บทที่ 5

การจำลองแบบและการออกแบบตัวควบคุม

เพื่อที่จะออกแบบตัวควบคุมสำหรับใช้ทดสอบระบบควบคุมที่สร้างขึ้น สิ่งสำคัญคือการสร้างแบบจำลองสภาพการเคลื่อนที่ ซึ่งได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบควบคุมที่สร้างขึ้น ในที่นี้เราจะแสดงการจำลองแบบและการออกแบบตัวควบคุม ในแนวแกน X ส่วนวิธีการออกแบบในแนวแกน Y สามารถหาได้เช่นเดียวกับการออกแบบในแนวแกน X และเนื่องมาจากการที่ไม่สามารถทราบค่าของตัวแปรบางตัวของระบบ ดังนั้นเราจะหาโมเดลหรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบโดยดูจากการตอบสนองเอาท์พุทเมื่อมีอินพุท โดยวิธีการตอบสนองแบบขั้น (step response) โดยมีอินพุทเป็นโวลเตทและเอาท์พุทเป็นความเร็ว ผลการทดสอบ (ดูจากภาคผนวก) พบว่า การตอบสนองของระบบมีลักษณะคล้ายคลึงกับการตอบสนองของระบบอันดับหนึ่ง ดังนั้นเราจะให้ระบบมีรูปแบบเป็นระบบอันดับหนึ่ง โดยมีทราสเฟอร์ฟังชั่นเป็น

$$G(s) = K_m/(\tau s + 1) \qquad (5.1)$$

G(s) คือทรานสเฟอร์ฟังชั่นของการตอบสนองแบบขั้น

τ คือค่าเวลาคงที่ (time constance) ของระบบอันดับหนึ่ง

K_m คือค่าอัตราขยายของระบบ ซึ่งเป็นค่าของอัตราส่วนของแอมปลิจูดของเอาท์พุทในสภาวะคงตัว (steady state gain)

ค่า τ ของการตอบสนองแบบขั้นได้จากการค่าเวลาที่ใช้ในการตอบสนองของระบบเมื่อเอาท์พุทมีค่าเท่ากับ 63.2% ของ K_m จากทรานสเฟอร์ฟังชั่นของระบบควบคุมของชุดอุปกรณ์ขับเคลื่อน นำมาใช้สร้างแบบจำลองสภาพการเคลื่อนที่ โดยทั่วๆไปคำนึงถึงสมการสเตท(state equation) ที่อยู่ในรูปของสภาวะต่อเนื่อง (continuous state) สำหรับใช้อธิบายระบบควบคุม ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (5.2)$$

x(t) คือสเตทเวคเตอร์เมตริก (n x 1)

u(t) คือคอนโทรนเวคเตอร์เมตริก (m x 1)

A คือค่าสัมประสิทธิ์ของเมตริก (n x n)

B คือค่าสัมประสิทธิ์ของเมตริก (n x m)

ตัวแปรของระบบคือ ตำแหน่งและความเร็ว ที่เคลื่อนที่ได้ในแนวแกน โดยมีความสัมพันธ์กันดังนี้

x_1 = ตำแหน่ง

x_2 = ความเร็ว

จากทรานสเฟอร์ฟังก์ชั่นของชุดอุปกรณ์ขับเคลื่อน สามารถเขียนเป็นสมการพลศาสตร์

$$\dot{x}_2 = \frac{k_m}{\tau s + 1} u(t)$$

$$\tau s x_2 + x_2 = k_m u(t)$$

$$s x_2 = \dot{x}_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-x_2}{\tau} + \frac{k_m}{\tau} u(t) \quad (5.3)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.4)$$

จากสมการที่ (5.3) และสามาการที่ (5.4) เขียนอยู่ในรูปของเมตริก

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K/\tau \end{bmatrix} u(t)$$

เนื่องจากระบบควบคุมที่สร้างขึ้นเป็นชนิดควบคุมแบบดิจิตอล โดยมีชุดซีโร่โฮลเพิ่มเข้ามาระหว่างสัญญาณอินพุทคือโวลเตท กับชุดอุปกรณ์ขับเคลื่อน ซึ่งทำให้สมการสเตทของระบบ continuous เปลี่ยนไปเป็นระบบ discrete โดยสามารถหาได้จากสมการสเตททรานซิชั่น (state transition equation) ซึ่งมีรูปแบบของสมการดังนี้

$$x(t) = \phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t-\psi)Bu(\psi)d\psi \quad (5.5)$$

โดยที่ $t > t_o$

เราสนใจดูเฉพาะผลการตอบสนองในขณะเวลาสุ่ม (sampling time) โดยให้

$t = (k+1)T \quad , \quad t_o = kT$

T คือคาบของเวลาที่ใช้ในการสุ่ม

แทนค่า t และ t_o ลงในสมาการที่(5.5) จะได้

$$x[(k+1)T] = \phi(T)x(kT) + \int_{KT}^{(k+1)T} \phi[(k+1)T-\psi]Bd\psi u(KT) \tag{5.6}$$

กำหนดให้ $\phi(T)$ คือค่าสเตททรานซิชั่นเมตริก ซึ่งมีค่า

$$\phi(T) = \mathcal{L}^{-1}[(SI-A)^{-1}] \tag{5.7}$$

$$[SI - A] = \begin{bmatrix} S & -1 \\ 0 & S+1/\tau \end{bmatrix}$$

$$(SI-A)^{-1} = 1/(S^2+S/\tau) \begin{bmatrix} S+1/\tau & 1 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/S & 1/S(S+1/\tau) \\ 0 & 1/(S+1/\tau) \end{bmatrix}$$

$$\phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & \tau(1-e^{-T/\tau}) \\ 0 & e^{-T/\tau} \end{bmatrix}$$

$$\int_{KT}^{(k+1)T} \phi[(k+1)T-\psi]B\,d\psi = \int_{KT}^{(k+1)T} \begin{bmatrix} 1 & \tau(1-e^{-((K+1)T-\psi)/\tau}) \\ 0 & e^{-((K+1)T-\psi)/\tau} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ K_s/\tau \end{bmatrix} d\psi \tag{5.8}$$

$$= \int_{KT}^{(k+1)T} \begin{bmatrix} K_s(1-e^{-((K+1)T-\psi)/\tau}) \\ (K_s/\tau)e^{-((K+1)T-\psi)/\tau} \end{bmatrix} d\psi$$

$$= \begin{bmatrix} \int_{KT}^{(k+1)T} K_s[1-e^{-((K+1)T-\psi)/\tau}]d\psi \\ \int_{KT}^{(k+1)T} (K_s/\tau)e^{-((K+1)T-\psi)/\tau}d\psi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \int_{KT}^{(k+1)T} K_s d\psi - \int_{KT}^{(k+1)T} K_s e^{-((K+1)T-\psi)/\tau}d\psi \\ \int_{KT}^{(k+1)T} (K_s/\tau)e^{-((K+1)T-\psi)/\tau}d\psi \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} K_m T - K_m \tau(1-e^{-T/\tau}) \\ \\ K_m(1-e^{-T/\tau}) \end{bmatrix}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{bmatrix} x_1(k+1)T \\ \\ x_2(k+1)T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau(1-e^{-T/\tau}) \\ \\ 0 & e^{-T/\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_m T-K_m \tau(1-e^{-T/\tau}) \\ \\ K_m(1-e^{-T/\tau}) \end{bmatrix} U(kT) \tag{5.9}
$$

โดยที่

$$x_1(k+1)T = x(k+1)$$

$$x_2(k+1)T = v_x(k+1)$$

<u>การออกแบบตัวควบคุมแบบ PIP</u>

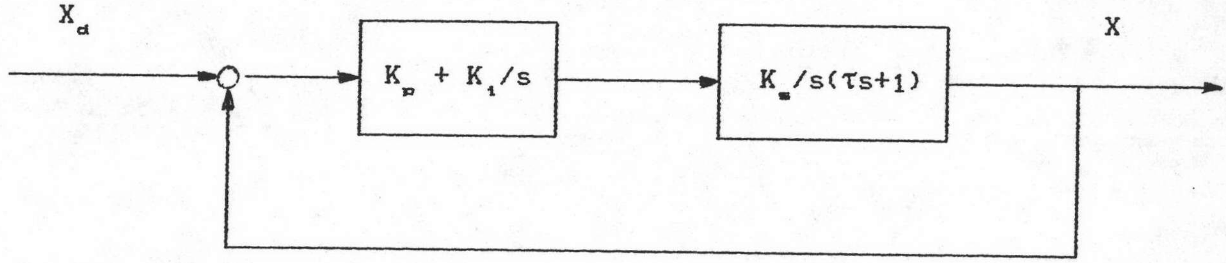
ในการออกแบบระบบควบคุมแบบ PIP (proportional + integral + preview) ของโต๊ะ X-Y เพื่อที่จะหาสัมประสิทธิ์ตัวควบคุม (gain) แบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน ขั้นตอนแรก จะทำการออกแบบเฉพาะตัวควบคุมแบบ PI ก่อน โดยอาศัยทฤษฎีของ time-domain และ frequency response เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ตัวควบคุมแบบสัดส่วนและอินทิกรัล ขั้นตอนต่อไปจะทำการหาค่าสัมประสิทธิ์ตัวควบคุมแบบ พรีวิว ซึ่งมีรายระเอียดดังต่อไปนี้

1. <u>การออกแบบตัวควบคุมแบบ PI</u>

สามารถเขียนบล๊อกไดอะแกรมของ ระบบควบคุมแบบ PI ดังแสดงในรูป (5.1) กำหนดให้

K_p คือสัมประสิทธิ์ตัวควบคุมแบบสัดส่วน

K_i คือสัมประสิทธิ์ตัวควบคุมแบบอินทิกรัล



รูปที่ 5.1 บล๊อกไดอะแกรมแสดงระบบควบคุมแบบ พี.ไอ.

ปัญหาของการออกแบบอยู่ที่การปรับค่า K_p และค่า K_i ทั้งสองตัว มีวิธีการหาค่าเหล่านี้โดยเริ่มจากการหาค่า K_p ก่อน สมมุติให้ระบบควบคุมมีตัวควบคุมเป็นแบบสัดส่วนอย่างเดียว open-loop transfer function มีค่า

$$G(s) = K_pK_m/s(\tau s+1) \tag{5.10}$$

จากความสัมพันธ์ของ static velocity error coefficient

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) \tag{5.11}$$

$$K_v = \text{output velocity/FVE} \tag{5.12}$$

โดย G(s) คือทรานสเฟอร์ฟังก์ชั่นของระบบที่ถูกควบคุม

K_v คือ static velocity error coefficient

FVE คือ ค่าผิดพลาดของตำแหน่งที่สภาวะสิ้นสุด

ถ้าเรากำหนดให้ output velocity มีค่าเป็น 0.5 in./sec. และค่าความผิดพลาดของตำแหน่งที่สภาวะสิ้นสุดมีค่า 0.05 inch สาเหตุที่ออกแบบค่า FVE ที่ค่านี้ก็เพื่อที่จะไม่ให้ค่าเกน K_p มากเกินไป ซึ่งเป็นสาเหตุทำให้ transient respond ของระบบเกิดการ oscillate

$$K_v = 0.5/0.05 \ \text{sec}^{-1}$$

ดังนั้น $K_v = 10\ sec^{-1}$

ค่าของ K_m และ τ ได้มาจากผลการตอบสนองแบบขั้นของระบบซึ่งมีค่า

$$K_{mx} = K_{my} = 0.33 \text{ in/sec volt} \qquad \tau_x = \tau_y = 0.15 \text{ sec}$$

แทนค่า K_m และ τ ลงในสมการที่ (5.11)

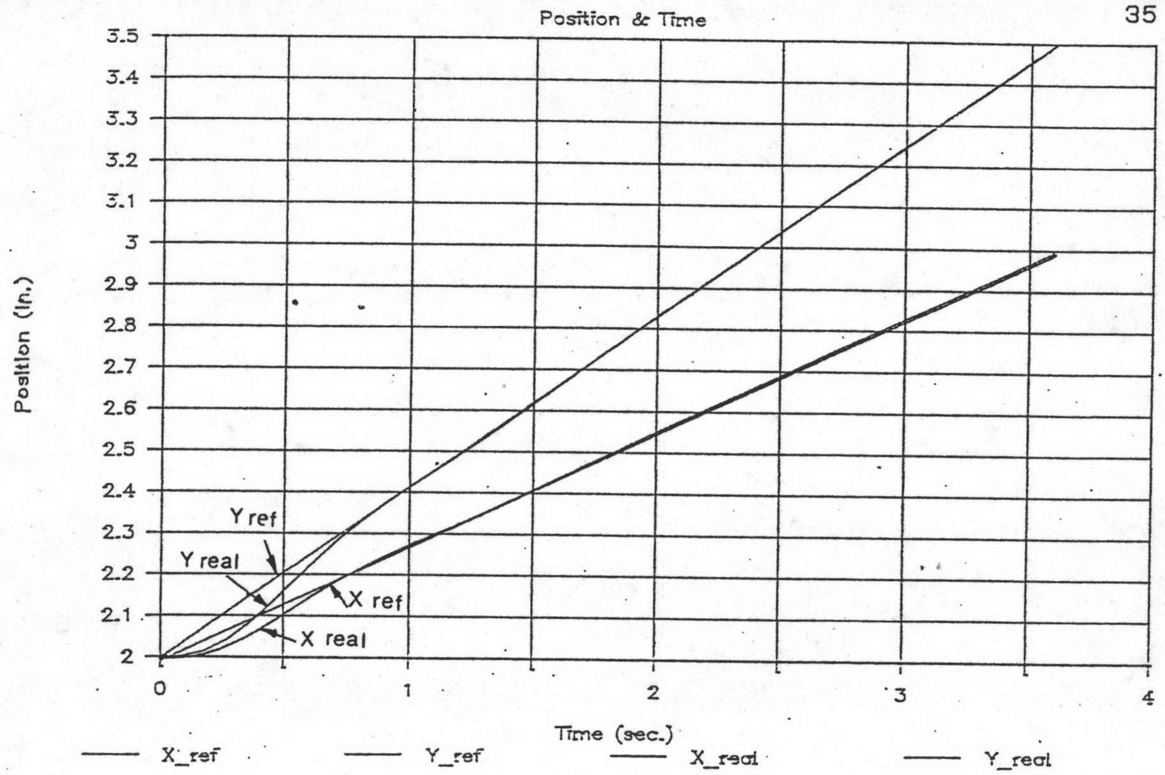
$$10 = \lim_{s \to 0} s(0.33)K_p/s(0.15s+1)$$

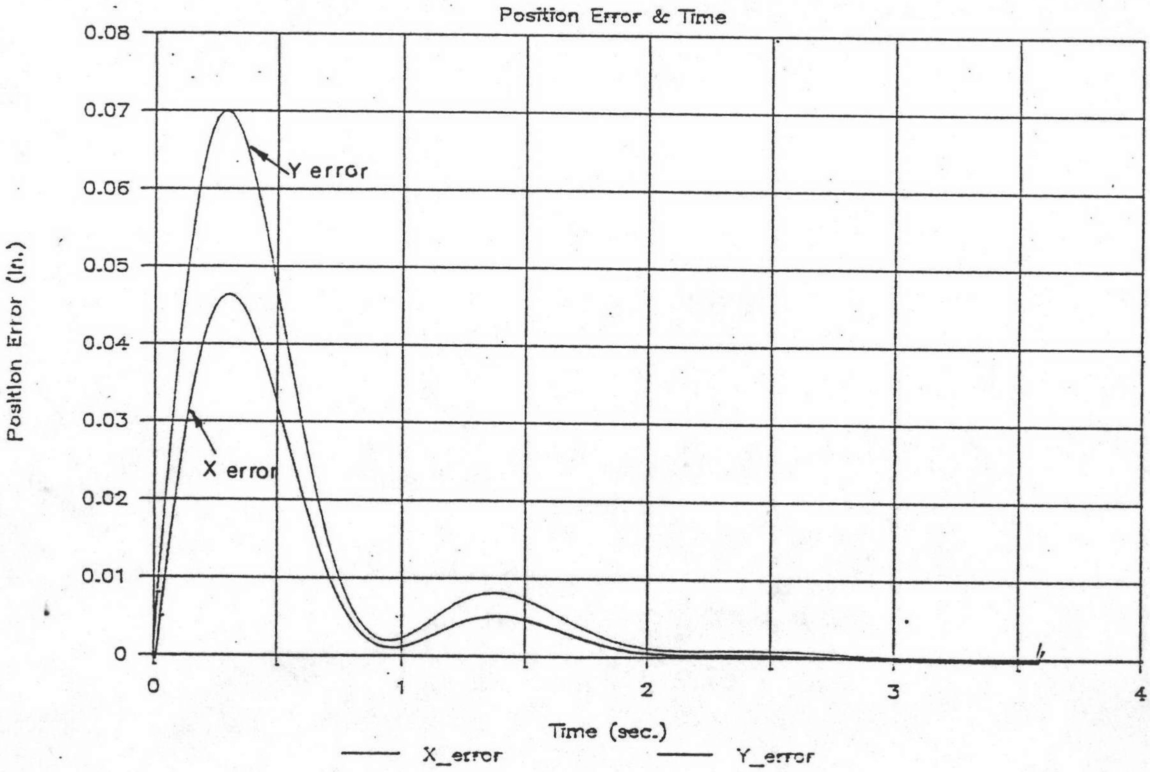
$$K_p = 30$$

ดังนั้นกำหนดให้ $K_p = 30$

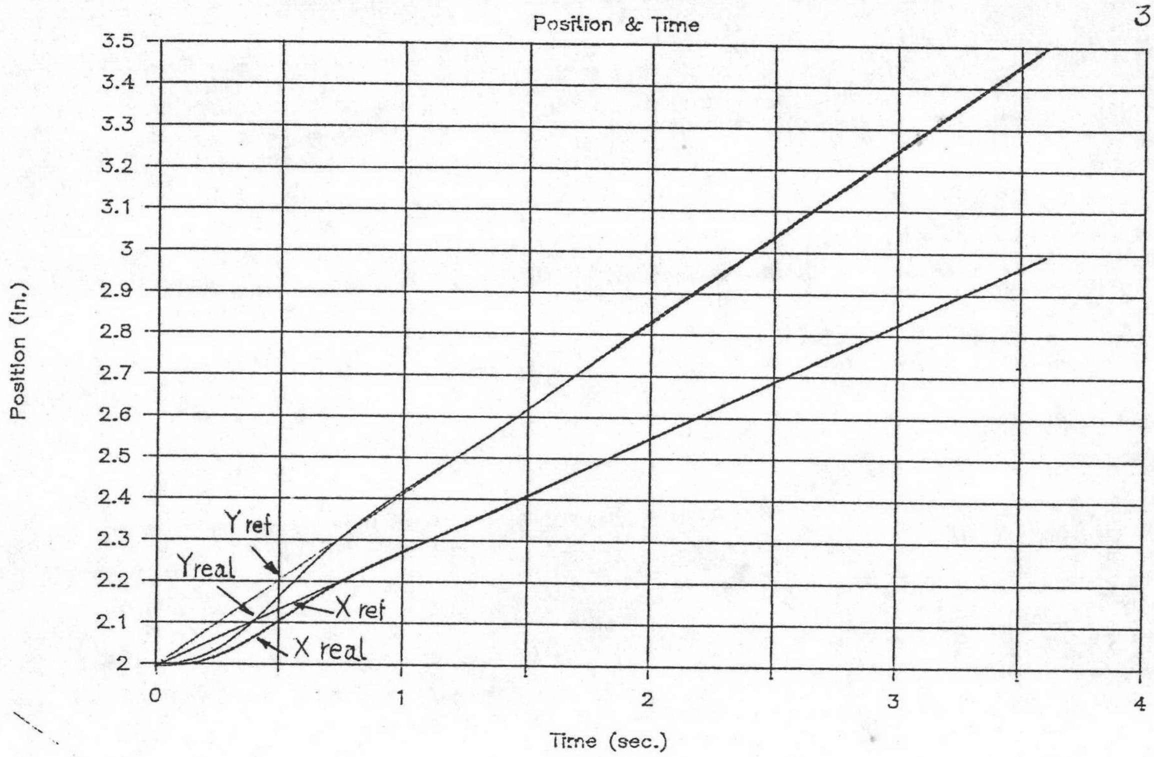
เมื่อทราบค่า K_p แล้วต่อไปทำการหาค่า K_i โดยพิจารณาจากการทายค่าขึ้นมาทดสอบกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโต๊ะ X-Y ซึ่งจำลองสภาพการเคลื่อนที่ของแกน X และแกน Y ตามสมการที่ (5.9) เส้นทางที่ใช้ในการทดสอบ มีจุดเริ่มต้นที่ X=2 in ,Y=2 in เคลื่อนที่เป็นเส้นตรงไปสิ้นสุดที่ X=3 in ,Y=3.5 in กำหนดความเร็วตามเส้นทาง 0.5 in/sec โดยมีเวลาสุ่มค่า(sampling time) เท่ากับ 20 msec ในรูปที่ 5.2 แสดงถึงเส้นทางเดินที่ได้จากแบบจำลองสภาพการเคลื่อนที่ เมื่อ K_p มีค่าเท่ากับ 30 และ K_i มีค่าเท่ากับ 1.0 ซึ่งจะให้ผลต่อการเคลื่อนที่ตามเส้นทางที่กำหนดโดยไม่เกิด over shoot ในรูปที่ 5.3 แสดงถึงเส้นทางเดินที่ได้จากการจำลองสภาพการเคลื่อนที่เมื่อ $K_p = 30$ และ $K_i = 1.1$ สังเกตุเห็นว่า เส้นทางที่เคลื่อนที่ได้จะเกิดการแกว่งไปมาตามเส้นทางที่กำหนด ดังนั้นจะเลือกใช้ค่าเกนที่ใช้ในการทดสอบคือ $K_p = 30$,$K_i = 1.0$ เมื่อพิจารณาดูจาก frequence response ของ open-loop transfer function ของระบบควบคุม แบบ พี.ไอ. ได้ phase magin มีค่าเท่ากับ +45 องศา และ gain magin มีค่าเป็น $-\infty$ ดังแสดงในรูปที่ 5.4 แสดงว่าระบบควบคุมนี้อยู่ในสภาวะ stable ระบบจะอยู่ในสภาวะ unstable ต่อเมื่อค่า phase magine มีค่าเป็นลบ และจากการทดสอบหา root loguc โดยมีสมการ characteristic ของ close-loop transfer function ดังสมการที่ 5.13 นี้

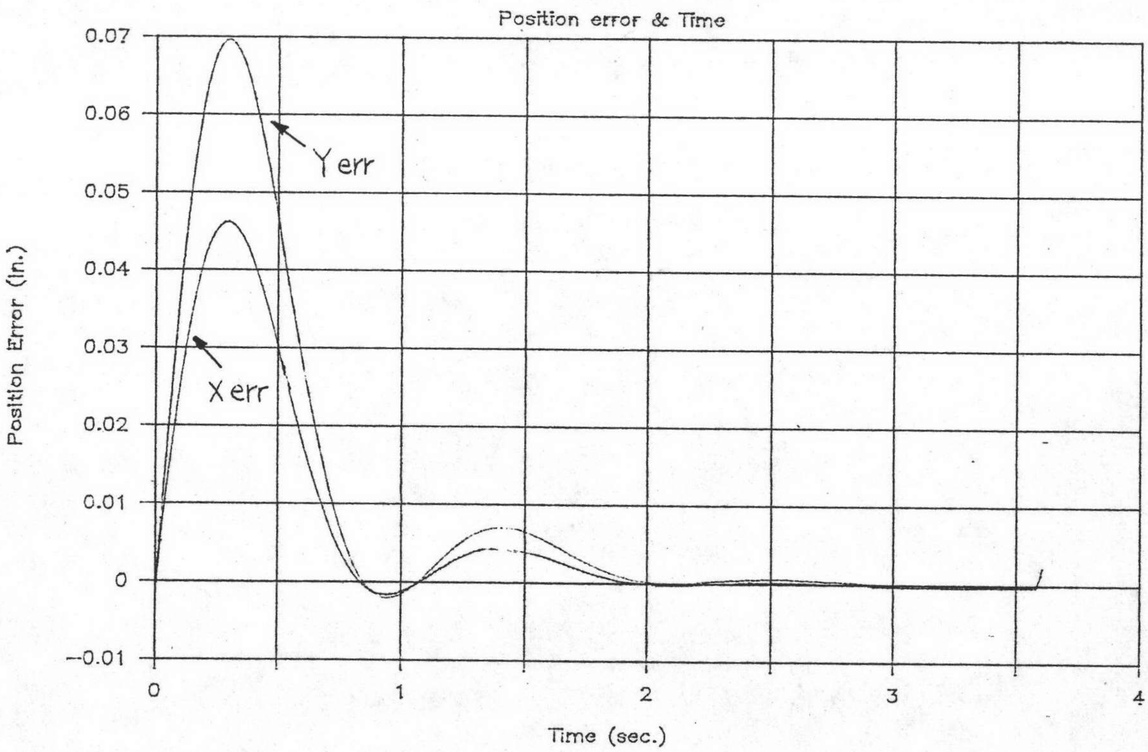
$$1 + \left[K_p + \frac{K_i}{S}\right]\left[\frac{K_m}{s(\tau s+1)}\right] = 0 \qquad (5.13)$$



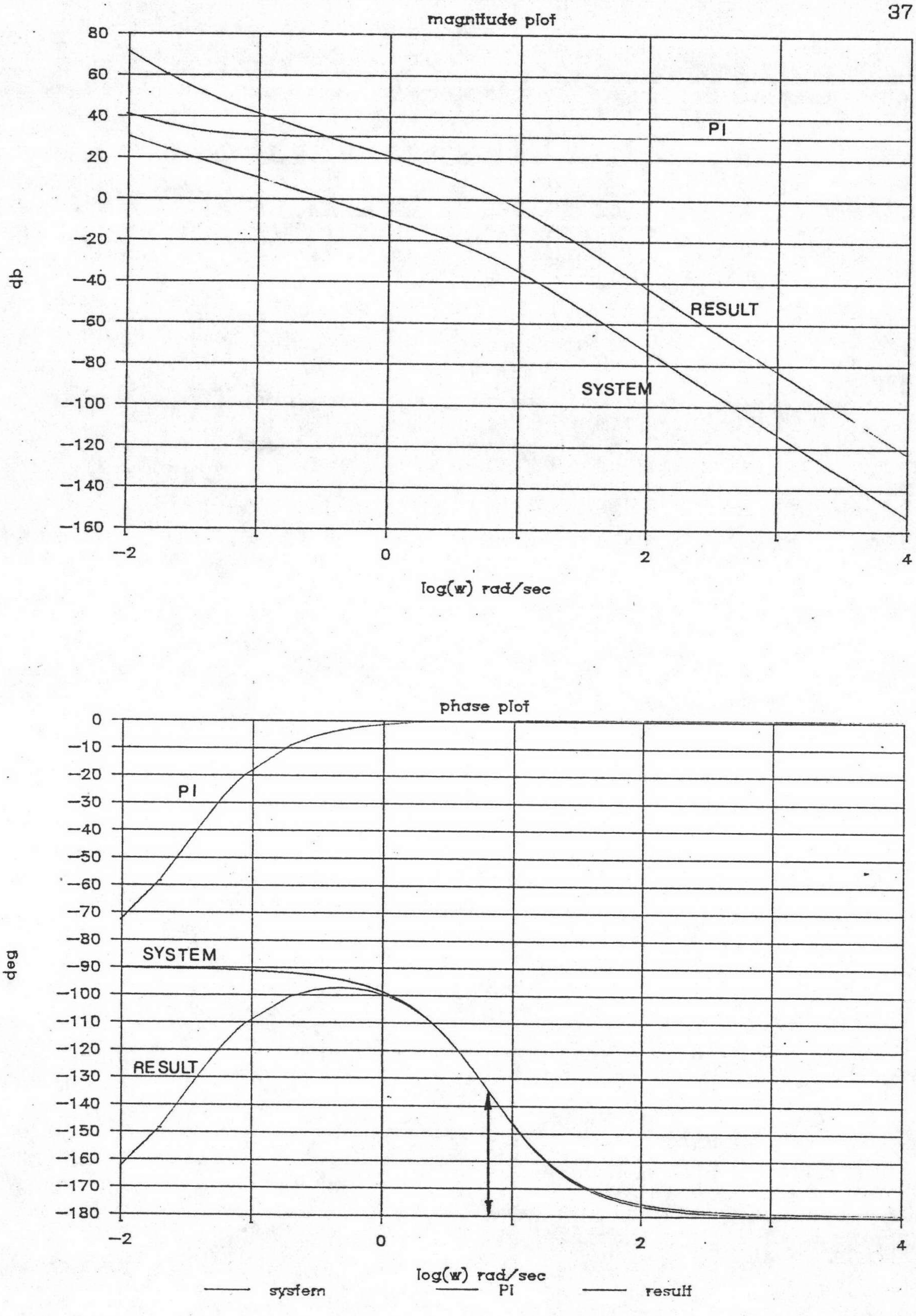


รูปที่ 5.2 กราฟแสดงตำแหน่งที่ได้จากแบบจำลองสภาพการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง เมื่อ $K_p = 30, K_i = 1.0$ ที่ความเร็ว 0.5 in/sec





รูปที่ 5.3 กราฟแสดงตำแหน่งที่ได้จากแบบจำลองสภาพการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง เมื่อ $K_p = 30$, $K_i = 1.1$ ที่ความเร็ว 0.5 in/sec



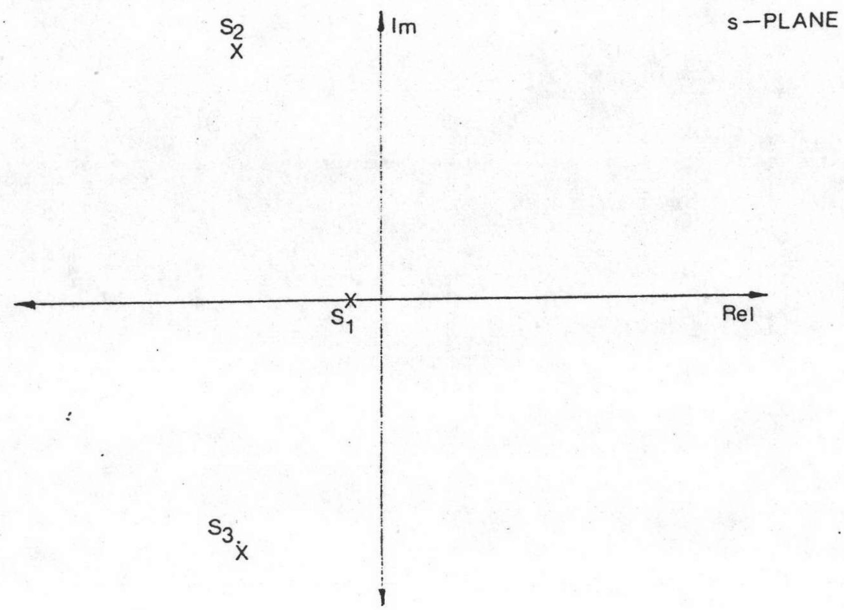
รูปที่ 5.4 Bode Plot ของระบบควบคุมที่ใช้ในการทดลอง

ซึ่งได้ค่ารากของสมการดังนี้

$$s_1 = -0.033$$

$$s_2 = -0.317 + 8.16j$$

$$s_3 = -0.317 - 8.16j$$



รูปที่ 5.5 แสดงตำแหน่ง close-loop pole ใน s-Plane

รากของสมการ characteristic ทั้ง 3 มีค่าลบ ซึ่งมี pole อยู่ทางซ้ายมือของ s-Plane ดังแสดงในรูปที่ 5.5 แสดงถึงระบบอยู่ในสภาวะ stable ลักษณะของ pole อยู่ใกล้กับแกน imagine ซึ่งมีผลทำให้ระบบสามารถเข้าถึงเป้าหมายได้เร็ว จากค่าเกนดังกล่าวนำไปทดสอบสอบกับระบบจริง

2. <u>การออกแบบตัวควบคุมแบบพรีวิว</u>

ค่าเกนพรีวิวแต่ละจุดที่มองไปข้างหน้าจะมีค่าเฉพาะตัว การเลือกค่าเกนพรีวิวนั้นยังไม่มีทฤษฎีที่สนับสนุนอย่างแน่นอนและส่วนใหญ่ได้มาจากการทดลอง ในการทดสอบกับระบบควบคุมนี้จะมองไปข้างหน้าเพียงจุดเดียว โดยทำการเปลี่ยนระยะจุดที่ก้าวไป สมมุติว่าระบบเป็นแบบ time invariant เราจึงกำหนดค่าเกนพรีวิวคงที่ และเนื่องจากการควบคุมแบบพรีวิวมีลักษณะเช่นเดียวกับการควบคุมแบบสัดส่วน ฉะนั้นในการเลือกค่าเกนพรีวิวเราจึงเริ่มเลือกจากค่าเกนที่เท่ากับ K_p จากนั้นก็ทำการทดลองเปลี่ยนค่าเกนพรีวิวดูเพื่อหาค่าที่ดีที่สุดอีกทีหนึ่ง

สำหรับค่าสัญญาณที่ใช้ในการควบคุมการเคลื่อนที่ในระนาบ X-Y ในแต่ละครั้งของการสุ่มค่า จะหาได้จากสมการที่ 5.14 และ 5.15

$$U_x(k) = K_p[X_d(k)-X(k)] + K_i\sum_{j=0}^{K}[X_d(j)-X(j)] + K_{pr}[X_d(k+n)-X_d(k)] \qquad (5.14)$$

$$U_y(k) = K_p[Y_d(k)-Y(k)] + K_i\sum_{j=0}^{k}[Y_d(j)-Y(j)] + K_{pr}[Y_d(k+n)-Y_d(k)] \qquad (5.15)$$

โดย $U_x(k)$, $U_y(k)$ คือค่าสัญญาณควบคุมในเวลาการสุ่มค่าครั้งที่ k

$X_d(k)$, $Y_d(k)$ คือตำแหน่งที่ต้องการเคลื่อนที่ในเวลาการสุ่มค่าครั้งที่ k

$X(k)$, $Y(k)$ คือตำแหน่งที่วัดได้ในเวลาการสุ่มค่าครั้งที่ k