บทที่ 2

ทฤษฎีทั่วไป

บทนำ

ในบทนี้กล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานต่างๆเป็นเบื้องต้นเพื่อจะนำไปสู่การวิเคราะห์ออกแบบชิ้นส่วนโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กด้วยวิธีการสร้างแบบจำลองสตรัท-ไทได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎีอีลาสติกเบื้องต้น เช่นความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียด, กรณีความเค้นในระนาบ (Plane Stress), การหาหน่วยแรงหลัก (Principal Stress)และทิศทางที่เกิดขึ้น, พลังงานสะสม(Strain Energy) ซึ่งเป็นข้อมูลที่สำคัญในการนำไปกำหนดรูปร่างของแบบจำลองสตรัท-ไท นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงวิธีการไฟไนท์เอลีเมนต์เบื้องต้น ซึ่งในการวิจัยนี้ได้ใช้โปรแกรมไฟไนท์เอลีเมนต์ในการคำนวนหาหน่วยแรงและแสดงทิศทางที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนตามหลักทฤษฎีอีลาสติก สำหรับส่วนของทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับแบบจำลองสตรัท-ไทที่จะกล่าวถึง เช่น ส่วนประกอบในแบบจำลองสตรัท-ไท, ประเภทของจุดเชื่อมต่อ (Node) , การแบ่งโครงสร้างออกเป็นส่วน B-reions, D-regions , ข้อกำหนดการวิบัติและกำลังอัดของคอนกรีต

ทฤษฎีอีลาสติก

ในรูปที่ 2.1 แสดงรูปทรงสามมิติที่มีปริมาตร V และพื้นที่ผิว S จุดใดๆบนรูปทรงดังกล่าวแสดงพิกัดด้วยค่า x,y,z บางส่วนของสภาพขอบถูกยึดรั้งไว้เพื่อระบุการเคลื่อนที่ของส่วนนั้นๆ บางส่วนของพื้นผิวมีแรง T กระทำกระจายสม่ำเสมอ ภายใต้แรงกระทำ รูปทรงจะมีการยืดหดตัว ซึ่งการยืดหดตัวที่จุด X $(=[x,y,z]^T)$ แสดงด้วยส่วนประกอบของการเคลื่อนที่สามส่วนคือ

$$u = [\, u, v, w]^T \tag{2.1}$$

ค่าน้ำหนักต่อปริมาตร แสดงด้วยเวกเตอร์ f

$$f = [f_x, f_y, f_z]^T \tag{2.2}$$

หน่วยแรงกระทำกระจายที่ผิว T ประกอบด้วย

$$T = [\, T_x , T_y , T_z \,]^T \tag{2.3}$$

แรงกระทำแบบจุด P กระทำที่จุด I

$$P_i = [\ P_x\ ,\ P_y\ ,\ P_z\ ]_i^T \tag{2.4}$$

ในรูปที่ 2.2 แสดงให้เห็นหน่วยแรงต่างๆที่กระทำต่อชิ้นส่วน dV เมื่อปริมาตร dV มีขนาดเสมือนจุด จะมีค่าหน่วยแรงหกอย่างคือ

$$\sigma = [\ \sigma_x\ ,\sigma_y\ ,\sigma_z\ ,\tau_{yz}\ ,\tau_{xz}\ ,\tau_{xy}\ ]^T \tag{2.5}$$

เมื่อ σ คือหน่วยแรงตั้งฉาก , τ คือหน่วยแรงเฉือน ในการพิจารณาชิ้นส่วนที่แสดงในรูป 1.2 สามารถหาแรงที่กระทำได้โดยการคูณหน่วยแรงกับพื้นที่ของทิศทางนั้นๆ จากสมดุล $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$ โดย dV = dxdydz แสดงสมการสมดุลได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\
\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\
\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

<u>เงื่อนไขขอบ</u> (Boundary Condition)

ดังแสดงในรูป 2.1 จะพบว่ามีเงื่อนไขการเคลื่อนที่ของขอบและเงื่อนไขของหน่วยแรงกระทำกระจายที่ผิว เช่น ถ้าระบุ u บนส่วนของขอบ S_u ไม่ให้มีการเคลื่อนที่

$$u = 0 \quad \text{on} \quad S_u \tag{2.7}$$

ทั้งนี้เราสามารถพิจารณากำหนดเงื่อนไขขอบเขต u = a , เมื่อ a คือการเคลื่อนที่ที่ถูกระบุ สำหรับเงื่อนไขของหน่วยแรงกระทำกระจายที่ผิว เมื่อพิจารณาสมดุลของชิ้นส่วนเตตระฮีดรอล ABCD ดังแสดงในรูปที่ 2.3 โดยที่ DA, DB, และ DC ขนานกับแกน x, y และ z ตามลำดับ พื้นที่ ABC คือ dA อยู่บนระนาบผิวมีแรงกระทำตั้งฉาก $n = [n_x\ ,n_y\ ,n_z]^T$ เมื่อ n_x ,n_y ,n_z เป็นทิศทางโคไซน์ของเวกเตอร์ตั้งฉากกับผิว ณ จุดที่กำลังพิจารณา ดังนั้นพื้นที่ BDC = n_xdA , พื้นที่ ADC = n_ydA และพื้นที่ ADB = n_zdA

พิจารณาสมดุลตลอดแกนทั้งสาม

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= T_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{xz} n_z &= T_y \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y +_z \sigma_z n_z &= T_z \end{aligned} \tag{2.8}$$

สภาพเหล่านี้เป็นไปตามเงื่อนไขขอบที่ S_T เมื่อมีหน่วยแรงกระทำ, สำหรับแรงกระทำแบบจุดจะต้องถูกกำหนดให้เป็นแรงกระจายของผิวที่มีขนาดเล็ก

<u>ความเครียดกับการเคลื่อนที่</u> (Strain - Displacement Relation)

ค่าความเครียดถูกแสดงด้วยรูปแบบเวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับหน่วยแรงในสมการ 2.5

$$\varepsilon = [\ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}\ ]^T \tag{2.9}$$

เมื่อ ε คือความเครียดตั้งฉาก , γ คือความเครียดเฉือน ในรูป 2.4 แสดงการยืดหดตัวของด้าน dx-dy ดังนั้นเมื่อพิจารณาด้านอื่นๆ จะแสดงได้ดังนี้

$$\varepsilon = [\ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{dx}\ ]^T \tag{2.10}$$

<u>ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียด</u> (Stress-Strain Relation)

สำหรับวัสดุอีลาสติกเชิงเส้น จะมีค่าความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น-ความเครียดเป็นไปตามกฎของฮุค (Hook's law) สำหรับวัสดุไอโซโทรปิคมีคุณสมบัติที่สำคัญสองอย่างคือ โมดูลัสของอีลาสติก E และอัตราส่วนปัวซองน์ ν เมื่อพิจารณาชิ้นส่วนลูกบาศก์ จะมีสมการตามกฎของฮุคดังนี้

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_x &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

G คือค่าโมดูลัสของการเฉือน

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.12}$$

จากความสัมพันธ์กฎของฮุค

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{2.13}$$

แทนค่า $(\sigma_y + \sigma_z)$ ในสมการ 2.11 เพื่อหาความสัมพันธ์ย้อนกลับของ $\sigma = D\varepsilon$ (2.14)

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

<u>ความเค้นในระนาบ</u> (Plane Stress) หมายถึงแผ่นชิ้นส่วนระนาบบางได้รับแรงกระทำในแนวของระนาบเดียวกันบริเวณขอบหรือที่พื้นผิว โดยมีส่วนประกอบของหน่วยแรง σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} บนผิวทั้งสองด้านของชิ้นส่วนมีค่าเท่ากับศูนย์และยังสมมติให้ภายในตลอดความหนามีค่าเท่ากับศูนย์ด้วย ดังนั้นจะเหลือหน่วยแรงที่ต้องนำมาพิจารณาคือ σ_x , σ_y , τ_{xy} โดยที่หน่วยแรงทั้งสามจะไม่ขึ้นกับระยะทางแกน z และไม่เปลี่ยนแปลงตลอดความหนาของมัน แต่จะเป็นฟังก์ชั่นของพิกัด x,y เท่านั้น ตัวอย่างลักษณะปัญหาระนาบหน่วยแรงดังกล่าว เช่นการวิเคราะห์หน่วยแรงภายในคานลึก (Deep Beam), สมการของระนาบหน่วยแรงสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \tag{2.16}$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

<u>หน่วยแรงหลัก</u> (Principal stress)

ในกรณีของความเค้นในระนาบ หน่วยแรง σ_x , σ_y , τ_{xy} ที่เกิดขึ้นบนชิ้นส่วนแสดงในรูปที่ 2.5 เป็นหน่วยแรงที่สัมพันธ์กับการเคลื่อนที่ u, v ตามแนวแกน x,y ซึ่งไม่ได้แสดงขนาดของหน่วยแรงสูงสุด ในกรณีของหน่วยแรงสูงสุดและต่ำสุดนั้นจะเกิดในแนวแกน x',y' ใดๆ โดยที่ในทิศทางนั้นหน่วยแรงเฉือนจะมีค่าเป็นศูนย์ จากการพิสูจน์พบว่ามุมของหน่วยแรงหลักมีค่าดังนี้

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} \tag{2.18}$$

โดยระนาบที่เกิดหน่วยแรงสูงสุดคือมุม θ , และระนาบที่เกิดหน่วยแรงต่ำสุดคือมุม $\theta + 90^0$ ขนาดของหน่วยแรงสูงสุดและต่ำสุดสามารถหาได้จากวิธีการของ Mohr's Circle ซึ่งมีสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \tag{2.19}$$

สำหรับหน่วยแรงเฉือนสูงสุดจะเกิดบนระนาบที่มีมุมเท่ากับ $\theta + 45^0$ โดยมีขนาดดังนี้

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{2.20}$$

ลักษณะการวิบัติของชิ้นส่วนอาจเกิดเนื่องจากแรงเฉือน (Maximum Shearing Stress Theory) หรือเนื่องมาจากหน่วยแรงหลัก (Principal Stress Theory) ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับประเภทของวัสดุ เช่นถ้าเป็นวัสดุเหนียว (Ductile Material) การวิบัติจะเกิดขึ้นเมื่อหน่วยแรงเฉือนที่จุดใดจุดหนึ่งถึงค่าความต้านทานต่อแรงเฉือนของวัสดุนั้น สำหรับวัสดุเปราะ (Brittle Material) การวิบัติจะเป็นไปในรูปหน่วยแรงหลักเกินค่ากำลังต้านทานของวัสดุนั้น

พลังงานสะสม (Strain Energy)

เมื่อชิ้นส่วนได้รับแรงกระทำจากภายนอก จะเกิดพลังงานขึ้นภายในซึ่งเรียกว่าพลังงานสะสม (Strain Energy) สำหรับวัสดุอีลาสติกเชิงเส้นจะมีพลังงานสะสมต่อปริมาตรหนึ่งหน่วยเท่ากับ $\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ ดังนั้นพลังงานสะสมทั้งหมดของชิ้นส่วนในรูปที่ 2.1 จะมีค่าดังนี้

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon\, dv \tag{2.21}$$

สำหรับกรณีแท่งเหล็กได้รับแรงตามแกน N ดังแสดงในรูป 2.6ก ค่าพลังงานสะสมในวัตถุนั้นได้จากพื้นที่ใต้เส้นกราฟที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดรูปที่ 2.6ข โดยที่ σ_x และ ε_x แทนความเค้นและความเครียดในแนวแกนแท่งเหล็ก จากกฎของฮุค (Hook's Law) $\varepsilon_x = \sigma_x/E$ และ dV = Adx โดยที่ A คือพื้นที่หน้าตัดของแท่งเหล็ก ดังนั้นสมการที่ 2.21 จะกลายเป็น

$$U = \int_0^L \frac{N^2 dx}{2AE} = \frac{N^2 L}{2AE} \tag{2.22}$$

ลักษณะของแรงตามแกนซึ่งสอดคล้องกับแรงอัดและแรงดึงภายในของแบบจำลองสตรัท-ไท Schlaich, Shafer, Jenerwein[1] ได้นำหลักการพลังงานสะสมไปประยุกต์ใช้หาแบบจำลองสตรัท-ไท โดยเสนอว่าแบบจำลองสตรัท-ไทที่ดี จะต้องมีพลังงานสะสมต่ำสุด

หลักการของ Saint Venant

ถ้าระบบของแรงที่กระทำลงบนบางส่วนของวัสดุอีลาสติก ถูกแทนด้วยระบบของแรงสมดุลเทียบเท่ากระทำที่ส่วนเดียวกัน การกระจายของหน่วยแรงจะมีการเปลี่ยนแปลงเฉพาะบริเวณที่ใกล้กับตำแหน่งน้ำหนักกระทำเท่านั้น ในส่วนอื่นจะมีการกระจายของหน่วยแรงที่เหมือนกัน หลักการของ Saint Venant เป็นการทำให้ง่ายขึ้นในการแก้ปัญหาต่างๆ โดยการยอมให้สภาพขอบเขตเปลี่ยนระบบแรงกระทำเป็นระบบสมดุลของแรงเทียบเท่าซึ่งมีลักษณะของหน่วยแรงกระจายสม่ำเสมอที่ขอบ ผลกระทบของหน่วยแรงที่ไม่สม่ำเสมอบริเวณจุดที่น้ำหนักกระทำจะมีระยะประมาณหนึ่งเท่าของความลึกของชิ้นส่วนนั้น

<u>วิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์</u>

ในการทำวิจัยครั้งนี้ได้นำโปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์มาใช้ในการวิเคราะห์หน่วยแรงภายในชิ้นส่วนโครงสร้างที่เป็นระนาบ เช่น คานลึก (Deep Beam) เพื่อหาขนาดและทิศทางของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นภายในแล้วนำไปเป็นข้อมูลสำหรับเริ่มสร้างแบบจำลองสตรัท-ไท สำหรับวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์อธิบายได้โดยสังเขปดังนี้ ในการแก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่ง ปัญหานั้นจะประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ ค่าเฉลยแม่นตรง (Exact Solution) ของปัญหาดังกล่าวจะประกอบด้วยค่าของตัวแปรต่างๆกันตามตำแหน่งต่างๆบนรูปร่างลักษณะของปัญหานั้น หรือกล่าวอีกแนวหนึ่งก็คือ ค่าเฉลยแม่นตรงจะประกอบด้วยค่าต่างๆทั้งหมดนับเป็นจำนวนอนันต์ แทนที่จะทำการหาค่าแม่นตรงที่ประกอบด้วยค่าต่างๆจำนวนมากมายเช่นนี้ซึ่งสำหรับปัญหาในการปฏิบัติจะทำไม่ได้ หลักการก็คือทำการเปลี่ยนค่าทั้งหมดที่มีค่าจำนวนอนันต์ค่านั้นมาเป็นค่าโดยประมาณที่มีจำนวนนับได้ (Finite) ด้วยการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยเอลิเมนต์ (Elements) ซึ่งมีขนาดต่างๆกัน วิธีการดังกล่าวชี้บ่งเป็นนัยว่า ผลเฉลยของแต่ละเอลิเมนต์นั้นจำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ในปัญหานั้นๆ ซึ่งหมายความว่า หลักการของวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์จะต้องเริ่มจากการพิจารณาเอลิเมนต์ทีละเอลิเมนต์ โดยทำการสร้างสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานที่ว่าสมการที่สร้างขึ้นนั้นจำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่ทำอยู่นั้น จากนั้นจึงนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นมาได้มาประกอบกันก่อให้เกิดระบบสมการชุดใหญ่ ซึ่งความหมายทางกายภาพก็คล้ายกับการนำทุกเอลิเมนต์มาประกอบรวมกันเข้าด้วยกันก่อให้เกิดรูปร่างลักษณะทั้งหมดของปัญหาที่แท้จริง จากนั้นจึงทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ให้มาลงไปในระบบสมการชุดใหญ่แล้วจึงทำการแก้สมการดังกล่าว ซึ่งทำให้เกิดผลเฉลยโดยประมาณที่ต้องการ ณ ตำแหน่งต่างๆของปัญหานั้น ความแม่นยำของค่าผลเฉลยโดยประมาณนี้จะขึ้นอยู่กับขนาดและจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา คือยิ่งแบ่งเอลิเมนต์ได้ละเอียดมากก็ยิ่งทำให้ผลเฉลยมีค่าถูกต้องมากขึ้น

สำหรับปัญหาความเค้นในระนาบ(Plane Stress) จะพิจารณาเฉพาะการเคลื่อนที่ u และ v ในแกน x และ y ตามลำดับ สำหรับเอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิจัยเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดังรูป 2.7 สมการต่างๆสามารถเขียนได้ดังนี้

การเคลื่อนที่

$$\begin{aligned} U(x,y) &= [u(x,y)\ \ v(x,y)]^T \\ [u] &= [u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8]^T \end{aligned} \qquad (2.23)$$

ฟังก์ชั่นการเคลื่อนที่ $[f(x,y)]^T$

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= [1 \;\; x \;\; y \;\; xy][a_1,a_2,a_3,a_4]^T \\
v(x,y) &= [1 \;\; x \;\; y \;\; xy][a_5,a_6,a_7,a_8]^T \\
[u] &= [G][a] \\
[u(x,y)] &= [f(x,y)]^T[G]^{-1}[u]
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

ฟังก์ชั่นรูปร่าง

$$[N]^T = [f(x,y)]^T[G]^{-1} \tag{2.25}$$

ความเครียด

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}[u] \tag{2.26}$$

ความเค้น

$$
\begin{aligned}
[\sigma] &= \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \\
[\sigma] &= [D][\varepsilon]
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

กรณีระนาบหน่วยแรง(Plane Stress)

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

ค่าสติฟเนส

$$[K_e] = \quad [N']^T[D][N']dv \qquad , \; [N'] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}[N]^T \tag{2.29}$$

ความสัมพันธ์กับน้ำหนักกระทำ

$$[F] = [K_e][u] \tag{2.30}$$

หลังจากประกอบสมการเอลิเมนต์จากทุกเอลิเมนต์เป็นสมการรวมแล้วกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและแก้สมการเพื่อหาผลลัพท์ของการเคลื่อนตัวที่ทุกจุดต่อแล้ว ค่าหน่วยแรงต่างสามารถคำนวนได้จาก

$$[\sigma] = [D][N'][u] \tag{2.31}$$

หน่วยแรงที่คำนวนได้เป็น σ_x , σ_y , τ_{xy} บนเอลีเมนต์ต่างๆ ซึ่งสามารถนำไปคำนวนหาหน่วยแรงหลัก (Principal Stress) และทิศทางที่เกิดขึ้น โดยใช้สมการที่ได้กล่าวมาแล้ว และทิศทางของหน่วยแรงหลักนี้เองที่จะนำไปกำหนดรูปร่างของแบบจำลองสตรัท-ไทต่อไป

<u>ทฤษฎีของแบบจำลองสตรัท-ไท</u>

สำหรับทฤษฎีนี้เป็นการออกแบบชิ้นส่วนโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กโดยการจำลองการกระจายของหน่วยแรงภายในให้เป็นหน่วยแรงอัดและแรงดึงเท่านั้น ตัวอย่างง่ายๆของแบบจำลองสตรัท-ไท ตามรูปที่ 2.8 สร้างขึ้นสำหรับโครงสร้างคานลึกแสดงให้เห็นถึงการกระจายหน่วยแรงภายในชิ้นส่วนโครงสร้าง ซึ่งบริเวณที่มีการกระจายหน่วยแรงอัด (Compressive Stress Field) ก็จะถูกทดแทนด้วยชิ้นส่วนของสตรัท(Strut) และบริเวณที่เกิดหน่วยแรงดึงจะถูกแทนด้วยชิ้นส่วนของไท(Tie) โดยที่ชิ้นส่วนที่เป็นสตรัทและไทจะถูกเชื่อมต่อกันที่โนด(Node) เป็นระบบโครงสร้างที่ส่งถ่ายแรงอัดและแรงดึงในลักษณะแรงตามแกนเหมือนโครงข้อหมุน (Truss)

1 <u>ชิ้นส่วนรับแรงอัด</u> สตรัทเป็นชิ้นส่วนของคอนกรีตที่ถูกสมมติให้แทนหน่วยแรงอัดภายในโดยมีทิศทางพุ่งเป็นแนวตรงระหว่างโนดทั้งสอง ซึ่งหน่วยแรงอัดที่เกิดขึ้นจริงอาจจะกระจายเป็นแบบสองหรือสามทิศทางอยู่ระหว่างโนดที่ใกล้เคียงกัน ชิ้นส่วนสตรัทที่มาแทนหน่วยแรงดังกล่าวจึงได้รับผลทั้งแรงอัดตามแกนและแรงดึงแนวขวาง ซึ่งหน่วยแรงดึงตามขวางจะมีผลทำให้ค่ากำลังรับแรงอัดของคอนกรีตลดลง ตัวสตรัทนี้จะมีความกว้างและความหนาที่จำกัดขึ้นอยู่กับสัดส่วนของโครงสร้าง, รูปร่างของแบบจำลอง, ขนาดของจุดรองรับและกำลังรับแรงอัดของคอนกรีตนั้น ลักษณะของสตรัทจะมีรูปแบบทั่วไปที่เป็นมาตรฐานอยู่ 3 แบบคือ รูปพัด(Fan), รูปขวด(Bottle) และรูปปริซึม(Prism) ดังแสดงในรูปที่ 2.9 สตรัทส่วนใหญ่ที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนโครงสร้างจะมีลักษณะเหมือนคอขวดดังแสดงในรูปที่ 2.8 คือการกระจายของหน่วยแรงอัดในพื้นที่ที่กว้างระหว่างโนดทั้งสองแล้วลู่เข้ามารวมกันทั้งหมดที่โนดเท่านั้น ดังนั้นจึงพบว่าหน่วยแรงอัดสูงสุดจะเกิดที่บริเวณโนด เมื่อพิจารณาหน่วยแรงอัดที่เกิดขึ้นบริเวณใกล้กับโนด การกระจายของหน่วยแรงอัดจะสูงสุดในแนวเส้นที่ผ่านศูนย์กลางของโนดทั้งสองและจะลดลงในบริเวณที่ห่างจากเส้นดังกล่าวออกไปทั้งสองข้างดังแสดงในรูปที่ 2.10ข สำหรับบริเวณที่ห่างจากโนดออกไปประมาณ h เท่ากับ l การกระจายของหน่วยแรงอัดในแนวดิ่งค่อนข้างจะสม่ำเสมอตลอดทั้งหน้าตัดดังแสดงในรูปที่ 2.10ค ดังนั้นสำหรับการตรวจสอบกำลังรับแรงอัดของ

สตรัท ให้ตรวจสอบเฉพาะบริเวณโนดที่เกิดหน่วยแรงสูงสุดก็เพียงพอแล้วสำหรับความปลอดภัยทั้งชิ้นส่วน

นอกจากนี้บริเวณคอขวดของสตรัท จากผลการวิเคราะห์ตามทฤษฎีอีลาสติกแสดงให้เห็นหน่วยแรงดึงตามขวางที่เกิดขึ้นดังรูปที่ 2.11ก สำหรับในกรณีที่ไม่ต้องการใส่เหล็กเสริมรับแรงดึงดังกล่าว จะต้องมั่นใจว่าหน่วยแรงดึงสูงสุดที่เกิดขึ้นมีค่าต่ำกว่ากำลังรับแรงดึงของคอนกรีต ซึ่งกำหนดให้มีค่าในเชิงอนุรักษ์ $f_{ct} = f'_c/15$ ดังนั้นในการวิเคราะห์แบบอีลาสติก โดยเปลี่ยนขนาดของจุดรองรับแล้วพิจารณาสัดส่วนของหน่วยแรงดึงสูงสุดที่เกิดขึ้นในแต่ละกรณีเทียบกับหน่วยแรงอัดใต้แผ่นรองรับ (f_t/p) แล้วแทนค่า f_t ด้วย f_{ct} ก็จะสามารถหาค่าหน่วยแรงอัดที่ปลอดภัยสำหรับกรณีไม่ให้เกิดการร้าวในคอนกรีตดังแสดงในรูปที่ 2.11ข จากกราฟพบว่าหน่วยแรงใต้แผ่นรองรับที่มีค่าต่ำสุดที่สามารถทำให้เกิดการร้าวได้คือประมาณเท่ากับ $0.6f'_c$ ดังนั้นการออกแบบบริเวณโนดที่ไม่ต้องการเสริมเหล็กตามขวางในสตรัท จึงควรจำกัดค่ากำลังที่โนดไว้เท่ากับ $0.6f'_c$ สำหรับการหาขนาดของแรงดึงตามขวางสามารถวิเคราะห์ได้โดยสร้างแบบจำลองสตรัท-ไทดังแสดงในรูปที่ 2.11ค แรงดึง T จะขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของความกว้างแผ่นรองรับ(Bearing Plate)ต่อความกว้างของชิ้นส่วน (l_1/l) ในตารางที่ 2.1 แสดงให้เห็นการวิเคราะห์หาแรงดึง T เมื่อเปลี่ยนแปลงขนาดของแผ่นรองรับ พบว่าเมื่ออัตราส่วน l_1/l มีค่าน้อยเช่นเท่ากับ 0.1 อัตราส่วนแรงดึงที่เกิดขึ้นจะมีค่าสูงเท่ากับ 0.241P ในทางกลับกันเมื่อ l_1/l มีค่ามากเช่นเท่ากับ 0.9 อัตราส่วนแรงดึงจะมีค่าต่ำเพียง 0.024P ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ดังกล่าวด้วยกราฟในรูปที่ 2.12 สำหรับการออกแบบเมื่อทราบขนาดของแรงดึงตามขวางที่เกิดขึ้นก็สามารถเลือกใส่ปริมาณเหล็กเสริมได้ต่อไป

2 <u>ส่วนรับแรงดึง</u> ไทคือชิ้นส่วนที่ถูกสมมติให้แทนแรงดึงภายในที่เกิดขึ้น พบว่ามีลักษณะเป็นชิ้นส่วนเส้นตรงในทิศทางเดียวระหว่างโนดทั้งสอง โดยในการออกแบบจะใช้เหล็กเสริมในการแทนชิ้นส่วนนี้ ซึ่งแนวแกนกลางของกลุ่มเหล็กเสริม จะต้องตรงกับแนวแกนกลางของแรงดึงที่เกิดขึ้นในแบบจำลองนั้น

3 <u>จุดเชื่อมต่อ</u> โนดเป็นชิ้นส่วนที่ถูกสมมติขึ้นจากสภาพจริงเพื่อให้ง่ายในการแสดงในแบบจำลองสตรัท-ไท ซึ่งเกิดจากตำแหน่งที่มีการตัดกันของแนวสตรัทหรือไทที่มาเจอกันตั้งแต่สามส่วนหรือมากกว่า บริเวณชิ้นส่วนโนดในแบบจำลองจึงเป็นจุดที่ทำให้เกิดการสมดุลกันของแรงที่เข้ามา เส้นผ่านแนวแกนของชิ้นส่วนสตรัทหรือไทจะต้องมาเจอกันภายในโนด ซึ่งจะต้องไม่ทำให้เกิดโมเมนต์ภายในจุดเชื่อมต่อนี้ ก็คือการตั้งสมมติฐานให้โนดมีลักษณะเป็นจุดหมุน (Pinned Joint) รูปร่างของโนดจะมีลักษณะเป็นรูปเหลี่ยมที่แตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับขนาดของจุดรองรับ จำนวนและขนาดสตรัทหรือไทที่พุ่งของมา

ในการเรียกชนิดของโนด Schlaich, Schafer, Jennewein[1] ได้แยกออกเป็นสองชนิดคือ ชนิดแรก ถ้าชิ้นส่วนสตรัทหรือไทอันใดอันหนึ่งที่แทนแนวหน่วยแรงแบบจุด (Concentrated Stress Field) จะเรียกว่าโนดเดี่ยว (Singular Node) ซึ่งมักจะพบอยู่บริเวณที่ได้รับแรงกระทำแบบจุดจากภายนอกดังแสดงด้วยโนด A ในรูปที่ 2.13ก สำหรับประเภทที่สองนั้นกรณีที่ชิ้นส่วนสตรัทมาเจอกันเองหรือมาเจอชิ้นส่วนไทบริเวณภายในโครงสร้างนั้น ดังแสดงด้วยโนด B ในรูป 2.13ก ดังนั้นจะเห็นได้ว่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นบริเวณดังกล่าวจะไม่แสดงลักษณะแบบจุด แต่จะเป็นลักษณะของหน่วยแรงแบบกระจายดังรูป 2.13ข จึงเรียกโนดดังกล่าวว่า โนดกระจาย (Smeared Node) การหาตำแหน่งของโนดกระจายจะพิจารณาจากจุดตัดกันของแรงลัพธ์ที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนนั้น

การจัดแบ่งประเภทโนด เนื่องจากบริเวณโนดจะเป็นบริเวณที่มีการพุ่งเข้ามาของแรงอัดหรือแรงดึง ซึ่งจากสภาพดังกล่าวทำให้สามารถแยกประเภทใหญ่ๆตามลักษณะการเข้ามาเจอกันของแรงได้ดังนี้

ก) CCC-node (แรงอัด-แรงอัด-แรงอัด)
ข) CCT-node (แรงอัด-แรงอัด-แรงดึง)
ค) CTT-node (แรงอัด-แรงดึง-แรงดึง)
ง) TTT-node (แรงดึง-แรงดึง-แรงดึง)
โดยที่ C แสดงส่วนที่เป็นแรงอัด (สตรัท)
T แสดงส่วนที่เป็นแรงดึง (ไท)

ตัวอย่างโนดแสดงให้เห็นในรูปที่ 2.14 ดังนี้ ก) CCC-node เกิดขึ้นตรงจุดที่น้ำหนักกระทำโดยมีสตรัทสองตัวเข้ามาแบกรับน้ำหนักดังกล่าว ข) CCT-node ตัวสตรัทรับแรงอัดแนวทแยงและแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับถูกทำให้สมดุลกันด้วยแรงจากเหล็กเสริมซึ่งยึดรั้งภายในโนด ค) CTT-node แรงอัดในสตรัทถูกทำให้สมดุลด้วยเหล็กเสริมสองทิศทาง ง) TTT-node ส่วนของแรงดึงมาพบกันทั้งสามทิศทาง

กรณีที่มีสตรัทหรือไทมากกว่าสามส่วนมาเจอกัน สำหรับการเรียกประเภทโนดก็คงใช้หลักการเดิมโดยเพิ่มสัญญลักษณ์ C หรือ T เข้าไปอีกเช่น CCCT-node, CCTT-node เป็นต้น

การแบ่งส่วนโครงสร้างออกเป็นส่วน B-regions และ D-regions

ในการแบ่งส่วนของโครงสร้างนั้นก็เพื่อจุดประสงค์ของการเลือกใช้แบบจำลองสตรัท-ไทที่เหมาะสมกับส่วนนั้นๆ ซึ่ง Schlaich, Schafer, Jennewein[1] ได้แบ่งเป็นส่วนของ B-regions และ D-regions ดังนี้

B-regions หมายถึงบริเวณส่วนของโครงสร้างที่มีการกระจายของความเครียดเป็นไปตามหลักการของเบอร์นูลลี (Bernoulli Hypothesis) ซึ่งหมายความว่าความเครียดตามยาวในคอนกรีตหรือเหล็กเสริมที่ตำแหน่งใดๆของหน้าตัดเป็นสัดส่วนกับระยะทางจากแนวแกนสะเทิน ดังนั้นการกระจายความเครียดตลอดความลึกของชิ้นส่วนเนื่องมาจากแรงดัดจึงถือว่าเป็นเส้นตรงจนกระทั่งวิบัติ (B เป็นตัวอักษรที่แทนคำว่า Bernoulli) หน่วยแรงภายในที่เกิดขึ้นสามารถหาได้ง่ายจากแรงที่หน้าตัด เช่น โมเมนต์(M), โมเมนต์บิด(M_T), แรงเฉือน(V) และแรงตามแนวแกน(N) ตราบเท่าที่หน้าตัดยังไม่ร้าวก็สามารถที่จะตรวจสอบหน่วยแรงได้โดยพิจารณาจากคุณสมบัติของหน้าตัด เช่น พื้นที่หน้าตัด(A), โมเมนต์ความเฉื่อย (I) ถ้าหน่วยแรงดึงเกินกำลังรับแรงดึงของคอนกรีตซึ่งเป็นเหตุให้เกิดการร้าว เราจะวิเคราะห์ออกแบบโดยใช้แบบจำลองสตรัท-ไท ซึ่งอยู่ในลักษณะของโครงข้อหมุนตามรูปที่ 2.15

D-regions หมายถึงส่วนของโครงสร้างที่มีการกระจายความเครียดไม่เป็นเส้นตรง (Nonlinear) ถูกรบกวน(Disturbance) และขาดความต่อเนื่อง(Discontinuity) (D เป็นอักษรแทนคำว่า Discontinuity หรือ Disturbance) ลักษณะนี้เกิดจากบริเวณที่อยู่ใกล้กับแรงกระทำแบบจุด, บริเวณจุดรองรับ, บริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดหน้าตัดหรือรูปทรงเรขาคณิตของชิ้นส่วนนั้นดังแสดงในรูป 2.16, 2.17 ตราบเท่าที่หน้าตัดยังไม่ได้เกิดการร้าวขึ้น จะสามารถวิเคราะห์ด้วยวิธีอีลาสติกเชิงเส้นได้ อย่างไรก็ตามถ้าหน้าตัดเกิดการแตกร้าว วิธีที่การที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบันก็ใช้ได้กับบางกรณีซึ่งเป็นการออกแบบเพื่อการหาปริมาณเหล็กเสริมเท่านั้น แต่มิได้เป็นการตรวจสอบหน่วยแรงคอนกรีตที่แท้จริงบริเวณนั้นๆ ดังนั้นวิธีการที่จะนำมาวิเคราะห์ออกแบบในส่วน D-regions ได้อย่างมีประสิทธิภาพคือการใช้แบบจำลองสตรัท-ไท

จะเห็นได้ว่าเราสามารถประยุกต์ใช้แบบจำลองสตรัท-ไทได้ทั้งในส่วน B-regions และ D-regions เพียงแต่ว่าในส่วน B-regions เราสามารถใช้รูปแบบแบบจำลองมาตรฐานตามรูปที่ 2.15 แต่ในส่วนของ D-regions ต้องพิจารณาสร้างแบบจำลองสตรัท-ไทเป็นกรณีๆไป สำหรับโครงสร้างทั่วไปจะประกอบไปด้วยทั้งสองส่วน ดังนั้นจึงต้องมีวิธีการในการแบ่งขอบเขตของแต่ละส่วน ซึ่งสามารถอธิบายประกอบกับรูป 2.18 ได้ดังนี้

1) แทนโครงสร้างจริง (ก) ด้วยโครงสร้างที่สร้างขึ้น(ข) ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานของเบอร์นูลี และถูกต้องตามหลักการสมดุลของแรงที่หน้าตัด
2) เลือกหน่วยแรงที่ทำให้สมดุลด้วยตัวมันเอง (ค) ซึ่งเมื่อรวมกับ (ข) ก็จะต้องถูกต้องตามความเป็นจริงของสภาพขอบ (ก)
3) ใช้หลักการของ Saint Vanant เพื่อกำหนดขอบเขตบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรง ซึ่งประมาณเท่ากับระยะความลึกของชิ้นส่วนนั้น ช่วงดังกล่าวกำหนดให้เป็นช่วงของ D-regions(ง)

ขั้นตอนการวิเคราะห์ออกแบบโดยการใช้แบบจำลองสตรัท-ไท

1. การวิเคราะห์โครงสร้างทั้งหมด (Overall Structural Analysis) หมายถึงการวิเคราะห์เพื่อหาแรงปฏิกิริยาหรือแรงที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดของโครงสร้างนั้น

2. การสร้างแบบจำลอง (Modeling) หมายถึงการจำลองหน่วยแรงภายในที่เกิดขึ้นให้อยู่ในรูปแบบจำลองแบบแรงอัดและแรงดึงภายใน

3. การให้ขนาด (Dimensioning) หมายถึงการตรวจสอบกำลังต้านของคอนกรีตและการหาปริมาณเหล็กเสริม

4. การให้รายละเอียดการเสริมเหล็ก (Detailing) หมายถึงการพิจารณาในเรื่องของการจัดเรียงเหล็กเสริม, ระยะยึดรั้ง หรือรูปแบบของการเสริมเหล็กอื่นๆที่สอดคล้องกับแบบจำลอง

สำหรับโครงสร้างทั้งหมด มันเป็นการยากเกินไปที่จะเริ่มต้นด้วยการสร้างแบบจำลองสตรัท-ไทขึ้นมาทันที แต่ควรจะเริ่มด้วยการวิเคราะห์โครงสร้างทั้งหมดก่อน อย่างไรก็ตามควรจะมีการแบ่งโครงสร้างออกเป็นส่วนของ B-regions และ D-regions ตามหลักการที่ได้กล่าวมาแล้วด้วย ถ้าโครงสร้างนั้นประกอบด้วยบางส่วนของ B-regions ดังรูปที่ 2.18 เราสามารถที่จะใช้วิธีการวิเคราะห์โครงสร้างเชิงเส้นแบบทั่วๆไป ก็สามารถหาแรงที่จุดรองรับและแรงที่หน้าตัด โมเมนต์(M), โมเมนต์บิด(M_T), แรงเฉือน (V) และแรงตามแนวแกน(N) รวมทั้งแรงที่ขอบของส่วน D-regions

แต่ถ้าชิ้นส่วนของโครงสร้างนั้นประกอบด้วยส่วนของ D-regions เพียงอย่างเดียวเช่น คานลึกดังแสดงในรูปที่2.8 การวิเคราะห์หาแรงที่หน้าตัดด้วยวิธีธรรมดาแล้วนำค่าดังกล่าวไปออกแบบ ก็จะให้ผลไม่สอดคล้องกับพฤติกรรมจริง แต่แรงภายในที่เกิดขึ้นควรจะพิจารณาโดยตรงจากแบบจำลองสตรัท-ไท ยกเว้นแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับก็ยังวิเคราะห์หาแรงด้วยระบบสมดุลทั่วๆไป

การสร้างแบบจำลองในแต่ละส่วนของ B-regions และ D-regions

หลังจากพิจารณาหาแรงที่หน้าตัดของส่วน B-regions และแรงที่ขอบของส่วน D-regions ด้วยวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างทั้งหมด สิ่งต้องพิจารณาตามก็คือการให้ขนาดสำหรับ B-regions และมองหาแนวการกระจายของแรงภายใน D-regions สำหรับกรณีที่ยังไม่ร้าว วิธีการมาตรฐานทั่วไปก็เพียงพอในการวิเคราะห์หน่วยแรงคอนกรีตและเหล็ก (ดูตาราง) หรือในกรณีที่เกิดหน่วยแรงอัดที่สูง การกระจายของแรงแบบเส้นตรงนั้นจะถูกปรับเปลี่ยนโดยการแทนที่กฎของฮุค(Hooke's Law) ด้วยกฎวัสดุไร้

เส้นตรง เช่นความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดแบบพาราโบลิค(Parabolic Stress-Strain Relation)หรือหน่วยแรงแบบกล่อง(Stressblock)

ถ้าหน่วยแรงดึงในแต่ละส่วนของ B-regions และ D-regions เกินค่ากำลังรับแรงดึงของคอนกรีต ดังนั้น แรงภายในจะถูกพิจารณาออกแบบตามกระบวนการต่อไปนี้

1. สร้างแบบจำลองสตรัท-ไท ให้สอดคล้องกับพฤติกรรมของการกระจายแรงภายใน
2. คำนวนหาแรงในสตรัทและไทบนพื้นฐานของสมดุล
3. ให้ขนาดของสตรัท, ไท, โนด ที่สอดคล้องกับสภาพแรงที่เกิดขึ้นและภายใต้ขีดจำกัดของหน่วยแรงที่ยอมให้

ตารางแสดงขั้นตอนการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีส่วน B และ D-regions

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">โครงสร้าง
วิเคราะห์</td><td colspan="3">โครงสร้างที่ประกอบด้วย</td></tr>
<tr><td colspan="2">B และ D-regions
โครงสร้างเชิงเส้น(คาน, เสา)</td><td>มีเฉพาะ D-regions
คานลึก</td></tr>
<tr><td>B-regions</td><td>D-regions</td><td>D-regions</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">การวิเคราะห์โครงสร้างทั้งหมด</td><td rowspan="2">แรงที่หน้าตัด
M, N, V</td><td colspan="2">แรงที่ขอบเขต:</td></tr>
<tr><td>แรงที่หน้าตัด</td><td>แรงปฏิกิริยา</td></tr>
<tr><td rowspan="2">การวิเคราะห์
แรงภายในหรือ
หน่วยแรงในแต่
ละส่วน</td><td>สภาพ 1
(ยังไม่ร้าว)</td><td>คุณสมบัติหน้าตัด
A, J</td><td colspan="2">การวิเคราะห์แบบอีลาสติกเชิงเส้น</td></tr>
<tr><td>สภาพ 2
(มีการร้าว)</td><td colspan="3">แบบจำลองสตรัท-ไท
และ/หรือ การวิเคราะห์แบบไม่เชิงเส้น</td></tr>
</table>

* ตารางจาก Schlaich, Shafer, Jennerwein (1)

สำหรับ B-regions ที่เกิดการร้าว เสนอให้มีการใช้แบบจำลองสตรัท-ไทมาตรฐานตามที่แสดงในรูปที่ 2.15 ซึ่งในแบบจำลองจะประกอบไปด้วยส่วนของคอร์ดรับแรงอัด(Compression Chord) และส่วนของคอร์ดรับแรงดึง(Tension Chord)ที่ขนานกับผิวของชิ้นส่วนโครงสร้าง ส่วนชิ้นส่วนสตรัทที่เอียง (Diagonal Struts) เป็นชิ้นส่วนการรับแรงอัดแนวทแยง และส่วนรับแรงดึงแนวขวาง(Transversal Ties) ระยะระหว่างคอร์ด z มักจะพิจารณาจากการกระจายของระนาบความเครียดที่ตำแหน่งที่มีค่าโมเมนต์สูงที่สุดและมีแรงเฉือนเป็นศูนย์ และเพื่อให้ง่ายในการสร้างแบบจำลอง จะกำหนดค่า z ดังกล่าวให้คงที่

ทั้งความยาวคอร์ดนั้นๆ ส่วนแนวเอียงของสตรัทจะต้องพิจารณาจากความเหมาะสมซึ่งจะกล่าวละเอียดในบทต่อไป

สำหรับส่วนของ D-regions จำเป็นต้องสร้างแบบจำลองสตรัท-ไท สำหรับแต่กรณีๆไป ซึ่งถ้าได้มีการฝึกหัดพอสมควรแล้วก็สามารถที่จะประยุกต์ใช้แบบจำลองกับลักษณะโครงสร้างที่ใกล้เคียงกันได้ การเริ่มสร้างแบบจำลองนั้นสามารถทำได้ง่ายมากเมื่อรู้ถึงทิศทางของการกระจายหน่วยแรงภายในชิ้นส่วนโครงสร้างนั้น ซึ่งสามารถหาได้จากการใช้โปรแกรมไฟไนท์อีลีเมนท์ที่สามารถแสดงผลให้เห็นถึงทิศทางของหน่วยแรงอัดและแรงดึงตามรูป 2.19 เพื่อนำไปใช้กำหนดทิศทางของสตรัทและไทได้อย่างแม่นยำยิ่งขึ้น แต่อย่างไรก็ตามวิธีการดังกล่าวค่อนข้างจะยุ่งยากและใช้เวลามากสำหรับการใช้โปรแกรมดังกล่าว ดังนั้นอาจสร้างแบบจำลองโดยอาศัยวิธีการอีกแบบหนึ่งซึ่งเรียกว่า <u>วิธีพิจารณาเส้นทางของแรง (Load Path Method)</u> ซึ่งสามารถพิจารณาสร้างแบบจำลองได้ง่ายและสะดวกกว่า ซึ่งจะกล่าวรายละเอียดในบทที่ต่อไป

<u>ข้อกำหนดความวิบัติ</u>

การวิบัติของชิ้นส่วนโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กที่ออกแบบด้วยวิธีสร้างแบบจำลองสตรัท-ไท จะเกิดขึ้นเมื่อคอนกรีตที่รับแรงอัดไม่สามารถรับแรงต่อไปได้ หรือเกิดจากเหล็กเสริมที่เสริมไว้รับแรงดึงมีหน่วยแรงถึงจุดคลาก ในการออกแบบโดยทั่วไปนั้นต้องกำหนดให้คอนกรีตที่รับแรงอัดคือชิ้นส่วนสตรัทและบริเวณโนด จะต้องไม่เกิดการวิบัติก่อนที่เหล็กเสริมตามแนวแกนหรือเหล็กปลอกถึงจุดคลากก่อน เพื่อให้เกิดการฟอร์มตัวกลไกก่อนการวิบัติขึ้นมาเต็มที่ นั้นหมายความว่าจะต้องมั่นใจในเรื่องพฤติกรรมความเหนียวของเหล็กเสริม ดังนั้นถ้าโครงสร้างมีความเหนียวเพียงพอ แรงที่ทำให้วิบัติก็ควรเท่ากับหรือมากกว่าแรงต้านที่ออกแบบไว้

<u>การวิบัติสำหรับคอนกรีต</u> ค่ากำลังรับแรงอัดของคอนกรีตที่เป็นสตรัทหรือบริเวณโนด จะขึ้นอยู่กับลักษณะของหน่วยแรงที่เกิดขึ้น เช่น แรงอัดตามแกน(Uniaxial Compression) ,แรงอัดหลายแกน (Multiaxail Compression) หรือการถูกรบกวนจากการร้าวหรือการเสริมเหล็ก คือ ก) แรงอัดแนวขวางเป็นส่วนที่มีประโยชน์ในการทำให้กำลังของคอนกรีตสูงขึ้นกว่ากำลังแบบแกนเดียวถ้าได้รับกระทำทั้งสองทิศทางเป็นไปในลักษณะการโอบ(Confining) ด้วยเหล็กปลอก หรือเกิดจากคอนกรีตที่อยู่รอบๆตัวมันเอง ข) หน่วยแรงดึงในแนวขวางและการร้าว เป็นสาเหตุที่มีผลทำให้กำลังรับแรงอัดของคอนกรีตมีค่าต่ำกว่ากำลังแบบแกนเดียว ค่าแรงดึงในแนวขวางอาจมีผลทำให้เกิดการร้าวในกรณีแรงดึงที่เกิดขึ้นมีค่ามากกว่ากำลังดึงของคอนกรีต การลดลงของกำลังอัดจะมีค่าไม่มากถ้ามีการเสริมเหล็กรับแรงดึงแนวขวางอย่างเพียงพอ หรือกรณีการร้าวที่มิได้ขนานกับแนวของหน่วยแรงอัด ก็มีผลทำให้กำลังรับแรงอัดลดลงได้เช่นกัน ค่ากำลังอัดของสตรัทคอนกรีตจะพิจารณาจาก

$$f^*_{cd} = \nu f_{cd} \tag{2.32}$$

เมื่อ ν คือตัวคูณประสิทธิผลมีค่าน้อยกว่า 1.0

f_{cd} คือค่ากำลังอัดของคอนกรีตที่ใช้ออกแบบ

สำหรับ CEB Code	$f_{cd} = f'_c/\gamma_M$	เมื่อ γ_M (Partial Factor) = 1.5
Canadian Code	$f_{cd} = \phi_c f'_c$	เมื่อ ϕ_c (Material Resistance Factor) = 0.6
Schlaich et al	$f_{cd} = 0.85 f'_c/\gamma_M$	เมื่อ γ_M (Partial Factor) = 1.5

Marti[3] เสนอการจำกัดค่ากำลังของคอนกรีต

$$f^*_{cd} = 0.6 f_{cd} \tag{2.33}$$

ใช้ได้กับทุกกรณี ซึ่งง่ายในการนำไปตรวจสอบค่ากำลังในตอนออกแบบ อย่างไรก็ตามค่ากำลังคอนกรีตอาจมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอีก ขึ้นอยู่กับการกระจายของเหล็กเสริม, แรงอัดทางด้านข้างหรือการโอบ

Collins, Mitchell[2] เสนอการจำกัดค่ากำลังคอนกรีตในส่วนสตรัทรับแรงอัดแนวทแยง โดยพิจารณากำลังของคอนกรีตจากความสอดคล้องของความเครียดในชิ้นส่วนนั้น ซึ่งมีหลักการอยู่ว่าหน่วยแรงอัดหลักตามแกน f_{cd} ไม่ได้เป็นฟังก์ชั่นของความเครียดอัดหลัก ε_2 เท่านั้น แต่ยังขึ้นอยู่กับความเครียดดึงแนวขวาง ε_1 คือถ้ามีการร้าวเกิดขึ้นเมื่อ ε_1 เพิ่มขึ้น จะมีผลทำให้กำลังคอนกรีต f^*_{cd} ลดลง ดังแสดงในรูปที่ 2.20 ซึ่งผลกระทบนี้เรียกว่า การอ่อนตัวของความเครียด(Strain Softening) โดยเสนอเป็นสมการของความสัมพันธ์กันดังนี้

$$f_{c2} = \beta f'_c\left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\right)^2\right) \tag{2.34}$$

เมื่อ $\beta = \dfrac{1}{0.8 + 170\varepsilon_1} \leq 1$ และเมื่อแทนค่าความเครียดสูงสุดของคอนกรีต ε_0, ε_c ด้วย 0.002 ดังนั้นค่ากำลังอัดของสตรัทคอนกรีตจะหาได้จากสมการ

$$f^*_{cd} = \frac{f_{cd}}{0.8 + 170\varepsilon_1} \leq f_{cd} \tag{2.35}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + 0.002}{\tan^2\theta} \qquad (2.36)$$

ε_x เท่ากับค่าความเครียดดึงตามแนวขวางซึ่งเท่ากับความเครียดของเหล็กรับแรงดึง จะถูกสมมติในเชิงอนุรักษ์เท่ากับ $f_y/E_s = 0.002$, θ เท่ากับมุมเอียงระหว่างสตรัทและไทที่มาเจอกัน

สำหรับบริเวณโนดซึ่งเป็นจุดที่ตัดกันของแรงในแบบจำลอง บริเวณนี้จะเกิดหน่วยแรงแบบหลายทิศทาง การจำกัดค่ากำลังของคอนกรีตจะพิจารณาถึงประเภทของแรงที่เข้ามาเจอกัน ทาง1984 Canadian Code[2] ได้เสนอไว้ดังนี้

ก) สำหรับโนดล้อมรอบด้วยแรงอัดสตรัท $f^*_{cd} = 0.85 f_{cd}$ (2.37)

ข) สำหรับโนดที่มีส่วนของแรงดึงไทเข้ามาในโนดเพียงหนึ่งทิศทาง $f^*_{cd} = 0.75 f_{cd}$ (2.38)

ค) สำหรับโนดที่มีส่วนของแรงดึงไทเข้ามาในโนดมากกว่าหนึ่งทิศทาง $f^*_{cd} = 0.60 f_{cd}$ (2.39)

ในกรณีที่มีการยึดรั้งแรงดึงไทบริเวณโนดนั้นอย่างดีพอด้วยการงอขอ(Hooks)หรืออาศัยแรงยึดเหนี่ยว (Bond) ค่ากำลังของคอนกรีตอาจเพิ่มได้มากถึง $0.80 f_{cd}$

CEB Code1990[7] จำกัดค่ากำลังคอนกรีตรับแรงอัดตามแกนโดยพิจารณาหน่วยแรงกระจายแบบสม่ำเสมอ ซึ่งสำหรับกรณีที่ยังไม่ร้าว เช่นในแบบจำลองที่เป็นคอร์ดบนรับแรงอัดหรือโนดที่มีเฉพาะแรงอัดจากสตรัทเท่านั้น กำหนดให้

$$f^*_{cd} = 0.85[1 - f'_c/2500] f_{cd} \qquad (2.40)$$

นอกจากนี้ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโนดอื่นๆในกรณีที่มุมระหว่างสตรัทและไทที่เข้ามาเจอกันบริเวณโนดมีค่าน้อยกว่า 55^0 และถ้าการเสริมเหล็กยึดรั้งภายในโนดถูกออกแบบอย่างดีพอ
กรณีที่เกิดการร้าวเนื่องจากผลของแรงดึงแนวขวางจากเหล็กเสริมที่พาดผ่านหรือโนดที่มีส่วนของแรงดึงไทเข้ามายึดรั้งไว้ กำลังของคอนกรีตจะลดลงเป็น

$$f^*_{cd} = 0.65[1 - f'_c/2500] f_{cd} \qquad (2.41)$$

โดยค่าเหล่านี้จะมีผลภายใต้สภาพความเครียดประลัย ε_u เท่ากับ $0.004 - 0.002 f'_c/1000$

Schlaich, Schafer, Jennewein[1] ได้เสนอการจำกัดค่ากำลังคอนกรีตเพื่อให้ง่ายสำหรับการปฏิบัติในการวิเคราะห์ออกแบบสตรัทและโนดทุกชนิดดังนี้

$f^*_{cd} = 1.0f_{cd}$: เป็นกรณีของของหน่วยแรงอัดตามแกน(Uniaxial Compression) ที่ปราศจากการถูกรบกวน

$f^*_{cd} = 0.8f_{cd}$: กรณีมีค่าความเครียดจากแรงดึงในแนวขวางหรือมีการเสริมเหล็กในทิศทางตามขวาง ซึ่งมีผลทำให้เกิดการร้าวขนานกับแนวสตรัท ทั้งนี้ยังใช้จำกัดค่ากำลังบริเวณโนดที่มีเหล็กเสริมรับแรงดึงผ่านหรือมายึดรั้งไว้

$f^*_{cd} = 0.6f_{cd}$: กรณีมีค่าความเครียดจากแรงดึงหรือมีเหล็กเสริมรับแรงดึงผ่าน โดยเกิดรอยร้าวแนวเอียงกับแนวสตรัท

$f^*_{cd} = 0.4f^*_{cd}$: กรณีรอยร้าวแนวเอียงมีขนาดใหญ่เป็นพิเศษ

รอยร้าวแนวเอียงจะไม่เกิดขึ้น ถ้าการสร้างแบบจำลองพิจารณาจากทฤษฎีอีลาสติกอย่างใกล้เคียงพอ ซึ่งหมายถึงว่ามุมระหว่างสตรัทและไทที่บริเวณโนดจะต้องไม่น้อยเกินไป

<u>การวิบัติสำหรับเหล็กเสริม</u> โดยมากเหล็กเสริมที่ใส่ลงไปเพื่อต้านแรงดึง การวางตำแหน่งของเหล็กเสริมจะต้องให้แนวศูนย์กลางของมันตรงกับแนวศูนย์กลางแกนชิ้นส่วนไทในแบบจำลอง และกำลังรับแรงดึงของเหล็กเสริมจะต้องมีค่ามากกว่าแรงดึงภายในที่เกิดขึ้น

$$T_s < A_s f_{yd} \tag{2.42}$$

<u>การวิบัติสำหรับระยะยึดรั้ง</u> บริเวณปลายของเหล็กเสริมที่รับแรงดึง จะต้องมีการส่งถ่ายแรงสู่คอนกรีต โดยลักษณะของแรงยึดเหนี่ยว เช่น การยึดรั้งแบบปล่อยปลายเป็นเส้นตรงหรืองอปลายรูปร่างต่างๆ , การใช้อุปกรณ์ช่วย เช่น ยึดรั้งด้วยแผ่นเหล็กให้ติดกับส่วนปลายของเหล็กเสริม หรือการเชื่อมเหล็กตามยาวติดกับเหล็กตามขวาง เป็นต้น เหล่านี้จะต้องมั่นใจว่าแรงดึงที่เกิดขึ้นสามารถส่งถ่ายได้อย่างปลอดภัยและไม่ทำให้คอนกรีตบริเวณนั้นเกิดการแตกขึ้นมา