บทที่ 3

การวิเคราะห์การไหลของน้ำ

ในการวิเคราะห์บัญหาการไหลของน้ำผ่านสิ่งกีดขวางนี้ เราสามารถแบ่งช่วงการวิเคราะห์ออกเป็น 3 ช่วง ดังรูปที่ 3.1

ช่วงต่าง ๆ ของการไหลมีรายละเอียดต่อไปนี้

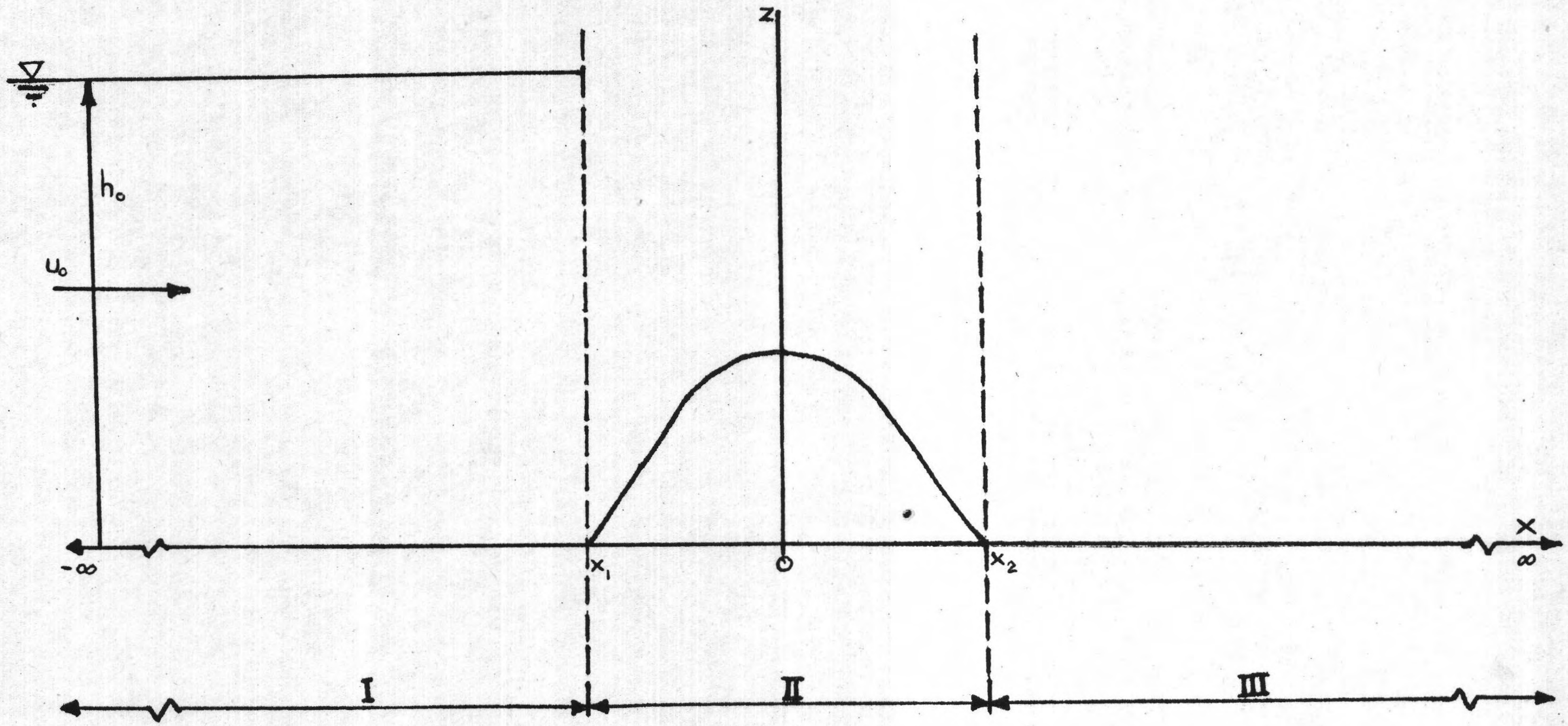
1. บริเวณก่อนหน้าสิ่งกีดขวาง (Upstream Region) คือช่วงที่ I ซึ่ง $-\infty < x < x_1$ ของเหลวไหลอย่างสม่ำเสมอ จาก $-\infty$ บนพื้นราบเรียบจนถึงบริเวณที่สิ่งกีดขวางตั้งอยู่

2. บริเวณเหนือสิ่งกีดขวาง (Transition Region) คือช่วงที่ II ซึ่งมีสิ่งกีดขวางอยู่ระหว่าง $x_1 < x < x_2$ เมื่อ $x_1 < 0$ และ $x_2 > 0$ และเพื่อความสะดวกเราจะกาหนดให้จุดสูงสุดของสิ่งกีดขวางอยู่เหนือจุด $x = 0$ ของเหลวจะไหลผ่านเหนือสิ่งกีดขวางโดยไม่มีการเปลี่ยนระดับอย่างทันทีทันใด ที่จุดปลายทั้งสอง

3. บริเวณหลังสิ่งกีดขวาง (Downstream Region) คือช่วงที่ III ซึ่ง $x_2 < x < \infty$ ของเหลวจะไหลบนพื้นราบเรียบซึ่งมีระดับเดียวกับพื้นในช่วงที่ I ไปถึง ∞

การไหลทั้ง 3 ช่วงนี้สามารถใช้สมการ (2.3) หาค่าความสูงผิวน้ำ โดยที่ค่า K และ R อาจแตกต่างกันไปในทั้ง 3 ช่วง แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อเราถือว่าไม่มีการสูญเสียหรือเพิ่มมวลและพลังงานที่จุดใดๆ ตลอดช่วงการไหลแล้วเราสามารถแสดงได้ว่า K, R เป็นค่าคงที่ ตลอดช่วงที่พิจารณา โดยทั่วไปถึงแม้ว่าพื้นล่างในแต่ละช่วงของการไหลจะต่อเนื่องกัน แต่อนุพันธ์เมื่อเทียบกับ x หรือความชันของพื้นล่างนี้ อาจเปลี่ยนค่าที่จุดรอยต่อของแต่ละช่วง (คือที่ $x = x_1$ และ $x = x_2$) ในกรณีที่พื้นล่างราบเรียบเพียงพอ นั่นคือ อัตราการเปลี่ยนของพื้นล่างเมื่อเทียบกับ x มีค่าต่อเนื่องที่จุดรอยต่อ เราจะพบว่า ค่า h, h_x มีความต่อเนื่องที่รอยต่อด้วย ส่วนถ้าอนุพันธ์ของผิวล่างที่ของเหลวไหลผ่านมีค่าไม่ต่อเนื่องตรงรอยต่อแล้ว ถึงแม้ว่าเราจะกาหนดให้ค่า h ตรงรอยต่อมีความต่อเนื่อง แต่ค่า h_x ตรงรอยต่อจะไม่ต่อเนื่อง (ดู B-4) การเปลี่ยนแปลงของค่า h_x นี้จะหาได้โดยใช้ Jump Condition ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้ คือ

$$(h_x/h)_{x=x_0^+} - (h_x/h)_{x=x_0^-} = -(3/2)\{(H_x/h)_{x=x_0^+} - (H_x/h)_{x=x_0^-}\} \quad 3.1$$



รูปที่ 3.1

3.1 การไหลของน้ำบริเวณก่อนหน้าสิ่งกีดขวาง (Upstream Flow)

เพื่อความสะดวกเราจะถือว่าค่าความดันต่างๆเป็นค่าความดันมาตร (Gauge Pressure) นั่นคือเราจะถือว่าความดันบรรยากาศ $p_0 = 0$ ในบริเวณนี้ พื้นผิวล่างของการไหลถูกกาหนดโดย $H = 0$ $H_x = H_{xx} = 0$ และเราจะกาหนดว่า ที่ต้นน้ำห่างไกลออกไป ($x \to -\infty$) การไหลเป็นแบบเท่าเทียมกัน (Uniform flow) นั่นคือ

$$u = u_0 = \text{ค่าคงที่}$$

$$h = h_0 \,,\; h_x = h_{xx} = 0 \quad \text{เมื่อ } x \to -\infty \qquad 3.2$$

เมื่อแทนค่าเงื่อนไขที่กาหนดให้ $p_0 = 0$, $H = H_x = H_{xx} = 0$ ลงในสมการ(2.3) แล้ว จะได้สมการอธิบายการไหลของน้ำในช่วงที่ I ดังนี้ คือ

$$h_{xx} - (1/2)h_x^2/h + 3/2h + 3gh^2/K^2 + 3Rh/K^2 \qquad 3.3$$

จากสมการ (2.2) เมื่อใช้สมการเงื่อนไข (3.2) จะได้ผลคือ

$$K = h_0 u_0 \qquad 3.4$$

เมื่อใช้ค่า K ในสมการ(3.4) และสมการเงื่อนไข(3.2) แทนค่าลงในสมการ(3.3) เราสามารถคานวณค่าคงที่ R ได้ คือ

$$R = -gh_0(1 + F^2/2) \qquad 3.5$$

โดยที่ F มีค่าจำกัดความ $F^2 = U_0^2/(gh_0)$ และเรียกว่า Far Upstream Froude Number จะเห็นได้ว่าค่า R นั่นคือ ปริมาณที่มักจะเรียกกันว่า Total Head ของของเหลว

สมการ (3.3) นี้เราสามารถอินทิเกรดเพื่อหา h ได้และคาตอบค่า h นี้จะขึ้นอยู่กับค่า F^2 Naghdi & Vongsarnpigoon (1986) ได้วิเคราะห์คาตอบของสมการ(3.3) ไว้ ซึ่งอาจจะสรุปได้ดังนี้

1. ถ้า $F^2 < 1$ (Subcritical Flow) การไหลแบบสม่าเสมอในช่วงที่ I จะสามารถมีได้รูปแบบเดียวเท่านั้น คือ

$$h = h_0 \quad \text{ตลอดช่วงที่ I} \qquad 3.6$$

2. ถ้า $F^2 = 1$ (Critical Flow) นอกจากการไหลในรูปสมการ (3.6) แล้ว ค่า h สามารถมีรูปแบบ

$$h = h_0 - 4h_0^3/\{3(x-a_1)^2\} \quad 3.7$$

เมื่อ a_1 เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง จะเห็นได้ว่ารูปแบบของฟังชั่น h ในสมการ(3.7) มีค่าลดลงตลอดเวลา เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นจาก $-\infty$ ซึ่งจะทาให้มีโอกาสที่ h มีค่าเป็นศูนย์ได้

3. ถ้า $F^2 > 1$ (Supercritical Flow) นอกจากการไหลในรูปแบบสมการ(3.7) แล้ว ค่า h สามารถมีรูปแบบอื่นได้ คือ

$$h = h_0 + h_0(F^2 -1)\text{sech}^2\{[(3/4)(F^2 -1)/F^2]\ (x+a_2)/h\} \quad 3.8a$$

$$h = h_0 - h_0(F^2 -1)\text{csch}^2\{[(3/4)(F^2 -1)/F^2]\ (x+a_3)/h\} \quad 3.8b$$

เมื่อ a_2 และ a_3 เป็นค่าคงที่ รูปแบบของ h ในสมการ(3.8a) นั้นเรียกว่า Solitary Wave ขณะที่รูปแบบของ h ในสมการ(3.8b) นั้นเป็นฟังชั่นที่มีค่าลดลงตลอดเวลา (Monotonically Decreasing)

ในวิทยานิพนธ์นี้ เราจะพิจารณาเฉพาะการไหลที่ $F^2 < 1$ เท่านั้น นั่นคือการไหลในช่วงที่ I จะมีรูปแบบสมการ(3.6) เพียงกรณีเดียว

3.2 การไหลของน้าบริเวณหลังสิ่งกีดขวาง (Downstream Flow)

โดยที่การไหลในช่วงที่ III นี้เป็นการไหลบนพื้นเรียบ และจากการกาหนดให้ไม่มีการสูญเสียหรือเพิ่มของมวลและพลังงาน ทาให้ค่า K และ R มีค่าเท่ากันตลอดทุกช่วงการไหล ดังนั้นสมการอธิบายการไหลในช่วงที่ III จึงเหมือนกับสมการ(3.3) เมื่อแทนค่า K และ R จากสมการ(3.4, 3.5) แล้วจัดรูป และอินทิเกรดเราจะได้สมการของการไหลในช่วงที่ III ดังต่อไปนี้คือ

$$h_x^2 + q(h) = 0 \quad 3.9$$

เมื่อ

$$q(h) = 3h^3/(F^2h_0^3) - 3(1+2/F^2)h^2/h_0^2 + 6S_3h/(F^2gh_0) - 3 \quad 3.10$$

ในสมการ(3.10) ค่า S_3 เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรด คาตอบของสมการ(3.9) ได้มีการวิเคราะห์โดย Naghdi & Vongsarnpigoon (1986) ซึ่งจะได้แสดงรายละเอียดไว้พอสังเขปดังนี้

เราจะเริ่มพิจารณาคาตอบโดยพิจารณากรณีที่การไหลบริเวณห่างไกลจากสิ่งกีดขวางเข้าสู่การไหลแบบเท่าเทียมกัน นั่นคือ

$$h_x = h_{xx} = 0 \qquad \text{เมื่อ } x \to \infty \quad 3.11$$

เนื่องจากสมการ(2.3) ต้องเป็นจริง เมื่อแทนสมการ(3.11) ลงในสมการ(2.3) และจัดรูปแล้ว เราได้

$$(h - h_0)(h - \gamma h_0)[h - (F^2/2 - \gamma) h_0] = 0 \qquad 3.12$$

เมื่อ

$$\gamma = \gamma(F^2) = (F^2/4)[1 + (1 + 8/F)^{1/2}] \qquad 3.13$$

เราสามารถแสดงได้ว่า $F^2/2 - \gamma$ มีค่าเป็นลบเสมอ ซึ่งจากสมการ(3.12) แสดงให้เห็นว่า เมื่อการไหลเข้าสู่การไหลแบบเท่าเทียมกัน ที่ $x \to \infty$ ความลึกของของเหลวจะมีค่า h_0 หรือค่า γh_0 เท่านั้น ในกรณีแรกซึ่ง $h \to h_0$ ที่ $x \to \infty$ นั้น เมื่อแทนค่า $h = h_0$ และ $h_x = 0$ ลงในสมการ(3.9) จะหาค่า S_3 ได้ และถ้าให้ค่า S_3 นี้เป็น S_3^+ เราพบว่า

$$S_3^+ = (1/2)F^2 g h_0^2 (2 + 1/F^2) \qquad 3.14$$

เมื่อใช้ค่า S_3^+ จากสมการ(3.14) แทนลงในสมการ(3.9) ซึ่งจะต้องเป็นจริงที่ทุกจุดตลอดช่วงที่ III เราสามารถเขียนสมการ(3.9) ในรูป

$$h_x^2 + \{3/(F^2 h_0^3)\}(h - h_0)^2 (h - F^2 h_0) = 0 \qquad 3.15$$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า ในกรณีที่ $F^2 < 1$ และ $h = h_0$, $h_x = 0$ เมื่อ $x \to \infty$ แล้ว ค่า h จะมีค่า

$$h = h_0 \qquad \text{ที่ทุก ๆ จุด} \qquad \text{เมื่อ } x > x_2 \qquad 3.16$$

ในกรณีหลัง ซึ่ง $h \to \gamma h_0$ ที่ $x \to \infty$ เมื่อแทนค่า $h = \gamma h_0$ และ $h_x = 0$ ลงในสมการ(3.9) จะหาค่า S_3 ได้ ถ้าให้ S_3 นี้เป็น S_3^- เราพบว่า

$$S_3^- = (F^2 g h_0^2/2\gamma)(2 + \gamma^3/F^2) \qquad 3.17$$

และเมื่อแทนค่า S_3^- ลงในสมการ(3.9) เราสามารถเขียนสมการ(3.9) ในรูป

$$h_x^2 + \{3/(F^2 h_0^3)\}(h - \gamma h_0)(h - F^2 h_0/\gamma) = 0 \qquad 3.18$$

ค่า h จากสมการ(3.18) นี้ นอกจากจะมีค่า

$$h = \gamma h_0 \qquad \text{ที่ทุก ๆ จุด} \qquad 3.19$$

แล้วยังสามารถมีค่าต่อไปนี้ คือ

$$h = \bar{h}_0 + \bar{h}_0(F^2/\gamma^3 - 1)\mathrm{sech}^2\{[(3/4)(F^2 - \gamma^3)/F^2]^{1/2}(x/h_0 + a_4)\} \qquad 3.20_a$$

$$h = \bar{h}_0 - \bar{h}_0(F^2/\gamma^3 - 1)\mathrm{csch}^2\{[(3/4)(F^2 - \gamma^3)/F^2]^{1/2}(x/h_0 + a_5)\} \qquad 3.20_b$$

เมื่อ $\bar{h}_0 = \gamma h_0$ และ a_4 และ a_5 เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรด

จากสมการ(3.20$_a$) จะเห็นได้ว่า $h > h_0$ เสมอ ดังนั้นเราจะได้คาตอบเป็นลักษณะของ Solitary Wave และสาหรับสมการ(3.20$_b$) จะได้คาตอบในลักษณะซึ่งความสูงของผิวน้าลดลงตลอดเวลา(Monotonically Decreasing)

จะเห็นได้ว่า ฟังชั่น q(h) ในสมการ(3.10) มีรากเหมือนกัน (Double Root) ในกรณีที่ S_3 มีค่าเท่ากับ S_3^+ และ S_3^- ถ้า S_3 อยู่ระหว่าง S_3^+ และ S_3^- นั้นคือ $S_3^- < S_3 < S_3^+$ ฟังชั่น q(h) จะมีรากที่ไม่เท่ากัน 3 ค่า ซึ่งให้มีค่าเป็น h_1, h_2, h_3 โดย $h_1 > h_2 > h_3$ ทาให้เราเขียนสมการ (3.9) ได้เป็น

$$h_x^2 + \{3/(F^2h_0^3)\}(h - h_1)(h - h_2)(h - h_3) = 0 \qquad 3.21$$

ค่า h จากสมการ(3.21) จะอยู่ในรูป Cnoidal Wave (ดูหน้า 597, Abramonit และ Stegun 1965) คือ

$$h = h_2 + (h_1 - h_2)\, cn^2\{(1/2)(h_1 - h_3)^{1/2} (3/[F^2h_0^3])^{1/2} (x - a_6)\} \qquad 3.22$$

เมื่อ a_6 เป็นค่า x ที่ทาให้ $h = h_2$ และ cn เป็น Jacobian Elliptic Function ที่มี modulus $m = (h_1 - h_2)/(h_1 - h_3)$

ในกรณีที่ค่า S_3 ในสมการ(3.9) มีค่ามากกว่า S_3^+ หรือน้อยกว่า S_3^- ($S_3 > S_3^+$ หรือ $S_3 < S_3^-$) เราจะสามารถแสดงได้ว่า ฟังชั่น q(h) ในสมการ(3.9b) มีรากที่เป็นบวกเพียงค่าเดียว ซึ่งไม่เป็นรากเหมือนกัน (Double Root หรือ Triple Root) ในกรณีเช่นนี้เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า ของเหลวไม่สามารถเกิดการไหลแบบสม่าเสมอในช่วงที่ III ได้ เพราะความลึกของของเหลว (h) จะมีค่าเป็นศูนย์ที่จุดใดจุดหนึ่ง ในช่วงที่ $x > x_2$ (ดู Naghdi & Vongsarnpigoon 1986)

จากการพิจารณาถึงคาตอบสาหรับการไหลแบบสม่าเสมอในช่วงที่ III จะเห็นได้ว่าคาตอบที่ได้ขึ้นอยู่กับค่า S_3 นั่นคือถ้าเรารู้ค่า S_3 เราก็จะรู้ว่าการไหลในช่วงที่ III นี้จะมีลักษณะเป็นอย่างไร ซึ่งค่า S_3 นี้เราสามารถหาได้ เมื่อเรารู้ค่า h และ h_x ที่จุดหนึ่งจุดใดในช่วงที่ III นี้ เช่นที่ $x = x_2$ เป็นต้น ค่า S_3 นี้สามารถคานวณได้จากสมการ

$$S_3 = (1/\{2h\})F^2gh_0^3\ \{1 + (1 + 2/F^2)(h/h_0)^2 - h^3/(F^2h_0^3) - (1/3)h_x^2\ \} \qquad 3.23$$

3.3 การไหลของน้ำเหนือบริเวณสิ่งกีดขวาง

เนื่องจากเราได้กำหนดให้ $p_0 = 0$ ดังนั้นสมการอธิบายการไหลในช่วงที่ II นี้จะหาได้จากการแทน p_0 และ R, K จากสมการ(3.4), (3.5) ลงในสมการ (2.3) ซึ่งจะได้

$$h_{xx}-(1/2)h_x^2/h+(3/2)h(1/h^2-1/h_0^2)$$

$$+(3h/\{F^2h_0^3\})(h+H-h_0)+(3/2)(H_{xx}+H_x^2/h) = 0 \qquad 3.24$$

คำตอบ h ของสมการ(3.24) จะหาได้โดยการอินทิเกรดและใช้ค่าเงื่อนไขที่จุดต่อระหว่างช่วงที่ I และช่วงที่ II โดยทั่วไปการหาคำตอบจากสมการ(3.24) จะต้องใช้วิธีเชิงเลข แม้ในกรณีที่ลักษณะของสิ่งกีดขวางจะเป็นรูปทรงเรขาคณิตที่ง่าย ๆ ก็ตาม

กล่าวโดยสรุป การคำนวณความสูงผิวน้ำเราสามารถหาได้โดย

- ช่วงที่ I จากการวิเคราะห์คำตอบในหัวข้อที่แล้ว จะได้ $h = h_0$ ตลอดช่วงที่ I

- ช่วงที่ II คำตอบในช่วงนี้จะหาได้จากการอินทิเกรดสมการ(3.24) ซึ่งต้องใช้เงื่อนไขเริ่มต้นที่จุด $x = x_1$ ด้วย เงื่อนไขเริ่มต้นนี้สามารถหาได้โดยใช้สมการเงื่อนไขไม่ต่อเนื่อง (Jump Condition) ในบทผนวก B-4 เนื่องจากค่า h มีค่าคงที่ในช่วงที่ I ค่า h_x จึงมีค่าเป็นศูนย์ที่จุดก่อน x_1 ในกรณีที่พื้นล่างมีความต่อเนื่องทั้งระดับและความชัน (คือ H และ H_x มีค่าต่อเนื่อง) ที่ $x = x_1$ เงื่อนไขเริ่มต้นของช่วงที่ II คือ

$$h = h_0 , \quad h_x = 0 \quad \text{ที่จุด} \quad x = x_1^+ \qquad 3.25$$

สำหรับกรณีที่ H_x ไม่ต่อเนื่อง เงื่อนไขเริ่มต้นจะสามารถหาได้จากสมการ(3.1) นั่นคือ

$$h = h_0 , \quad h_x = -(3/2) H_x \quad \text{ที่จุด} \quad x = x_1^+ \qquad 3.25$$

การอินทิเกรดสมการ(3.24) จาก x_1 ถึง x_2 นี้ จะใช้วิธีการเชิงเลขแบบ Rung-Kutta Fourth Order

- ช่วงที่ III เช่นเดียวกับในช่วงที่ II เราต้องหาเงื่อนไขเริ่มต้นก่อน ซึ่งจะหาได้จากสมการเงื่อนไขไม่ต่อเนื่อง ในบทผนวก B-4 อีกเช่นกัน ในกรณีที่ H_x มีความต่อเนื่องที่ $x = x_2$ เราจะได้

$$h(x=x_2^+) = h(x=x_2^-)$$

$$h_x(x=x_2^+) = h_x(x=x_2^-) \qquad 3.27$$

ถ้า H_x มีค่าไม่ต่อเนื่องที่ $x = x_2^-$ เนื่องจาก $H_x = 0$ สำหรับ $x > x_2$ เราจะได้เงื่อนไขดังนี้ คือ

$$h(x=x_2^+) = h(x=x_2^-)$$

$$h_x(x=x_2^+) = h_x(x=x_2^-) + \frac{3}{2} H_x(x=x_2^-) \qquad 3.28$$

เมื่อได้ค่า h และ h_x ที่จุดเริ่มต้นของช่วงที่ III แล้ว เราย่อมสามารถคำนวณหาลักษณะของผิวน้ำได้ โดยการอินทิเกรดสมการ(2.3) แต่เนื่องจากเราทราบว่าลักษณะการไหลในช่วงที่ III นั้นขึ้นอยู่กับค่าคงที่ S_3 เราสามารถใช้ค่า h และ h_x ที่จุดเริ่มต้นของส่วนที่ III ในการคำนวณค่า S_3 และเปรียบเทียบกับค่า S_3^+ และS_3^- ก็จะสามารถรู้ลักษณะการไหลในช่วงที่ III ได้

ในการคำนวณค่า h ที่จุดต่าง ๆ นั้น เพื่อความสะดวกในการแสดงผลและการวิเคราะห์ เราจะทำให้ค่าต่าง ๆ ที่จะใช้ในการคำนวณไม่มีหน่วย (Nondimensional) โดยกำหนดดังนี้

$$\hat{h} = h/H_0, \quad \hat{h}_0 = h_0/HO \ , \quad \hat{H} = H/H_0 \ , \quad \hat{x} = x/H_0 \qquad 3.29$$

เมื่อ H_0 คือค่าความสูงสูงสุดของสิ่งกีดขวาง สมการที่ได้จะมีรูปแบบเดียวกันกับ(3.23) เพียงแต่มีค่า $\hat{h}$, $\hat{H}$ และ $\hat{h}_0$ แทน h, H และ h_0 เท่านั้น