บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้นำแบบสัมภาษณ์ที่สร้างขึ้นไปสัมภาษณ์ครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ช่างอุตสาหกรรม ระดับประกาศนียบัตรวิชาขั้นชั้นสูง ในสถาบันเทคโนโลยีราชมงคล มีจำนวนทั้งสิ้น 32 คน จากจำนวน 10 วิทยาเขตที่เปิดการเรียนการสอนสาขาการช่างอุตสาหกรรม ผลการวิเคราะห์ข้อมูลผู้วิจัยขอเสนอตามลำดับดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์เกี่ยวกับสถานภาพของครูผู้ตอบแบบสัมภาษณ์ เสนอในตารางที่ 4

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์เกี่ยวกับสภาพปัญหาทั่วไปในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ช่างอุตสาหกรรม ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง เสนอในรูปความเรียง

ตอนที่ 3 ผลการวิเคราะห์เกี่ยวกับ เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ พค 1141 คณิตศาสตร์ 1 ก พค 1142 คณิตศาสตร์ 2 ก พค 1143 คณิตศาสตร์ 1 ข และ พค 1144 คณิตศาสตร์ 2 ข ที่เป็นปัญหา เสนอในตารางที่ 5

ตอนที่ 4 ผลการวิเคราะห์เกี่ยวกับสาเหตุปัญหาอุปสรรคของนักศึกษาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่างอุตสาหกรรม ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สำหรับหัวข้อเนื้อหาที่เป็นปัญหาอยู่ในระดับมากขึ้นไป เสนอในรูปความเรียง

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์เกี่ยวกับสถานภาพของครูผู้ตอบแบบสัมภาษณ์

ตารางที่ 4 จำนวนและค่าร้อยละของตัวอย่างประชากรจำแนกตามสถานภาพ

สถานภาพ	ตัวอย่างประชากร	
	จำนวน	ร้อยละ
1. ตำแหน่ง		
หัวหน้าแผนกวิชาคณิตศาสตร์	6	18.800
อาจารย์ประจำแผนกวิชาคณิตศาสตร์	26	81.200
2. ประสบการณ์ในการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ช่างอุตสาหกรรม ระดับประกาศนียบัตรวิชาชั้นสูง		
1-5 ปี	7	21.875
6-10 ปี	7	21.875
11-15 ปี	7	21.875
16-20 ปี	6	18.750
มากกว่า 20 ปี	5	15.625
3. จำนวนรายวิชาที่สอนหรือเคยสอน		
พค 1141, พค 1142	6	18.800
พค 1141, พค 1143	1	3.125
พค 1141, พค 1144	1	3.125
พค 1142, พค 1143	3	9.375
พค 1143, พค 1144	1	3.125
พค 1142, พค 1143, พค 1144	1	3.125
พค 1141, พค 1142, วิชาเลือก	1	3.125
พค 1141, พค 1142, พค 1143, พค 1144	13	40.625
พค 1141, พค 1142, พค 1143, พค 1144, วิชาเลือก	4	12.500

จากตารางที่ 4 ปรากฏว่า ครูคณิตศาสตร์ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างประชากรส่วนใหญ่เป็นอาจารย์ประจำแผนกวิชาคณิตศาสตร์ มีประสบการณ์การสอนวิชาคณิตศาสตร์ 5 ปี, 10 ปี, 15 ปี, 20 ปี และมากกว่า 20 ปี เป็นจำนวนใกล้เคียงกัน ครูคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ได้สอนหรือเคยสอนวิชาคณิตศาสตร์ถึง 4 รายวิชา คือ พค 1141, พค 1142, พค 1143 และ พค 1144 มีจำนวนมากที่สุดถึง 13 คน คิดเป็นร้อยละ 40.625

<u>ตอนที่ 2</u> ผลการวิเคราะห์เกี่ยวกับสภาพปัญหาทั่วไปการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ช่างอุตสาหกรรม ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง

ในการสัมภาษณ์ครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ช่างอุตสาหกรรม ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ผลการวิจัยพบว่า

1. ทางด้านหลักสูตร ครูคณิตศาสตร์ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างประชากรทั้งหมด 32 คน กล่าวว่า วิชา พค 1141 คณิตศาสตร์ 1 ก และ พค 1142 คณิตศาสตร์ 2 ก มีรายละเอียดของหัวข้อเนื้อหามากเกินไป ทำให้เวลาเรียน 3 คาบต่อสัปดาห์ เป็นระยะเวลา 18 สัปดาห์นั้น ไม่เพียงพอที่ทำให้ครูผู้สอนทำการสอนได้ครบทุกหัวข้อเนื้อหา ดังนี้

ในวิชา พค 1141 คณิตศาตร์ 1 ก ครูผู้สอนไม่สามารถทำการสอนในหัวข้อ เซตและการกระทำของเซต ช่วง การแก้อสมการ ความเร็ว ความเร่ง และอัตราสัมพัทธ์ เนื่องจากเวลาที่หลักสูตรกำหนดให้ 3 คาบต่อสัปดาห์นั้นไม่เพียงพออีกทั้งหัวข้อเนื้อหาอื่น ๆ มีรายละเอียดมากอีกด้วย

ในวิชา พค 1142 คณิตศาสตร์ 2 ก ครูผู้สอนไม่สามารถทำการสอนในหัวข้อ การหาจุดเซนทรอยด์ของพื้นที่ การหาจุดเซนทรอยด์ของปริมาตร การหาโมเมนต์แห่งความเฉื่อยของพื้นที่ และการหาโมเมนต์แห่งความเฉื่อยของปริมาตร เนื่องจากเวลาที่หลักสูตรกำหนดให้ 3 คาบต่อสัปดาห์นั้นไม่เพียงพออีกทั้งหัวข้อเนื้อหาอื่น ๆ มีรายละเอียดมากอีกด้วย

นอกจากนี้หัวข้อท้าย ๆ ของวิชา พค 1141 คณิตศาสตร์ 1 ก ได้ให้นักศึกษาเรียนเกี่ยวกับหัวข้อการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต การอินทิเกรต

ฟังก์ชันพีชคณิต ส่วนวิชา พค 1142 คณิตศาสตร์ 2 ก ได้ให้นักศึกษาเริ่มต้นเรียนเกี่ยวกับหัวข้อการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสัย การอินทิเกรตฟังก์ชันอดิสัย ครูผู้สอนต้องเสียเวลาทบทวน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นพีชคณิตก่อนทำการสอนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสัย และสอนการอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต ก่อนทำการสอนการอินทิเกรตฟังชันอดิสัย ดังนั้น หลักสูตรควรจะต้องมีการปรับปรุงโดยพยายามจัดให้หัวข้อการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสัย ควรอยู่ในรายวิชาเดียวกัน และในทำนองเดียวกัน การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต การอินทิเกรตฟังก์ชันอดิสัยก็ควรให้อยู่ในรายวิชาเดียวกัน

2. ทางด้านวิธีสอน ครูคณิตศาสตร์ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างประชากรทั้ง 32 คน ใช้วิธีสอนแบบอธิบาย โดยยกตัวอย่างประกอบและแสดงเหตุผลในการแก้ปัญหาแต่ละขั้นตอน เนื่องมาจากลักษณะของหัวข้อเนื้อหาที่มีลักาณะเป็นนามธรรมมาก ครูจึงจำเป็นต้องใช้วิธีสอนแบบอธิบายซึ่งต้องเสียเวลาเป็นอย่างมากในการที่จะอธิบายตัวอย่างแต่ละตัวอย่างให้นักศึกษาที่มีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์แตกต่างกันอยู่ในห้องเดียวกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งนักศึกษาที่มีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์อ่อน นั้น ครูจะต้องใช้การอธิบายซ้ำมากกว่า 1 ครั้งในแต่ละตัวอย่าง จึงทำให้ครูต้องเสียเวลามากในการสอนแต่ละหัวข้อเนื้อหา

3. ทางด้านสื่อการเรียนการสอน ครูคณิตศาสตร์ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างประชากรจำนวน 19 คน คิดเป็นร้อยละ 59.375 ที่ไม่ได้ใช้สื่อการเรียนการสอน เนื่องมาจากเนื้อหาแต่ละหัวข้อมีลักษณะเป็นนามธรรม ครูผู้สอนจึงไม่พยายามจัดหาสื่อการเรียนการสอนมาใช้ประกอบการสอน อีกทั้งยังขาดงบประมาณมาสนับสนุนในการจัดหาสื่อการเรียนการสอนอีก เช่น เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ ซึ่งแผนกวิชาคณิตศาสตร์ ในแต่ละวิทยาเขตมีเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะเพียง 1 เครื่องเท่านั้น เมื่อพิจารณาจำนวนครูคณิตศาสตร์แต่ละวิทยาเขตแล้ว จำนวนเครื่อง-ฉายภาพข้ามศีรษะไม่เพียงพอในการหมุนเวียนให้ครูแผนกวิชาคณิตศาสตร์ใช้ด้วย นอกจากนี้ครูคณิตศาสตร์ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างประชากร จำนวน 26 คนคิดเป็นร้อยละ 81.25 ได้แสดงความคิดเห็นสนับสนุนที่จะมีการสร้างสื่อการเรียนการสอนที่เป็นเทปโทรทัศน์การเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ โดยจัดทำบางหัวข้อเนื้อหาที่ค่อนข้างเป็นปัญหาสำหรับนักศึกษา เพื่อที่จะให้นักศึกษาได้มีโอกาสนำไปใช้เพื่อ

ทบทวนทำความเข้าใจเนื้อหาเหล่านั้นให้แจ่มชัดยิ่งขึ้น

4. ทางด้านความสนใจในการเรียน ครูคณิตศาสตร์ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างประชากร จำนวน 25 คน คิดเป็นร้อยละ 78.125 กล่าวว่า นักศึกษาที่ไม่ค่อยสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์มีจำนวนถึงร้อยละ 30 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้อง นักศึกษาเหล่านี้แสดงพฤติกรรมออกมาในลักษณะเข้ามานั่งฟังเฉย ๆ ไม่จดอะไรทั้งสิ้นซึ่งลักษณะเช่นนี้พบมากที่สุด พฤติกรรมรองลงมานั้นนักศึกษาได้นั่งหลับ หรือนำงานอื่นมาทำ นอกจากนี้นักศึกษาที่ไม่ค่อยสนในในการเรียนได้คุยหรือส่งเสียงรบกวนเพื่อน ๆ ที่พยายามตั้งใจเรียน

5. ทางด้านการทำแบบฝึกหัด ครูคณิตศาสตร์ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างประชากรจำนวน 28 คน คิดเป็นร้อยละ 87.500 กล่าวว่า นักศึกษาที่ไม่สนใจทำแบบฝึกหัดมีจำนวนถึง ร้อยละ 30 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้อง และนักศึกษาอีกจำนวนร้อยละ 60 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้องได้ลอกแบบฝึกหัดที่ทำเสร็จแล้วจากเพื่อน เพื่อใช้สำหรับศึกษาหรือทบทวนในการสอบ ซึ่งการลอกแบบฝึกหัดที่ทำเสร็จแล้วจากเพื่อนหรือการที่ไม่ทำแบบฝึกหัดนั้นยังคงทำให้นักศึกษาเหล่านั้นไม่เข้าใจคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง จึงทำให้ได้คะแนนสอนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับที่ต่ำมาก นอกจากนี้จำนวนนักศึกษา โดยเฉลี่ย 35 คนต่อห้องและจำนวนแบบฝึกหัดมีมากจึงทำให้ครูผู้สอนไม่สามารถตรวจงานจากการทำแบบฝึกหัดของนักศึกษาได้อย่างทั่วถึง ครูผู้สอนต้องใช้วิธีการเฉลย การทำแบบฝึกหัดเฉพาะบางข้อที่นักศึกษามีความต้องการที่จะให้ครูผู้สอนเฉลย ดังนั้นจะมีแบบฝึกหัดอีกเป็นจำนวนมากที่นักศึกษาไม่ได้รับการเฉลยคำตอบที่ถูกต้อง

6. ทางด้านการวัดและการประเมินผล ครูคณิตศาสตร์ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างประชากรจำนวนทั้งหมด 32 คน ใช้ข้อสอบชนิดอัตนัยในการวัดผล ทั้งนี้ก็เพื่อต้องการที่จะทราบความสามารถของนักศึกษาว่ามีความสามารถในการแก้ปัญหาของข้อสอบนั้นจนได้คำตอบถูกต้องมากน้อยเพียงใด แต่นักศึกษาส่วนใหญ่ทำผิด ครูผู้สอนจึงให้คะแนนสอบตามสัดส่วนของขั้นตอนการทำข้อสอบที่ถูกต้อง แต่นักศึกษาจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ทำข้อสอบได้เพียงเล็กน้อย เนื่องมาจากขาดทักษะในการเขียนที่จะต้องมีลำดับขั้นตอนต่อเนื่องกัน ทำให้คะแนนสอบของนักศึกษาอยู่ในระดับต่ำ และถ้าครูผู้สอนใช้ข้อสอบชนิดปรนัยแล้วนักศึกษาจะใช้วิธีเดาคำตอบ

ซึ่งผิดพลาดได้ง่ายทำให้คะแนนสอบของนักศึกษาอยู่ในระดับต่ำอีก ดังนั้นไม่ว่าใช้รูปแบบของข้อสอบชนิดใด คะแนนสอบของนักศึกษาก็อยู่ในระดับต่ำทั้งนั้น

7. ทางด้านการจัดตารางสอน ทางแผนกวิชาชีพเป็นผู้กำหนดตารางสอนของวิชาคณิตศาสตร์ โดยที่แต่ละแผนกวิชาชีพส่งตารางสอนมายังแผนกวิชาคณิตศาสตร์ ดังนั้นตารางสอนของครูคณิตศาสตร์แต่ละคนต้องทำการสอนติดต่อกันถึง 4 คาบ หรือ 6 คาบ ซึ่งทำให้ครูคณิตศาสตร์มีความเหนื่อยล้าต่อการสอนเป็นอย่างมาก สำหรับตารางสอนของครูคณิตศาสตร์ที่ต้องสอนนักศึกษาห้องใดห้องหนึ่งเป็นเวลา 3 คาบติดต่อกันนั้น ถ้าตารางสอนตรงกับวันหยุดราชการก็ทำให้ครูคณิตศาสตร์ต้องหาเวลามาทำการสอนชดเชยซึ่งเป็นอุปสรรคอย่างมาก เนื่องมาจากตารางสอนของนักศึกษาไม่มีชั่วโมงว่างไว้สำหรับการสอนชดเชย ตารางสอนลักษณะเช่นนี้ทำให้นักศึกษาไม่ได้เรียนหัวข้อเนื้อหาท้าย ๆ ของรายวิชามากขึ้น ส่วนตารางสอนของครูคณิตศาสตร์ที่ต้องสอนนักศึกษาห้องใดห้องหนึ่งเป็นเวลา 2 คาบติดต่อกัน และวันอื่นอีก 1 คาบนั้น ในการสอน 1 คาบ ครูคณิตศาสตร์ไม่ค่อยประสบผลสำเร็จในการจัดกิจกรมการเรียนการสอน เนื่องมาจากเวลาที่ใช้ในการสอนวิชาคณิตศาสตร์ไม่ถึง 1 คาบเรียน ทั้งนี้นักศึกษาต้องใช้เวลาในการย้ายห้องเรียน หรือเรียนต่อจากวิชาที่มีการปฏิบัติทำให้ห้องเสียเวลาเป็นอย่างมากก่อนที่ครูผู้สอนจะได้เริ่มจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

8. ทางด้านการสอบคัดเลือกนักศึกษาใหม่ นักศึกษาต้องสอบข้อสอบวิชาชีพและข้อสอบวิชาพื้นฐานได้แก่ คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ภาษาอังกฤษ ภาษาไทย และสังคมศึกษา ข้อสอบทีใช้สอบคัดเลือกนักศึกษาเป็นข้อสอบชนิดปรนัยแยกเป็น 2 ฉบับ คือ ข้อสอบทางวิชาชีพและข้อสอบวิชาพื้นฐาน ซึ่งข้อสอบวิชาคณิตศาตร์จะมีประมาณ 20 ข้อ ถึง 30 ข้อ ซึ่งเมื่อพิจารณาจำนวนข้อสอบหรือคิดเป็นคะแนนสอบสำหรับวิชาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ภาษาอังกฤษ ภาษาไทย และสังคมศึกษาแล้วจะไม่มีความแตกต่างกันเลย ทำให้นักศึกษาไม่ค่อยใช้เวลามาคิดหาคำตอบสำหรับวิชาคณิตศาสตร์ จำนวนข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ที่นักศึกษาตอบได้ถูกต้องมีประมาณ 8 ข้อ ถึง 12 ข้อ หรือคิดเป็นร้อยละ 40 ของคะแนนเต็มวิชาคณิตศาสตร์สำหรับนักศึกษาที่สอบวิชาคณิตศาสตร์ได้คะแนนต่ำมาก ๆ แต่ทำคะแนนสอบวิชาพื้นฐานอื่น ๆ และวิชาชีพได้คะแนนสูง ๆ จึงทำให้คะแนนรวมผ่าน

เกณฑ์การสอบคัดเลือกได้ แต่นักศึกษาเหล่านี้ เมื่อเข้ามาเรียนวิชาคณิตศาสตร์จะมีอุปสรรคในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก

9. ทางด้านความรู้พื้นฐานทางวิชาคณิตศาสตร์ ครูคณิตศาสตร์ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างประชากร จำนวนทั้งหมด 32 คน กล่าวว่านักศึกษาที่สอบผ่านการคัดเลือกแล้วนั้นมีความรู้พื้นฐานทางวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำ เนื่องมาจากการสอบคัดเลือกนักศึกษาใหม่นั้นไม่สามารถคัดเลือกแต่นักศึกษาที่มีความรู้พื้นฐานทางวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูงเท่านั้น ยังคงมีนักศึกษาประมาณร้อยละ 60 ของจำนวนนักศึกษาทั้งหมดมีความรู้พื้นฐานทางวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำ ทำให้นักศึกษาเหล่านี้มีอุปสรรคในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่างอุตสาหกรรม ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ปัญหาอุปสรรคเกี่ยวกับการใช้ความรู้พื้นฐานทางวิชาคณิตศาสตร์ของนักศึกษา มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

9.1 ตรีโกณมิติ นักศึกษามีปัญหาอุปสรรคเกี่ยวกับเรื่องต่าง ๆ ดังนี้

9.1.1 สัญลักษณ์ทางตรีโกณมิติ นักศึกษาไม่สามารถบอกความแตกต่างของสัญลักษณะได้ เช่น

$\sin A^2$	จะมีความเข้าใจผิดว่าคือ $\mathrm{Sin}^2 A$
$\tan^{-1} A$	จะมีความเข้าใจผิดว่าคือ $1/\tan A$
$\cos (x+Y)$	จะมีความเข้าใจผิดว่าคือ $\mathrm{Cos}x + \cos y$
$(\sin 3x)(2)$	จะมีความเข้าใจผิดว่าคือ $\sin 6x$

9.1.2 ค่าของพังก์ชันตรีโกณมิติของรอบจุดมุมศูนย์กลางวงกลม 1 หน่วย นักศึกษาไม่ทราบคำตอบที่ถูกต้อง ดังนั้นจะใช้วิธีเดาคำตอบ โดยเฉพาะอย่างยิ่งค่า ของ $\sin 0^\circ$, $\cos 0^\circ$, $\sin 90^\circ$, $\cos 90^\circ$ เหล่านี้ จะไม่มั่นใจว่าพังก์ชั่นตรีโกณมิติใดที่มีคำตอบเป็น 0 หรือ 1 นอกจากนี้ก็ยังไม่ทราบว่าพังก์ชั่นตรีโกณมิติใดมีค่าเป็นบวกเมื่อตกอยู่ในจตุภาค (Quadrant) ใดบ้าง และมีค่าเป็นลบเมื่อตกอยู่ในจตุภาค (Quadrant) ใด ค่าของพังก์ชั่นตรีโกณมิติต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่นักศึกษามีอุปสรรคในการหาคำตอบ เช่น $\sin 30^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\sec 45^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\tan 135^\circ$, $\cos 240^\circ$, $\sin 270^\circ$ $\cot 300^\circ$ เป็นต้น

9.1.3 เอกลักษณ์ตรีโกณมิติต่าง ๆ เช่น

$$\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}, \quad \cos A = \frac{1}{\sec A}, \quad \tan A = \frac{1}{\cot A}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1, \ \sin^2 A = 1-\cos^2 A, \ \cos^2 A = 1-\sin^2 A$$

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}, \quad \cos A = \sqrt{1-\sin^2 A}$$

$$\sec^2 A = 1+\tan^2 A, \quad \tan^2 A = \sec^2 A - 1$$

$$\sec A = \sqrt{1+\tan^2 A}, \quad \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A, \quad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\sin^2 A = (1/2)-(1/2)\cos 2A, \quad \cos^2 A = (1/2)+(1/2)\cos 2A$$

ในการใช้เอกลักษณะต่าง ๆ เหล่านี้ นักศึกษาจำไม่ได้ว่า แต่ละเอกลักษณ์เป็นอย่างไร มีเครื่องหมายบวกหรือลบ เช่น จะจำผิดไปว่า $\sin^2 A = 1+\cos^2 A$, $\sec^2 A + \tan^2 A = 1$

9.2 การแยกตัวประกอบ นักศึกษามีอุปสรรคในการแยกตัวประกอบด้วยวิธีต่าง ๆ ดังนี้

9.2.1 การแยกตัวอย่างประกอบโดยวิธีดึงตัวประกอบร่วม นักศึกษาพิจารณาไม่ได้ว่าในปัญหานั้นตัวประกอบร่วมคืออะไร เช่น $2x^3 - x^2 + x$ นักศึกษาไม่ทราบว่าตัวประกอบร่วมคือ x หรือถ้าทราบว่าตัวประกอบร่วมคือ x แล้วก็จะไม่เข้าใจว่าหลังจากที่นักศึกษาดึงตัวประกอบร่วม x ออกไปแล้วจะเหลืออะไรบ้าง

9.2.2 การแยกตัวประกอบโดยวิธีการแยกเป็นสองวงเล็บ นักศึกษามีอุปสรรคในการแยกตัวประกอบของเทอมหน้าและเทอมท้ายที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นหนึ่ง ทำให้นักศึกษาหาค่าเทอมกลางผิดพลาดได้ง่าย โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

นักศึกษาไม่มั่นใจว่าในแต่ละวงเล็บที่แยกนั้นวงเล็บใดมีเครื่องหมายบวกหรือเครื่องหมายลบคั่นอยู่ภายในวงเล็บ ตัวอย่างเช่น

$12x^2+32x-35$ นักศึกษาจะแยกตัวประกอบผิดคือ $(2x-5)(6x-7)$

$20x^2-73x+63$ นักศึกษาจะแยกตัวประกอบผิดคือ $(5x-9)(4x-7)$

$52-51x+12x^2$ นักศึกษาจะแยกตัวประกอบผิดคือ $(13-6x)(4-2x)$

9.2.3 การแยกตัวประกอบโดยวิธีการใช้สูตรต่าง ๆ นักศึกษาจะจำสูตรเหล่านี้ไม่ได้ ตัวอย่างเช่น

$$x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$(x\pm y)^2 = (x^2\pm 2xy+y^2)$$

$$(x\pm y)^3 = (x^3\pm 3xy+3xy^2\pm y^3)$$

$$(x^3\pm y)^3 = (x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)$$

9.3 การแก้สมการเพื่อหาค่าตัวแปร นักศึกษามีอุปสรรคในการกำจัดตัวแปรเทอมใดเทอมหนึ่งให้หมดไป โดยเฉพาะการกำจัดตัวแปรนั้น ต้องใช้วิธีการลบกัน ตัวอย่างเช่น

จงแก้สมการ $3x+6y = 5$ —— ①

$4x+3y = -2$ —— ②

นักศึกษานำ 2 คูณสมการที่สอง เพื่อทำสัมประสิทธิ์ของ y ให้เป็น 6 เท่ากันได้เป็นสมการที่สามคือ $8x+6y=-4$ ต่อจากนั้นนักศึกษามีอุปสรรคในการลบระหว่างสมการที่สามกับสมการที่หนึ่ง ทำให้นักศึกษาได้ผลลัพท์ผิดพลาดเป็น $5x = 1$ หรือ $-5x = 1$ หรือ $5x = 9$

นอกจากนี้นักศึกษามีอุปสรรคอย่างมากในการแก้สมการเชิงเส้นที่มี 3 สมการ และ 3 ตัวแปร ตัวอย่างเช่น

จงแก้สมการ $x+y-2z = 3$ —— ①

$2x-3y+z = -3$ —— ②

$-x+y+z = 1$ —— ③

นักศึกษาหาผลลัพท์จากการที่จะทำให้เหลือสองสมการและสองตัวแปรผิดพลาด ซึ่งสองสมการที่ได้นั้นปรากฏว่า เมื่อพิจารณาแล้วยังคงมีตัวแปรอยู่สามตัวแปรอีก คือ นักศึกษานำสมการที่หนึ่งบวกกับสมการที่สามได้ผลลัพท์ $2y-z = 4$ และนำสมการที่สองลบกับสมการที่สาม ซึ่งการลบนี้ทำให้นักศึกษาได้ผลลัพท์ผิดพลาดได้ง่าย เช่น อาจจะได้ผลลัพท์ที่ผิด คือ $x-2y = -2$ นั่นคือเมื่อพิจารณาสมการใหม่ที่ได้สองสมการนั้นยังคงมีตัวแปรทั้ง x, y และ z อยู่ นักศึกษาไม่สามารถหาค่าตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งได้ทันทีจากสมการทั้งสอง และต่อจากนั้นนักศึกษาก็ไม่ทราบว่าจะต้องทำอย่างไรต่อไปอีก

สำหรับการแก้สมการที่ไม่ใช่ระบบสมการเชิงเส้น นักศึกษาไม่สามารถใช้วิธีการกำจัดตัวแปรใดก่อน หรือใช้วิธีแทนค่าตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งในรูปของอีกตัวแปรหนึ่ง ไม่สามารถหาค่าตัวแปรหนึ่งในรูปของอีกตัวแปรหนึ่ง เช่น

ตัวอย่าง จงแก้สมการ

$$2x+y = 3 \quad \text{———} \quad (1)$$

$$y^2-3x+4 = 0 \quad \text{———} \quad (2)$$

จากสมการที่หนึ่งเมื่อนักศึกษาหาค่า $y = 3-2x$ ได้แล้ว ต่อจากนั้นเมื่อนำค่า y ที่ได้ไปแทนค่าในสมการที่สอง นักศึกษาอาจจะหาค่า $(3-2x)^2-3x + 4=0$ ผิดพลาดเกี่ยวกับการกระจาย $(3-2x)^2$ ได้ผลลัพท์ผิดพลาดเป็น $9+4x^2 - 3x +4 = 0$ และนักศึกษาก็แก้สมการกำลังสองที่ได้ $4x^2-3x+13 = 0$ โดยที่นักศึกษาใช้การแยกตัวประกอบโดยวิธีแยกเป็นสองวงเล็บผิดพลาดอยู่อีกเช่นเดิม

9.4 การ บวก ลบ คูณ หารเศษส่วน นักศึกษามีอุปสรรคทางด้านต่อไปนี้ คือ

9.4.1 การ คูณ หาร เศษส่วนที่เป็นเศษซ้อน โดยที่เทอมใดเทอมหนึ่งของเศษซ้อนเป็นจำนวนเต็มแล้วนักศึกษาตัดทอนผิดพลาด เช่น

$\dfrac{2}{\frac{1}{12}}$ จะตัดทอนผิดพลาดเป็น $\dfrac{1}{\frac{1}{6}}$

หรือ $\frac{\frac{1}{2}}{6}$ จะตัดทอนผิดพลาดเป็น $\frac{1}{3}$

9.4.2 การ บวก ลบ เศษส่วน ที่เป็นเศษส่วนพหุนาม นักศึกษามีอุปสรรคเดิมมาจากวิธีการแยกตัวประกอบ และหาค่าตัวคูณร่วมน้อยของเศษส่วนผิด จึงทำให้ผลลัพท์สุดท้ายผิดพลาดไปด้วยเช่น

ตัวอย่าง จงหาผลลัพท์ $\frac{3x}{x^2-2x-15} - \frac{x-2}{x-5} + \frac{1-x}{x+3}$

นักศึกษาต้องแยกตัวประกอบของ $x^2 -2x-15$ ซึ่งได้ผลลัพท์ที่ผิดเป็น $(x-5)(x-3)$ จึงทำให้ ตัวคูณร่วมน้อยที่ได้ผิดพลาดเป็น $(x-5)(x+3)(x-3)$ ถ้านักศึกษาแยกตัวประกอบของ $x^2-2x-15$ ได้ถูกต้องคือ $(x-5)(x+3)$ และก็หาตัวคูณร่วมน้อยได้ถูกต้องเป็น $(x-5)(x+3)$ แล้วนักศึกษาหาผลลัพธ์ผิดพลาด มีความสับสนในการใช้เครื่องหมายระหว่างเศษส่วนพหุนามอีก โดยที่โจทย์เดิมมีเครื่องหมายเป็นลบ นักศึกษาหาผลลัพท์ของ $-(x-2)\ (x+3)$ ผิดพลาดเป็น $-x^2+x-6$ และนำผลลัพท์ส่วนนี้ไปหาผลลัพท์ส่วนที่เหลือผิดพลาดไปด้วย

9.5 การตั้งหารพหุนามด้วยพหุนาม นักศึกษามีอุปสรรคในการหาผลลัพท์ของเทอมแรก และเทอมต่อ ๆ ไปไม่ถูกต้อง และผิดพลาดอีกในขั้นตอนที่จะต้องทำการลบพหุนาม

ตัวอย่าง จงหาผลลัพท์ $4x^3-x^2+8x-118$ หารด้วย $x-3$ นักศึกษาแสดงวิธีทำ ดังนี้

$$
\begin{array}{rl}
 & 4x^2+11x+41 \\
\cline{2-2}
x-3 \,\big) & 4x^3-x^2+8x-118 \\
 & \underline{4x^3-12x^2} \\
 & \quad 11x^2+8x \\
 & \quad \underline{11x^2-33x} \\
 & \qquad 41x-118 \\
 & \qquad \underline{41x-123} \\
 & \qquad\qquad \underline{\underline{5}}
\end{array}
$$

ในการหาผลลัพท์เทอมแรกคือ $4x^2$ หรือเทอมที่สอง $11x$ นั้นนักศึกษาจะไม่เข้าใจว่าผลลัพท์เหล่านี้ได้มาอย่างไร และขั้นตอนที่จะต้องนำ $4x^3-x^2$ ลบออกจาก $4x^3-12x^2$ นั้นนักศึกษาอาจจะได้ผลลัพท์เป็น $-13x^2$ ซึ่งจะทำให้ผลลัพท์ของเทอมที่สองผิดพลาดไปด้วย

9.6 การใช้กฎของเลขยกกำลัง นักศึกษาจำการใช้กฎของเลขยกกำลังผิดพลาดเกิดความสับสนและเข้าใจผิดว่า $a^m.a^n = a^{mn}$, $(a^m)^n = a^{m+n}$, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{n}{m}}$ และ $(ab)^m = ab^m$
ตัวอย่างที่นักศึกษาเข้าใจผิดในการใช้กฎของเลขยกกำลังข้างต้น มีลักษณะดังนี้ เช่น

$(x+1)^2(x+1)^3$ จะตอบผิดไปว่า $(x+1)^6$

$(5x^3)^2$ จะตอบผิดไปว่า $5x^6$ หรือ $25x^5$

$\sqrt{(1-2x)^3}$ จะตอบผิดไปว่า $(1-2x)^{\frac{2}{3}}$ หรือ $(1-2x)^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt{9-x^2}$ จะตอบผิดไปว่า $3-x$

9.7 การใช้กฎของลอการิทึม นักศึกษาจำการใช้กฎของลอการิทึมผิดพลาด เกิดความสับสนและเข้าใจผิดว่า $\ln(x^2+y^2) = \ln x^2+\ln y^2$ ซึ่งนักศึกษาเข้าใจผิดว่าสามารถกระจายลอการิทึมของผลบวกหรือผลต่างได้ ส่วน $\ln x^2 = (\ln x)^2$ นักศึกษาเข้าใจผิดว่ากำลังสองของ x นั้น มีความหมายเหมือนกับลอการิทึมของ x ทั้งหมดยกกำลังสอง และ $\ln^2 x = 2\ln x$ นั้นนักศึกษาเข้าใจผิดว่ากำลังสองของลอการิทึมของ x คือสองเท่าของลอการิทึมของ x

ตอนที่ 3 ผลการวิเคราะห์เกี่ยวกับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ช่างอุตสาหกรรม พค 1141 คณิตศาสตร์ 1 ก พค 1142 คณิตศาสตร์ 2 ก พค 1143 คณิตศาสตร์ 1 ข และ พค 1144 คณิตศาสตร์ 2 ข ที่เป็นปัญหา

ตารางที่ 5 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\overline{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตราฐาน (S.D.) ของระดับปัญหาในแต่ละหัวข้อเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ช่างอุตสาหกรรม พค 1141 คณิตศาสตร์ 1 ก พค 1142 คณิตศาสตร์ 2 ก พค 1143 คณิตศาสตร์ 1 ข และ พค 1144 คณิตศาสตร์ 2 ข

ข้อที่	หัวข้อเนื้อหา	$\overline{X}$	S.D.	ความหมาย
เมทริกซ์				
1.	ความหมายและชนิดของเมทริกซ์	1.81	0.54	น้อย
2.	การเท่ากันของเมทริกซ์	1.97	0.47	น้อย
3.	การบวกเมทริกซ์	1.87	0.55	น้อย
4.	การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์	2.00	0.44	น้อย
5.	การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์	3.22	0.66	ปานกลาง
6.	การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์อันดับน้อยกว่าหรือเท่ากับสาม	2.31	0.54	น้อย
7.	การหาค่าดีเทอร์มิแนน์อันดับมากกว่าสาม	3.62	0.66	มาก
8.	คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์	2.81	0.86	ปานกลาง
9.	การแก้สมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์	2.56	0.56	ปานกลาง
10.	การหาเมทริกซ์ผกผันขนาด 2x2	2.34	0.60	น้อย
11.	การหาเมทริกซ์ผกผันขนาดมากกว่า 2x2	3.66	0.70	มาก
12.	การแก้สมการเชิงเส้นโดยวิธีการของเก้าส์	3.47	0.72	ปานกลาง

ตารางที่ 3 (ต่อ)

ข้อที่	หัวข้อเนื้อหา	$\overline{X}$	S.D.	ความหมาย
13.	การแก้สมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน	3.44	0.72	ปานกลาง
จำนวนเชิงซ้อน				
14.	ความหมายของจำนวนจริง จำนวนจินตภาพ	1.97	0.40	น้อย
15.	สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน	1.97	0.47	น้อย
16.	ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน	2.22	0.71	น้อย
17.	การบวก ลบจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดฉาก	2.03	0.59	น้อย
18.	การคูณ หารจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดฉาก	2.34	0.65	น้อย
19.	ความสัมพันธ์ของจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดฉากกับรูปเชิงขั้ว	3.31	0.74	ปานกลาง
20.	การ คูณ หาร จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว	2.53	0.72	ปานกลาง
21.	จำนวนเชิงซ้อนในรูปชี้กำลัง	2.66	0.79	ปานกลาง
22.	การบวก ลบ คูณ หาร จำนวนเชิงซ้อนในรูปชี้กำลัง	2.66	0.79	ปานกลาง
23.	ทฤษฎีของเดอมัวส์	3.19	0.69	ปานกลาง
24.	การหารากอันดับที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน	3.72	0.68	มาก
25.	การแก้สมการจำนวนเชิงซ้อน	3.09	0.59	ปานกลาง

ตารางที่ 3 (ต่อ)

ข้อที่ หัวข้อเนื้อหา	$\overline{X}$	S.D.	ความหมาย
<u>ทฤษฎีบททวินาม</u>			
26. วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่	2.78	0.75	ปานกลาง
27. สามเหลี่ยมปลาสคาล	2.09	0.64	น้อย
28. ทฤษฎีบททวินาม	2.53	0.67	ปานกลาง
29. การหาพจน์ทั่วไปของการกระจายทวินาม	2.81	0.59	ปานกลาง
<u>เรขาคณิตวิเคราะห์</u>			
30. การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด	2.00	0.57	น้อย
31. การหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด	1.91	0.47	น้อย
32. การหาความชันของเส้นตรง	2.06	0.50	น้อย
33. การหามุมระหว่างเส้นตรงสองเส้นตัดกัน	2.59	0.69	ปานกลาง
34. การหาสมการเส้นตรง	2.50	0.57	ปานกลาง
35. การหาระยะทางระหว่างจุดไปยังเส้นตรง	2.62	0.55	ปานกลาง
36. การหาสมการวงกลม	2.75	0.57	ปานกลาง
37. พาราโบลาเมื่อจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด	2.09	0.64	น้อย
38. พาราโบลาเมื่อจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k)	2.91	0.53	ปานกลาง
39. วงรีเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด	2.22	0.71	น้อย
40. วงรีเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k)	3.00	0.57	ปานกลาง
41. ไฮเปอร์โบลาเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด	2.37	0.71	น้อย
42. ไฮเปอร์โบลาเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k)	3.03	0.59	ปานกลาง

ตารางที่ 3 (ต่อ)

ข้อที่ หัวข้อเนื้อหา	$\overline{X}$	S.D.	ความหมาย
<u>ฟังก์ชัน ลิมิต ความต่อเนื่อง</u>			
43. เซตและการกระทำของเซต	2.44	0.80	น้อย
44. ช่วง	2.44	0.56	น้อย
45. การแก้อสมการ	2.94	0.72	ปานกลาง
46. คู่ลำดับ ผลคูณคาร์ทีเซียน ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	2.75	0.62	ปานกลาง
47. การหาค่าฟังก์ชัน	2.53	0.72	ปานกลาง
48. พีชคณิตของฟังก์ชัน	2.37	0.55	น้อย
49. ฟังก์ชันประกอบ	2.66	0.65	ปานกลาง
50. การหาลิมิตของฟังก์ชัน	2.91	0.59	ปานกลาง
51. ทฤษฎีของลิมิตเบื้องต้น	2.50	0.76	ปานกลาง
52. ลิมิตข้างเดียว	3.16	0.77	ปานกลาง
53. ลิมิตเกี่ยวกับค่าอนันต์	2.91	0.59	ปานกลาง
54. ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	3.28	0.68	ปานกลาง
<u>อนุพันธ์และการประยุกต์</u>			
55. การหาอนุพันธ์โดยใช้นิยาม	2.88	0.71	ปานกลาง
56. ความหมายของอนุพันธ์ทางเรขาคณิต	2.53	0.67	ปานกลาง
57. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต	2.87	0.79	ปานกลาง
58. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ	3.13	0.61	ปานกลาง
59. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	3.28	0.68	ปานกลาง

ตารางที่ 3 (ต่อ)

ข้อที่ หัวข้อเนื้อหา	$\overline{X}$	S.D.	ความหมาย
60. การหาอนุพันธ์อันดับสูง	2.78	0.75	ปานกลาง
61. การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน	3.75	0.51	มาก
62. กาหาความเร็ว ความเร่ง	3.00	0.67	ปานกลาง
63. การหาอัตราสัมพัทธ์	3.56	0.62	มาก
<u>การหาอนุพันธ์ฟังก์ชันอดิสัย</u>			
64. นิยามและชนิดของฟังก์ชันอดิสัย	2.28	0.58	น้อย
65. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	2.88	0.79	ปานกลาง
66. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	3.31	0.69	ปานกลาง
67. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม	2.66	0.70	ปานกลาง
68. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง	2.53	0.72	ปานกลาง
69. รูปแบบยังไม่กำหนด	2.94	0.62	ปานกลาง
70. การหาลิมิตโดยใช้กฎของโลปิตาล	3.25	0.57	ปานกลาง
<u>การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันอดิสัย</u>			
71. การหาปฏิยานุพันธ์	2.37	0.55	น้อย
72. การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต	2.56	0.67	ปานกลาง
73. การอินทิเกรตฟังก์ชันชี้กำลัง	2.47	0.67	น้อย
74. การอินทิเกรตฟังก์ชันที่ได้ผลลัพท์เป็นฟังก์ชันลอการิทึม	2.59	0.76	ปานกลาง

ตารางที่ 3 (ต่อ)

ข้อที่ หัวข้อเนื้อหา	$\bar{X}$	S.D.	ความหมาย
75. การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้สูตร	2.81	0.69	ปานกลาง
76. การอินทิเกรตฟังก์ชันที่ได้ผลลัพท์เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	3.09	0.69	ปานกลาง
77. ค่าอินทิกรัลที่อยู่ในรูป $\int \sin^n u\,du$, $\int \cos^n u\,du$	3.59	0.71	มาก
78. ค่าอินทิกรัลที่อยู่ในรูป $\int \sin mx \cos nx\,dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \cos mx \cos nx\,dx$	3.38	0.87	ปานกลาง
79. ค่าอินทิกรัลที่อยู่ในรูป $\int \tan^n u\,du$, $\int \cot^n u\,du$	3.56	0.67	มาก
80. ค่าอินทิกรัลที่อยู่ในรูป $\int \sec^n u \tan^m u\,du$, $\int \mathrm{cosec}^n u \cot^m u\,du$	3.66	0.60	มาก
81. ค่าอินทิกรัลที่อยู่ในรูป $\int \sec^n u\,du$, $\int \mathrm{cosec}^n u\,du$	3.63	0.66	มาก
<u>เทคนิคการอินทิเกรต</u>			
82. การอินทิเกรตทีละส่วนโดยใช้สูตร	3.22	0.66	ปานกลาง
83. การอินทิเกรตทีละส่วนโดยวิธีลัด	2.63	0.71	ปานกลาง
84. การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ	3.75	0.57	มาก

ตารางที่ 3 (ต่อ)

ข้อที่	หัวข้อเนื้อหา	$\overline{X}$	S.D.	ความหมาย
85.	การอินทิเกรตโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย	3.81	0.47	มาก
86.	การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตัวแปรใหม่	3.56	0.62	มาก
	<u>การประยุกต์ของอินทิกรัล</u>			
87.	การประยุกต์ของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต	2.84	0.63	ปานกลาง
88.	การหาอินทิกรัลจำกัดเขต	2.78	0.66	ปานกลาง
89.	การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งและแกน	3.00	0.80	ปานกลาง
90.	การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งและเส้นโค้ง	3.56	0.62	มาก
91.	การหาปริมาตรโดยวิธีจาน	3.38	0.61	ปานกลาง
92.	การหาปริมาตรโดยวิธีเปลือกทรงกระบอก	3.56	0.56	มาก
93.	การหาความยาวของส่วนโค้ง	3.34	0.65	ปานกลาง
94.	การหาจุดรวมมวลของพื้นที่	3.28	0.58	ปานกลาง
95.	การหาจุดรวมมวลของปริมาตร	3.56	0.50	มาก
96.	การหาโมเมนต์แห่งความเฉื่อยของพื้นที่	3.47	0.62	ปานกลาง
97.	การหาโมเมนต์แห่งความเฉื่อยของปริมาตร	3.59	0.56	มาก
	รวม	2.85	0.26	

จากตารางที่ 5 ปรากฏว่าหัวข้อเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ช่างอุตสาหกรรม พค 1141 คณิตศาสตร์ 1 ก พค 1142 คณิตศาสตร์ 2 ก พค 1143 คณิตศาสตร์ 1 ข และ พค 1144 คณิตศาสตร์ 2 ข ที่เป็นปัญหาในการเรียนของนักศึกษาอยู่ในระดับมาก มีจำนวน 16 หัวข้อ เรียงตามค่าเฉลี่ยเลขคณิตจากมากไปหาน้อยคือ

หัวข้อที่ 1. การอินทิเกรตโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย

หัวข้อที่ 2. การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

หัวข้อที่ 3. การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน

หัวข้อที่ 4. การหารากอันดับที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

หัวข้อที่ 5. การหาเมทริกซ์ผกผันขนาดมากกว่า 2x2

หัวข้อที่ 6. ค่าอินทิกรัลที่อยู่ในรูป $\int \sec^n u \tan^m u \, du$, $\int \mathrm{cosec}^n u \cot^m u \, du$

หัวข้อที่ 7. ค่าอินทิกรัลที่อยู่ในรูป $\int \sec^n u \, du$, $\int \mathrm{cosec}^n u \, du$

หัวข้อที่ 8. การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์อันดับมากกว่าสาม

หัวข้อที่ 9. ค่าอินทิกรัลที่อยู่ในรูป $\int \sin^n u \, du$, $\int \cos^n u \, du$

หัวข้อที่ 10. การหาโมเมนต์แห่งความเฉื่อยของปริมาตร

หัวข้อที่ 11. ค่าอินทิกรัลที่อยู่ในรูป $\int \tan^n u \, du$, $\int \cot^n u \, du$

หัวข้อที่ 12. อัตราสัมพัทธ์

หัวข้อที่ 13. การหาจุดรวมมวลของปริมาตร

หัวข้อที่ 14. การอินทิเกรตโดยการแทนค่าตัวแปรใหม่

หัวข้อที่ 15. การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งและเส้นโค้ง

หัวข้อที่ 16. การหาปริมาตรโดยวิธีเปลือกทรงกระบอก

นอกจากนี้พบว่ามีหัวข้อเนื้อหา 57 หัวข้อเป็นปัญหาอยู่ในระดับปานกลาง และมีหัวข้อเนื้อหา 24 หัวข้อเป็นปัญหาอยู่ในระดับน้อย

<u>ตอนที่ 4</u> ผลการวิเคราะห์เกี่ยวกับปัญหาอุปสรรคของนักศึกษาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ช่างอุตสาหกรรม ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สำหรับหัวข้อเนื้อหาที่เป็นปัญหาอยู่ในระดับมากขึ้นไป

จากการสัมภาษณ์ครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ช่างอุตสาหกรรม ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง เกี่ยวกับสาเหตุของปัญหาอุปสรรคในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นปัญหาระดับมากของนักศึกษา ได้ข้อมูลสรุปดังต่อไปนี้

1. หัวข้อที่ 1 การอินทิเกรตโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย ตัวอย่างประชากรตอบว่า นักศึกษามีปัญหาในการเรียนหัวข้อเนื้อหานี้ประมาณร้อยละ 60 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้องโดยมีสาเหตุของปัญหาในการเรียนหัวข้อนี้ ในเรื่องต่อไปนี้

1.1 การตั้งหารพีชคณิต นักศึกษาจะหาผลหารได้ไม่ถูกต้องโดยเฉพาะขั้นตอนในการลบที่จะต้องมีการเปลี่ยนเครื่องหมายเป็นตรงกันข้ามก่อน ดังนั้นผลลบที่ได้ผิดพลาด จึงทำให้การหาผลลัพท์เทอมต่อไปไม่ถูกต้องไปด้วย เช่น $\int \frac{2x^4-x^3+8x^2}{x^3+x^2-5x+3}\,dx$ นักศึกษาเสนอวิธีทำดังนี้

วิธีทำ

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline x^3+x^2-5x+3 & 2x^4-x^3+8x^2 \\ & \underline{2x^4+2x^3-10x^2+6x} \end{array}$$

พบว่าในการลบของขั้นตอนนี้ นักศึกษาลืมเปลี่ยนเครื่องหมายเป็น $-2x^4-2x^3+10x^2-6x$ ซึ่งอาจทำให้ได้ผลลบเป็น x^3-2x^2+6x อยู่บ่อย ๆ จึงทำให้ผลลัพธ์เทอมต่อไปมีค่าเป็น 1 ซึ่งไม่ถูกต้อง

1.2 การแยกตัวประกอบของเทอมส่วนที่อยู่ในรูปพหุนามที่มีกำลังสูงสุดของตัวแปรมากกว่าสอง นักศึกษาไม่สามารถแยกตัวประกอบได้เนื่องจากไม่เข้าใจหลักการแยกตัวประกอบโดยการใช้ทฤษฎีเศษเหลือ

เช่น $\int \frac{x+4}{x^3+x^2-5x+3}\,dx$ นักศึกษาต้องทำ x^3+x^2-5x+3 มาแยกตัวประกอบ โดยเริ่มต้นที่ต้องทำ +3 มาแยกตัวประกอบเป็น (3) (1) หรือ (-3) (-1) ต่อจากนี้นักศึกษาไม่เข้าใจว่าต้องทำ (x-3) หรือ (x-1) หรือ (x+3) หรือ (x+1) ไปหาร x^3+x^2-5x+3 และผลหารเป็นอย่างไรจึงจะได้ตัวประกอบที่ต้องการ ซึ่งในการตั้งหารก็เป็นอุปสรรคเดิมมาก่อน

1.3 รูปแบบการแบ่งแยกเป็นเศษส่วนย่อย ซึ่งมีหลายรูปแบบ นักศึกษามีความสับสนจำรูปแบบผิดพลาด เช่น

$$\int \frac{2x\,dx}{(x-3)\ (2x^2+1)} = \int \left(\frac{A}{(x-3)} + \frac{Bx+C}{(2x^2+1)} \right) dx$$ การแบ่งลักษณะนี้ถูกต้อง

แต่พบว่าเมื่อเทอมส่วนอยู่ในรูป $ax^2+bx+c, a \neq 0$ นักศึกษาเขียนเทอมเศษที่แยกผิดพลาดโดยเขียนเป็น $\frac{B}{(2x^2+1)}$ บ่อย ๆ

หรือ $$\int \frac{3x^2\ dx}{(x-1)(2+3x)^2} = \int \left[\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(2+3x)} + \frac{C}{(2+3x)^2} \right] dx$$

แต่พบว่านักศึกษาแยกเป็น $$\int \left[\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(2+3x)^2} \right] dx$$

2. หัวข้อที่ 2 การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตัวอย่างประชากรตอบว่า นักศึกษามีปัญหาในการเรียนหัวข้อเนื้อหานี้ประมาณร้อยละ 70 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้องโดยมีสาเหตุของปัญหาในการเรียนหัวข้อนี้ในเรื่องต่อไปนี้

2.1 การแยกตัวประกอบโดยการจัดใหม่ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ เมื่อโจทย์กำหนดให้ในรูปของ ax^2+bx+c และ a ไม่เท่ากับศูนย์ นักศึกษาต้องนำ ax^2+bx+c มาจัดใหม่ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ โดยการหาเทอมท้ายที่เหมาะสมจากสูตร

$$\text{เทอมท้าย} = \left(\frac{\text{สัมประสิทธิ์เทอมกลาง}}{2}\right)^2$$ เมื่อสัมประสิทธิ์เทอมหน้าเป็นหนึ่ง

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x-5}}$

นักศึกษาหาเทอมท้ายทันที ซึ่งทำให้ผิดพลาดเนื่องจากว่าสัมประสิทธิ์เทอมหน้านั้นคือ 2 ไม่ใช่ 1 และทำการแยกตัวประกอบผิด ดังนี้

$$\begin{aligned} 2x^2-4x-5 &= 2x^2-4x+4-4-5 \\ &= 2x^2-4x+4-9 \\ &= (2x-2)^2-3^2 \end{aligned}$$

นอกจากนี้พบว่าในการแยกตัวประกอบโดยการจัดใหม่ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ เมื่อโจทย์กำหนดในรูปของ ax^2+bx+c และ a มีค่าน้อยกว่าศูนย์นักศึกษาจำนวนร้อยละ 80 ของทั้งหมดจะไม่สามารถแยกตัวประกอบโดยการจัดใหม่ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ได้ ดังเช่นลักษณะโจทย์ต่อไปนี้. $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$ หรือ

$\int \frac{(x-1)}{1-3x-4x^2}\,dx$

2.2 การเปลี่ยนแปลงจากฟังก์ชันพีชคณิตให้เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ พบว่า นักศึกษายังมีข้อผิดพลาดอยู่มากในการที่ต้องเปลี่ยนฟังก์ชันพีชคณิตให้เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{xdx}{(x+1)^2+3^2}$

นักศึกษาเลือกการสมมุติ $u = a\tan\Theta$ เมื่อ $u = x+1$ และ $a = 3$

จะได้ว่า $x+1 = 3\tan\Theta$

ต่อจากนั้นนักศึกษาหาค่า x ผิดพลาดเป็น $3\tan\Theta + 1$

หรือ $(x+1)^2$ ผิดพลาดเป็น $3\tan^2\Theta$

หรือ dx หาค่าไม่ได้เพราะนักศึกษาจำสูตร $d(\tan u)$ ไม่ได้

2.3 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้จากข้อ 2.2 พบว่า นักศึกษาใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติไม่ได้

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{(x-2)\,dx}{(4x^2+4x-3)^{\frac{3}{2}}}$

เมื่อนักศึกษาเปลี่ยนฟังก์ชันพีชคณิตให้อยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ดังนี้

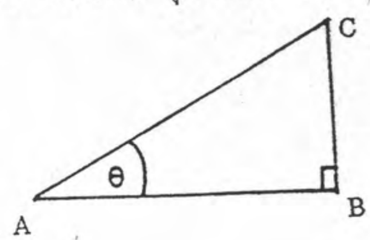
$$\int \frac{(x-2)dx}{(4x^2+4x-3)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{(\sec\Theta - \frac{5}{2})\ \sec\Theta\tan\Theta\,d\Theta}{8\tan^3\Theta}$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{(\sec\Theta - \frac{5}{2})\sec\Theta\,d\Theta}{\tan^2\Theta}$$

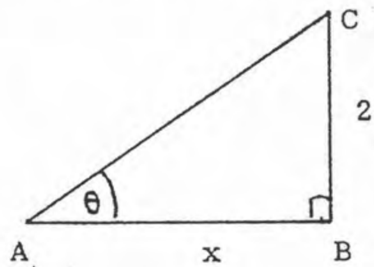
$$= \frac{1}{8}\int \frac{\sec^2\Theta\,d\Theta}{\tan^2\Theta} - \frac{5}{16}\int \frac{\sec\Theta\,d\Theta}{\tan^2\Theta}$$

ค่าอินทิกรัลทั้งสองนี้มีลักษณะที่คล้ายคลึงกัน นักศึกษาไม่รู้ว่าค่าอินทิกรัลเทอมใดต้องใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติอย่างไร และนักศึกษาไม่พยายามแก้ปัญหาต่อไป

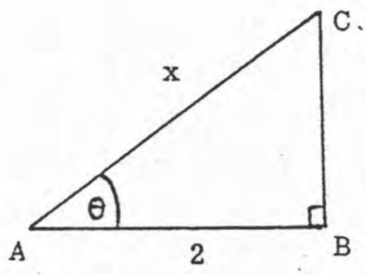
2.4 การเปลี่ยนจากฟังก์ชันตรีโกณมิติให้เป็นฟังก์ชันพีชคณิต พบว่า นักศึกษาจำสัดส่วนของด้านต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมมุมฉากผิดพลาด เช่น เมื่อกำหนดสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี มุม BAC เป็น ดังรูป



จากการที่นักศึกษาสมมุติ $x = 2 \tan\theta$ นั้นนักศึกษาต้องนำฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สมมุติมาเขียนใหม่ในรูป $\tan\theta = \frac{x}{2}$ ต่อจากนั้นแล้วนักศึกษาจะนำค่า x และ 2 ไปเขียนกำกับที่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ผิดพลาดเพราะว่านักศึกษาจำสัดส่วนระหว่างด้านตรงข้ามมุมต่อด้านประชิดมุมไม่ได้ว่า คือ $\tan\theta$ ดังนั้นนักศึกษานำค่า x และ 2 ไปเขียนกำกับที่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งผิดพลาดในลักษณะต่อไปนี้



หรือ



นอกจากนี้ในการสมมุติฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็น $u = a \sin\theta$ หรือ $u = a \sec\theta$ นักศึกษาก็มีปัญหาอุปสรรคในทำนองเดียวกันกับข้างต้น ดังนั้นจากการที่นักศึกษาหาค่าของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมมุมฉากผิดพลาด ย่อมจะทำให้การเปลี่ยนจากฟังก์ชันตรีโกณมิติกลับสู่ฟังก์ชันพีชคณิตผิดพลาดไปด้วย

3. หัวข้อที่ 3 การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน ตัวอย่างประชากรตอบว่า นักศึกษามีปัญหาในการเรียนหัวข้อเนื้อหานี้ประมาณร้อยละ 60 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้อง โดยมีสาเหตุของปัญหาในหัวข้อเนื้อหานี้ ในเรื่องต่อไปนี้

3.1 การแก้สมการเพื่อหาจุดวิกฤตหรือจุดเปลี่ยนโค้ง พบว่า เมื่อโจทย์กำหนด $y = f(x)$ มาให้ นักศึกษาหาค่า $f'(x)$ ได้ ต่อจากนั้นนักศึกษามีปัญหาอุปสรรคในการแก้สมการ $f'(x) = 0$ หรือ ∞ ไม่ถูกต้องเนื่องมาจากไม่เข้าใจวิธีการต่าง ๆ ที่นำมาใช้ในการแก้สมการ เช่น เมื่อพบว่า $f'(x) = 0$ หรือ ∞ มีลักษณะดังต่อไปนี้ คือ

ตัวอย่าง 1 เมื่อให้ $f'(x) = 3x^2 - 12$ นักศึกษาแก้ปัญหาดังนี้

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3x^2 = 12$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2$$

ซึ่งคำตอบ x คือ 2 เพียงคำตอบเดียวนั้นไม่ถูกต้อง เมื่อนักศึกษาทราบว่า x^2 มีค่าเป็น 4 แล้วนักศึกษาจะนึกถึงค่า 2 ทันที เพราะว่าเมื่อ หาค่า 2^2 จะตอบ 4 โดยที่นักศึกษาขาดความรอบคอบว่ายังมีคำตอบอีกหนึ่งคำตอบก็คือ -2 เพราะว่า $(-2)^2$ จะตอบ 4 เช่นกัน เป็นเช่นนี้เพราะว่านักศึกษาไม่เข้าใจวิธีการแก้สมการที่ถูกต้อง

ตัวอย่าง 2 เมื่อให้ $f'(x) = 2x^3-9x^2+12x+5$ นักศึกษาแก้ปัญหาดังนี้

$$2x^3-9x^2+12x+5 = 0$$

ต่อจากนั้นนักศึกษานำ $2x^3-9x^2+12x+5$ มาแยกตัวประกอบไม่ได้เนื่องจากนักศึกษาไม่เข้าใจวิธีการแยกตัวประกอบโดยการใช้ทฤษฎีเศษเหลือ

ดังนั้นเมื่อนักศึกษาไม่สามารถแก้สมการ $f'(x) = 0$ หรือ ∞ ได้แล้วนั้น ก็ทำให้นักศึกษาไม่ทราบจุดวิกฤตหรือจุดเปลี่ยนโค้งด้วย

3.2 การทดสอบการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายของ $f'(x)$ พบว่า นักศึกษามีอุปสรรคในการเลือกใช้ค่า x บนช่วงของจุดวิกฤตที่ได้ เช่น $f'(x) = (2x+3)(x-1)(x-3)$ นักศึกษาจะได้ค่าวิกฤต $x = -\frac{3}{2}, 1, 3$ ต่อจากนั้นนักศึกษาไม่เข้าใจว่า ต้องใช้ค่า x เป็นเท่าใด และมีกี่ค่าที่ต้องนำไปแทนค่าหา $f'(x)$ ว่ามีเครื่องหมายเป็นบวกหรือลบ

3.3 โจทย์ประยุกต์ของค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน พบว่า นักศึกษามีอุปสรรคในการสร้างฟังก์ชันตามที่โจทย์ต้องการเป็นอย่างมาก เนื่องจากนักศึกษาอ่านโจทย์ปัญหาแล้วไม่รู้ว่าจะสมมุติตัวแปรต้นและตัวแปรตามอย่างไรหรืออ่านแล้วไม่รู้ว่าโจทย์ถามหาอะไร

4. หัวข้อที่ 4 การหารากอันดับที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ตัวอย่างประชากรตอบว่า นักศึกษามีปัญหาในการเรียนหัวข้อเนื้อหานี้ประมาณร้อยละ 60 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้อง โดยมีสาเหตุของปัญหาในการเรียนหัวข้อนี้ ในเรื่องต่อไปนี้

4.1 ความสัมพันธ์ของจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดฉากกับรูปเชิงขั้ว พบว่า นักศึกษามีอุปสรรคในการเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนระหว่างรูปพิกัดฉากกับรูปเชิงขั้วดังนี้

เมื่อโจทย์กำหนดจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดฉาก $Z = a+bi$ นักศึกษาต้องเปลี่ยนเป็นระบบเชิงขั้วโดยใช้สูตร $r = \sqrt{a^2+b^2}$ และเมื่อนักศึกษาหาค่า $r = \sqrt{12}$ ได้แล้วนั้นนักศึกษาไม่พยายามเปลี่ยนจำนวนที่อยู่ภายในเครื่องหมายกรณีที่สองให้เป็นจำนวนบวกที่น้อยที่สุด นั่นคือ นักศึกษาไม่สามารถเปลี่ยน $\sqrt{12}$ ให้อยู่ในรูป $2\sqrt{3}$ ได้ และที่เป็นอุปสรรคมากก็คือ การใช้สูตร $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ นักศึกษาไม่รู้ว่าจะใช้ θ ว่ามีค่าเท่าใด เช่น $\theta_1 = \arctan 1$ กับ $\theta_2 = \arctan \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$ นักศึกษาไม่รู้ว่า θ_1 นั้นมีค่าเท่าใด และ θ_1 กับ θ_2 มีค่าไม่เหมือนกัน นอกจากนี้ก็ยังไม่ทราบว่า $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ และ $\pi < \theta_2 < \frac{2\pi}{3}$ ซึ่งค่า θ_1 หรือ θ_2 นักศึกษาจะใช้วิธีเดาว่ามีค่าเป็น $\frac{\pi}{6}$ หรือ $\frac{\pi}{3}$

เมื่อโจทย์กำหนดจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ นักศึกษาต้องเปลี่ยนเป็นระบบพิกัดฉาก โดยการแทนค่า $\cos \theta$ และ $\sin \theta$ ซึ่งกรณีนี้ก็ไม่สามารถหาค่า $\cos \theta$ หรือ $\sin \theta$ ได้อย่างถูกต้อง แม้ว่า $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ก็ตามและจะเป็นอุปสรรคอย่างยิ่ง เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$ นักศึกษาจะเดาคำตอบบ่อย ๆ

4.2 การใช้สูตร $Z = r\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$ โดยที่ $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ พบว่านักศึกษาใช้สูตรไม่ถูกต้องเกี่ยวกับ $\frac{\theta+2k\pi}{n}$ พร้อมทั้งยังคำนวณค่า $\frac{\theta+2k\pi}{n}$ ผิดพลาด อีกทั้งพบว่านักศึกษาใช้ค่า $k = 1,2,3\ldots,n$ ซึ่งไม่ถูกต้องเนื่องมาจาก นักศึกษาคิดว่าการหารากที่ 2 ใช้ค่า k คือ 1,2 การหารากที่ 3 ใช้ค่า k หรือ 1,2,3 เนื่องมาจากความเคยชินเกี่ยวกับจำนวนนับที่เริ่มต้นจาก 1,2,3,... เป็นต้นไป

5. หัวข้อที่ 5 การหาเมทริกซ์ผกผันขนาดมากกว่า 2x2 ตัวอย่างประชากรตอบว่า นักศึกษามีปัญหาในการเรียนหัวข้อเนื้อหานี้ประมาณร้อยละ 50 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้อง โดยมีสาเหตุของปัญหาในการเรียนหัวข้อนี้ ในเรื่องต่อไปนี้

5.1 การใช้สูตร $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj}(A)$ พบว่านักศึกษามีอุปสรรค ทั้งการหา $\det(A)$ และ $\operatorname{Adj}(A)$ ดังนี้

ในการหา det(A) นักศึกษาขาดความรอบคอบในการหาผลต่างของจำนวนบวกกับจำนวนลบ คำตอบที่ได้จึงผิดพลาดไปด้วยเช่นการหาค่า

(5)-(-2) หาคำตอบผิดเป็น 3

(-5)-(2) หาคำตอบผิดเป็น 3

(-5)-(-2) หาคำตอบผิดเป็น 3

ดังนั้นในการหา det (A) = $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$ = (2)(-4) - (3) (-3) นักศึกษาจะหาคำตอบผิดพลาดได้ง่ายและอาจจะได้คำตอบคือ -1 หรือ -17 ซึ่งล้วนแต่เป็นคำตอบที่ผิดทั้งนั้น

5.2 การใช้คุณสมบัติโรว์อิควิวาเลนท์ (Row-Equivalent) สำหรับเปลี่ยนแปลงเมทิรกซ์ $[A|I_n]$ ให้อยู่ในรูปของ $[I_n\,|\,A^{-1}]$ พบว่านักศึกษามีอุปสรรคในการใช้คุณสมบัติที่ให้นำค่าคงที่ใดที่ไม่เป็นศูนย์ไปคูณสมาชิกแถวใดแถวหนึ่งแล้วนำผลคูณสมาชิกแต่ละตัวมาบวกกับสมาชิกของอีกแถว ซึ่งเขียนสัญลักษณ์เป็น $kr_j + r_i$ นักศึกษาไม่ทราบว่าจะเลือกใช้ค่า k เป็นเท่าใดและ r_j หรือ r_i หมายถึงอะไร ทำให้นักศึกษาไม่สามารถใช้คุณสมบัติโรว์อิควิวาเลนท์ (Row-Equivalent) ได้อย่างถูกต้อง นั่นคือนักศึกษาไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้ด้วย

6. สำหรับหัวข้อเนื้อหาที่เป็นปัญหาอยู่ในระดับมากหัวข้อที่ 6,7,9 และ 11 นั้นเป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ไม่สามารถใช้สูตรหาค่าอินทิกรัลได้โดยตรง และโดยที่ลักษณะเนื้อหาของหัวข้อเนื้อหาเหล่านี้คล้ายคลึงกัน ผู้วิจัยจึงขอนำหัวข้อเหล่านี้มาวิเคราะห์ปัญหาอุปสรรคพร้อม ๆ กัน ดังต่อไปนี้

จากหัวข้อที่ 6 ค่าอินทิกรัลที่อยู่ในรูป $\int \sec^n u \tan^m u\,du$, $\int \operatorname{cosec}^n u \cot^m u\,du$ จากหัวข้อที่ 7 ค่าอินทิกรัลที่อยู่ในรูป $\int \sec^n u\,du$, $\int \operatorname{cosec}^n u\,du$ จากหัวข้อที่ 9 ค่าอินทิกรัลที่อยู่ในรูป $\int \sin^n u\,du$, $\int \cos^n u\,du$ และหัวข้อที่ 11 ค่าอินทิกรัลที่อยู่ในรูป $\int \tan^n u\,du$, $\int \cot^n u\,du$ ตัวอย่างประชากรตอบว่า นักศึกษามีปัญหาในการเรียนหัวข้อเนื้อหาเหล่านี้ประมาณร้อยละ 70 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้อง โดยมีสาเหตุของปัญหาในการเรียนหัวข้อนี้ ในเรื่องต่อไปนี้

6.1 เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ นักศึกษาใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติต่างๆ ไม่ถูกต้อง เช่น

$\sin^2 A$ นักศึกษาใช้ผิดเป็น $1+\cos^2 A$

$\cos^2 A$ นักศึกษาใช้ผิดเป็น $1+\sin^2 A$

$\tan^2 A$ นักศึกษาใช้ผิดเป็น $1+\sec^2 A$

$\sin^2 A$ นักศึกษาใช้ผิดเป็น $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 A$

$\frac{\sec A}{\tan^2 A}$ นักศึกษาเปลี่ยนเป็น $\operatorname{cosec} A \cot A$ ไม่ได้

$\frac{\sec^2 A}{\tan^2 A}$ นักศึกษาเปลี่ยนเป็น $\operatorname{cosec}^2 A$ ไม่ได้

6.2 หลักการในการแก้บัญหาของแต่ละรูปแบบ นักศึกษามีความสับสนจำขั้นตอนไม่ได้ว่า แต่ละรูปแบบมีขั้นตอนเริ่มต้นอย่างไร จะต้องแบ่งโจทย์อย่างไร และนักศึกษาจำสูตรเอกลักษณ์ของตรีโกณมิติต่าง ๆ ไม่ได้ เช่น

ตัวอย่าง 1 จงหา $\int \cos^4 x \, dx$ นักศึกษาไม่เข้าใจว่าต้องแบ่งโจทย์ออกเป็น $\int \cos^2 x \cos^2 x \, dx$ และเมื่อแบ่งโจทย์แล้ว $\cos^2 x$ ทั้งสองแห่งนั้นต้องเปลี่ยนแปลงอย่างไร ทำให้นักศึกษาไม่มั่นใจว่าจะใช้ $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ หรือ $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 x$

ตัวอย่าง 2 จงหา $\int \cot^4 x \, dx$ นักศึกษาไม่เข้าใจว่าต้องแบ่งโจทย์ออกเป็น $\int \cot^2 x \cot^2 x \, dx$ โดยที่ $\cot^2 x$ เทอมหลังต้องเปลี่ยนเป็น $\operatorname{cosec}^2 x-1$ แต่ $\cot^2 x$ เทอมหน้ากลับไม่ต้องเปลี่ยนแปลงใด ๆ ทั้งสิ้น

ตัวอย่าง 3 จงหา $\int \sec^2 x \tan^3 x \, dx$ นักศึกษาไม่เข้าใจว่าต้องแยก $\sec^2 x$ ไปไว้หลัง $\tan^3 x$ เนื่องจากนักศึกษาจำสูตร $\sec^2 u \, du = d(\tan u)$ ไม่ได้หรือนักศึกษาไม่เข้าใจว่าต้องแบ่งโจทย์เป็น $\int \sec x \tan^2 x \sec x \tan x \, dx$ เนื่องจากนักศึกษาจำสูตร $\sec u \tan u \, du = d(\sec u)$ ไม่ได้

6.3 การใช้สูตรดิฟเฟอเรนเชียลฟังก์ชันตรีโกณมิติ พบว่านักศึกษามีการใช้สูตรบางสูตรผิดพลาด โดยเฉพาะสูตรที่มีเครื่องหมายลบ นักศึกษา

จะลืมเครื่องหมายลบบ่อย ๆ ได้แก่

$d(\cos u)$ แทนค่าผิดเป็น $\sin u\, du$

$d(\mathrm{cosec}\, u)$ แทนค่าผิดเป็น $\mathrm{cosec}\, u \cot u\, du$

$d(\cot u)$ แทนค่าผิดเป็น $\mathrm{cosec}^2 u\, du$

7. หัวข้อที่ 8 การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์อันดับมากกว่าสาม ตัวอย่างประชากรตอบว่า นักศึกษามีปัญหาในการเรียนหัวข้อเนื้อหานี้ประมาณร้อยละ 50 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้อง โดยมีสาเหตุของปัญหาในการเรียนหัวข้อนี้ ในเรื่องต่อไปนี้

7.1 การลดอันดับโดยใช้โคแฟคเตอร์ (Cofactor) พบว่า นักศึกษามีอุปสรรคในการคำนวณค่า $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ โดยเฉพาะเมื่อ $(-1)^{i+j}$ มีค่าเป็น -1 และสมาชิกภายใน M_{ij} มีจำนวนลบหลายจำนวน ทำให้นักศึกษาหาผลลัพท์ผิดพลาด เช่น

ตัวอย่าง จงหาค่า $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

นักศึกษาจะเลือกใช้สมาชิกแถวที่สาม สำหรับหาค่าดีเทอร์มิแนนท์เนื่องจากมีสมาชิกที่เป็นศูนย์ ถึงสอง จำนวน และแสดงวิธีคิดดังนี้

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = a_{31}C_{31}+a_{32}C_{32}+a_{33}C_{33}+a_{34}C_{34}$$

$$= 0+(1)\ (-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} +0-(-1)\ (1)\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

นักศึกษาลืมนำค่า -1 ที่อยู่ภายนอกดีเทอร์มิแนนท์ไปคูณกับผลลัพท์ของดีเทอร์มิแนนท์อันดับสาม ที่ใช้วิธีการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ โดยการนำสมาชิกหลักที่หนึ่งและหลักที่สองไปต่อท้ายต่อจากนั้นให้นำสมาชิกเหล่านั้นคูณในแนวทะแยง และปรากกว่าถ้าสมาชิกที่อยู่ในแนวทะแยงนั้น เป็นจำนวนลบหลาย ๆ จำนวนก็ทำให้การหาผลลัพท์ของค่าดีเทอร์มิแนนท์นั้นผิดพลาดได้ง่ายดังนี้คือ

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & -3 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right. = (2)(-1)(2)+(-3)(3)(-1)+(-1)(1)(2) -(-1)(-1)(-1)-(2)(3)(2)-(2)(1)(-3)$$

ในการหาผลบวกจากการคูณเลขจำนวนเหล่านี้ซึ่งมีจำนวนลบปนอยู่มากทำให้นักศึกษาเกิดความสับสนในการใช้เครื่องหมายลบ

7.2 การใช้คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์เพื่อเปลี่ยนแปลงสมาชิกบางตัวให้มีค่าเป็นศูนย์ซึ่งทำให้นักศึกษาหาค่าดีเทอร์มิแนนท์นั้นได้ง่ายและรวดเร็วยิ่งขึ้น พบว่า นักศึกษามีอุปสรรคในการหาผลลัพท์ของ kr_i+r_j ผิดพลาดได้ง่าย

ตัวอย่าง

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

ถ้านักศึกษาต้องการเปลี่ยนแปลงสมาชิกแถวที่หนึ่ง และแถวที่สี่ โดยใช้สมาชิกแถวที่ 2 เป็นหลักเนื่องจากการที่นักศึกษาตั้งใจว่า จะเปลี่ยนสมาชิก a_{14} และ a_{44} ให้มีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง นักศึกษาต้องสร้างสัญลักษณ์ $3(r_2)+r_1$ และ $(-4)r_2+r_4$ โดยที่การหาผลลัพท์ $3(r_2)+r_1$ นักศึกษาต้องนำ 3 คูณสมาชิกในแถวที่สอง และในการคูณแต่ละสมาชิกนั้น นักศึกษาต้องนำผลคูณของแต่ละสมาชิกไปบวกกับสมาชิกของแถวที่หนึ่งที่อยู่ในตำแหน่งตรงกัน กระบวนการลักษณะเช่นนี้ทำให้นักศึกษาหาคำตอบผิดพลาดได้ง่าย จึงทำให้สมาชิกในแต่ละแถวที่ได้ใหม่ไม่ถูกต้อง

และเมื่อนำสมาชิกเหล่านั้นไปใช้คำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ก็ทำให้ได้ผลลัพท์ผิดพลาดไปด้วย เช่น

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad 3(r_2)+r_1 \quad = \quad \begin{vmatrix} 6 & -13 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

ในการหาค่า $3(r_2)+r_1$ นักศึกษาได้ผลลัพท์ผิดเป็น 6 -11 5 0

8. หัวข้อที่ 12 อัตราสัมพัทธ์ ตัวอย่างประชากรตอบว่า นักศึกษามีปัญหาในการเรียนหัวข้อเนื้อหานี้ ประมาณร้อยละ 60 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้อง โดยมีสาเหตุของปัญหาเกี่ยวกับการที่นักศึกษาอ่านโจทย์แล้วไม่เข้าใจว่าต้องการให้นักศึกษาหาผลลัพท์ของสิ่งใด สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้นักศึกษาก็ไม่เข้าใจว่าจะนำไปประกอบใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างไร และที่เป็นอุปสรรคอย่างมากก็คือนักศึกษาไม่สามารถสร้างฟังก์ชันที่จะใช้สำหรับการแก้ปัญหานั้นได้

ตัวอย่าง ท่อน้ำกลมท่อหนึ่ง รัศมีของท่อเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 0.01 เมตรต่อนาที ความยาวของท่อลดลงด้วยอัตรา 0.02 เมตรต่อนาที จงหาว่าพื้นที่ผิวของท่อจะเปลี่ยนแปลงไปด้วยอัตราเท่าไร ในขณะที่ท่อมีความยาว 6 เมตร และรัศมี 0.2 เมตร

จากตัวอย่างดังที่กล่าวมา นักศึกษาไม่สามารถสร้างสมการพื้นที่ผิวได้ เนื่องจากนักศึกษาจำสูตรพื้นที่ผิวทรงกระบอกไม่ได้ว่าคือ $2\pi rh$ ซึ่งนักศึกษาใช้สูตรผิดเป็น $\pi r^2 h$ ต่อจากนั้นนักศึกษานำสมการที่สร้างขึ้นมาหาอนุพันธ์โดยการเทียบกับเวลา เช่น $A = 2\pi rh$ เป็นสมการพื้นที่ผิวที่ถูกต้อง แต่เมื่อนักศึกษาหาค่า dA แล้วนักศึกษาไม่สามารถหาค่าอนุพันธ์ของ $2\pi rh$ โดยเทียบกับเวลาได้ นอกจากนี้พบว่า นักศึกษาได้นำค่าความยาว 6 เมตร และรัศมี 0.2 เมตร แทนค่าใน $2\pi rh$ บ่อย ๆ ซึ่งนักศึกษามีความเข้าใจผิดว่าเป็นการแก้สมการ ในการแก้ปัญหาที่ถูกต้องนั้นนักศึกษาต้องหาค่า dA ได้อย่างถูกต้อง แล้วจึงจะนำค่าความยาวและรัศมีแทนค่าได้

9. หัวข้อที่ 14 การอินทิเกรตโดยการแทนค่าตัวแปรใหม่ ตัวอย่างประชากรตอบว่า นักศึกษามีปัญหาในการเรียนหัวข้อเนื้อหานี้ประมาณร้อยละ 50 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้อง โดยมีสาเหตุของปัญหาในการเรียนหัวข้อเนื้อหานี้ ในเรื่องต่อไปนี้

9.1 การหาตัวคูณร่วมน้อย เพื่อนำไปใช้สมมุติตัวแปรใหม่ พบว่านักศึกษามีอุปสรรคในการหาตัวคูณร่วมน้อย เนื่องจากนักศึกษาไม่ทราบว่าจะต้องนำจำนวนใดบ้างมาหาตัวคูณร่วมน้อย ทำให้นักศึกษาไม่สามารถสมมุติตัวแปรใหม่ได้

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{4}}}\,dx$

นักศึกษาไม่ทราบว่าต้องนำจำนวนที่เป็นเทอมส่วนทั้งหมดของกำลังที่เป็นเศษส่วน คือ 2,3 และ 4 มาใช้หาตัวคูณร่วมน้อย โดยที่นักศึกษาพยายามเดาตัวสมมุติผิดเป็น $x = z^4$ บ้าง $x = z^8$ บ้าง

9.2 การใช้กฎของเลขยกกำลังเพื่อเปลี่ยนแปลงโจทย์กับตัวแปรใหม่ที่สมมุติ เนื่องมาจากนักศึกษาใช้กฎของเลขยกกำลังคือ $(a^m)^n = a^{mn}$ ผิดพลาด จึงทำให้ในการหาค่า $x^{\frac{5}{2}}, x^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{3}{4}}$ จากการสมมุติ $x = z^{12}$ นั้นไม่ถูกต้อง เช่น หาค่า $x^{\frac{5}{2}}$ ผิดพลาดเป็น z^{15} หรือ $x^{\frac{2}{3}}$ ผิดพลาดเป็น z^6 และ $x^{\frac{3}{4}}$ ผิดพลาดเป็น z^9 จึงทำให้นักศึกษานำผลลัพท์ที่ผิดพลาดไปใช้แก้ปัญหาทำให้คำตอบที่ได้ต้องผิดพลาดไปด้วย

10. หัวข้อที่ 15 การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งและเส้นโค้ง ตัวอย่างประชากรตอบว่า นักศึกษามีปัญหาในการเรียนหัวข้อเนื้อหานี้ประมาณร้อยละ 70 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้อง โดยมีสาเหตุของปัญหาในการเรียนหัวข้อนี้ ในเรื่องต่อไปนี้

10.1 การเขียนกราฟต่าง ๆ ที่เป็นอาณาบริเวณพื้นที่ พบว่านักศึกษาเขียนกราฟพาราโบลาผิดพลาดมาก เนื่องมาจากนักศึกษาต้องจัดสมการที่โจทย์กำหนดมาให้ใหม่เป็นรูปสมการมาตราฐาน เช่น $y = ax^2+bx+c$ ต้องจัดใหม่ให้อยู่ในรูป $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ หรือ $x = ay^2+by+c$ ต้องจัดใหม่ให้อยู่ในรูป $(y+k)^2 = 4p(x-h)$ โดยที่สมการมาตรฐานนี้นักศึกษาสามารถนำไปเขียนจุดยอด จุดโฟกัส ความยาวลาตัสเรคตัม ทำให้การเขียน

รูปกราฟพาราโบลานั้นถูกต้อง แต่ปรากฏว่านักศึกษาไม่สามารถจัดสมการที่โจทย์กำหนดมาให้เป็นรูปสมการมาตราฐานได้ เพราะว่านักศึกษาแยกตัวประกอบโดยวิธีทำให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ไม่ได้ นั่นคือ ไม่สามารถหาค่า $(x-h)^2$ หรือ $(y-k)^2$ ได้นั่นเอง จึงเป็นเหตุให้นักศึกษาไม่สามารถเขียนกราฟพาราโบลาได้อย่างถูกต้อง

นอกจากนี้เมื่อโจทย์กำหนดสมการ $y = mx+b$ นั้นนักศึกษาเขียนกราฟเส้นตรงลักษณะเช่นนี้ได้อย่างถูกต้อง แต่เมื่อโจทย์กำหนดสมการ $y = 5$ บ้างหรือ $x = -2$ แล้วนักศึกษาจะเขียนภาพเส้นตรงเหล่านี้ไม่ได้

10.2 การแก้สมการหาจุดตัดของกราฟทั้งสอง พบว่า นักศึกษาแก้สมการผิดพลาด เนื่องมาจากไม่เข้าใจการแก้ระบบสมการต่าง ๆ โดยเฉพาะเมื่อพบสมการเชิงเส้น $y = mx+b$ และสมการควอดราติก $y = ax^2+bx+c$ หรือ $x = ay^2+by+c$ ทำให้นักศึกษาไม่มั่นใจว่าจะหาค่าตัวแปรใดก่อน จะกำจัดตัวแปร x หรือ y ได้อย่างไร เพราะสมการเชิงเส้นกับสมการควอดราติกมีกำลังของ x หรือ y ต่างกัน ตัวอย่างที่นักศึกษาไม่สามารถหาค่าตัวแปรจากระบบสมการได้ เช่น

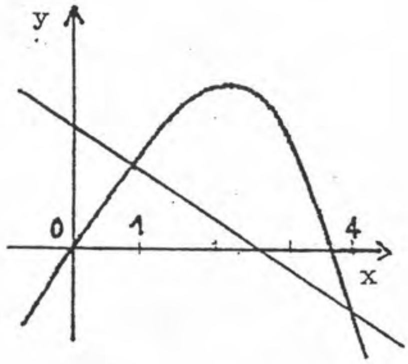
$$x = y^2-2y+5 \quad \text{------} \quad (1)$$

$$y = 2x+3 \quad \text{------} \quad (2)$$

10.3 การวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) พบว่า นักศึกษาส่วนใหญ่วางรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) ได้ถูกต้อง แต่แปลความหมายของรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อเส้นโค้งทั้งสองอยู่ต่างจตุภาค (Quadrant) และสูตรที่ใช้คือ

$$A = \int_a^b (y_2-y_1)\,dx \quad \text{หรือ} \quad \int_c^d (x_2-x_1)\,dy$$

แต่เส้นโค้งทั้งสองของโจทย์ไม่ได้กำหนดให้มาว่าเส้นโค้งใดมีค่าเป็น y_1 หรือ x_1 และเส้นโค้งใดมีค่าเป็น y_2 หรือ x_2 ทำให้นักศึกษาแทนค่าผิดพลาดในสูตรบ่อย ๆ เช่น



จากรูปจะได้ว่า $A = \int_{1}^{4} [(-x^2+4x)-(-x+4)]\, dx$

แต่ปรากฏว่านักศึกษาตอบว่า

$$A = \int_{1}^{4} [(-x+4)-(-x^2+4x)]\, dx$$

ซึ่งผิดพลาดโดยที่นักศึกษาแทนค่า $y_2 = x+4$ และ $y_1 = -x^2+4x$

11. สำหรับหัวข้อเนื้อหาที่เป็นปัญหาอยู่ในระดับมากหัวข้อที่ 10, 13 และ 16 มีลักษณะของเนื้อหาเกี่ยวข้องกับเรื่องปริมาตร ทั้ง 3 หัวข้อคือ หัวข้อที่ 10 เป็น การหาโมเมนต์แห่งความเฉื่อยของปริมาตร หัวข้อที่ 13 เป็นการหาจุดรวมมวลของปริมาตร และหัวข้อที่ 16 เป็นการหาปริมาตรโดยวิธีเปลือกทรงกระบอก ซึ่งเนื้อหาหัวข้อที่ 16 นั้นเป็นพื้นฐานของการเรียนในหัวข้อที่ 13 และ 10 ตามลำดับ ผู้วิจัยจึงขอนำหัวข้อเหล่านี้มาวิเคราะห์ปัญหาเรียงลำดับตามความเหมาะสมข้างต้น ดังต่อไปนี้

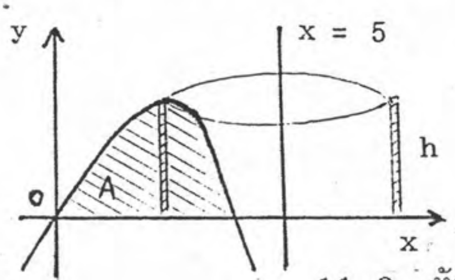
11.1 หัวข้อที่ 16 การหาปริมาตรโดยวิธีเปลือกทรงกระบอก ตัวอย่างประชากรตอบว่า นักศึกษามีปัญหาในการเรียนหัวข้อเนื้อหานี้ประมาณร้อยละ 70 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้องโดยมีสาเหตุของปัญหาในการเรียนหัวข้อนี้ในเรื่องต่อไปนี้

11.1.1 การเขียนกราฟต่าง ๆ ที่เป็นอาณาบริเวณพื้นที่ที่จะนำไปหมุนรอบแกนใดแกนหนึ่ง พบว่านักศึกษายังเขียนกราฟผิดพลาดเช่นเดียวกับหัวข้อเนื้อหาเรื่องการหาพื้นที่

11.1.2 การวางรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) พบว่านักศึกษามีอุปสรรคเช่นเดียวกับหัวข้อเนื้อหาเรื่องการหาพื้นที่และที่เป็นอุปสรรคมากยิ่งขึ้นก็คือ เมื่อนำรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) หมุนรอบแกนที่โจทย์ต้องการหานักศึกษาเขียนรูปที่เกิดจากหมุนรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) ไม่ได้ว่าเป็นรูปแผ่นวงกลมหรือเปลือกทรงกระบอกทำให้นักศึกษาต้องเดาสูตรที่จะหาปริมาตร

11.1.3 การหารัศมีและส่วนสูงของเปลือกทรงกระบอก พบว่า นักศึกษามีอุปสรรคมากเมื่อแกนหมุนไม่ใช่แกน x หรือแกน y แต่เป็นแกนที่

ขนานกับแกน x หรือขนานกับแกน y ทำให้นักศึกษาหาค่ารัศมีและส่วนสูงผิด แล้วนำไปแทนค่าในสูตรที่จะหาปริมาตรผิดพลาดด้วยเช่น

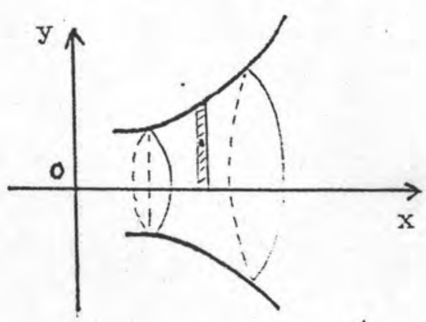


ให้นำพื้นที่ A หมุนรอบแกน x = 5 พบว่า นักศึกษาแทนค่ารัศมีผิดดังนี้คือ แทนค่า h = y แต่ r = x ซึ่งผิด จะต้องแทนค่า r = 5-x จึงจะถูกต้อง

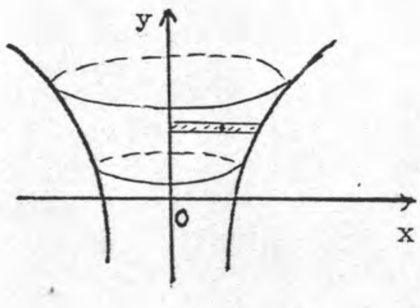
11.2 หัวข้อที่ 13 การหาจุดรวมมวลของปริมาตร ตัวอย่างประชากรตอบว่า นักศึกษามีปัญหาในการเรียนหัวข้อเนื้อหานี้ประมาณร้อยละ 80 ของจำนวนนักศึกษาต่อห้อง โดยมีสาเหตุของปัญหาในการเรียนหัวข้อนี้ ในเรื่องต่อไปนี้

11.2.1 อุปสรรคเดิมซึ่งเป็นอุปสรรคในการเรียนหัวข้อเนื้อหาเรื่องการหาปริมาตรในหัวข้อที่ 11.1 ซึ่งหัวข้อนี้เป็นหัวข้อที่มีระดับของปัญหาอยู่ในระดับมากอยู่ก่อนแล้ว

11.2.2 ในการหาจุดรวมมวลของปริมาตรนั้นนักศึกษาหาระยะทางไม่ถูกต้องว่า ระยะทางตั้งฉากจากจุดรวมมวลของรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) นี้มีค่าเป็นเท่าใด เช่น



รูปที่ 1



รูปที่ 2

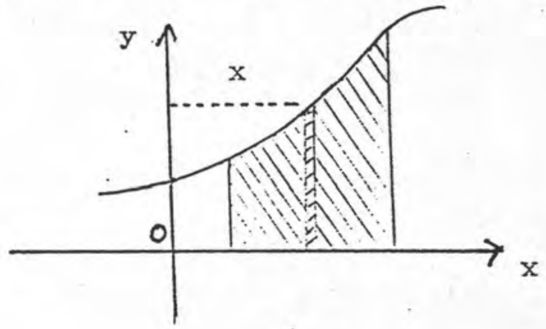
จากรูปที่ 1 นักศึกษาไม่ทราบว่าระยะทางตั้งฉากจากรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) ถึงแกน y มีค่า x และระยะทางตั้งฉากจากรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) ถึงแกน x มีค่า $\frac{1}{2y}$

จากรูปที่ 2 นักศึกษาไม่ทราบว่าระยะทางตั้งฉากจากรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) ถึงแกน x มีค่า y และระยะทางตั้งฉากจากรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) ถึงแกน y มีค่า $\frac{1}{2x}$

11.3 หัวข้อที่ 10 การหาโมเมนต์แห่งความเฉื่อยของปริมาตร ตัวอย่างประชากรตอบว่านักศึกษามีปัญหาในการเรียนหัวข้อเนื้อหานี้ประมาณร้อยละ 80 ของจำนวนนักศึกษา โดยมีสาเหตุของปัญหาในการเรียนหัวข้อนี้ในเรื่องต่อไปนี้

11.3.1 อุปสรรคเดิมซึ่งเป็นอุปสรรคในการเรียนหัวข้อเนื้อหาเรื่องการหาปริมาตรในหัวข้อที่ 11.1 ซึ่งหัวข้อนี้ก็เป็นหัวข้อที่มีระดับของปัญหาอยู่ในระดับมากอยู่ก่อนแล้ว

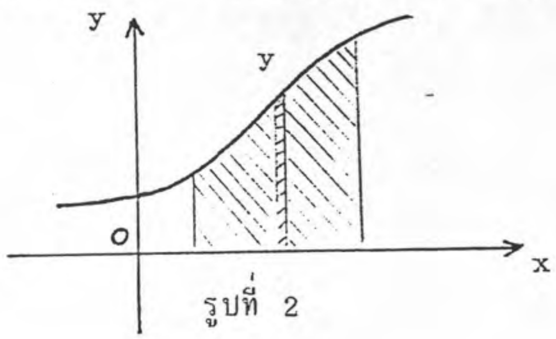
11.3.2 ในการหาโมเมนต์แห่งความเฉื่อยของปริมาตรนั้นนักศึกษาหาระยะทางที่ยกกำลังสองไม่ถูกต้องว่ามีค่าเป็นเท่าใด เช่น กรณีรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) อยู่ในลักษณะขนานกับแกนของโมเมนต์นั้น ระยะทางที่ยกกำลังสองนักศึกษาไม่ทราบว่ามีค่าเท่ากับระยะทางตั้งฉากจากจุดกึ่งกลางของรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) ไปยังแกนของโมเมนต์ทั้งหมดยกกำลังสอง ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1

ในกรณีที่นำพื้นที่แรเงาหมุนรอบแกน y เมื่อนักศึกษาหาโมเมนต์แห่งความเฉื่อยรอบแกน y ของปริมาตรที่ได้จากการหมุนพื้นที่แรเงารอบแกน y นักศึกษาจำไม่ได้ว่าระยะทางที่ยกกำลังสองนั้นมีค่าเท่ากับ x ยกกำลังสอง

ส่วนกรณีรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) มีลักษณะตั้งฉากกับแกนของโมเมนต์นั้นระยะทางที่ยกกำลังสองนักศึกษาจะไม่ทราบว่ามีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของความสูงของรูปแท่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Strip) ที่ยกกำลังสอง ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

ในกรณีที่นำพื้นที่แรเงาหมุนรอบแกน x เมื่อนักศึกษาหาโมเมนต์แห่งความเฉื่อยรอบแกน x ของปริมาตรที่ได้จากการหมุนพื้นที่แรเงารอบแกน x นักศึกษาจะจำไม่ได้ว่าระยะทางที่ยกกำลังสองนั้นมีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของ y ยกกำลังสอง