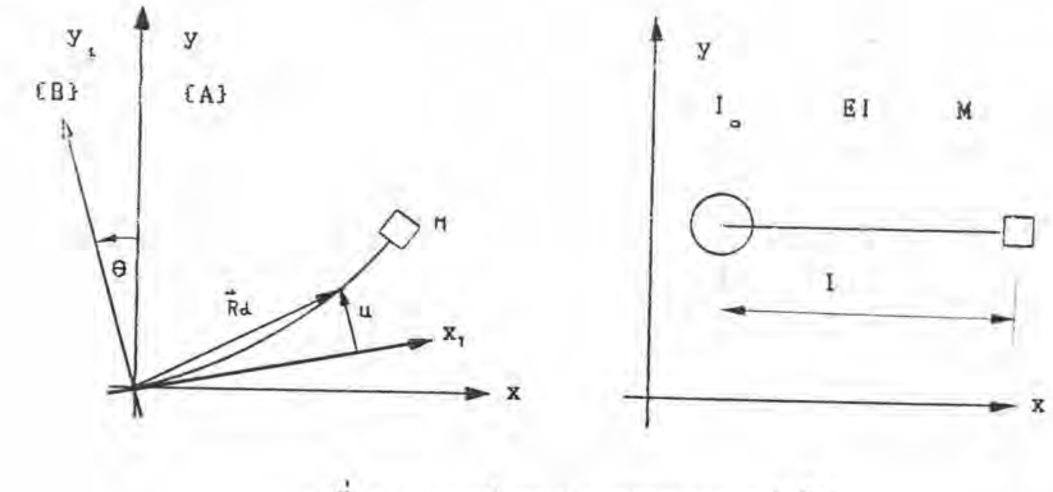
บทที่ 2

ทฤษฎี

แบบจำลองคณิตศาสตร์สำหรับแขนกลแบบหยุ่นตัว

สำหรับแขนกลแบบหยุ่นตัวการจะสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะใช้วิธีการคิดแบบระบบต่อเนื่อง ซึ่งจะสามารถพบได้จากวิชาการวิเคราะห์การสั่นสะเทือน จากการศึกษาจะพบว่าการโก่งตัว(deflection)ของแขนขณะการเคลื่อนที่อิสระจะเป็นผลรวมของฟังก์ชั่นของตัวแปรที่ขึ้นอยู่กับระยะทางตามแนวของแขนและฟังก์ชั่นของ ตัวแปรเจนเนอรัลไรซ์ โคออดิเนต และการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลแบบหยุ่นตัวจะใช้วิธีของการสมมุติโหมดเชฟและสมการลากรานจ์ซึ่งก่อนอื่นจะต้องหาสมการเวคเตอร์บอกการเคลื่อนที่ของแขนกลแบบหยุ่นตัวก่อน โดยจะสามารถสร้างแบบจำลองได้ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แบบจำลองของแขนกลแบบหยุ่นตัว

โดยเฟรม {A} เป็นพิกัดอยู่กับที่ ทำหน้าที่เป็นเฟรมอ้างอิง ส่วนเฟรม {B} เป็นพิกัดที่เคลื่อนที่ไปพร้อมกับแขนกล โดยจะเคลื่อนที่ห่างจากเฟรม {A} เท่ากับมุม θ จากการเคลื่อนที่ของแขนจะทำให้ได้ เมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงเชิงมุม (rotational transformation matrix) ซึ่งเป็นการพิจารณาเปรียบเทียบการเคลื่อนที่สำหรับเฟรมหนึ่ง เทียบกับอีกเฟรมหนึ่งจากรูปที่ 2.1 จำเป็นจะต้องใช้ความสัมพันธ์โดยการเปรียบเทียบความสัมพันธ์ของเฟรม {B} เทียบกับเฟรม {A} จะได้เป็นเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \\ y_i \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$^{A}_{B}R$ จะเรียกว่า เมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงเชิงมุมของเฟรม {B} เทียบกับเฟรม {A} และเมื่อใช้เมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงเชิงมุม เพื่อที่จะหาความสัมพันธ์การบอกระยะของเฟรม {B} เทียบกับเฟรม {A} จะได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} ^{A}P \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^{A}_{B}R & & & P_{ORG} \\ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^{B}P \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ ^{A}P = เวคเตอร์บอกตำแหน่งสำหรับเฟรม {A}

^{B}P = เวคเตอร์บอกตำแหน่งสำหรับเฟรม {B}

P_{ORG} = เวคเตอร์บอกการเคลื่อนที่ของจุดเริ่มต้นจากเฟรม {A} ไปยังเฟรม {B}

θ = มุมที่เคลื่อนที่ไปของเฟรม {B} เทียบกับเฟรม {A}

$$\begin{bmatrix} ^{A}P_x \\ ^{A}P_y \\ ^{A}P_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ u_i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จากเมทริกซ์สามารถอธิบายได้ว่า ลักษณะการเคลื่อนที่ของแขนเป็นแบบหมุนรอบจุดหมุน โดยที่ตำแหน่งของแขนเทียบกับเฟรม {B} ที่ระยะ x_i ห่างจากจุดหมุนมีการโก่งตัว u_i ถ้าเขียนอยู่ในรูปของเวคเตอร์บอกการเคลื่อนที่ของจุดตำแหน่งบนแขนกลแบบหยุ่นตัวโดยเทียบกับแกนอ้างอิงเฟรม {A} แล้วจะได้สมการเวคเตอร์บอกระยะทางของจุดบนแขนกลเป็น

$$\vec{R}_d = [\, x_i\cos\theta - u_i\sin\theta \,]\vec{u}_x + [x_i\sin\theta + u_i\cos\theta]\vec{u}_y \qquad \ldots\ldots(1)$$

โดย $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ เป็นยูนิตเวคเตอร์บอกทิศทางการเคลื่อนที่ตามแนวแกน x , y ตามลำดับ ส่วนสมการบอกความเร็วของการเคลื่อนที่ของจุดตำแหน่งบนแขนกลแบบหยุ่นตัว ได้จากการหาอนุพันธ์ของสมการการเคลื่อนที่ (1) เทียบกับเวลาจะได้

$$\dot{\vec{R}}_d = [-\dot{\theta}x_i\sin\theta - \dot{\theta}u_i\cos\theta - \dot{u}_i\sin\theta]u_x$$

$$+ [\, \dot{\theta}x_i\cos\theta - \dot{\theta}u_i\sin\theta + \dot{u}_i\cos\theta]u_y \qquad \ldots\ldots(2)$$

จากสมการ (1),(2) ตัวแปรที่มีความสัมพันธ์ต่อการพิจารณาเพื่อใช้ในการควบคุมแขนกลก็คือระยะการโก่งตัวของแขนกลซึ่งก็คือฟังก์ชั่น $u(x_i,t)$ เพราะในการควบคุมจำเป็นที่จะต้องควบคุมให้แขนกลเคลื่อนที่ไปยังจุดที่ต้องการ ดังนั้นการโก่งตัวของแขนจึงเป็นสิ่งที่ตัวควบคุมทำการควบคุมตลอดเวลา จะเห็นว่าตัวแปรนี้จะเป็นฟังก์ชั่นของระยะทาง x_i และเวลา t วิธีการทางคณิตศาสตร์สามารถแยกออกเป็นกลุ่มตัวแปร (separation of variable)ของฟังก์ชั่นโดยตัวแปรแต่ละกลุ่มจะแบ่งออกเป็น ฟังก์ชั่นกลุ่มตัวแปร x_i, $\phi(x_i)$ ที่เรียกว่าสมการแอดมิสซิเบิ้ลฟังก์ชั่น และฟังก์ชั่นของกลุ่มตัวแปร $t, q(t)$ ที่เรียกว่า ตัวแปรเจนเนอรัลไรซ์ โคออดิเนต แต่เมื่อพิจารณาแขนกลซึ่งเป็นระบบแบบต่อเนื่องเป็นระบบที่ต้องวิเคราะห์ในสมมุติที่ว่ามวล และส่วนที่เป็นอิลาสติคกระจายสม่ำเสมอแบบต่อเนื่องในการวิเคราะห์จะสมมุติให้วัสดุมีเนื้อสม่ำเสมอเหมือนกันทุกด้านและมีคุณสมบัติตามกฎของฮุค (Hooke's law) สำหรับการหาค่าของความถี่ธรรมชาติจะพบว่ามีค่าความถี่ธรรมชาติแบบจำนวนไม่จำกัด ดังนั้น ฟังก์ชั่นของ $u(x_i,t)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการได้ดังนี้

$$u(x_i,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x_i)q_i(t) \qquad \ldots\ldots(3)$$

จากสมการจะบอกให้รู้ว่าค่าการโก่งตัวที่ตำแหน่ง x_i จะประกอบด้วยผลรวมของผลคูณของฟังก์ชั่นที่ขึ้นอยู่กับระยะทาง $\phi_i(x_i)$ และตัวแปรเจนเนอรัลไรซ์ โคออดิเนต $q_i(t)$ โดยผลรวมจะรวมตั้งแต่ค่าความถี่ธรรมชาติที่ต่ำ จนถึงค่าอนันต์ จากวิธีการข้างต้นที่ผ่านมาจะเรียกว่า วิธีการสมมุติโหมดเชฟ จากผลการทดลองที่ผ่านมาของ Yuan,Book และ Huggin (1993)ได้สรุปว่าวิธีการสมมุติโหมดเชฟสามารถใช้เพียง 2 โหมดได้เพื่อที่จะใช้ในการหาการโก่งตัวของแขนที่มีการเคลื่อนที่ความถี่ต่ำ โดยจะให้ค่าความผิดพลาดไม่มากนักทั้งนี้เนื่องจากที่โหมดที่มีความถี่สูงจะทำให้ระยะ

การโก่งตัวน้อยกว่า ดังนั้นสมการ (3) จึงสรุปได้เป็นสมการได้ดังนี้

$$u(x_1,t) = \phi_1(x_1)q_1(t) + \phi_2(x_1)q_2(t) \qquad .....(4)$$

สมการ (4) จะคิดว่าการโก่งของแขนที่ระยะตำแหน่ง x_1 จะประกอบด้วยผลรวมของผลคูณของโหมดเชฟ $\phi(x_1)$ และตัวแปรเจนเนอรัลไรซ์ โคออดิเนต $q(t)$ ของโหมดที่หนึ่งและโหมดที่สอง โดยค่า $\phi_1(x_1)$, $\phi_2(x_1)$ จะต้องมีคุณสมบัติ ออร์โทโกนอล(orthogonal)และฟังก์ชั่นเหล่านี้จะเป็นฟังก์ชั่นที่ เรียกว่าสมการโหมดเชฟ ซึ่งได้จากการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของระบบแบบต่อเนื่อง ในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบเพื่อนำไปใช้ในการควบคุม ส่วนมากจะนิยมใช้วิธีการหาจากสมการพลังงานแล้วใช้สมการลากรานจ์ จะทำให้ได้สมการแบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบสำหรับแบบจำลองโครงสร้างของแขนกลที่สร้างจะประกอบด้วยพลังงานจลน์ และพลังงานศักย์โดยในส่วนของพลังงานจลน์จะประกอบด้วยส่วนที่ทำให้เกิดพลังงานจลน์ คือ ส่วนของแขนกล ส่วนของมวลที่ติดที่ปลายแขน และส่วนที่เป็นความเฉื่อยที่จุดหมุน ซึ่งรวมกันเป็นพลังงานจลน์ของระบบได้ดังนี้

$$T = \int_m (1/2)\dot{\vec{R}}_d\cdot\dot{\vec{R}}_d \, dm + (1/2)[\dot{\vec{R}}_d\cdot\dot{\vec{R}}_d]\,|_{x=L} M + (1/2)I_o\dot{\theta}^2$$

$$+ (1/2)J_p[\partial\dot{u}_1/\partial x_1]^2\,|_{x1=L} \qquad ....(5)$$

เมื่อพิจารณาจากสมการข้างต้น ทางขวามือจะประกอบด้วยเทอมพลังงานจลน์ส่วนต่างๆ ดังนี้ เทอมแรกเป็นพลังงานจลน์ของแขนกล เทอมที่สองเป็นพลังงานจลน์ของมวลที่ติดที่ปลายแขน เทอมที่สามเป็นพลังงานจลน์เนื่องจากอุปกรณ์การขับและตัวยึดแขนกลเทอมสุดท้ายเป็นพลังงานจลน์เนื่องจากความหยุ่นตัวของแขนซึ่งเป็นเทอมที่เพิ่มเติมนอกเหนือจากระบบของแขนกลแบบแข็งเกร็ง ส่วนเทอมของพลังงานศักย์นั้น เนื่องจากการเคลื่อนที่ถูกบังคับให้เคลื่อนที่อยู่ในแนวระดับดังนั้นพลังงานศักย์เนื่องจากการเปลี่ยนระดับจึงเท่ากับศูนย์จึงมีเฉพาะพลังงานศักย์เนื่องจากความหยุ่นตัวของแขนจะได้สมการเป็น

$$dU = (1/2).M_o.d\theta$$

$$U = \int_0^L (1/2)EI(\,\partial^2 u_1/\partial x_1^2\,)^2\,dx_1 \qquad .....(6)$$

สมการของระบบได้จากการใช้สมการลากรานจ์ ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\sum_{r=0}^{N} [d(\partial T/\partial \dot{q}_r)/dt - \partial T/\partial q_r]dq_r + \sum_{r=0}^{N} \partial U/\partial q_r \, dq_r = \sum_{r=0}^{N} Q_r \, dq_r$$

หรือ

$$d(\partial T/\partial \dot{q}_r)/dt - \partial T/\partial q_r + \partial U/\partial q_r = Q_r \qquad r = 1,2.. \qquad .....(7)$$

เมื่อ q_r = เจนเนอรัลไรซ์ โคออดิเนต (generalized coordinate)

Q_r = เจนเนอรัลไรซ์ ฟอร์ส (generalized force)

T = เทอมของพลังงานจลน์

U = เทอมของพลังงานศักย์

สำหรับแขนกลแบบหยุ่นตัว เจนเนอรัลไรซ์ โคออดิเนต ที่ใช้จะประกอบด้วย $q_1(t)$, $q_2(t)$, θ ดังนั้น เทอมของพลังงานจลน์และเทอมของพลังงานศักย์ที่ประกอบในสมการที่(7)จึงควรจะจัดรูปของสมการให้อยู่ในรูปของโคออดิเนตต่างๆเหล่านี้ ดังนั้นเทอมของพลังงานจลน์และเทอมของพลังงานศักย์จึงควรจะจัดรูปของสมการใหม่ให้เหมาะสม

เมื่อพิจารณาเทอมของพลังงานจลน์แล้วควรจะต้องทำการจัดรูปให้เหมาะสมโดยแทนค่าของ $\dot{\vec{R}}_d \cdot \dot{\vec{R}}_d$ ซึ่งเป็นการคูณเวคเตอร์แบบ dot product จะได้เป็นเทอมของตัวแปรโคออดิเนต ดังนั้นจากสมการ (2) จะได้

$$\dot{\vec{R}}_d \cdot \dot{\vec{R}}_d = \dot{\theta}^2 x_1^{\,2} + \dot{\theta}^2 u_1^{\,2} + \dot{u}_1^{\,2} + 2\dot{\theta}\dot{u}_1 x_1$$

และแทนค่าลงในสมการ (5) จะได้

$$T = \int_m [(1/2)\dot{\theta}^2 x_1^{\,2} + (1/2)\dot{\theta}^2 u_1^{\,2} + (1/2)\dot{u}_1^{\,2} + \dot{\theta}\dot{u}_1 x_1]\, dm$$

$$+ [(1/2)M\dot{\theta}^2 l^2 + (1/2)\dot{\theta}^2 u_{1E}^{\,2} M + (1/2)\dot{u}_{1E}^{\,2} M + \dot{\theta}\dot{u}_{1E} l M] + (1/2) I_o \dot{\theta}^2$$

$$+ (1/2)J_p \phi_{1E}'^{\,2} \dot{q}_1^{\,2} + \phi_{1E}' \phi_{2E}' \dot{q}_1 \dot{q}_2 J_p + (1/2)J_p \phi_{2E}'^{\,2} \dot{q}_2^{\,2}$$

เมื่อ $\int_m x_1^2 \, dm = J_o$

$\int_m u_1^2 \, dm$ สามารถที่ไม่ต้องนำมาพิจารณาได้

$\int_m \dot{u}_1^2 \, dm = (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)m$

$\int_m \dot{u}_1 x_1 \, dm = w_1\dot{q}_1 + w_2\dot{q}_2$

$m = \int_m \phi_1^2 \, dm = \int_m \phi_2^2 \, dm$

$w_1 = \int_m \phi_1 x_1 \, dm$

$w_2 = \int_m \phi_2 x_1 \, dm$

และแทนค่าตัวแปรเหล่านี้ลงในสมข้างต้นจะได้สมการพลังงานจลน์เป็น

$$T = (1/2)\dot{\theta}^2 J_o + (1/2)m[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2] + \dot{\theta}[w_1\dot{q}_1 + w_2\dot{q}_2] + (1/2)Ml^2\dot{\theta}^2$$

$$+ (1/2)Mu_{1E}^2\dot{\theta}^2 + (1/2)M\dot{u}_{1E}^2 + M\dot{\theta}\dot{u}_{1E}l + (1/2)I_o\dot{\theta}^2 + (1/2)J_p\dot{q}_1^2\phi'^2_{1E}$$

$$+ \dot{q}_1\dot{q}_2 J_p\phi'_{1E}\phi'_{2E} + (1/2)J_p\dot{q}_2^2\phi'^2_{2E} \qquad \text{.....(8)}$$

ส่วนสมการพลังงานศักย์จะได้

$$U = \int_0^l (1/2)EI(\partial^2 u/\partial x_1^2)^2 \, dx_1$$

$$U = (1/2)K_1 q_1^2 + (1/2)K_2 q_2^2 \qquad \text{.....(9)}$$

เมื่อ

$$(\partial^2 u/\partial x_1^2)^2 = (\phi''_1 q_1)^2 + (\phi''_2 q_2)^2$$

$$K_1 = \int_0^l EI(\phi_1''(x_1))^2 \, dx_1$$

$$= \int_0^1 (EI/l^3)(\phi_1''(\xi))^2 \, d\xi$$

$$K_2 = \int_0^l EI(\phi_2''(x_1))^2 \, dx_1$$

$$= \int_0^1 (EI/l^3)(\phi_2''(\xi))^2 \, d\xi$$

เมื่อแทนค่าพลังงานจลน์และพลังงานศักย์จากสมการ (8) และ (9) ตามลำดับลงในสมการลากรานจ์และทำการจัดรูปจะได้สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นดังนี้

$$d(\partial T/\partial \dot{\theta})/dt - \partial T/\partial \theta + \partial U/\partial \theta = T_r$$

$$[J_o + Ml^2 + I_o + M(\phi_{1E}^2 q_1^2 + \phi_{2E}^2 q_2^2 + 2\phi_{1E}\phi_{2E} q_1 q_2)]\ddot{\theta} + 2M\phi_{1E}^2 q_1 \dot{q}_1 \dot{\theta}$$

$$+ 2M\phi_{2E}^2 q_2 \dot{q}_2 \dot{\theta} + 2\phi_{1E}\phi_{2E}\dot{q}_1 q_2 M\dot{\theta} + 2M\phi_{1E}\phi_{2E} q_1 \dot{q}_2 \dot{\theta} + w_1 \ddot{q}_1 + w_2 \ddot{q}_2$$

$$+ Ml\phi_{1E}\ddot{q}_1 + Ml\phi_{2E}\ddot{q}_2 = T_r \qquad .....(10)$$

$$d(\partial T/\partial \dot{q}_1)/dt - \partial T/\partial q_1 + \partial U/\partial q_1 = 0$$

$$m\ddot{q}_1 + w_1\ddot{\theta} + M\phi_{1E}^2\ddot{q}_1 + M\phi_{1E}\phi_{2E}\ddot{q}_2 + M\phi_{1E} l\ddot{\theta} + J_p\phi_{1E}'^2\ddot{q}_1 + J_p\phi_{1E}'\phi_{2E}'\ddot{q}_2$$

$$- M\dot{\theta}^2\phi_{1E}^2 q_1 - M\dot{\theta}^2\phi_{1E}\phi_{2E} q_2 + K_1 q_1 = 0 \qquad .....(11)$$

$$d(\partial T/\partial \dot{q}_2)/dt - \partial T/\partial q_2 + \partial U/\partial q_2 = 0$$

$$m\ddot{q}_2 + w_2\ddot{\theta} + M\phi_{2E}^2\ddot{q}_2 + M\phi_{1E}\phi_{2E}\ddot{q}_1 + M\phi_{2E} l\ddot{\theta} + J_p\phi_{2E}'^2\ddot{q}_2 + J_p\phi_{1E}'\phi_{2E}'\ddot{q}_1$$

$$- M\dot{\theta}^2\phi_{2E}^2 q_2 - M\dot{\theta}^2\phi_{1E}\phi_{2E} q_1 + K_2 q_2 = 0 \qquad .....(12)$$

เมื่อ T_F = เจนเนอรัลไรซ์ ทอร์ค

m = มวลของแขน

M = มวลที่ติดตั้งที่ตำแหน่งปลายแขน

J_P = โมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้วของมวลที่ปลายแขนเทียบกับจุดศูนย์ถ่วง

I_o = โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลที่ตำแหน่งจุดหมุน

J_o = โมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้วของแขนโดยคิดเปรียบเทียบกับจุดหมุนของแขน

$$u_{1E} = u_1(x_1)\,|_{x1=l} = u_1(\xi)\ |\xi=1$$

$$u_{2E} = u_2(x_1)\,|_{x1=l} = u_2(\xi)\ |\xi=1$$

$$\phi_{1E} = \phi_1(x_1)\,|_{x1=l} = \phi_1(\xi)\ |\xi=1$$

$$\phi_{2E} = \phi_2(x_1)\,|_{x1=l} = \phi_2(\xi)\ |\xi=1$$

$$w_1 = \int_m \phi_1(x_1)x_1\,dm = \int_0^1 \rho A l^2\ \phi_1(\xi)\xi\ d\xi$$

$$w_2 = \int_m \phi_2(x_1)x_1\,dm = \int_0^1 \rho A l^2\ \phi_2(\xi)\xi\ d\xi$$

$$K_1 = \int_0^l EI(\phi_1''(x_1))^2\,dx_1 = \int_0^1 (EI/l^3)(\phi_1''(\xi))^2\ d\xi$$

$$K_2 = \int_0^l EI(\phi_2''(x_1))^2\,dx_1 = \int_0^1 (EI/l^3)(\phi_2''(\xi))^2\ d\xi$$

$\phi''(x) = d^2\phi(x_1)/dx_1^2$ หรือ $d^2\phi(\xi)/d\xi^2$

$$\xi = x_1/l$$

จากสมการที่ (10),(11),(12) เป็นสมการอนุพันธ์อันดับ 2 ของระบบแขนกลแบบหยุ่นตัวรูปแบบของสมการเป็นแบบสมการไม่เชิงเส้นตรง ในการพิจารณาระบบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยจุดประสงค์แล้วจะทำการพิจารณาถึงผลของการนำไปใช้งานในการควบคุม แต่โดยเบื้องต้นของการจำลองการควบคุมของระบบทางคณิตศาสตร์ จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทำการจัด

รูปแบบของสมการให้เหมาะสมกับรูปแบบที่จะนำไปใช้งานสำหรับการจำลองการควบคุมของระบบ ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องจัดรูปแบบของสมการที่ (10),(11),(12) เป็นรูปแบบของสมการแบบอนุพันธ์อันดับหนึ่ง แต่เนื่องจากว่าแบบจำลองที่ได้เป็นแบบสมการไม่เชิงเส้นตรง ดังนั้น สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งจึงเป็นแบบไม่เชิงเส้นตรง ในการจำลองการควบคุมแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สามารถที่จะจำลองการทำงานโดยการใช้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบไม่เชิงตรงได้แต่ปัญหาเกี่ยวความยุ่งยากในการคำนวณ และการใช้งานของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งมีมากกว่า การใช้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบเชิงเส้นตรง ถึงแม้ว่าสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบไม่เชิงเส้นตรงจะให้ค่าความถูกต้องมากกว่าก็ตาม สำหรับสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบไม่เชิงเส้นตรงของระบบแบบจำลองของแขนกลแบบหยุ่นตัวจะได้ดังนี้

$$\dot{x}_1 = x_4$$

$$\dot{x}_2 = x_5$$

$$\dot{x}_3 = x_6$$

$$\dot{x}_4 = [\, -WW1x_4^2x_2 - WW2x_4^2x_3 + WWKx_2 - WWKx_3 - 2AAx_2x_5x_4 - 2BBx_3x_4x_6 - 2EEx_3x_6x_4 - 2DDx_2x_6x_4 + T_r \,]/AJMWM$$

$$\dot{x}_5 = [-AFDC\dot{x}_4 + AADCx_1x_4^2 + BBFCx_3x_4^2 + CK_2x_3 - FK_1x_2]/BFEC$$

$$\dot{x}_6 = [\, -AEDB\dot{x}_4 + AADBx_1x_4 + BBEEx_3x_4 + BK_2x_3 - EK_1x_2 \,]/CEFB$$

$$A = w_1 + M\phi_{1E}l$$

$$B = m + M\phi_{1E}^2 + J_p\phi_{1E}'^2$$

$$C = M\phi_{1E}\phi_{2E} + J_p\phi_{1E}'\phi_{2E}'$$

$$D = w_2 + Ml\phi_{2E}$$

$$E = M\phi_{1E}\phi_{2E} + J_P\phi'_{1E}\phi'_{2E}$$

$$F = m + M\phi_{2E}^2 + J_P\phi'^2_{2E}$$

$$AA = M\phi_{1E}^2$$

$$BB = M\phi_{1E}\phi_{2E}$$

$$DD = M\phi_{1E}\phi_{2E}$$

$$EE = M\phi_{2E}^2$$

AFDC = A*F - C*D

AADC = AA*F - C*DD

BBFC = BB*F - C*EE

AEDB = A*E - B*D

AADB = AA*E - B*DD

BBEE = BB*E - B*EE

CEFB = C*E - B*F

BFEC = B*F - C*E

$$AJMLX = AJ + AAx_2^2 + 2*BBx_2x_3 + EEx_3^2$$

AJMWM = AJMLX - A*AFDC/BFEC - D*AADB/CEFB

$$WW1 = A*AADC/BFEC + D*AADB/CEFB$$

$$WW2 = A*BBFC/BFEC + D*BBEE/CEFB$$

$$WWK_1 = A*FK_1/BFEC + D*EK_1/CEFB$$

$$WWK_2 = A*CK_2/BFEC + D*BK_2/CEFB$$

กำหนดให้ ตัวแปรสเตทดังนี้

$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = q_1$$
$$x_3 = q_2$$
$$x_4 = \dot{\theta}$$
$$x_5 = \dot{q}_1$$
$$x_6 = \dot{q}_2$$

จากสมการที่ (10),(11),(12) จะพบว่าเป็นสมการแบบไม่เชิงเส้นดังนั้นถ้านำไปใช้กับระบบการควบคุมแบบอ๊อพติมัล(optimal control)แล้วจำเป็นที่จะต้องแปรรูปแบบของสมการให้เป็นแบบเชิงเส้นก่อนซึ่งกระทำได้โดยการกำจัดเทอมที่มีการคูณกันของตัวแปร θ, q_1 และ q_2 หรือเทอมที่มีตัวแปร θ, q_1, q_2 มีดีกรีสูงกว่าหนึ่งออกจากสมการซึ่งเมื่อกระทำแล้วจะได้ดังนี้

$$(J_o + Ml^2 + I_o)\ddot{\theta} + (Ml\phi_{1E} + w_1)\ddot{q}_1 + (Ml\phi_{2E} + w_2)\ddot{q}_2 = T_r \quad .....(13)$$

$$(w_1 + Ml\phi_{1E})\ddot{\theta} + (m + M\phi_{1E}{}^2 + J_p\phi'_{1E}{}^2)\ddot{q}_1 + (M\phi_{1E}\phi_{2E} + J_p\phi'_{1E}\phi'_{2E})\ddot{q}_2 = -K_1 q_1 \quad .....(14)$$

$$(w_2 + MI\phi_{2E})\ddot{\theta} + (M\phi_{1E}\phi_{2E} + J_p\phi'_{1E}\phi'_{2E})\ddot{q}_1$$

$$+ (M\phi_{2E}^{\ 2} + J_p\phi'^{\ 2}_{2E} + m)\ddot{q}_2 \qquad = -K_2 q_2 \quad .....(\ 15\ )$$

สมการ (13),(14),(15) สามารถที่จะเขียนอยู่ในรูปของสมการสเตทได้ดังนี้

$$[M][\ddot{q}] + [K][q] = [b][u]$$

$$[x_1] = [q]$$

$$[x_2] = [\dot{x}_1] = [\dot{q}]$$

$$\begin{bmatrix} [\dot{x}_1] \\ \\ [\dot{x}_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [1] \\ \\ -[M]^{-1}[K] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [x_1] \\ \\ [x_2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \\ [M]^{-1}b \end{bmatrix} [u]$$

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \qquad .....(\ 16\ )$$

เมื่อ

$$[A_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & -[M]^{-1}K & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_c] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \\ [M]^{-1}[b] \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} J_o + Ml^2 + I_o & Ml\phi_{1E} + w_1 & w_2 + Ml\phi_{2E} \\ w_1 + Ml\phi_{1E} & m + M\phi_{1E}^2 + J_p\phi'^2_{1E} & M\phi_{1E}\phi_{2E} + J_p\phi'_{1E}\phi'_{2E} \\ w_2 + Ml\phi_{2E} & M\phi_{1E}\phi_{2E} + J_p\phi'_{1E}\phi'_{2E} & M\phi_{2E}^2 + J_p\phi'^3_{2E} + m \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$[b] = \begin{bmatrix} T_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ q_1 \\ q_2 \\ \dot{\theta} \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นว่า ในการควบคุมระบบแขนกลแบบหยุ่นตัวจำเป็นจะต้องอ่านค่าตัวแปรสเตทด้วยกันทั้ง 6 ตัวแปร และเมื่อพิจารณาจากตัวแปรทั้ง 6 แล้วจะพบว่าตัวแปรสเตท θ , $\dot{\theta}$ สามารถที่จะทำการวัดค่าได้โดยใช้อุปกรณ์การวัดอ่านค่าได้ โดยค่าของ θ สามารถที่จะทำการอ่านค่าได้โดยใช้ potentiometer อ่านค่าได้ ส่วนตัวแปร $\dot{\theta}$ สามารถที่จะอ่านค่าได้โดยการใช้ tachometer ในการอ่านค่าความเร็วการหมุนของมอเตอร์ได้ ส่วนตัวแปรสเตท $q_1(t)$ $q_2(t)$ ซึ่งเป็นตัวแปรที่ต้องอาศัยอุปกรณ์อื่นช่วยในการอ่านค่า และอาศัยค่าความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ช่วยเพื่อหาตัวแปรเหล่านี้ โดยตัวแปร $q_1(t)$, $q_2(t)$ จะสามารถที่จะอ่านได้โดยการใช้สัญญาณที่อ่านค่าได้จากสัญญาณที่ออกจาก strain amplifier ในการวัดค่าของความเครียดบนตำแหน่งของแขนกล และอาศัยความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ช่วยจะทำให้ได้ค่าของตัวแปรสเตททั้งสอง สำหรับตัวแปรที่เหลืออีกสองตัวคือ $\dot{q}_1(t)$, $\dot{q}_2(t)$ นั้นไม่สามารถที่จะทำการวัดได้โดยตรงแต่อาศัยความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์คำนวณซึ่งอยู่ในหมวดการควบคุม โดยในระบบการควบคุมจะมีรูปแบบสมการคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า observer หรือ estimation เพื่อที่จะนำผล

ของตัวแปรสเตทที่วัด θ, $\dot{\theta}$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ ได้มาประกอบกับวิธีการคณิตศาสตร์เพื่อจะประมาณค่าตัวแปร $\dot{q}_1(t)$, $\dot{q}_2(t)$ ได้ สำหรับตัวแปรสเตทที่วัดค่าได้ $q_1(t)$, $q_2(t)$ หรือตัวแปรเจนเนอรัลไรซ์ โคออดิเนต ซึ่งสามารถอ่านค่าได้นั้นจะได้กล่าวถึงรายละเอียดต่อไป ส่วนตัวแปร $\dot{q}_1(t)$, $\dot{q}_2(t)$ จะอยู่ในหมวดของการควบคุม

<u>การวัดตัวแปรที่ขึ้นกับเวลา</u>

การหาค่าตัวแปรสเตท $q_1(t)$, $q_2(t)$ สามารถที่จะทำการหาค่าได้โดยใช้ค่าที่ได้จากการอ่านจาก strain amplifier ซึ่งใช้ขยายสัญญาณความต่างศักย์ไฟฟ้าที่ออกจากวงจรบริดจ์ โดยมี strain gauge เป็นความต้านทานตัวหนึ่งของวงจรนี้ กับเมทริกซ์ที่ซึ่งได้จากความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของคุณสมบัติวัตถุ โดยเบื้องต้นพบว่าการโก่งของแขนจะประกอบด้วยฟังก์ชั่นที่อยู่กับระยะทางตามแนวแขนกับตัวแปรเจนเนอรัลไรซ์ โคออดิเนตจะได้ดังนี้

$$u(\xi,t) = \sum_{i=0}^{n} \phi_i(\xi) q_i(t)$$

จากการทดลองจะใช้ strain gauge ติดตามตำแหน่งของแขน 3 จุด สาเหตุที่ต้องวัดจำนวน 3 จุด ทั้งนี้เพื่อต้องการวัดค่าของความเครียด โดยจะเป็นการเพิ่มความแม่นยำในการอ่านค่าระยะการโก่งให้เพิ่มขึ้นกว่าการติดตั้ง strain gauge เพียง 2 ตัวซึ่งถ้าดูจากสมการสเตทจะเห็นว่าตัวแปร $q(t)$ จะใช้เพียง 2 โหมดได้ดังนั้นสมการการหาการโก่งของแขนจะสามารถเขียนอยู่ในรูปการวิเคราะห์ที่เหมาะกับการติดตั้งจำนวนของ strain gauge นี้เป็น

$$u(\xi,t) = \sum_{i=0}^{3} \phi_i(\xi) q_i(t)$$

เมื่อ $\xi = x_i / l$ โดย x_i คือระยะตามแนวแขนจากจุดหมุน
โดยอาศัยความสัมพันธ์ของโมเมนต์และอนุพันธ์อันดับสองของระยะการโก่งตัวของแขนจะได้

$$M_o = (EI/l^3)\, \partial^2 u(\xi,t)/\partial\xi^2$$

$$= (EI/l^2)\left[\sum_{i=0}^{3} (\partial^2 \phi_i(\xi)/\partial\xi^2) q_i(t)\right]$$

เมื่อความสัมพันธ์ของค่าความเครียด (ϵ) กับค่าความเค้น ($M_o c/I$)และโมดูลัสความหยุ่นตัว จะได้เป็น

$$\epsilon = M_o c/EI$$

$$= (c/I^2)[\sum_{j=0}^{3}(\partial^2\phi_j(\xi)/\partial\xi^2)\ |\xi=\xi i\ q_i(t)]$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = [A_o] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}$$

$$[A_o] = c/I^2 \begin{bmatrix} \partial^2\phi_1(\xi_1)/\partial\xi^2 & \partial^2\phi_2(\xi_1)/\partial\xi^2 & \partial^2\phi_3(\xi_1)/\partial\xi^2 \\ \partial^2\phi_1(\xi_2)/\partial\xi^2 & \partial^2\phi_2(\xi_2)/\partial\xi^2 & \partial^2\phi_3(\xi_2)/\partial\xi^2 \\ \partial^2\phi_1(\xi_3)/\partial\xi^2 & \partial^2\phi_2(\xi_3)/\partial\xi^2 & \partial^2\phi_3(\xi_3)/\partial\xi^2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\xi_1 = x_1/l, \xi_2 = x_2/l, \xi_3 = x_3/l$ โดยที่ x_1, x_2, x_3 คือตำแหน่งที่มี strain gauge ติดตั้งอยู่ โดย x_1 ตำแหน่งที่ต้นแขน ส่วน x_2 x_3 คือตำแหน่งที่ห่างจุดต้นแขนมาทางปลายอิสระ

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} = [A_o]^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad \text{.....(17)}$$

เมื่อ M_o = โมเมนต์ที่กระทำต่อแขนกล

ϵ = ความเครียด

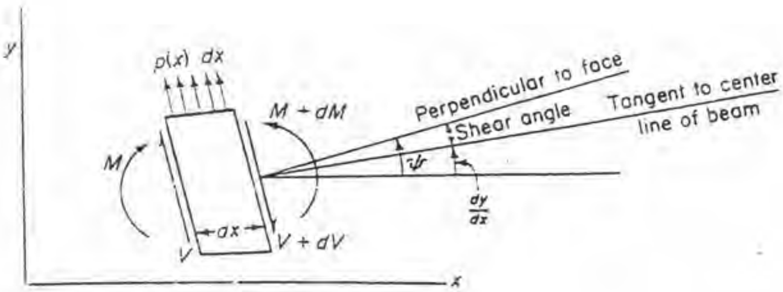
c = ความหนาครึ่งหนึ่งของแขนกล

E = โมดูลัสความยืดหยุ่นของวัสดุสำหรับแขนกล

จากสมการเมทริกซ์ที่ (17) จะเห็นว่าตัวแปรเจนเนอรัลไรซ์ โคออดิเนต จะประกอบด้วยส่วนกลับของเมทริกซ์ $[A_o]$ และเมทริกซ์ของค่าความเครียด $[\epsilon]$ ดังนั้นถ้าจะหาค่าเมทริกซ์ $[q_i(t)]$ จำเป็นจะต้องหาค่าเมทริกซ์ $[A_o]$ ซึ่งจากการพิจารณาแล้วจะพบว่าเมทริกซ์ $[A_o]$เป็นค่าที่ขึ้นอยู่กับสมการโหมดเชฟ ส่วนเมทริกซ์ $[\epsilon]$ สามารถจะหาได้จากการวัดของ strain gauge

การหาสมการโมดเชฟ

เมื่อพิจารณาชิ้นส่วนเล็กๆ (element) ของแขนจะพบว่ามีแรงและโมเมนต์มากระทำบนชิ้นส่วนเล็กๆของแขนซึ่งสามารถจะแสดงได้ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงแรงและโมเมนต์ที่กระทำต่อชิ้นส่วนเล็กๆของแขน

เมื่อ p = แรงที่กระทำหนึ่งหน่วยความยาวของแขนกล

V = แรงเฉือน

u = ระยะการโก่งตัวของแขนกล

$\partial u/\partial x$ = ความชันของเส้นที่ผ่านจุดกึ่งกลางหน้าตัดของแขนกล

ψ = ความชันเนื่องจากการดัดของแขนกล

$\psi - \partial u/\partial x$ = ความชันที่เสียเนื่องจากมุมเฉือน

ρ = มวลต่อความยาวของแขนกล

c = ค่าความหน่วงของตัว damper

k = เฟคเตอร์ที่ขึ้นกับรูปร่างของพื้นที่หน้าตัด

สมการการหยุ่นตัวของแขน

$$\psi - \partial u/\partial x = V/kAG \qquad .....(18)$$

$$\partial\psi/\partial x = M_o/EI \qquad .....(19)$$

สมการการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนเล็กๆ

$$\Sigma M = J\,\partial^2\psi/\partial t^2$$

$$\partial M_o/\partial x - V = J\,\partial^2\psi/\partial x^2 \qquad .....(20)$$

$$\Sigma F = \rho\,\partial^2 u/\partial t^2$$

$$p - \partial V/\partial x = \rho\,\partial^2 u/\partial t^2 \qquad .....(21)$$

จากสมการที่ (18),(19),(20),(21) จะได้

$$P(x,t) = EI\partial^4 u/\partial x^4 + \rho\partial^2 u/\partial t^2 - (J+EI\rho/kAG)(\partial^4 u/\partial x^2\,\partial t^2)$$

$$+ (J\rho/kAG)\partial^4 u/\partial t^4 - (J/kAG)\partial^2 p/\partial t^2 - (EI/kAG)\partial^2 p/\partial x^2$$

$$+ c\partial u/\partial t \qquad .....(22)$$

ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์ย่อยบอกถึงความพันธ์ของการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนเล็กของแขนกล u(x,t) กับแรงที่กระทำต่อแขนกลหรือของระบบต่อเนื่อง แต่ในการใช้งานจะมีรูปแบบสมการเฉพาะให้เหมาะสมกับงานโดยถ้าให้เงื่อนไขเพื่อนำสมการไปใช้งานเฉพาะโดยกำหนดให้ว่า ถ้าความยาวของระบบมากกว่า 50 เท่าของความหนาของระบบแล้วจะไม่คิดความเฉื่อยการหมุน(rotary inertia), J = 0 และถ้าให้การเคลื่อนที่ซึ่งถือความหนืดมีค่าน้อยแล้ว ก็หมายความว่าจะไม่คิดผลของความหนืดและไม่นำผลของมุมเฉือนมาพิจารณา โดยจะทำให้ได้สมการของออยเลอร์ (Euler's equation)ซึ่งเป็นที่คุ้นเคยกันมากกว่าสมการที่แล้วมาโดยจะพบรูปแบบสมการเป็น

$$p(x,t) = EI\partial^4 u/\partial x^4 + \rho\partial^2 u/\partial t^2 \qquad .....(23)$$

เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่แบบอิสระ (free vibration)

$$\partial^4 u/\partial x^4 + (\rho/EI)\partial^2 u/\partial t^2 = 0 \qquad .....(24)$$

สมการข้างต้นเป็นสมการแบบ homogeneous equation ดังนั้นสามารถที่จะหาคำตอบได้โดยใช้

วิธี การแยกตัวแปร โดยกำหนดให้ตัวแปร u ประกอบด้วยฟังก์ชั่นที่ขึ้นกับระยะทาง x และฟังก์ชั่นตัวแปรที่ขึ้นกับเวลา t ดังนั้นจะกำหนดให้

$$u(x,t) = T(t)r(x) \qquad .....(25)$$

เมื่อแทนค่าสมการและจัดรูปจะได้

$$(EI/r(x)\rho)d^4r(x)/dx^4 = -(1/T(t))d^2T(t)/dt^2 = \omega^2 \qquad .....(26)$$

$$d^4r/dx^4 - \beta_o^4 r = 0 \qquad \beta_o^4 = \omega^2\rho/EI \qquad .....(27)$$

คำตอบของสมการจะได้

$$r(x) = A\sin(\beta_o x) + B\cos(\beta_o x) + C\sinh(\beta_o x) + D\cosh(\beta_o x) \qquad .....(28)$$

$$r(\xi) = A\sin(\beta\xi) + B\cos(\beta\xi) + C\sinh(\beta\xi) + D\cosh(\beta\xi) \qquad .....(29)$$

$$\beta^4 = (\rho\omega^2 l^4)/EI$$

เงื่อนไขขอบเขตของแขน ที่เหมาะสมกับการใช้งานสำหรับกรณีที่กำหนดให้รูปแบบการยึดของแขนกลเป็นแบบ pin-free จะได้

$\xi = 0$

$$r(0) = 0$$

$$d^2r(0)/d\xi^2 = -(I_o/\rho l^3)\beta^4 dr(0)/d\xi$$

$\xi = 1$

$$d^2r(1)/d\xi^2 = 0$$

$$d^3r(1)/d\xi^3 = -(M/\rho l)\beta^4 r(1)$$

จากเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 4 โดยเงื่อนไขที่ 1 จะกำหนดว่าที่จุดต้นแขนมีระยะการโก่งตัวเป็นศูนย์ ส่วนเงื่อนไขที่ 2 จะกำหนดว่าที่จุดต้นแขนมีทอร์คจากมอเตอร์มากระทำ ส่วนเงื่อนไขที่ 3 จะกำหนดว่าที่ปลายแขนโมเมนต์ที่ปลายแขนเท่ากับศูนย์ ส่วนเงื่อนไขที่ 4 จะกำหนดว่าที่ปลายแขนจะมีแรงเฉือนกระทำ ผลจากเงื่อนไขจะทำให้ได้เมทริกซ์ซึ่งเมทริกซ์นี้สามารถที่นำไปใช้เพื่อที่จะหาค่าความถี่ธรรมชาติของระบบของแขนกลแบบหยุ่นตัว

เมื่อ $I^* = \rho l^3/I_o$

$$\begin{vmatrix} (-\sin\beta-\sinh\beta) & (\cos\beta-(2I^*/\beta^3)\sinh\beta+\cosh\beta) \\ [-\cos\beta-\cosh\beta & [-\sin\beta-(2I^*/\beta^3)\cosh\beta+\sinh\beta+\cosh\beta \\ +(M/\rho l)(\sin\beta-\sinh\beta)] & +(M\beta/\rho)(-\cos\beta-(2I^*/\beta^3)\sinh\beta] \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots(30)$$

และสมการของโมดเชฟจะได้

$$r(\xi) = [\sin(\beta\xi)-\sinh(\beta\xi)] + \delta[-\cos(\beta\xi)-(2I^*/\beta^3)\sinh(\beta\xi)+\cosh(\beta\xi)] \quad \ldots\ldots(31)$$

$$\delta = [\sin(\beta)+\sinh(\beta)]/[\cos(\beta)-(2I^*/\beta^3)\sinh(\beta)+\cosh(\beta)]$$

จากสมการที่ (31) เงื่อนไขที่กำหนดสมการได้มาโดยการคิดว่าที่ตำแหน่งเริ่มต้นถือว่ามีขนาดของมุมที่จะเปลี่ยนแปลงขณะมีการเคลื่อนที่ ดังนั้นเพื่อความถูกต้องจึงมีการแก้ไขซึ่งจะทำให้ได้สมการโหมดเชฟเป็นดังนี้

$$\phi_i(\xi) = r(\xi) - \xi dr(\xi)/d\xi \mid \xi=0$$

$$\phi_i(\xi) = \sin(\beta\xi)-\sinh(\beta\xi)+\delta[-\cos(\beta\xi)+\cosh(\beta\xi) -(2I^*/\beta^3)\sinh(\beta\xi)+(2I^*/\beta^2)\xi] \quad \ldots\ldots(32)$$

$$\delta = (\sin(\beta)+\sinh(\beta))/((-2I^*/\beta^3)\sinh(\beta)+\cos(\beta)+\cosh(\beta))$$

สำหรับกรณีของการยึดแขนแบบ clamp-free เงื่อนไขของแขนกล ที่เหมาะสมกับการใช้งาน

$\xi = 0$

$$r_2(0) = 0$$

$$dr_2(0)/d\xi = 0$$

$\xi = 1$

$$d^2r_2(1)/d\xi^2 = 0$$

$$d^3r_2(1)/d\xi^3 = -(M/\rho l)\beta^4 r_2(1)$$

จากเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 4 จะคล้ายกับแบบ pin-free แต่จะต่างกันที่แบบ clamp-free ที่จุดต้นแขนจะมีค่าความชันเท่ากับศูนย์และจะได้เมทริกซ์เพื่อนำไปหาค่าความถี่ธรรมชาติของระบบของแขนกลได้

$$\begin{bmatrix} (-\sin\beta-\sinh\beta) & (\cos\beta+\cosh\beta) \\ (-\cos\beta-\cosh\beta + (M\beta/\rho l)(\sin\beta-\sinh\beta)) & (-\sin\beta+\sinh\beta+(M\beta/\rho l) * (\cosh\beta-\cos\beta)) \end{bmatrix} = 0 \quad .....(33)$$

และสมการที่ขึ้นกับระยะทางตามแนวแขนจะได้เป็น

$$r_2(\xi) = \sin(\beta\xi)-\sinh(\beta\xi)+ \delta[\cosh(\beta\xi)-\cos(\beta\xi)]$$

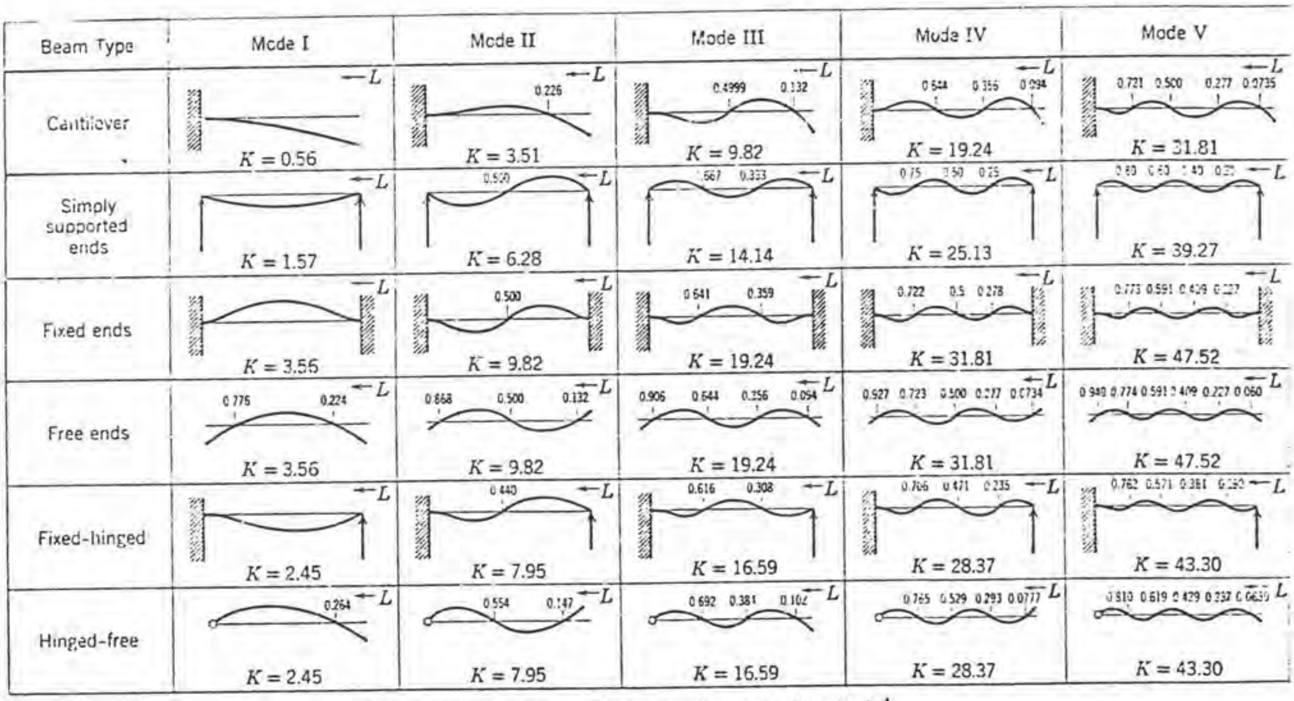
เมื่อ

$$\delta = (\sin\beta+\sinh\beta)/(\cos\beta+\cosh\beta)$$

ส่วนสมการโหมดเชฟจะได้จากการแก้ไขโดยให้การเคลื่อนที่ของแขนเทียบกับเฟรมอ้างอิงเคลื่อนที่ซึ่งจะทำสมการโหมดเชฟเป็นดังนี้

$$\phi_2(\xi) = r_2(\xi) - \xi dr_2(\xi_o)/d\xi$$

$$\phi_2(\xi) = \sin(\beta\xi)-\sinh(\beta\xi)+ \delta[\cos(\beta\xi)-\cosh(\beta\xi)] \quad .....(34)$$



$$f_i = K\sqrt{\frac{gEI}{wL^4}}$$

f_i = natural frequency, cps
K = constant from above table
g = 386 in./sec^2
E = modulus of elasticity, lb/in.^{2}
I = sectional moment of inertia, in.^{4}
w = weight of unit length beam, lb/in.
L = beam length, in.

รูปที่ 2.3 แสดงรูปร่างของโหมดเชฟ ของแขนกลเงื่อนไขการยึดแบบต่างๆ