

บทที่ ๒

Transformation for Congruent Triangles

ความหมายของรูปสามเหลี่ยม ๒ รูป เท่ากันทุกประการ

ความหมายเดิมของเรขาคณิตแบบบุคลิกกล่าวว่า รูปสามเหลี่ยม ๒ รูปนั้นพื้นฐานจะเท่ากันทุกประการให้คือเมื่อยกทุปสามเหลี่ยมนั้นจับช้อนบนสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งแล้ว ทุกส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองจะหันกันชนิดเหมือนรูปเดียวกัน คือสามเหลี่ยมทั้งสองต้องมีด้านที่สมบูรณ์ เท่ากันด้านนักด้าน มีมุมทั้งสามที่สมบูรณ์เท่ากัน บุ้นคือมุม

ในเรขาคณิตเบื้องต้น มีหลักบัญชาติว่าถ้ารูปสามเหลี่ยม ๒ รูปจะเท่ากันทุกประการได้อยู่ ๔ กรณี คือ

กรณี ๑ สามเหลี่ยม ๒ รูป มีด้านเท่ากัน ๓ ด้าน ด้านต่อด้าน สามเหลี่ยม ๒ รูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

กรณี ๒ สามเหลี่ยม ๒ รูป มีด้านเท่ากัน ๒ ด้าน ด้านต่อด้าน และมีมุมในระหว่างด้านเท่ากัน สามเหลี่ยม ๒ รูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

กรณี ๓ สามเหลี่ยมมุมจาก ๒ รูป มีด้านตรงข้ามมุมจากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากัน สามเหลี่ยม ๒ รูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

กรณี ๔ สามเหลี่ยม ๒ รูป มีด้านเท่ากันสองด้าน และมีมุมเท่ากัน ๒ มุมบุ้นคือมุม สามเหลี่ยม ๒ รูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

ในการใช้สูตรกรณีที่ ๔ นี้ก็จะพิสูจน์ โดยการยกทุปสามเหลี่ยมนั้นจับช้อนบนสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง ถ้าหากส่วนของสามเหลี่ยมทั้งสองหันกันชนิดเหมือนรูปเดียวกัน ก็กล่าวได้ว่า สามเหลี่ยมทั้งสองนั้นเท่ากันทุกประการ

ด้านคงในแบบวิเคราะห์คณิตศาสตร์ใหม่แล้ว การยกทุปสามเหลี่ยมนั้นไปช้อนบนสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งให้หันกันชนิดเดียวกัน จึงสามารถเลื่อนจุดยอดหัวสามของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งไปหันดูดยอดหัวสามของสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งให้พอดีกันนั่นเอง.

นิยาม ๓.๑ รูปสามเหลี่ยม ๒ รูป บนพื้นราบจะเรียกว่ากันทุกประการ (แบบยุคอดีต) ให้ ต่อเนื่องสามารถถ่าย matrix transformation ให้เป็นทริกซ์หนึ่งและเป็น element ที่อยู่ใน Euclidean Group ซึ่งจะบ่งชี้ว่าถูกออกแบบของรูปสามเหลี่ยมนี้ไปพับจัดประกอบห้องสามของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งให้พร้อมกับโดยให้คงสมบัติเดิมกัน.

กรณีที่ห้องล็อกไว้ให้รูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการให้คงอยู่ในเดิม สามารถจะพิสูจน์ ให้โดยใช้นิยาม ๓.๑ ดังท่อไปนี้.

๑. จากกรณีที่ ๑ ก้านทุกสามเหลี่ยมให้ ๒ รูป โดยให้ก้านที่ขึ้นนัยกันเท่ากัน คือ ก้านที่ด้าน เท่ากันมุกติให้เป็นสามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF โดยก้านนัดก้าน AB เท่ากับก้าน DE ก้าน BC เท่ากับก้าน EF และค้าน CA เท่ากับค้าน FD ซึ่งที่ความยาว เรือภาคติวเคราะห์ให้ทราบ ก้านคืออัตราของจุด A, B, C, D, E และ F มาให้ เร้น ให้เป็น $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_6, y_6)$ ตามลำดับ ดังนั้น

$$\text{ระยะ } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{ระยะ } BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$\text{ระยะ } CA = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$$

$$\text{ระยะ } DE = \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2}$$

$$\text{ระยะ } EF = \sqrt{(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2}$$

$$\text{ระยะ } FD = \sqrt{(x_4 - x_6)^2 + (y_4 - y_6)^2}$$

ดังนั้น

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2}$$

$$\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2}$$

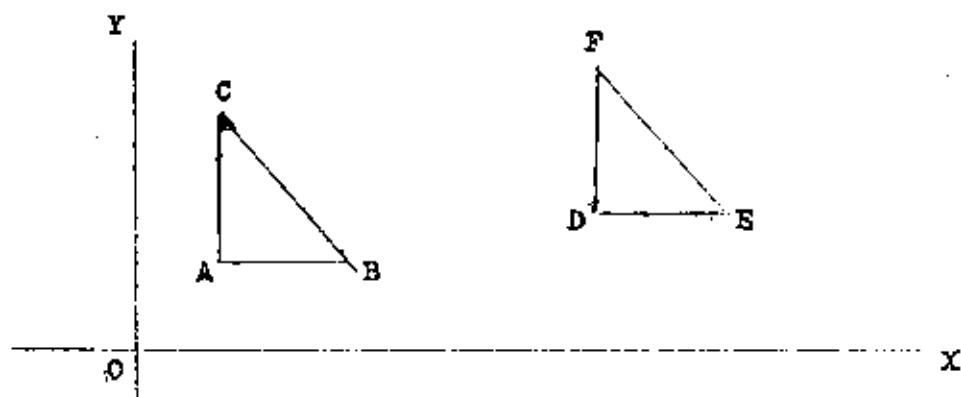
$$\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} = \sqrt{(x_4 - x_6)^2 + (y_4 - y_6)^2}$$

ดังการที่ matrix transformations แทนทริกซ์หนึ่งที่เป็น element ใน Euclidean Group ซึ่งจะนำจุด A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) และ C (x_3, y_3)

ของรูป $\triangle ABC$ ไปทับจุด $D(x_4, y_4), E(x_5, y_5)$ และ $F(x_6, y_6)$ ของรูป $\triangle DEF$ ตามลักษณะที่กระซิบกัน

จากคุณสมบัติของ Euclidean Group ก็จะทำให้ความยาวของด้านของรูปเหลี่ยม และบูรณาการของรูปเหลี่ยมนี้คงเดิมที่

ท้าอย่างที่ ๑ ถ้าให้รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF อยู่ในลักษณะที่ด้านที่สัมผัสนั้นกัน งานนักกันตั้งรูป



เรื่องจุด $A(x_1, y_1)$ ไปทับจุด $D(x_4, y_4)$

จาก (?) ข้อบทที่ ๒ จะได้

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= H_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore x_4 = x_1 + a$$

$$y_4 = y_1 + b$$

$$\therefore a = x_4 - x_1$$

$$b = y_4 - y_1$$

matrix transformation H_1 จะเท่ากับ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 1 & y_4 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็น

element ใน Euclidean Group

จาก (1) ผลของการ matrix transformations H_1 จะนำจุด A (x_1, y_1) ไปที่จุด D (x_4, y_4)

จะเห็นได้ว่า matrix transformations H_1 ที่จะนำจุด B (x_2, y_2) และ C (x_3, y_3) ไปที่จุด E (x_5, y_5) และ F (x_6, y_6) ตามลำดับทวยศักราชนี้ก็ต้องนำจุด B ซึ่งอยู่ตรงไปที่จุด D (x_4, y_4) โดย matrix transformation H_1

$$\begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 1 & y_4 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x'_2 &= x_2 + (x_4 - x_1) \\ y'_2 &= y_2 + (y_4 - y_1) \end{aligned}$$

ถ้า C จะถูกสร้างไปที่จุด D (x'_3, y'_3) โดย matrix transformation H_1

$$\begin{bmatrix} x'_3 \\ y'_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 1 & y_4 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x'_3 &= x_3 + (x_4 - x_1) \\ y'_3 &= y_3 + (y_4 - y_1) \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่า $(x'_2, y'_2) = (x_5, y_5)$ และ $(x'_3, y'_3) = (x_6, y_6)$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ระยะ } BC &= \sqrt{[x_3 + (x_4 - x_1) - (x_2 + (x_4 - x_1))]^2 + [y_3 + (y_4 - y_1) \\ &\quad - (y_2 + (y_4 - y_1))]^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \\ &= \text{ระยะ } BC \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2}$$

= ระยะ EF

∴ จุด B หันจาก E และจุด C หันจาก F

∴ H_1 เป็น matrix transformation ที่นำจุด A, B, C ของสามเหลี่ยม ABC ไปทับจุด D, E, F ของสามเหลี่ยม DEF ให้พอดีกัน

∴ สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ ด้วยคือ ความสัมมติเดียวกัน ความต่อเนื่อง และมุมที่สัมมติเดียวกัน มุมคงมุม ซึ่งจะนัดสอบดูได้ ดังนี้

1. ทดสอบความ

$$\begin{aligned} \therefore \text{ระยะ } DB' &= \sqrt{(x_2 + (x_4 - x_1) - x_4)^2 + (y_2 + (y_4 - y_1) - y_4)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \text{ระยะ AB} \\ &= \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2} \\ &= \text{ระยะ DE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ระยะ } CD &= \sqrt{[x_4 - (x_3 + (x_4 - x_1))]^2 + [y_4 - (y_3 + (y_4 - y_1))]^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \\ &= \text{ระยะ CA} \\ &= \sqrt{(x_4 - x_6)^2 + (y_4 - y_6)^2} \\ &= \text{ระยะ FD} \end{aligned}$$

$$\text{ระยะ } BC = \text{ระยะ } BC = \text{ระยะ } EF$$

2. ทดสอบมุม

ให้เส้นตรง AC มีสมการเป็น $y = m_1 x + c_1$

$$\therefore m_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

ให้เส้นตรง BC มีสมการเป็น $y = m_2x + c_2$

$$\therefore m_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

ให้เส้นตรง BA มีสมการเป็น $y = m_3x + c_3$

$$\therefore m_3 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ให้ $\hat{ACB} = \alpha$, $\hat{CBA} = \beta$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha &= \tan^{-1} \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \\ &= \tan^{-1} \frac{(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)} \dots (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \beta &= \tan^{-1} \frac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3} \\ &= \tan^{-1} \frac{(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_1 - y_2)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_2) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_2)} \dots (3)\end{aligned}$$

ให้บน DFE = α' , FED = β'

ให้เส้นตรง DF มีสมการเป็น $y = m'_1x + c'_1$

$$\begin{aligned}\therefore m'_1 &= \frac{y_6 - y_4}{x_6 - x_4} \\ &= \frac{y_3 + (y_4 - y_1) - y_4}{x_3 + (x_4 - x_1) - x_4} \\ &= \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\end{aligned}$$

ให้เส้นตรง EF มีสมการเป็น $y = m'_2x + c'_2$

$$\therefore m'_2 = \frac{y_6 - y_5}{x_6 - x_5}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{y_3 + (y_4 - y_1) - (y_2 + (y_4 - y_1))}{x_3 + (x_4 - x_1) - (x_2 + (x_4 - x_1))} \\
 &= \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}
 \end{aligned}$$

ให้เส้นตรง ED มีสมการเป็น $y = m_3'x + c_3$

$$\begin{aligned}
 \therefore m'_3 &= \frac{y_4 - y_5}{x_4 - x_5} \\
 &= \frac{y_4 - (y_2 + (y_4 - y_1))}{x_4 - (x_2 + (x_4 - x_1))} \\
 &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\
 \therefore \alpha' &= \tan^{-1} \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1'm_2'} \\
 &= \tan^{-1} \frac{(x_5 - x_6)(y_6 - y_4) - (x_6 - x_4)(y_6 - y_5)}{(x_6 - x_4)(x_6 - x_5) + (y_6 - y_4)(y_6 - y_5)} \dots (4) \\
 &= \tan^{-1} \frac{(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)} \\
 \therefore \beta' &= \tan^{-1} \frac{m'_2 - m'_3}{1 + m'_2m'_3} \\
 &= \tan^{-1} \frac{(x_4 - x_5)(y_6 - y_5) - (x_6 - x_5)(y_4 - y_5)}{(x_6 - x_5)(x_4 - x_5) + (y_6 - y_5)(y_4 - y_5)} \dots (5) \\
 &= \tan^{-1} \frac{(x_1 - x_3)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_1 - y_3)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl} \therefore \alpha & = & \alpha' \\ & & \\ \beta & = & \beta' \end{array}$$

\therefore บูมที่เหลือบ่อมเท่ากัน

พอไปบีจจะแสดงตัวอักษรในกระดาษกราฟ โดยให้จุด A, B, C, D, E และ F

มีโคอ็ติเนตเป็น (1,4), (4,4), (1,8), (8,5), (11,5) และ (8,9) ตามลำดับ
เมื่อ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง และ DEF เป็นสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง (กราฟรูปที่ ๓)

$$\therefore \text{matrix transformations } H_1 \text{ เท่ากับ} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

H_1 จะเป็น matrix transformations หลงจุด A(1,4), B(4,4) และ C(1,8)
ไปยังจุด D(8,5), E(11,5) และ F(8,9) ตามลำดับ

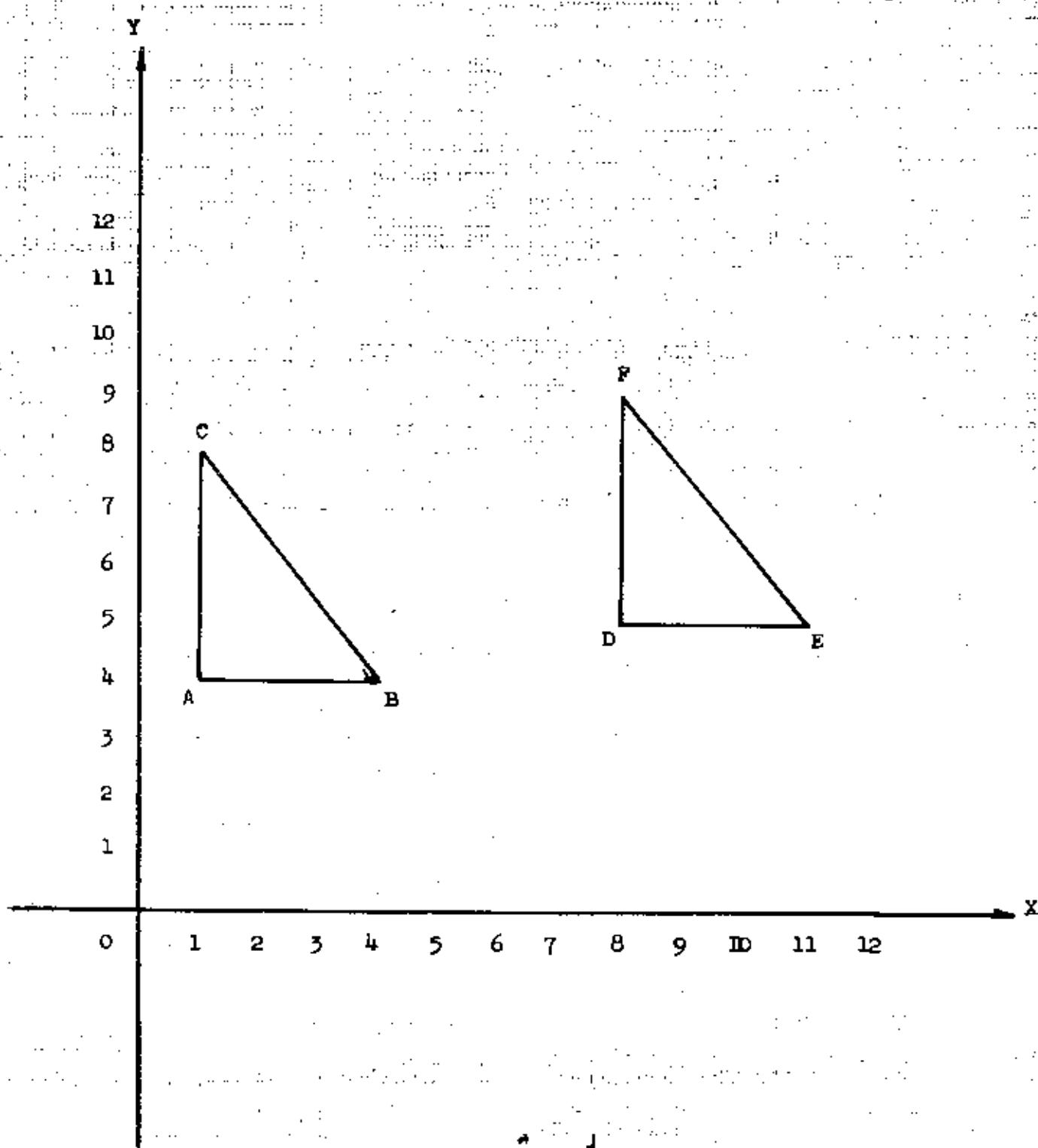
สมมุติให้จุด B ถูกส่งไปที่จุด $B'(x'_2, y'_2)$ โดย H_1 และจุด C ถูกส่งไปที่จุด
 $C'(x'_3, y'_3)$ โดย H_1

$$\therefore \begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ดังเท่ากับโคอ็ติเนตของจุด E}$$

\therefore จุด B พับจุด E

$$\text{และ } \begin{bmatrix} x'_3 \\ y'_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$



ก้าวที่ ๔

$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งเท่ากับໄอกออดิเนตของจุด } F$$

- ∴ จุด C หันจุด F
- ∴ H_1 เป็น matrix transformation ที่นำจุดย่อ A,B,C ของสามเหลี่ยม ABC ไปหันจุดย่อ D,E,F ของสามเหลี่ยม DEF ให้พร้อมกัน โดยจุด A หันจุด D จุด B หันจุด E และจุด C หันจุด F
- ∴ สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท่ากันหกประการ ซึ่งจะทดสอบได้ครอ.

1. ทดสอบความ

$$\begin{aligned} \therefore \text{ ก้าวหนักในคราน } AB &= \text{ คราน } DE \\ \text{ คราน } BC &= \text{ คราน } EF \\ \text{ และคราน } CA &= \text{ คราน } FD \\ \text{ ระยะ } AB &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (4 - 4)^2} \\ &= 3 \\ \text{ ระยะ } DE &= \sqrt{(11 - 8)^2 + (5 - 5)^2} = 3 \\ &= \text{ ระยะ } AB \\ \text{ ระยะ } BC &= \sqrt{(1 - 4)^2 + (8 - 4)^2} \\ &= 5 \\ \text{ ระยะ } EF &= \sqrt{(8 - 11)^2 + (9 - 5)^2} = 5 \\ &= \text{ ระยะ } BC \\ \text{ ระยะ } CA &= \sqrt{(1 - 1)^2 + (4 - 8)^2} \\ &= 4 \\ \text{ ระยะ } FD &= \sqrt{(8 - 8)^2 + (5 - 9)^2} = 4 \\ &= \text{ ระยะ } CA \end{aligned}$$

๒. หกสูตรบันทึก

ให้ $\widehat{ACB} = \alpha$, $\widehat{CBA} = \beta$

จาก (2) ได้

$$\begin{aligned}\alpha &= \tan^{-1} \frac{(1-4)(8-4) - (1-1)(8-4)}{(1-1)(1-4) + (8-4)(8-4)} \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{-3}{4} \right)\end{aligned}$$

จาก (3) ได้

$$\begin{aligned}\beta &= \tan^{-1} \frac{(1-4)(8-4) - (1-4)(4-4)}{(1-4)(1-4) + (8-4)(4-4)} \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{-4}{3} \right)\end{aligned}$$

ให้ $\widehat{DFE} = \alpha'$, $\widehat{FED} = \beta'$

จาก (4) ได้

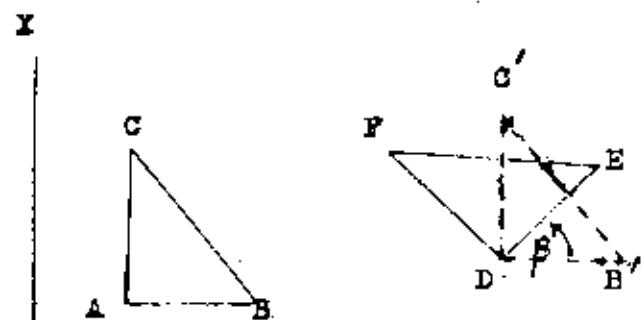
$$\begin{aligned}\alpha' &= \tan^{-1} \frac{(8-11)(9-5) - (8-8)(9-5)}{(8-8)(8-11) + (9-5)(9-5)} \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{-3}{4} \right) = \alpha\end{aligned}$$

จาก (5) ได้

$$\begin{aligned}\beta' &= \tan^{-1} \frac{(8-11)(9-5) - (8-11)(5-5)}{(8-11)(8-11) + (9-5)(5-5)} \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{-4}{3} \right) \\ &= \beta\end{aligned}$$

∴ มุมที่เหลือขอยกเท่ากัน

ตัวอย่างที่ ๒ ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF อยู่ในลักษณะ
ทั่วไป โดยค่า DE ทำนุ� ๘ เรเดียบรับแนวระดับ



จากตัวอย่างที่ ๑ จะได้ matrix transformation

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 1 & y_4 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งมีจุด A (x_1, y_1) ไปทับจุด D (x_4, y_4) จุด B(x_2, y_2) ไปทับจุด B' (x'_2, y'_2) และจุด C(x_3, y_3) ไปทับจุด C' (x'_3, y'_3)

ให้จุด D เป็นจุดพมุน หมุนตาม DB' หวานเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม θ เราได้

จาก (13) ในบทที่ ๒ จะได้

$$\begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_4(1 - \cos \theta) + y_4 \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & -x_4 \sin \theta + y_4 (1 - \cos \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แยกจากตัวอย่างที่ ๑

$$\begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 1 & y_4 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} x''_2 \\ y''_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (x_4 - x_1)\cos \theta - (y_4 - y_1)\sin \theta + x_4(1 - \cos \theta) + y_4 \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & (x_4 - x_1)\sin \theta + (y_4 - y_1)\cos \theta - x_4 \sin \theta + y_4 (1 - \cos \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= R_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2'' = x_2 \cos \beta - y_2 \sin \beta + (x_4 - x_1) \cos \beta - (y_4 - y_1) \sin \beta + x_4(1 - \cos \beta) + y_4 \sin \beta$$

$$y_2'' = x_2 \sin \beta + y_2 \cos \beta + (x_4 - x_1) \sin \beta + (y_4 - y_1) \cos \beta - x_4 \sin \beta + y_4(1 - \cos \beta)$$

∴ matrix transformations H_2 จะนำรูป B (x_2, y_2) ไปเป็นรูป

E (x_2'', y_2'') หมายความว่า กันก์จะนำรูป C (x_3, y_3) ไปยังรูป F (x_3'', y_3'') ด้วย

$$\therefore \begin{bmatrix} x_3'' \\ y_3'' \\ 1 \end{bmatrix} = H_2 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x_3'' = x_3 \cos \beta - y_3 \sin \beta + (x_4 - x_1) \cos \beta - (y_4 - y_1) \sin \beta + x_4(1 - \cos \beta) + y_4 \sin \beta$$

$$y_3'' = x_3 \sin \beta + y_3 \cos \beta + (x_4 - x_1) \sin \beta + (y_4 - y_1) \cos \beta - x_4 \sin \beta + y_4(1 - \cos \beta)$$

ดังสามารถพิสูจน์ได้ว่า $(x_2'', y_2'') = (x_5, y_5)$ และ $(x_3'', y_3'') = (x_6, y_6)$

$$\therefore \text{ระยะ EF}' = \sqrt{(x_3'' - x_2'')^2 + (y_3'' - y_2'')^2}$$

$$= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$= \text{ระยะ BC}$$

$$= \sqrt{(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2}$$

$$= \text{ระยะ EF}$$

∴ จุด B ทับจุด E และจุด C ทับจุด F และ H_2 จะเป็น matrix transformation ที่จะนำรูป A ไปทับจุด D ด้วย กด้าวคืบ

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{bmatrix} = H_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = x_1 \cos \beta - y_1 \sin \beta + (x_4 - x_1) \cos \beta - (y_4 - y_1) \sin \beta + x_4(1 - \cos \beta) + y_4 \sin \beta$$

$$y_4 = x_1 \sin \beta + y_1 \cos \beta + (x_4 - x_1) \sin \beta + (y_4 - y_1) \cos \beta - x_4 \sin \beta + y_4(1 - \cos \beta)$$

∴ H_2 เป็น matrix transformation ที่นำรูปของ A,B,C ของสาม

เหลี่ยม ABC ไปทับรูปของ D,E,F ของสามเหลี่ยม DEF ให้ตรงกัน.

∴ สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ กล่าวคือ คำนวณนัยกันเท่ากัน คำนพศคำน และบูมที่มนัยกันเท่ากัน มุมคงมุม ซึ่งจะทดสอบคูกูกองนี้.

1. ทดสอบคำน

$$\begin{aligned} \therefore \text{ระยะ } DE' &= \sqrt{(x_2'' - x_4)^2 + (y_2'' - y_4)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \text{ระยะ } AB \\ &= \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2} \end{aligned}$$

$$= \text{ระยะ } DE$$

$$\begin{aligned} \text{ระยะ } FD' &= \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \\ &= \text{ระยะ } CA \\ &= \sqrt{(x_4 - x_6)^2 + (y_4 - y_6)^2} \\ &= \text{ระยะ } FD \end{aligned}$$

$$\text{และระยะ } BC' = \text{ระยะ } BC = \text{ระยะ } EF$$

2. ทดสอบมุม

$$\angle ACB = \alpha, \angle CBA = \beta$$

$$\angle DFE = \alpha', \angle FED = \beta'$$

จากตัวอย่างที่ 1

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_1 - y_2)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_2) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_2)}$$

$$\alpha' = \tan^{-1} \frac{(x_6 - x_5)(y_6 - y_5) - (x_6 - x_4)(y_6 - y_5)}{(x_6 - x_5)(x_6 - x_5) + (y_6 - y_4)(y_6 - y_5)}$$

$$\beta' = \tan^{-1} \frac{(x_4 - x_5)(y_6 - y_5) - (x_6 - x_5)(y_4 - y_5)}{(x_6 - x_5)(x_4 - x_5) + (y_6 - y_5)(y_4 - y_5)}$$

$$\text{ถ้า } (x_5, y_5) = (x_2'', y_2'') \text{ และ } (x_6, y_6) = (x_3'', y_3'')$$

$$\therefore \alpha' = \tan^{-1} \frac{(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)} \\ = \alpha$$

$$\beta' = \tan^{-1} \frac{(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) - (x_2 - x_1)(y_1 - y_2)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_2) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_2)} \\ = \beta$$

\therefore มุมที่เหลือของเหล็ก

ต่อไปนี้จะแสดงค่าวอบ่างในกราฟตามกราฟ โดยให้จุด A, B, C, D, E และ F

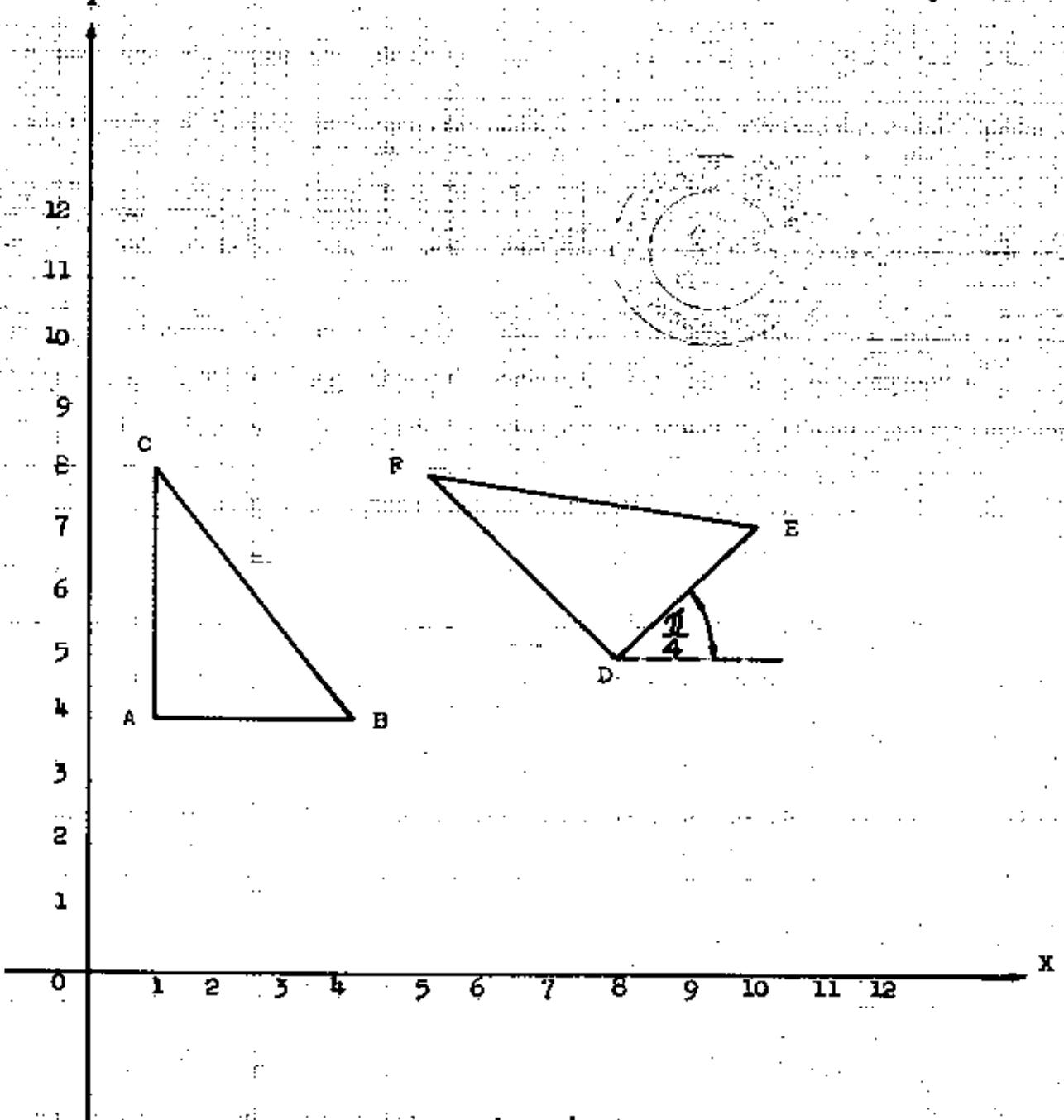
น้ำตกอีเบน (1,4), (4,4), (1,8), (8,5), (10.121, 7.121) และ (5.172, 7.828)

ตามลักษณะ เมื่อ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง และ DEF เป็นสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง (กราฟ
รูปที่ 4) โดยมีค่า DE พัมพ $\frac{\pi}{4}$ เกรเดียนต์แนวนอนคือ

\therefore matrix transformation H_2

$$= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} & (8-1)\cos \frac{\pi}{4} - (5-4)\sin \frac{\pi}{4} + 8(1 - \cos \frac{\pi}{4}) + 5 \sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & (8-1)\sin \frac{\pi}{4} + (5-4)\cos \frac{\pi}{4} - 8 \sin \frac{\pi}{4} + 5(1 - \cos \frac{\pi}{4}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} + 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

H_2 จะเป็น matrix transformations ที่ส่งจุด A (1,4), B (4,4) และ C (1,8)
ไปยังจุด D (8,5), E (10,121, 7.121) และ F (5.172, 7.828) ตามลักษณะ



найдите

สมมุติให้จุด $B(4,4)$ ถูกส่งไปที่จุด $E'(x'_2, y'_2)$ โดย H_2 และจุด $C(1,8)$ ถูกส่งไปที่จุด $F'(x''_2, y''_2)$ โดย H_2

$$\begin{aligned} \therefore \begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} + 8 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} + 8 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} + 5 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 10.121 \\ 7.121 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ช่องทางกับโดยอคีเนตของจุด } E$$

\therefore จุด B หันจุด E

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x''_2 \\ y''_2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} + 8 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 - 2\sqrt{2} \\ 5 + 2\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.172 \\ 7.828 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ช่องทางกับโดยอคีเนตของจุด } F$$

\therefore จุด C หันจุด F

H_2 เป็น matrix transformation ที่นำจุดยอก A,B,C ของสามเหลี่ยม ABC ไปหันจุดยอก D,E,F ของสามเหลี่ยม DEF ให้ตรงกัน

\therefore สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ ซึ่งจะเห็นดูได้ดังนี้.

1. พกสูตรคำนวณ

$$\therefore \text{ ก้าน } AB = \text{ ก้าน } DE$$

$$\text{ ก้าน } BC = \text{ ก้าน } EF$$

$$\text{ และ ก้าน } CA = \text{ ก้าน } FD$$

$$\text{ และจากที่ว่า } AB = 3$$

$$\text{ ระยะ } BC = 5$$

$$\text{ และระยะ } CA = 4$$

$$\therefore \text{ ระยะ } DE = \sqrt{\left(\frac{16+3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{10+3\sqrt{2}}{2} - 5\right)^2} = 3 = \text{ ระยะ } AB$$

$$EF = \sqrt{\left(8 - 2\sqrt{2}\right) - \frac{16+3\sqrt{2}}{2}\right]^2 + \left[\left(5+2\sqrt{2}\right) - \frac{10+3\sqrt{2}}{2}\right]^2}$$

$$= 5 = \text{ ระยะ } BC$$

$$\text{ และระยะ } FD = \sqrt{\left[8 - \left(8 - 2\sqrt{2}\right)\right]^2 + \left[5 - \left(5 + 2\sqrt{2}\right)\right]^2}$$

$$= 4$$

$$= \text{ ระยะ } CA$$

2. พกสูตรมุม

$$\text{ ใน } \hat{A}CB = \alpha, \hat{C}BA = \beta$$

$$\text{ จากที่ว่า } \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)$$

$$\text{ และ } \beta = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$$

$$\text{ให้ } \hat{D}F\bar{E} = \alpha', \quad \hat{F}E\bar{D} = \beta'$$

จาก (4) ที่

$$\begin{aligned}\alpha' &= \tan^{-1} \frac{(8 - 2\sqrt{2} - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2})(5 + 2\sqrt{2} - 5) - (8 - 2\sqrt{2} - 8)(5 + 2\sqrt{2} - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2})}{(8 - 2\sqrt{2} - 8)(8 - 2\sqrt{2} - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2}) + (5 + 2\sqrt{2} - 5)(5 + 2\sqrt{2} - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2})} \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{-3}{4} \right) \\ &= \alpha\end{aligned}$$

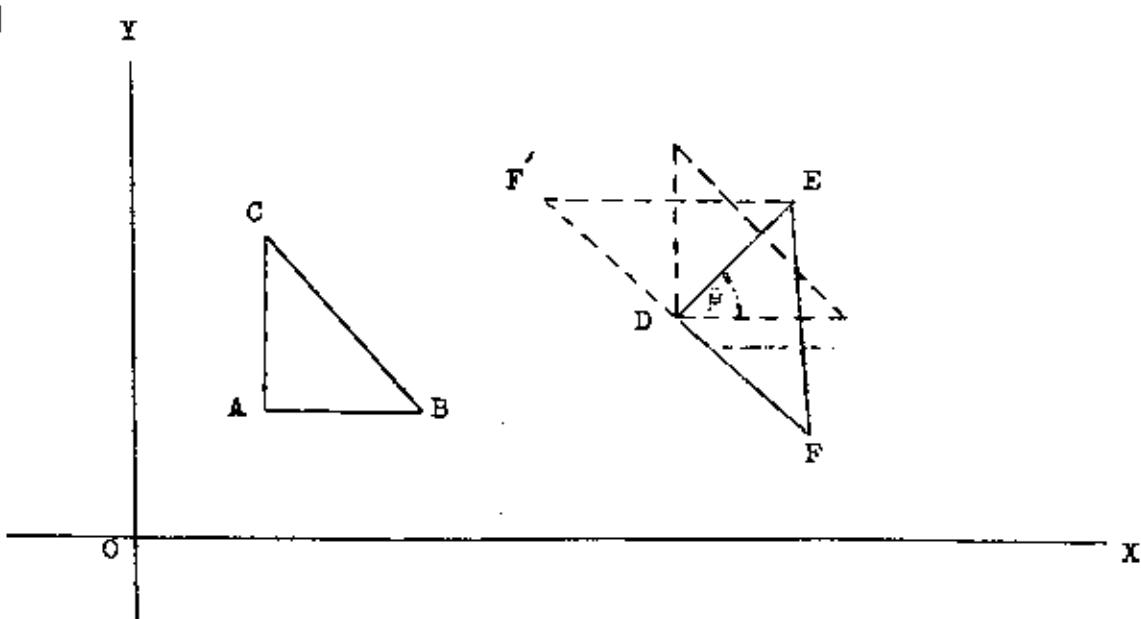
จาก (5) ที่

$$\begin{aligned}\beta' &= \tan^{-1} \frac{(8 - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2})(5 + 2\sqrt{2} - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2}) - (8 - 2\sqrt{2} - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2})(5 - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2})}{(8 - 2\sqrt{2} - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2})(8 - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2}) + (5 + 2\sqrt{2} - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2})(5 - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2})} \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{-4}{3} \right) \\ &= \beta\end{aligned}$$

\therefore นุ่มๆ เนื่องด้วยมีเทาภัน

ท้าอย่างที่ ๓ ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF อยู่ในลักษณะ

ดังรูป



จากตัวอย่างที่ 2 จะได้ matrix transformation H_2 ซึ่งนำจุด A (x_1, y_1) ไปพับจุด D (x_4, y_4) ตาม B (x_2, y_2) ไปพับจุด E (x_5, y_5) และจุด C (x_3, y_3) ไปพับจุด F (x_3'', y_3'')

ให้หุ่น F reflect บนเส้นตรง DE สमมติแก่จุด F (x_3'', y_3'')

จาก (17) ที่นบที่ 2 จะได้

$$\begin{bmatrix} x_3'' \\ y_3'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & x_4(1 - \cos 2\beta) - y_4 \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & -x_4 \sin 2\beta + y_4(1 + \cos 2\beta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แล้วจากตัวอย่างที่ 2

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} = H_2 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3'' \\ y_3'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & x_4(1 - \cos \beta) - y_4 \sin \beta + (x_4 - x_1) \cos \beta + (y_4 - y_1) \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta & -x_4 \sin \beta + y_4(1 + \cos \beta) + (x_4 - x_1) \sin \beta - (y_4 - y_1) \cos \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= H_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_3'' &= x_3 \cos \beta + y_3 \sin \beta + x_4(1 - \cos \beta) - y_4 \sin \beta + (x_4 - x_1) \cos \beta + (y_4 - y_1) \sin \beta \\ y_3'' &= x_3 \sin \beta - y_3 \cos \beta - x_4 \sin \beta + y_4(1 + \cos \beta) + (x_4 - x_1) \sin \beta - (y_4 - y_1) \cos \beta \end{aligned}$$

∴ matrix transformation H_3 จะนำจุด C (x_3, y_3) ไปยังจุด F (x_3'', y_3'')

จะเดียวกันกับนำ B (x_2, y_2) ไปบังจุด E (x_2'', y_2'') ด้วย

$$\therefore \begin{bmatrix} x_2'' \\ y_2'' \\ 1 \end{bmatrix} = H_3 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2'' = x_2 \cos \beta + y_2 \sin \beta + x_4(1 - \cos \beta) - y_4 \sin \beta + (x_4 - x_1) \cos \beta + (y_4 - y_1) \sin \beta$$

$$y_2'' = x_2 \sin \beta - y_2 \cos \beta - x_4 \sin \beta + y_4(1 + \cos \beta) + (x_4 - x_1) \sin \beta - (y_4 - y_1) \cos \beta$$

ช่องทางการพิจารณาได้ว่า $(x_2^m, y_2^m) \cong (x_5, y_5)$, $(x_3^m, y_3^m) = (x_6, y_6)$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ระยะ } EF &= \sqrt{(x_3^m - x_2^m)^2 + (y_3^m - y_2^m)^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \\ &= \text{ระยะ } BC \\ &= \sqrt{(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2} \\ &= \text{ระยะ } EF \end{aligned}$$

\therefore จุด B หันจาก E และจุด C หันจาก F และ H_3 จะเป็น matrix transformation ที่จะนำจุด A ไปหันจาก D กับ 각각ดัง

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{bmatrix} = H_3 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta + x_4 (1 - \cos \beta) - y_4 \sin \beta (x_4 - x_1) \cos \beta + (y_4 - y_1) \sin \beta$$

$$y_4 = x_1 \sin \beta - y_1 \cos \beta - x_4 \sin \beta + y_4 (1 + \cos \beta) + (x_4 - x_1) \sin \beta - (y_4 - y_1) \cos \beta$$

$\therefore H_3$ เป็น matrix transformation ที่นำจุด A,B,C ของสามเหลี่ยม

ABC ไปหันจากจุด D,E,F ของสามเหลี่ยม DEF ได้ตามกัน

\therefore สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ ซึ่งจะเห็นได้ชัดเจน

1. หลักสูตรคณิต

$$\begin{aligned} \text{ระยะ } DE &= \sqrt{(x_2^m - x_4)^2 + (y_2^m - y_4)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2} \\ &= \text{ระยะ } AB \\ &= \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2} \\ &= \text{ระยะ } DE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ระยะ } FD &= \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} \\
 &= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \\
 &= \text{ระยะ } CA \\
 &= \sqrt{(x_4 - x_6)^2 + (y_4 - y_6)^2} \\
 &= \text{ระยะ } FD \\
 \text{ระยะรั้ย } E &\stackrel{H}{=} F = \text{ระยะ } BC = \text{ระยะ } EF
 \end{aligned}$$

2. ห้องเรียน

ให้ $\hat{ACB} = \alpha$, $\hat{CBA} = \beta$

$$\hat{DFE} = \alpha', \quad \hat{FED} = \beta'$$

จากที่ว่า α มากกว่า α'

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_1 - y_2)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_2) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_2)}$$

$$\alpha' = \tan^{-1} \frac{(x_6 - x_5)(y_6 - y_5) - (x_6 - x_4)(y_6 - y_5)}{(x_6 - x_4)(x_6 - x_5) + (y_6 - y_4)(y_6 - y_5)}$$

$$\beta' = \tan^{-1} \frac{(x_4 - x_5)(y_6 - y_5) - (x_6 - x_5)(y_4 - y_5)}{(x_6 - x_5)(x_4 - x_5) + (y_6 - y_5)(y_4 - y_5)}$$

$$\text{แล้ว } (x_5, y_5) = (x_2^{\text{ม}}, y_2^{\text{ม}}) \text{ และ } (x_6, y_6) = (x_3^{\text{ม}}, y_3^{\text{ม}})$$

$$\therefore \alpha' = \tan^{-1} \left\{ - \frac{(x_3 - x_2)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)} \right\}$$

$$|\alpha'| = |\alpha|$$

$$\beta' = \tan^{-1} \left\{ - \frac{(x_1-x_2)(y_3-y_2) - (x_3-x_2)(y_1-y_2)}{(x_3-x_2)(x_1-x_2) + (y_3-y_2)(y_1-y_2)} \right\}$$

$$|\beta'| = |\beta|$$

\therefore มุมที่เหลือของเทา กัน

ก่อไปนี้จะแสดงค่าวอป่างในกราฟกราฟ โดยในรูป A,B,C,D,E และ F นั้น

โดยอีเบนท์ $(1,4), (4,4), (1,8), (8,5), (10.121, 7.121)$ และ $(10.828, 2.172)$ ตาม
ลำดับ เมื่อ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง และ DEF เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง (กราฟรูป

ที่ 5) โดยมีค่า DE ห้าม $\frac{\pi}{4}$ เริ่มเดินกันแนวระดับ

\therefore matrix transformation H_3

$$= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} & 8(1-\cos \frac{\pi}{4}) - 5 \sin \frac{\pi}{4} + (8-1) \cos \frac{\pi}{4} + (5-4) \sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & -\cos \frac{\pi}{4} & 8 \sin \frac{\pi}{4} + 5(1+\cos \frac{\pi}{4}) + (8-1) \sin \frac{\pi}{4} - (5-4) \sin \frac{\pi}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

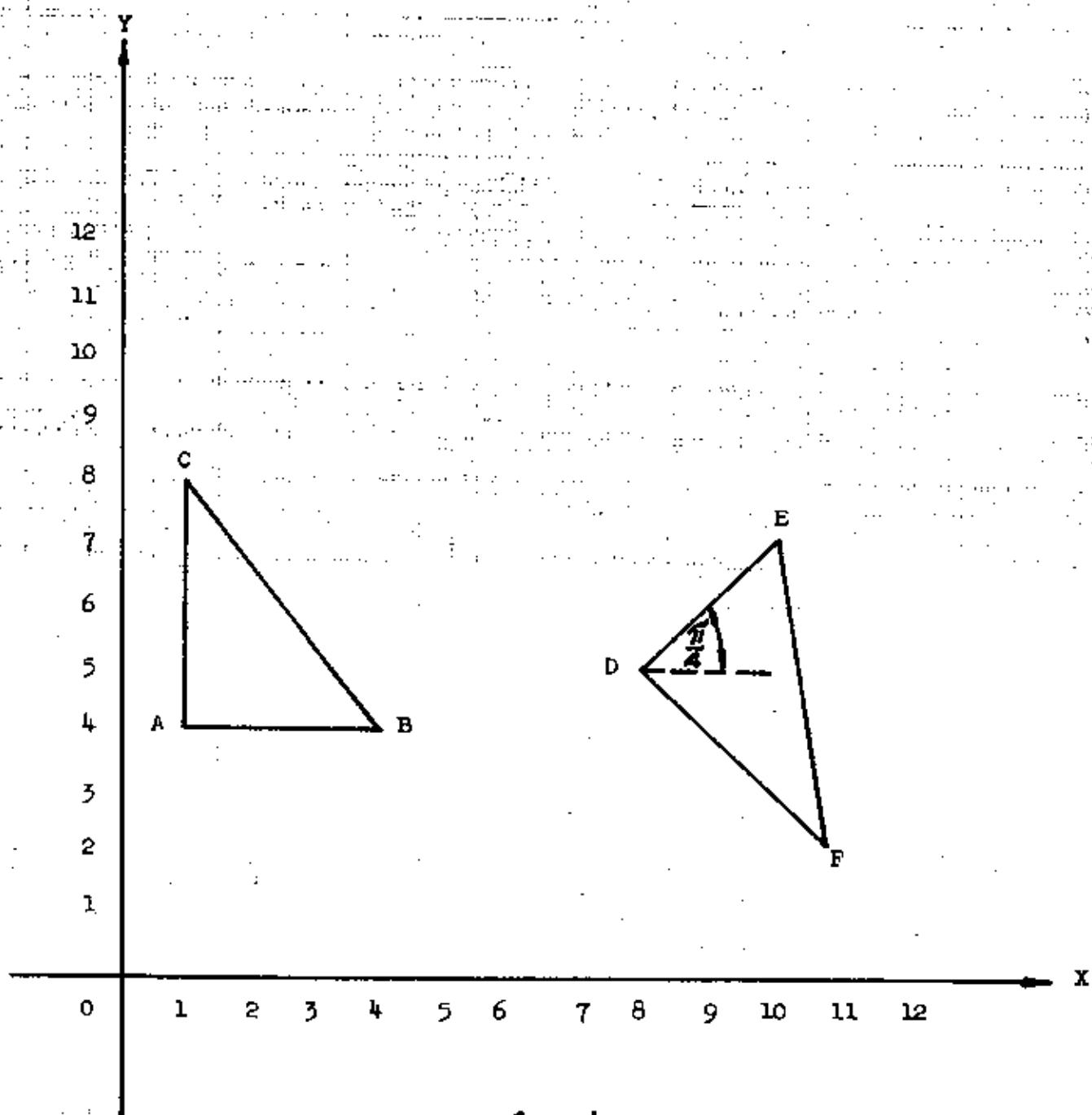
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 8 - \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 5 + \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

H จะเป็น matrix transformation ที่ส่งรูป A (1,4), B (4,4) และ C (1,8)
ไปยังรูป D (8,5), E (10.121, 7.121) และ F (10.828, 2.172) ตามลำดับ

สมมุติให้รูป C (1,8) ถูกส่งไปที่รูป $F''(x_3'', y_3'')$ โดย H_3 และรูป B(4,4)

ถูกส่งไปที่รูป E (x_2'', y_2'') โดย H

$$\begin{bmatrix} x_3'' \\ y_3'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 - \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 5 + \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$



กราฟรูปที่ ๕

$$= \begin{bmatrix} 8 + 2\sqrt{2} \\ 5 - 2\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10.828 \\ 2.172 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ชี้งเหา กับ โภคติ เนคซองจุก F

∴ จุด C หันจุก F

$$\begin{bmatrix} x' \\ 2 \\ y' \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{-\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 - \sqrt{2} \\ 5 + \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ 10.121 \\ 7.121 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ชี้งเหา กับ โภคติ เนคซองจุก E

∴ จุด B หันจุก E

∴ H_3 เป็น matrix transformation ที่นำจุดย่อ A,B,C ของรูปภาพเขียน ABC ไปหันจุกย่อ D,E,F ของสามเหลี่ยม DEF ให้พร้อมกัน

∴ สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท่ากันทุกประการ ชี้งจะหาดูว่า ให้ดูนี่.

๑. หตุสูบคาน

$$\begin{aligned}\therefore \text{ก้านคาน } AB &= \text{คาน } DE \\ \text{คาน } BC &= \text{คาน } EF \\ \text{และคาน } CA &= \text{คาน } FD\end{aligned}$$

และจากตัวอย่างที่ ๑ ให้รับะ $AB = 3$
 รับะ $BC = 5$
 และรับะ $CA = 4$

จากตัวอย่างที่ ๒ ให้รับะ $DE = 3 =$ รับะ AB

$$\begin{aligned}\text{รับะ } EF &= \sqrt{\left[(8 + 2\sqrt{2}) - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2} \right]^2 + \left[5 - 2\sqrt{2} - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2} \right]^2} \\ &= 5 = \text{รับะ } BC \\ \text{รับะ } FD &= \sqrt{\left[8 - (8 + 2\sqrt{2}) \right]^2 + \left[5 - (5 - 2\sqrt{2}) \right]^2} \\ &= 4 = \text{รับะ } CA\end{aligned}$$

๒. หตุสูบบม

ให้ $\hat{A}BC = \alpha$, $\hat{C}BA = \beta$

จากตัวอย่างที่ ๑ ให้ $\alpha = \tan^{-1} \left(-\frac{3}{4} \right)$

และ $\beta = \tan^{-1} \left(-\frac{4}{3} \right)$

ให้ $\hat{D}FE = \alpha'$, $\hat{F}ED = \beta'$

จาก (๔) ให้

$$\begin{aligned}\alpha' &= \tan^{-1} \frac{(8 + 2\sqrt{2} - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2})(5 - 2\sqrt{2} - 5) - (8 + 2\sqrt{2} - 8)(5 - 2\sqrt{2} - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2})}{(8 + 2\sqrt{2} - 8)(8 + 2\sqrt{2} - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2}) + (5 - 2\sqrt{2} - 5)(5 - 2\sqrt{2} - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2})} \\ &= \tan^{-1} \frac{3}{4}\end{aligned}$$

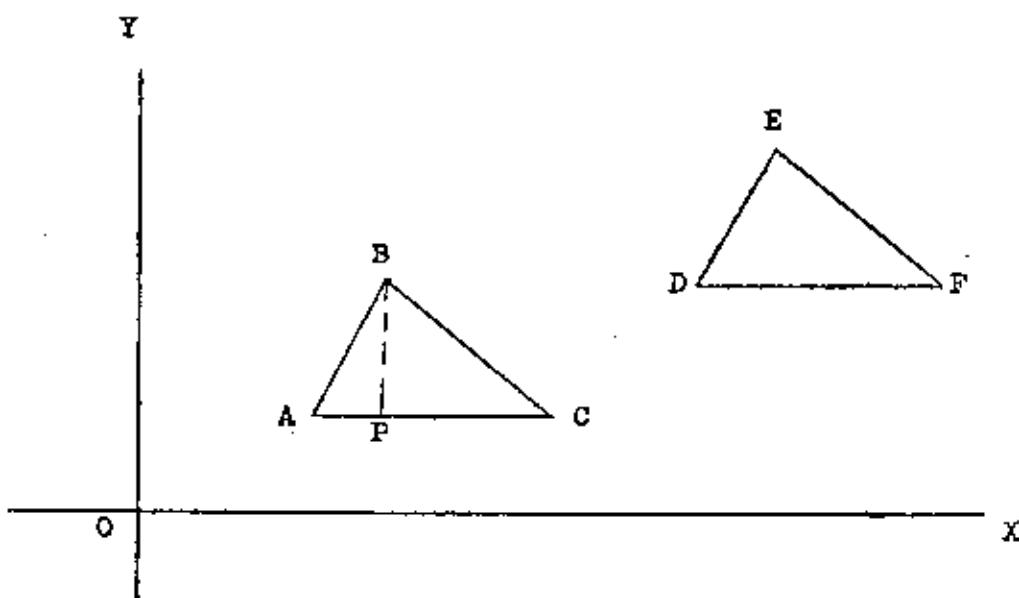
$$\begin{aligned} \beta &= \tan^{-1} \frac{(8 - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2})(5 - 2\sqrt{2} - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2}) - ((8+2\sqrt{2} - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2})(5 - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2}))}{(8+2\sqrt{2} - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2})(8 - \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2}) + (5-2\sqrt{2} - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2})(5 - \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2})} \\ &= \tan^{-1} \frac{4}{3} \\ \therefore |\alpha| &= |\beta| \\ \text{และ } |\beta| &= |\beta'| \\ \therefore \text{มุมที่เหลืออยู่บนเท้ากัน} \end{aligned}$$

จากที่ว่าอย่างในกราฟที่ ๑ จึงสรุปได้ว่า ถ้ามีสามเหลี่ยม ๒ รูป ก้านคูกบออกทั้งสามของแต่ละรูปมาให้ เราจะถ้าว่าวางสามเหลี่ยม ๒ รูปนั้น เท้ากันทุกประการ เมื่อเราสามารถคำนวณหา matrix transformation ซึ่งจะส่งจุดยอดหัวลงด้านของรูปหนึ่งไปยังจุดยอดหัวลงด้านของอีกรูปหนึ่งได้ พร้อมกัน

2. จากกราฟที่ ๒ สามเหลี่ยม ๒ รูปมีค้านเท้ากัน ๒ ค้าน ค้านหดค้าน และมีมุมในระหว่างค้านเท้ากัน เช่นสมมุติให้เป็นสามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF โดยถ้าหดค้าน AB เท้ากับค้าน DE ค้าน BC เท้ากับค้าน EF และมุม ABC เท้ากับมุม DEF ซึ่งที่ความทางเรขาคณิตวิเคราะห์ได้ว่า ก้านคูกอติกาในเขตของจุด A,B,C,D,E และ F มาให้ คงนั้นเราจึงพิจารณาได้ว่า สามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF เท้ากันทุกประการ โดยใช้ชีวิตรากในกราฟที่ ๑

3. จากกราฟที่ ๓ สามเหลี่ยมมุมจาก ๒ รูป มีค้านครองข้ามมุมขากบยาวเท้ากัน และมีค้านอันอีกค้านหนึ่งยาวเท้ากัน เช่นสมมุติให้เป็นสามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม DEF โดย ก้านคุม BAC เท้ากับมุม EDF และค้างก์เท้ากับหนึ่งมุมจาก ค้าน BC เท้ากับค้าน EF ค้าน AB เท้ากับค้าน DE ซึ่งที่ความทางเรขาคณิตวิเคราะห์ได้ว่า ก้านคูกอติกาในเขตของจุด A,B,C,D,E และ F มาให้ เราจึงพิจารณาโดยใช้ชีวิตรากในกราฟที่ ๑ ได้.

4. จากกราฟที่ ๔ สามเหลี่ยม ๒ รูป มีค้านเท้ากันหนึ่งค้าน และมีมุมเท้ากัน ๒ มุม มุมตรง เช่นสมมุติให้เป็นสามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม EDF โดยถ้าหดค้าน AC เท้ากับค้าน DE มุม BAC เท้ากับมุม EDF และมุม BCA เท้ากับมุม DEF (ถังรูป)



สมมุติให้ด้าน $AC = b$ มม $\angle BAC = \alpha$ มม $\angle BCA = \beta$

จาก $BP \perp AC$

สมมุติให้ $AP = j$

$$BP = ?$$

$$\therefore PC = b - j$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{j}$$

$$\therefore y = j \tan \alpha$$

$$\tan \beta = \frac{y}{b-j}$$

$$\therefore y = (b-j) \tan \beta$$

$$\therefore j \tan \alpha = (b-j) \tan \beta$$

$$\therefore j = \frac{b \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

$$\therefore j = \frac{b \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

เมื่อกำหนดด้าน AC มาให้ซึ่งที่ความสูงของเรขาคณิตวิเคราะห์ให้ทราบ ใช้กันชนิด
โดยอุดมสมของราก A และ C ในสมมุติให้เป็น (x_1, y_1) และ (x_3, y_3) ตามลักษณะ
ของการหาโภคคีเนส ของราก B (x_2, y_2)

$$\therefore x_2 = x_1 + \{ = x_1 + \frac{b \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

$$y_2 = y_1 + \gamma = y_1 + \frac{b \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

โดยท่านองเดียวถ้าเก็จนาไปออดีเนเพื่องรูป ๕ ให้

เมื่อรู้ไปออดีเนเพื่องรูปของจุดของสามเหลี่ยมหนึ่งสองก็จะรู้ว่ามีความสัมภัยที่จะดังนี้
เท่ากันทุกประการโดยใช้วิธีการในกรณีที่ ๑

จึงสรุปได้วาทฤษฎีบทที่สองบุคคลที่ก่อตัวที่จะสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการนั้น
เราสามารถพิสูจน์ด้วยวิธีนี้ได้โดยคำนวณหา matrix transformations ซึ่งเป็น
elements ใน Euclidean Group สามเหลี่ยมสองรูปที่อยู่บนหน้าที่เดียวกันทุกประการ
เมื่อเราคำนวณเมทริกซ์คงที่ความมาได้ เมทริกซ์ที่ง่ายอีกหนึ่งแบบที่ก่อตัวที่จะ
นับหน้าในเกือบสามเหลี่ยมคุณนั่ง เท่ากันทุกประการ สามเหลี่ยมคู่ทาง ๗ ที่เท่ากันทุกประ
การนั้นที่เป็นผลจาก matrix transformations ที่กล่าวไปใน Euclidean Group
นั่นเอง