009	.0002	4.5000

รูปที่ 1.7 The Gaussian normal failure rate

ได้ standardized failure rate curve เป็นดังนี้

$$r(T) = \frac{\varphi(T)}{R_{w}(T)} \qquad (1.20)$$

The per hour wear out failure rate

$$\lambda_w = \frac{f(T)}{R_{w}(T)} = \frac{\varphi(T)}{R_{w}(T)} = \frac{r(T)}{\sigma} \qquad (1.21)$$

จากรูปที่ 1.7 แสดงว่า failure rate ของ component เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว เมื่อ components ถึงปลาย useful life

ถ้ารวม effect ของ chance และ wear out failure ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา t ชั่วโมง

$$Q(t) = Q_c(t) + F_w(t) - Q_c(t).F_w(t) \qquad (1.22)$$

Subscripts c และ w คือ chance และ wear out failure และ $Q_c(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ จากสมการที่ (1.12) และ (1.14)

$$F_{w(t)} = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{T}^{T+t} e^{-(T-M)^2/2\sigma^2}\, dT}{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{T}^{\infty} e^{-(T-M)^2/2\sigma^2}\, dT} \tag{1.23}$$

จะเห็นว่าสมการ (1.23) ขึ้นอยู่กับอายุ T ของ components

$$R(t) = 1 - Q(t)$$

$$= e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} F_{w(t)} = e^{-\lambda t} \left\{1 - F_{w(t)}\right\}$$

$$= e^{-\lambda t} R_{w(t)} \tag{1.24}$$

$$R_w(t) = 1 - F_w(t) = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{T+t}^{\infty} e^{-(T-M)^2/2\sigma^2}\, dT}{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{T}^{\infty} e^{-(T-M)^2/2\sigma^2}\, dT} \tag{1.25}$$

จากสมการ (1.25) จะเห็นได้ว่าเป็น probability ที่ component ยังไม่เกิดการ failure เนื่องจาก wear out จากเวลา T ถึง T + t .

เพราะฉะนั้น probability ที่จะไม่เกิด wear out failure ในช่วงเวลา t คือ

$$R_w(t) = \frac{R_w(T+t)}{R_w(T)} \tag{1.26}$$

ดังนั้น over all probability ที่จะไม่เกิดการ failure ทั้ง chance และ wear out ในช่วงเวลา t จาก T ถึง T + t

$$R(t) = e^{-\lambda t} \frac{R_w(T+t)}{R_w(T)} \tag{1.27}$$

ถ้า components combine in series เข้าไปใน system

$$R_s(t) = e^{-\sum \lambda_i t} \frac{R_{wi}(Ti+t)}{R_{wi}(Ti)} \tag{1.28}$$

000160

อาจจะทำให้ค่าของ $\frac{R_{wi}(Ti + t)}{R_{wi}(Ti)}$ เข้าใกล้ 1 ได้โดยการเปลี่ยนทุก ๆ component เมื่อ operate ถึงเวลาเท่ากับ T_{wi}

T_{wi} คืออายุของ components เมื่อหมดอายุจะต้องเปลี่ยนใหม่

$\therefore$ simple series case $R_s(t) \quad = \quad e^{-\Sigma\lambda_i t}$ (1.29)

Overall reliability ของ component อาจจะจำกัดความใน term ของ failure rate ได้ดังนี้

$$\lambda = \lambda_c + \lambda_w$$

$$R(t) = e^{-\lambda_c t} \cdot \frac{R_w(T + t)}{R_w(T)} = \exp.\left\{-\int_T^{T+t} \lambda \, dt\right\} \qquad (1.30)$$

ค่า wear out failure rate สามารถจะเอาใช้ได้ทันทีจาก Table normal distribution ในรูปที่ 1.7

$$\int_T^{T+t} \lambda dt = \int_T^{T+t} (\lambda_c + \lambda_w) dt = \lambda_c t + \int_T^{T+t} \lambda_w dt \qquad (1.31)$$

ค่า integral $\int_T^{T+t} \lambda_w dt$ สำหรับ interval t สั้น ๆ สามารถจะหาค่าประมาณได้โดยใช้ arithmetic mean

$$\lambda_{wm} = \tfrac{1}{2}\left[\lambda_{wT} + \lambda_w (T + t)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{f(T)}{R(T)} + \frac{f(T+t)}{R(T+t)}\right]$$

Approximate integral $\int_T^{T+t} \lambda_w dt = \lambda_{wm} t$

Combine reliability approx. $R(t) = \exp\left[-(\lambda_c + \lambda_{wm})t\right]$ (1.32)

ถ้า λ_{wm} น้อยกว่า λ_c มาก ๆ

Approximate $R(t) \doteq e^{-\lambda_c t}$ (1.33)

1.6 Combined effects of chance and wear out failure

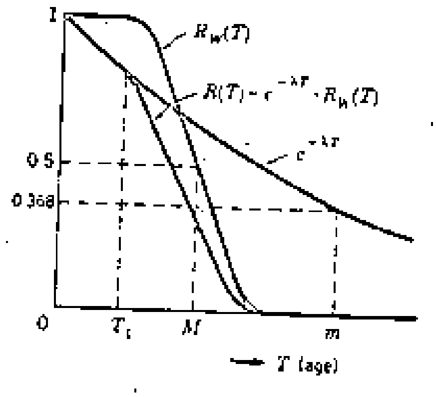
สมการของ chance และ wear out failure ใน period จาก T = 0 จนถึง อายุ T คือ

$$R(T) = e^{-\lambda T} \frac{R_w(o + T)}{R_w(o)} \qquad (1.34)$$

สมมุติว่า $R_w(o) = 1$

เพราะฉะนั้น
$$R(T) = e^{-\lambda T} R_w(T) \qquad (1.35)$$

แต่
$$R_w(T) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_T^{\infty} e^{-(T - M)^2/2\delta^2} \, dT$$



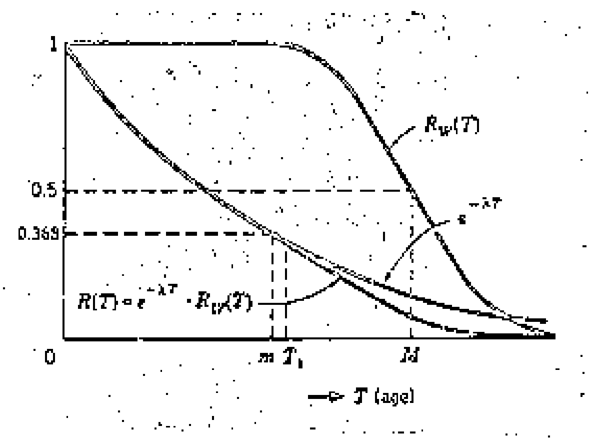
รูปที่ 1.8 Reliability curve for m > M

สำหรับรูปที่ 1.8 และ 1.9 แสดงถึง combined Reliability curve R (T) โดยค่า m > M, M > m และสมการ (1.35) จะใช้ได้ต่อเมื่อ T = 0 ซึ่งหมายถึง component ยังใหม่อยู่ แต่ถ้า component มีอายุที่ใช้งานมาก่อนแล้ว จะใช้สมการ (1.35) ไม่ได้ จะต้องใช้สมการดังนี้

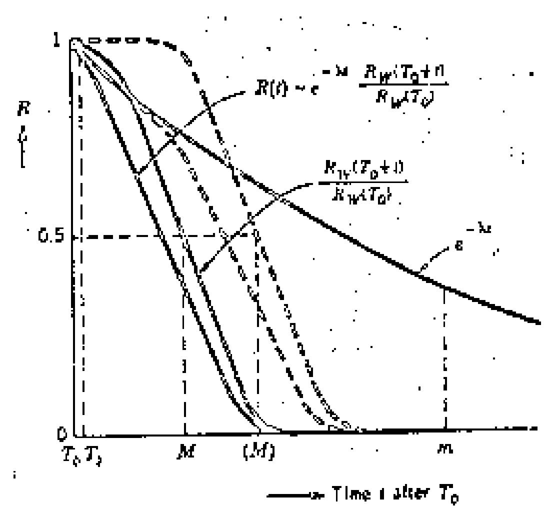
$$R(T) = e^{-\lambda t} \frac{R_w(To + t)}{R_w(To)} \qquad (1.36)$$

ถ้า component operate in series จากสมการ (1.28)

$$R_s(t) = \exp\left[-\sum \lambda_i t\right] \frac{R_{wi}(Ti + t)}{R_{wi}(Ti)}$$



รูปที่ 1.9 Reliability curve for M > m



รูปที่ 1.10 Reliability of a component after it has in age T

ในรูปที่ 1.10 นี้ เส้นประเป็น curve ของรูปที่ 1.8 นำมา plot เทียบกันดูจะเห็นว่า ตำแหน่งของ m คงที่ ส่วนตำแหน่งของ M เปลี่ยนไป จะเคลื่อนเข้าหา origin ของ new coordinate system เนื่องจาก component's age จาก curve จะเห็นได้ชัดว่า เมื่อ component มีอายุถึง $(T_o + T_2)$ system จะเริ่ม unreliable แต่ถ้าคิดว่ามีแต่ wear out failure เกิดขึ้นอย่างเดียว และ system operate ที่ period t สมการจะเป็นดังนี้

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^{n^*} \frac{R_{wi}(Ti + t)}{R_{wi}(Ti)} \qquad (1.37)$$

---

* The symbol Π stands for product

ถ้า system มี chance failure เกิดขึ้นด้วย

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ci} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Mi}$$

$$R_s(t) = \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_{ci} + \frac{1}{Mi}\right)t\right] \qquad (1.38)$$

Mi คือ mean wear out time ของ i th. component

$\lambda_r = \frac{1}{M}$ คือ wear out replacement rate

λ_c = chance failure rate

System final failure rate $\lambda = \lambda_c + \lambda_r$

$$\therefore R_s(t) = e^{-\sum^{n} (\lambda_c + \lambda_r)t} = e^{-\sum^{n} \lambda_i t} \qquad (1.39)$$

1.7 Early failures and the life function of components

ปัญหาทั่ว ๆ ไปของ Reliability สามารถจะคำนวณได้ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ exponential หรือ normal failure distributions จะมีอยู่ด้วยกัน 2 กรณีที่สามารถจะใช้แต่ exponential distribution คำนวณหาค่า reliability

1. ต้องป้องกันการเกิด wear out failure โดยการเปลี่ยน components ที่ทำงานมาใกล้จะถึง the end of useful life

2. เมื่อ components เกิด wear out failure จะต้องเปลี่ยน components ที่เกิดการ failure ใหม่ทันที

จะเห็นได้ว่า ในกรณีแรกจะได้ reliability สูงกว่าในกรณีหลัง แต่ถ้า components นั้น operate มาเป็นเวลานาน ๆ การป้องกันจะต้องมีการ maintenance เป็นแบบ routine

Early และ chance failure เป็น failure ที่เราไม่สามารถจะทราบได้แน่นอนว่า จะเกิดขึ้นเมื่อใดเวลาใด components ที่เกิด early failure มักจะจัดอยู่ในพวก substandard components และมีค่าของ failure rate (λe) สูง ถ้าใน system ใดมี substandard components อยู่มาก จะทำให้ system เกิด low reliability

วิธีที่จะแก้ให้ system มี reliability ดีขึ้น ก็โดยการเปลี่ยนเอา good components เข้าแทน

ฉะนั้น reliability ของ series system ทั้งหมด N components

$$R_s = e^{-N_E t/m_e} \qquad (1.40)$$

N_E = Substandard components

ในการที่จะ operate system จำเป็นจะต้องรู้ระยะเวลาของ debugging time (หมายถึงการ operate system ให้มี reliability ได้นานเท่าไร คือหลังจากนั้นแล้ว system จะไม่ reliable เนื่องจาก operate เกิน end ของ useful life) ของ component ก่อน

Mean debugging time

$$E(t) = m_e \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{N_E}\right) \qquad (1.41)$$

E (t) หมายถึง expected time ที่ substandard components จะเกิด fail หมดทุก components

Early failure ขึ้นอยู่กับ 3 assumptions ด้วยกัน

1. แยก substandard population ที่รวมอยู่กับ good population ออก

2. ใช้แต่เฉพาะ good components เข้าเปลี่ยนทุก ๆ substandard components ที่เกิด fail เรียกว่า perfect repair

3. ถือว่า failure rate ของ good components เป็น 0

ในกรณีของ perfect repair ถือว่า potential early failure ไม่มีใน system $\{E(t)\}$ และ initial system failure rate เท่ากับ:-

$$\lambda_{si} = N_G \lambda_g + N_E \lambda_e \qquad (1.42)$$

N_G = good components

N_E = substandard components

λ_g = failure rate ของแต่ละ good component

λ_e = failure rate ของแต่ละ substandard component

$\lambda_e \gg \lambda_g$

$$N = N_G + N_E$$ components ทั้งหมดใน system

ถ้าเป็น perfect repair

$$\lambda_s = N \lambda_g \tag{1.43}$$

ถ้าเป็น non perfect repair

$$\lambda_s = N \lambda_g \frac{n}{n_G} = \frac{N \lambda_g}{n_G/n} \tag{1.44}$$

n_G คือจำนวน good repair จาก component ทั้งหมดที่จะต้อง repair

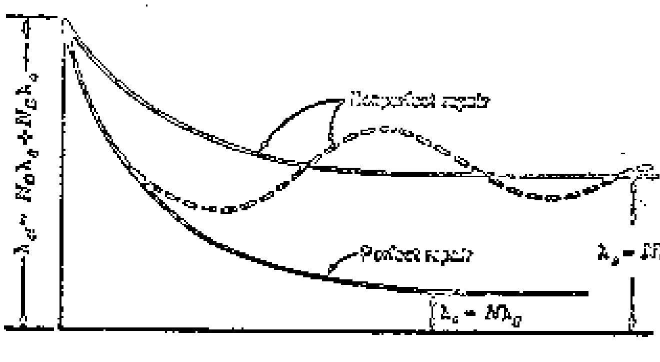
n components

$$n = n_G + n_e$$

system failure rate stabilized $\lambda_s = N \lambda_g \left(1 + \frac{n_E}{n_G}\right)$ (1.45)

$\frac{n_E}{n_G}$ = incremental failure rate factor

$\frac{n_G}{n}$ = repair efficiency



รูปที่ 1.11 Failure rate stabilization with perfect and imperfect repair

Percentage ของ substandard specimens $= \frac{N_E}{N_E + N_G} \times 100$

$$= \frac{N_E}{N} \times 100\% \tag{1.46}$$

expected failure rate $\lambda = \lambda_g + \lambda_o e^{-T/E(t)}$ (1.47)

$$\lambda_o = (\lambda_e - \lambda_g)$$

ถ้า component ใหม่ $T = 0$ จะเขียน expected initial failure rate ได้ว่า

$$\lambda_i = \lambda_g + \lambda_o = \lambda_g + (\lambda_e - \lambda_g)\frac{N_E}{N}$$

$$= \lambda_g \frac{N - N_E}{N} + \lambda_e \frac{N_E}{N} = \frac{\lambda_g N_G + \lambda_e N_E}{N} \qquad (1.48)$$

ถ้า T เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด จาก (1.47) จะพิสูจน์ได้ว่า

$$\lambda = \lambda_g$$

expected cumulative reliability สำหรับหนึ่ง component จาก $T = 0$ จนถึงอายุ T

$$R = \exp\left\{-\int_0^T \lambda \, dT\right\} = \exp\left[-\int_0^T (\lambda_g + \lambda_o e^{-T/E(t)}) \, dT\right]$$

$$R = \exp\left\{-\lambda_g T - \lambda_o E(t) + \lambda_o E(t)\, e^{-T/E(t)}\right\} \qquad (1.49)$$

สมการนี้คลุมถึง failure ที่เกิดขึ้นจาก chance และ early failure ถ้าจะรวมเอา wear out failure เข้าไปด้วย จะเขียน over all component failure rate (early, chance and wear out failure) ได้ว่า

$$\lambda_L = \lambda_g + \lambda_o e^{-T/E(t)} + \lambda_w \qquad (1.50)$$

$$= \frac{f(T)}{R(T)} = \frac{\exp\left[-(T - M)^2/2\sigma^2\right]}{\int_T^{\infty} \exp\left[-\frac{(T - M)^2}{2\sigma^2}\right] dT} \qquad (1.51)$$

$$= \frac{f(T)}{\int_T^{\infty} f(T)\, dT} \qquad (1.52)$$

$$\therefore \quad \lambda_L = \lambda_g + \lambda_o e^{-T/E(t)} + f(T)\Big/\int_T^{\infty} f(T)\, dT \qquad (1.53)$$

Cumulative reliability หรือ the life function L (T) เริ่มจาก $T = 0$

$$L(t) = \exp\left[-\int_0^T \lambda_L \, dT\right] \qquad (1.54)$$

ถ้าเริ่ม operate จากอายุของ component T

$$\text{Reliability } R(t,T) = \exp\left[- \int_{T}^{T+t} \lambda_L dT \right] \quad (1.55)$$

$$R(t) = \exp\left[- \lambda_g t \right] \quad (1.56)$$

ถ้าถือว่า system operate ในช่วงเวลาอันสั้น wear out failure ยังไม่เกิด

ค่าของ L (T) อาจจะเขียนได้เป็นแบบผลคูณของแต่ละ probability ของ component ได้ คือ

$$L(T) = R_c(T)\, R_e(T)\, R_w(T)$$

$$= \exp\left[-\lambda_c T\right] \exp\left[-\frac{\lambda_o}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\right] \times \exp\left[-\int_0^T \frac{f(T)}{\int_T^{\infty} f(T)\, dT}\, dT \right] \quad (1.57)$$

และ $R(t,T) = R_c(t)\, R_e(t)\, R_w(t)$

$$= \exp\left[-\lambda_c t\right] \cdot \exp\left[-\frac{\lambda_o}{\alpha} e^{-\alpha T}(1 - e^{-\alpha t})\right] \times \exp\left[-\int_T^{T+t} \frac{f(T)}{\int_T^{\infty} f(T)\, dT}\, dT \right] \quad (1.58)$$

$\alpha = \frac{1}{E(t)}$ คือ reciprocal ของ mean debugging time

$$R(t,T) = \exp\left[-\lambda_c t\right] \cdot \exp\left[-\frac{\lambda_o}{\alpha} e^{-\alpha T}(1 - e^{-\alpha t})\right] \frac{\int_{T+t}^{\infty} e^{-(T-M)^2/2\sigma^2}\, dT}{\int_T^{\infty} e^{-(T-M)^2/2\sigma^2}\, dT} \quad (1.59)$$

เมื่อนำ n components เข้ารวมใน series system

system reliability

$$R_s(t) = \prod R_i(t,Ti) \quad (1.60)$$

ซึ่ง $R_i(t,T)$ เป็น reliability ของ i th component สำหรับ component อายุ Ti

เพื่อขจัดปัญหาข้อยุ่งยาก ควรจะเปลี่ยน component ก่อนที่จะถึง mean life wear out failure จะได้ไม่เกิดขึ้น และไม่ควรที่จะใช้ substandard component แต่ทั้งนี้ และทั้งนั้นก็ต้องคำนึงถึงหลัก economics ด้วย