บทที่ 2

ทฤษฎีของเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์

2.1 การสมดุลย์ของนิวตรอน

การที่จะให้เกิดปฏิกริยาลูกโซ่ในเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์นั้น มวลของวัสดุที่ใช้ทำเป็นเชื้อเพลิงนั้นจะต้องมีค่าวิกฤต (มวลที่น้อยที่สุดที่จะทำให้เกิดปฏิกริยานิวเคลียร์ลูกโซ่) การพิจารณาขนาดวิกฤตจะต้องพิจารณาถึงความสมดุลย์ของนิวตรอนในเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ นั่นคือจำนวนนิวตรอนที่เกิดขึ้นในปฏิกริยาฟิชชัน การสูญเสียนิวตรอนในขบวนการต่าง ๆ เช่น การรั่ว การดูดกลืน หรือโดยวิธีการใด ๆ ที่จะไม่ทำให้เกิดปฏิกริยาฟิชชันได้อีก อาจเขียนได้ว่า

$$\begin{pmatrix}\text{อัตราการเปลี่ยนแปลง}\\ \text{จำนวนนิวตรอน ต่อ}\\ \text{หนึ่งหน่วยปริมาตร}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{อัตราการเกิดนิวตรอน}\\ \text{โดยการฟิชชัน ต่อ}\\ \text{หนึ่งหน่วยปริมาตร}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{อัตราการสูญเสียนิวตรอน}\\ \text{โดยการรั่วและดูดกลืน}\\ \text{ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร}\end{pmatrix}$$

ดังนั้น $$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{การเกิด} - \text{การรั่ว} - \text{การดูดกลืน} \qquad (2.1)$$

เมื่อ n คือ ความหนาแน่นของนิวตรอน (จำนวนนิวตรอน ต่อ หนึ่งหน่วยปริมาตร)

$\frac{\partial n}{\partial t}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงจำนวนนิวตรอน

กรณีที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงจำนวนนิวตรอน

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

หรือ อัตราการเกิด = อัตราการดูดกลืน + อัตราการรั่ว

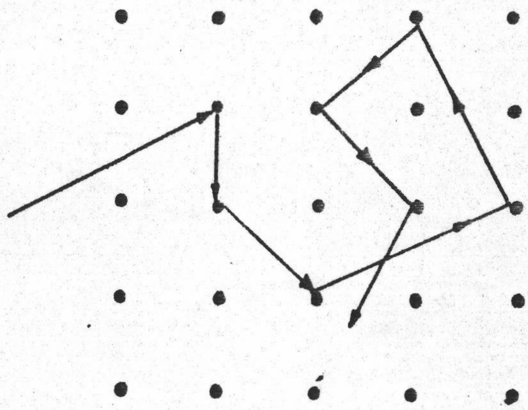
ซึ่งเป็นสมการทั่ว ๆ ไปสำหรับเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์

การรั่วจะเกิดขึ้นได้เมื่อนิวตรอนเคลื่อนที่ออกจากบริเวณที่มีความหนาแน่นนิวตรอนสูงมากกว่าไปสู่บริเวณที่มีความหนาแน่นของนิวตรอนต่ำกว่า และขณะที่มีการเคลื่อนที่นิวตรอนจะเกิดการชนกับนิวเคลียสของตัวกลางจึงเป็นผลทำให้เกิดการฟุ้งกระจาย

2.2 ระยะทางเฉลี่ยที่นิวตรอนเคลื่อนที่ตั้งแต่ออกจากต้นกำเนิดจนกระทั่งถูกดูดกลืน

เมื่อนิวตรอนชนกับนิวเคลียสแบบยืดหยุ่น ทำให้ทางเดินของนิวตรอนประกอบไปด้วยเส้นทางตรงหลายเส้นติดต่อกัน ระหว่างจุดที่นิวตรอนเกิดการชนแต่ละเส้นเรียกว่า ระยะอิสระในการกระเจิง (scattering free path) และค่าเฉลี่ยเหล่านี้เรียกว่าระยะทางเฉลี่ยอิสระในการกระเจิง (scattering mean free path) โดยที่ไม่สามารถทราบทางเดินที่แท้จริงของนิวตรอนเมื่อเกิดการชนแล้วได้อย่างแน่นอน จึงกล่าวในลักษณะของโอกาสในการฟุ้งกระจาย โดยพิจารณานิวตรอนเป็นจำนวนมากที่มีการเคลื่อนที่ออกจากที่มีความหนาแน่นสูงไปสู่ที่มีความหนาแน่นต่ำ อัตราการเคลื่อนที่ของนิวตรอนเหล่านี้เรียกว่า การฟุ้งกระจายของนิวตรอน

ในเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ นิวตรอนที่เกิดจากฟิชชันเป็นนิวตรอนเร็วสำหรับเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์แบบเทอร์มัล ความเร็วของนิวตรอนจะลดลงโดยการชนกับนิวเคลียสของตัวลดความเร็วระหว่างกระบวนการลดพลังงานของนิวตรอน นิวตรอนอาจหายไปจากระบบโดยกระบวนการต่าง ๆ จนเหลือนิวตรอนจำนวนหนึ่งที่กลายเป็นเทอร์มัลนิวตรอน แล้วฟุ้งกระจายไปในตัวกลางชั่วระยะเวลาหนึ่งจนในที่สุดก็ถูกดูดกลืนหายไปดังรูปที่ 2.1 [1]



รูปที่ 2.1 แสดงการชนแบบยืดหยุ่นซึ่งเกิดจากนิวตรอน

ชนกับนิวเคลียสของตัวกลางที่เป็นของแข็ง

2.3 ทฤษฎีการฟุ้งกระจายของนิวตรอน

ในการฟุ้งกระจายของนิวตรอนจำเป็นที่จะต้องประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์คือ เกรเดียนต์ (Gradient) เช่น การเปลี่ยนแปลงระยะทางซึ่งเกี่ยวข้องกับความหนาแน่นของนิวตรอน การฟุ้งกระจายของนิวตรอนจะฟุ้งจากที่มีความหนาแน่นสูงไปสู่ที่มีความหนาแน่นต่ำ ทฤษฎีการฟุ้งกระจายของนิวตรอนอาศัยพื้นฐานมาจากกฎของฟิค[1] (Fick) ซึ่งความหนาแน่นของนิวตรอนก็ย่อมขึ้นกับระยะทางด้วย ดังนั้น

$$J_z = -D_0 \frac{\partial n}{\partial z} \quad (1) \qquad (2.2)$$

เมื่อ n คือ จำนวนนิวตรอน ต่อ หนึ่งหน่วยปริมาตร

$\frac{\partial n}{\partial z}$ คือ ความหนาแน่นของนิวตรอนที่เปลี่ยนไปในทิศทาง z

J_z คือ กระแสนิวตรอน (หมายถึงปริมาณนิวตรอนที่วิ่งมาในแนวตั้งฉากกับพื้นที่ ต่อ หนึ่งหน่วยเวลาในทิศทาง z)

D_0 คือ สัมประสิทธิ์ของการฟุ้งกระจายของนิวตรอน มีหน่วยเป็นความยาว

เนื่องจากนิวตรอนฟุ้งกระจายไปในทุกทิศทาง สมการ (2.2) จึงเขียนได้ดังนี้

$$J = -D_0 \operatorname{grad} n \qquad (2.3)$$

กำหนดให้ $D = D_o/v$ เรียกว่าสัมประสิทธิ์การฟุ้งกระจายของนิวตรอน (ในหน่วยความยาว) และ $\phi = nv$ หรือ $n = \phi/v$ แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (2.3)

$$J = -D \operatorname{grad} \phi$$

และจากทฤษฎีการส่งผ่านนิวตรอน[1]

$$D = \frac{1}{3(\Sigma_t - \Sigma_s \bar{\mu}_0)} \qquad (2.4)$$

เมื่อ Σ_t คือ ภาคตัดขวางต่อปริมาตรทั้งหมดของตัวกลาง (ซม.$^{-1}$)

$\bar{\mu}_0$ คือ ค่าเฉลี่ยโคไซน์ (cosine) ของมุมที่นิวตรอนกระจายออกมาต่อการชนหนึ่งครั้ง

กรณีที่ตัวกลางมีการดูดกลืนน้อย ๆ Σ_t จะแทนได้ด้วย Σ_s^* ดังนั้น

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s(1 - \bar{\mu}_0)} = \frac{\lambda_s}{3(1 - \bar{\mu}_0)} \quad (2.5)$$

เมื่อ $\lambda_s (= 1/\Sigma_s)$ คือ ค่าเฉลี่ยในการชนอิสระ

และ $1/\Sigma_s(1 - \bar{\mu}_0)$ หรือ $\lambda_s/(1 - \bar{\mu}_0)$ คือ ค่าเฉลี่ยในการส่งผ่านอิสระ (transport mean free path) เขียนย่อเป็น λ_{tr} ดังนั้นในตัวกลางที่มีการดูดกลืนน้อย

$$\lambda_{tr} = \frac{1}{\Sigma_s(1 - \bar{\mu}_0)} = \frac{\lambda_s}{1 - \bar{\mu}_0} \quad (2.6)$$

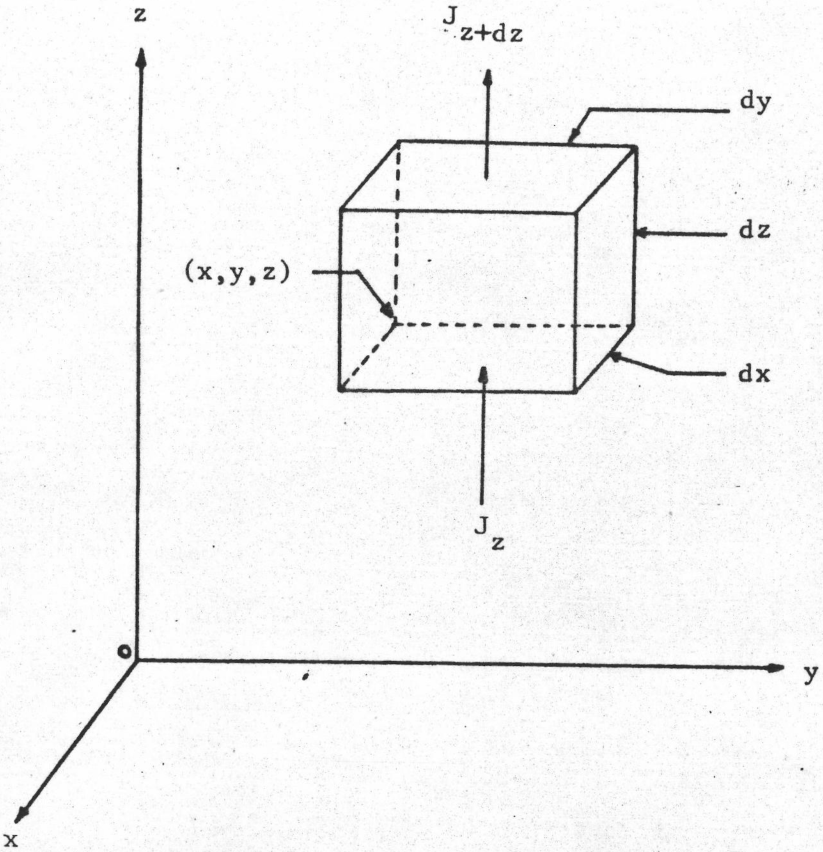
หรือ $$D = \frac{1}{3}\lambda_{tr} \quad (2.7)$$

ถ้ามีการฟุ้งกระจายรอบตัว เช่น รูปทรงกลม ค่าเฉลี่ยของโคไซน์ของมุมที่กระจายไปเป็นศูนย์ λ_s จะมีค่าเท่ากับ λ_{tr} แฟกเตอร์ $1/(1 - \bar{\mu}_0)$ จึงเป็นค่าแก้สำหรับการกระจายที่ไม่ออกรอบตัวโดยมีการฟุ้งกระจายไปในทิศทางข้างหน้า $\bar{\mu}_0$ จะลดลง เมื่อมวลของนิวเคลียสที่ถูกชนมีค่าเพิ่มขึ้น สำหรับนิวเคลียสหนัก $1/(1 - \bar{\mu}_0)$ จะมีค่าเข้าใกล้หนึ่ง λ_{tr} ก็จะมีค่าไม่ต่างจาก λ_s เท่าใดนัก

2.4 <u>การคำนวณหาจำนวนนิวตรอนที่รั่วออกไปจากระบบ</u>

อัตราการรั่วของนิวตรอนที่ออกมาจากปริมาตรใด ๆ นั้น สามารถคำนวณได้จากการพิจารณาปริมาตรสี่เหลี่ยมเล็ก ๆ dv มีขนาด dx,dy และ dz ตั้งอยู่ ณ ตำแหน่ง x,y และ z ถ้า dx,dy ขนานกับระนาบ xy จำนวนนิวตรอนที่เข้าไปในพื้นที่ผิวด้านล่างต่อวินาทีมีค่าเท่ากับ $J_z dx.dy$ เมื่อ J_z คือจำนวนนิวตรอนในทิศทางแกน z ในทำนองเดียวกันจำนวนนิวตรอนที่ออกจากพื้นที่ผิวด้านบนคือ $J_{z+dz} dx.dy$ ดังรูปที่ 2.2[1]

$^*\Sigma_t = \Sigma_a + \Sigma_s$



รูปที่ 2.2[1] แสดงการไหลของนิวตรอนในปริมาตรสี่เหลี่ยมเล็ก ๆ

จำนวนนิวตรอนที่ไหลในแนวแกน z จะสามารถหาได้โดยอาศัยสมการที่ (2.2) ซึ่งจะแทนจำนวนนิวตรอนเป็นจำนวนนิวตรอนฟลักซ์ และ D_0 แทนเป็น D ถ้า D มีค่าคงที่จำนวนนิวตรอนที่ไหลผ่านปริมาตรนี้ในแนวตั้งฉากกับระนาบ xy คือ

$$(J_{z+dz} - J_z) = -D\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z+dz} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_z\right] dx.dy$$

$$= -D\,\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\,dx.dy.dz$$

$$= -D\,\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\,dv \qquad (2.8)$$

ในทำนองเดียวกันจำนวนนิวตรอนที่ไหลในแนวขนานกับระนาบ yz และ xz คือ

$-D\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\,dv$ และ $-D\,\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\,dv$ ตามลำดับ

อัตราการรั่วของนิวตรอนออกจากปริมาตรเล็ก ๆ นี้ (dv) จะหาได้จากผลรวมของเทอมเหล่านี้ และอัตราการรั่วต่อซม.^{3} จะหาได้จากการหารด้วย dv นั่นคือ

$$\left[\begin{array}{l}\text{จำนวนนิวตรอนที่รั่วออกจากระบบ} \\ \text{ต่อ ซม.}^3\text{ ต่อ วินาที}\end{array}\right] = -D\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right]$$

$$= -D\,\nabla^2\phi \qquad (2.9)$$

เมื่อ ∇^2 คือ ลาปลาเซียน โอเปอร์เรเตอร์ (Laplacian operator)

2.5 <u>ความยาวของการฟุ้งกระจาย</u> (diffusion length)

ความยาวของการฟุ้งกระจายหมายถึง ระยะทางเฉลี่ยตั้งแต่นิวตรอนออกมาจากจุดกำเนิดจนถึงตำแหน่งที่นิวตรอนถูกดูดกลืน

พิจารณาทรงกลมรัศมี r ปริมาตรเล็ก ๆ ที่ผิวของทรงกลมรอบจุดกำเนิดคือ $4\pi r^2 dr$

บริเวณที่มีฟลักซ์เท่ากับ ϕ จำนวนนิวตรอนที่ถูกดูดกลืน ต่อ ซม.^{3} ต่อ วินาที เท่ากับ $\Sigma_a\phi$ เมื่อ Σ_a เป็นภาคตัดขวางต่อปริมาตรในการดูดกลืน อัตราการดูดกลืนนิวตรอนในปริมาตรเล็ก ๆ ของทรงกลมนี้เท่ากับ $4\pi r^2 dr\ \Sigma_a\phi$ นิวตรอนต่อวินาที

ถ้า $\overline{r^2}$ คือ ระยะเฉลี่ยกำลังสองจากตำแหน่งตัวกำเนิดนิวตรอนจนถึงตำแหน่งที่ถูกดูดกลืน

$$\overline{r^2} = \frac{\int_0^\infty r^2(4\pi r^2\Sigma_a \phi)\ dr}{\int_0^\infty 4\pi r^2\Sigma_a\phi\ dr} \tag{2.10}$$

แทนค่า ϕ ที่ตำแหน่ง ใด ๆ

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\ dr} e^{-kr}$$ แล้วอินทิเกรท

จะได้ $$\overline{r^2} = \frac{6/k^4}{1/k^2} \tag{2.11}$$

L =ระยะการฟุ้งกระจายของนิวตรอน[1]

$$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}} = \frac{1}{k} \tag{2.12}$$

จาก $D = \frac{1}{3}\lambda_{tr}$ และ $\Sigma_a = \frac{1}{\lambda_a}$ แทนค่าในสมการที่ (2.12)

$$L = \sqrt{\frac{1}{3}\lambda_{tr}\lambda_a} \tag{2.13}$$

หรือ $$L = \frac{1}{\sqrt{3\Sigma_{tr}\Sigma_a}} \tag{2.14}$$

กรณีที่สารมีเลขมวลสูง ๆ $\Sigma_{tr} \simeq \Sigma_t$ ดังนั้น

$$L = \frac{1}{\sqrt{3\Sigma_{tr}\Sigma_a}}$$

สำหรับตัวกลางที่มีการดูดกลืนน้อย ๆ อาจแทน Σ_a ด้วย Σ_s

2.6 สมการการฟุ้งกระจาย (diffusion equation)

จากสมการที่ (2.1)

$$- \text{การรั่ว} - \text{การดูดกลืน} + \text{การเกิด} = \frac{\partial n}{\partial t} \tag{2.15}$$[1]

เทอมทางซ้ายมีหน่วยเป็นจำนวนนิวตรอน ต่อ ซม.^{3} ต่อ วินาที และ n คือ ความหนาแน่นของนิวตรอน ต่อ ซม.^{3}

เทอมแรกทางซ้ายมือคือ $-(-D\nabla^2\phi) = D\nabla^2\phi$

เทอมที่สองหาได้จากอัตราการเกิดปฏิกิริยา = $\Sigma_a\phi$ นิวตรอน / ซม.^{3} วินาที

จากสมการที่ (2.15) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$D\nabla^2\phi - \Sigma_a\phi + s = \frac{\partial n}{\partial t} \qquad (2.16)$$

เมื่อ s คือ เทอมเป็นต้นกำเนิดนิวตรอนด้วยอัตราการเกิดนิวตรอน ต่อ ซม.^{3} ต่อ วินาที

และสำหรับสภาวะสมดุลย์ $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ ดังนั้น

$$D\nabla^2\phi - \Sigma_a\phi + s = 0 \qquad (2.17)$$

ถ้าไม่มีสารฟิชไซล์ (fissile) อยู่ในตัวกลาง เทอม s จะเป็นศูนย์ทุกหนทุกแห่ง เว้นแต่ตำแหน่งที่ต้นกำเนิดนิวตรอนวางอยู่ สมการการฟุ้งกระจายจึงเหลือเป็นรูปเอกพันธ์นอกจากจุดที่วางต้นกำเนิด

นั้นคือ

$$D\nabla^2\phi - \Sigma_a\phi = 0 \qquad (2.18)$$

หรือ

$$\nabla^2\phi - k\phi = 0 \qquad (2.19)$$

เมื่อ

$$k^2 = \Sigma_a / D \qquad (2.20)$$

2.7 <u>เงื่อนไขขอบเขตสำหรับสมการการฟุ้งกระจายของเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์</u>

1. ที่ระนาบรอยต่อระหว่างสองตัวกลางที่มีคุณสมบัติในการฟุ้งกระจายต่างกัน ฟลักซ์ของนิวตรอนจะมีค่าเท่ากัน

$$(\phi_A)_0 = (\phi_B)_0 \qquad (2.21)$$

เมื่อ $(\phi_A)_0$ คือ ฟลักซ์ที่ระนาบรอยต่อของตัวกลาง A

$(\phi_B)_0$ คือ ฟลักซ์ที่ระนาบรอยต่อของตัวกลาง B

2. ระนาบระหว่างสองตัวกลางที่มีคุณสมบัติในการฟุ้งกระจายต่างกัน กระแสนิวตรอนทั้งหมดในแนวตั้งฉากกับขอบเขตจะมีค่าเท่ากัน และกระแสของนิวตรอนจะหาได้จากสมการ

$$J_x = -D\frac{d\phi}{dx} \qquad (2.22)$$

สภาวะสำหรับการต่อเนื่องของกระแสนิวตรอนที่ขอบเขต อาจเขียนได้ดังนี้

$$-D_A\left(\frac{d\phi_A}{dx}\right)_0 = -D_B\left(\frac{d\phi_B}{dx}\right)_0 \qquad (2.23)$$

3. ฟลักซ์ของนิวตรอนจะหมดไปที่ระยะห่างจากผิวของแกนเครื่องปฏิกรณ์ประมาณเท่ากับ $0.71\lambda_{tr}$

2.8 การลดพลังงานของนิวตรอนในตัวกลางอนันต์โดยไม่ถูกดูดกลืน

การเกิดปฏิกริยาฟิชชันแต่ละครั้งจะทำให้เกิดนิวตรอนเร็วขึ้นมาและนิวตรอนพวกนี้ก็จะผ่านตัวหน่วงนิวตรอนแล้วชนกับโมเลกุลของตัวหน่วงนิวตรอน พลังงานของนิวตรอนเร็วจะค่อย ๆ ลดลงอย่างคงที่จนกระทั่งกลายเป็นเทอร์มัลนิวตรอน แต่นิวตรอนเร็วก็เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่องโดยปฏิกริยาฟิชชัน การฟุ้งกระจายของนิวตรอนที่พลังงานต่าง ๆ ก็เป็นไปอย่างคงที่ซึ่งขึ้นอยู่กับการจับนิวตรอนในระบบตัวกลางนั้น ๆ และขึ้นกับการหลุดพ้นจากการจับในขณะที่ลดพลังงานลงมา แต่ถึงอย่างไรก็ตามถ้าสมมุติให้ตัวหน่วงนิวตรอนมีขนาดอนันต์ ฉะนั้นจึงไม่มีการรั่วของนิวตรอนได้เลยและถือว่าไม่มีการดูดกลืนนิวตรอนในขณะลดพลังงานด้วย

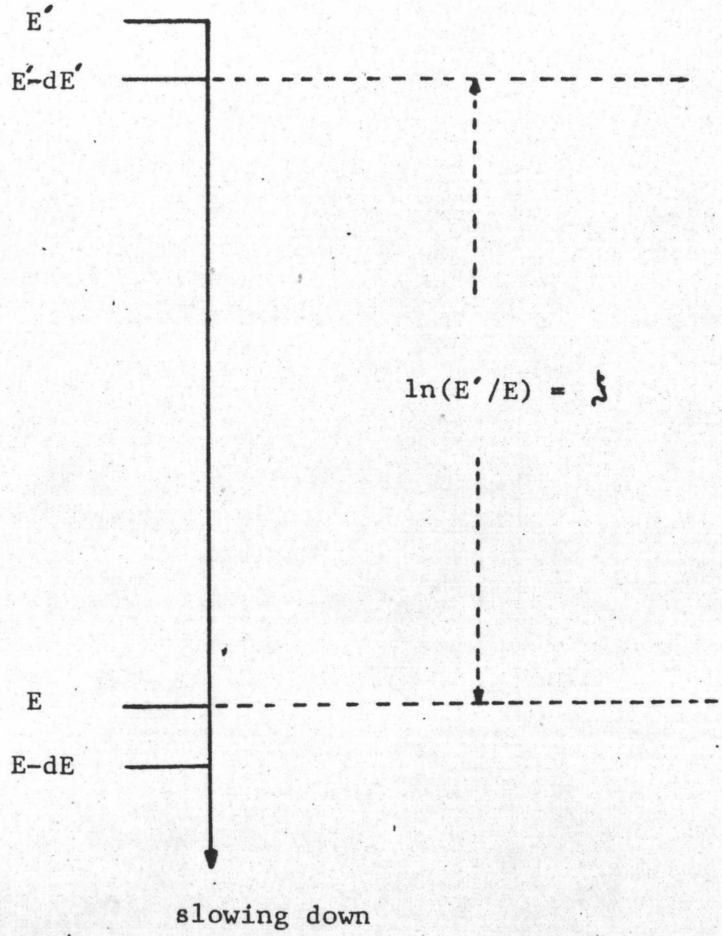
พิจารณาจากรูปที่ 2.3[1] การฟุ้งกระจายของนิวตรอนขณะลดพลังงานโดยพิจารณาความสมดุลย์ระหว่างขบวนการลดพลังงานในช่วง dE ซึ่งเป็นพลังงานในช่วงเล็ก ๆ

กำหนดให้ $\phi(E)$ คือ นิวตรอนฟลักซ์ที่พลังงาน E ต่อหนึ่งหน่วยพลังงานในช่วง dE

$\Sigma_s(E)$ คือ ภาคตัดขวางต่อปริมาตรในการชนที่พลังงาน E

ฉะนั้นจำนวนนิวตรอนต่อซม.^{3} ต่อวินาที ที่ผ่านพลังงาน dE คือ $\Sigma_s(E)\ \phi(E)\ dE$

อัตราการฟุ้งกระจายของนิวตรอนที่เข้าสู่ช่วงพลังงาน dE ขณะที่กำลังลดพลังงานลงสามารถคำนวณได้จากความหนาแน่นในการลดพลังงาน แทนด้วยสัญญลักษณ์ q ซึ่งหมายถึงจำนวนนิวตรอน ต่อ ซม.^{3} ต่อ วินาที ที่จะลดพลังงานลงมาในช่วง E พิจารณาพลังงาน E' ซึ่ง $\ln(E'/E) = \xi$ เมื่อ ξ คือ การลดพลังงานลงแบบลอก (log) ของการชนแต่ละครั้งในตัวกลางที่เป็นตัวหน่วงนิวตรอน โดยนิวตรอนจะกระเจิงมาที่พลังงาน E' แล้วลดพลังงานมาถึง E ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แสดงการลดพลังงานของนิวตรอน

จากสมมุติฐานที่ว่าไม่มีการจับนิวตรอนและไม่มีการรั่วของนิวตรอน ดังนั้นนิวตรอนที่ผ่านช่วงพลังงาน dE ระหว่าง E ถึง E − dE จะต้องเท่ากับที่ผ่านจาก E' ถึง $E' - dE'$ โอกาสที่นิวตรอนจะกระเจิงมาในช่วงนี้คือ $[\ln E' - \ln(E' - dE')] / \xi$ เช่น $dE'/E'\xi$ ถ้า $q(E')$ เป็นความหนาแน่นในการลดพลังงานที่ E' การกระเจิงจะเกิดที่ $q(E')dE'/E'\xi$ นิวตรอน ต่อ ซม.^{3} ต่อ วินาที ในช่วงพลังงาน dE' ซึ่งเท่ากับอัตราที่นิวตรอนผ่านพลังงานช่วง dE คือ $q(E)\, dE / E\xi$ ดังนั้น

$$\Sigma_s(E)\, \phi(E)\, dE = \frac{q(E)}{E\xi}\, dE$$

หรือ

$$\phi(E) = \frac{q(E)}{E\xi\, \Sigma_s(E)} \quad (1) \qquad (2.24)$$

2.9 <u>การลดพลังงานของนิวตรอนในตัวกลางอนันต์โดยมีการดูดกลืน</u>

เมื่อนิวตรอนลดพลังงานลงมาและถูกดูดกลืนโดยตัวหน่วงนิวตรอนไปบางส่วน ความหนาแน่นในการลดพลังงาน q ก็จะไม่ขึ้นอยู่กับพลังงาน E q ก็จะมีการเปลี่ยนแปลงในช่วง dE เพราะนิวตรอนบางตัวถูกดูดกลืนไว้และอัตราการดูดกลืนก็เท่ากับ $\Sigma_a(E)\, \phi(E)\, dE$ เมื่อ $\Sigma_a(E)$ คือ ภาคตัดขวางต่อปริมาตรในการดูดกลืนนิวตรอนที่พลังงาน E ดังนั้น

$$\frac{\partial q(E)}{\partial E}\, dE = \Sigma_a(E)\, \phi(E)\, dE$$

หรือ

$$\frac{\partial q(E)}{\partial E} = \Sigma_a(E)\, \phi(E) \qquad (2.25)$$

จำนวนนิวตรอนทั้งหมดที่ผ่านช่วง dE ด้วยอัตรา $\left[\Sigma_s(E) + \Sigma_a(E)\right] \phi(E)\, dE$ ถึงอย่างไรก็ตามอัตราที่นิวตรอนฟุ้งกระจายเข้าไปในช่วง dE ขณะลดพลังงานจะเท่ากับ เมื่อไม่มีการดูดกลืนนิวตรอนเช่น $q(E')\, dE'/ E'\xi$ โดยการดูดกลืนระหว่าง E' และ E ไม่มากเกินไป ซึ่งจะประมาณว่ามีค่าเท่ากับ $q(E)\, dE / E\xi$ ดังนั้น

$$(\Sigma_s + \Sigma_a)\,\phi(E)dE \;\simeq\; \frac{q(E)}{E\,\xi}\,dE$$

หรือ

$$\phi(E) \;\simeq\; \frac{q(E)}{E\,\xi(\Sigma_s + \Sigma_a)} \quad (1) \qquad (2.26)$$

แทนค่า $\phi(E)$ ในสมการที่ (2.25) จะได้

$$q(E) \;=\; q_o \;\exp\left[-\frac{1}{\xi}\int_{E}^{E_o} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_s}\;\frac{dE}{E}\right] \qquad (2.27)$$

เมื่อ q_o คือ จำนวนนิวตรอนที่มาจากแหล่งกำเนิด

แต่ $q(E)/q_o$ คือ โอกาสที่นิวตรอนหลุดพ้นจากการถูกดูดกลืน ซึ่งกำหนดให้เท่ากับ $p(E)$ เรียกว่า รีโซแนนซ์ เอสเคป พรอบบาบิลิตี้ ดังนั้นจากสมการ (2.27) เขียนใหม่ได้เป็น

$$p(E) \;=\; \exp\left[-\frac{1}{\xi}\int_{E}^{E_o} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_s}\;\frac{dE}{E}\right] \quad (1) \qquad (2.28)$$