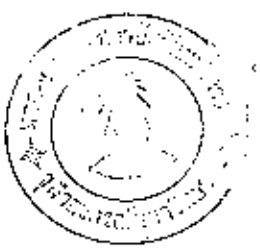
การประยุกต์ของหฤษฎีแห่งกรูป
สำหรับปัญหาการสั่นทางวิศวกรรม



เรืออากาศโท มนตรี วุฒฒมี

032304

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต
แผนกวิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
พ.ศ. ๒๕๑๔

I 16983853

APPLICATION OF GROUP THEORY TO ENGINEERING VIBRATION PROBLEMS

Lieutenant Montree Wuttamco

A Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the
Requirements for the Degree of Master of Science
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
1971

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfilment of the requirements for the degree of master of science.

T. Nitanidhi

.....

Dean of the Graduate School

Thesis Committee .....Chairman

.....

.....

Thesis Supervisor Group Captain Bisuddhi Riddhagni

Date ...3...May...1971.....

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การประยุกต์ของทฤษฎีแห่งกรุ๊ปสำหรับปัญหาการสั่นทางวิศวกรรม

ชื่อ เรืออากาศโท มนตรี วุฒิพงษ์ แผนกวิชาคณิตศาสตร์

ปีการศึกษา ๒๕๑๓

บทคัดย่อ

อาเบลได้ใช้ทฤษฎีแห่งกรุ๊ปในการพิสูจน์ว่า เราไม่อาจเขียนรากของสมการดีกรีที่ห้าโดยทั่วไปในเทอมของกรณฑ์ในปี ค.ศ. ๑๘๒๔ ทฤษฎีนี้ยังคงได้รับความสนใจเฉพาะแต่ในหมู่ของนักคณิตศาสตร์ มาเป็นเวลานับศตวรรษ อย่างไรก็ดี การที่มีทฤษฎีแห่งการสั่นเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ทำให้ทฤษฎีแห่งกรุ๊ปกลายเป็นเครื่องมือสำคัญในการศึกษา เรื่องปัญหาการสั่นทางวิศวกรรม

ทฤษฎีแห่งกรุ๊ปในรูปซึ่งเป็นที่สนใจของเรา ได้ใช้ประโยชน์จาก matrix notation เซทของ operation ที่สมมาตร ซึ่งจะไม่เปลี่ยนโครงร่างของระบบเป็นกรุ๊ปสมมาตร

ความมุ่งหมายของวิทยานิพนธ์นี้ก็เพื่อหา normal mode ของการสั่นของระบบที่กำหนดให้ โดยใช้ทฤษฎีแห่งกรุ๊ปแยก mode ของการเลื่อนและ mode ของการหมุน ($\Gamma_{t,r}$) ออกจาก mode ของการสั่น (Γ_{vib}) จะมีความถี่ที่จำกัด ซึ่งกำหนดโดย $\nu_j = \frac{\sqrt{\lambda_j}}{2\pi}$ ตรงตาม normal mode ของการสั่น

เซทของสมการแห่งการเคลื่อนที่ซึ่งสำคัญที่สุด คือ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - V) = 0$$

สมการนี้เรียกว่าสมการของลากราน โดยที่ T และ V เป็นพลังงานจลน์ และพลังงานศักย์ q_j's เป็น generalized coordinates

ในเรื่องนี้เราได้แสดงให้เห็นแล้วว่า จะมี (3N - 6) normal mode ของการสั่น ซึ่งมีจำนวน mode เท่ากับจำนวนดีกรีของการสั่นแห่งความอิสระ โดยที่ N เป็นจำนวนมวลสารของระบบ โดยการใช้ทฤษฎีแห่งกรุ๊ป เราสามารถหา normal mode และความถี่ได้ง่ายกว่า ไม่ใช้ทฤษฎีนี้เลย

Thesis Title Application of Group Theory to Engineering Vibration Problems.

Name Lt. Montree Wuttamee Department Mathematics

Academic Year 1970

ABSTRACT

The theory of groups, which was used brilliantly by Abel in 1824 to prove the impossibility of expressing the roots of the general fifth degree equation in terms of radicals, remained for a century a theory of interest only to the pure mathematician. With the advent of vibration theory, however, group theory became recognized as an important tool in the study of engineering vibration problems.

Group theory, in the form which will be of interest to us, makes considerable use of matrix notation. The set of symmetry operations which do not alter the configuration of the system forms a symmetry group.

The purpose of this thesis is to find the normal modes of vibration of the given system by applying group theory to separate the translational and rotational modes ($\Gamma_{t,r}$) from the vibrational modes (Γ_{vib}). Corresponding to a normal mode of vibration there is a definite frequency given by $\nu_j = \frac{\sqrt{\lambda_j}}{2\pi}$.

The most important set of equations of motion is

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - V) = 0,$$

which is called Lagrange's equations, where T, V are kinetic and potential energies and the q_j's are the generalized coordinates.

It is shown that there are $(3N - 6)$ normal modes of vibration which is equal to the number of the vibrational degrees of freedom, where N is a number of masses of the system. By using group theory we can find the normal modes and frequencies easier than without applying the theory.

ACKNOWLEDGEMENTS :

The author is indebted to many persons, particularly Group Captain Bisuddhi Riddhagni, the author's supervisor, for his advice and assistance in mathematical ideas and in English usage, in addition, for his encouragement when the work was progressing slowly.

Finally, it is a pleasure to thank all lecturers of the Department of Mathematics at Chulalongkorn University for their previous lectures in the undergraduate and graduate courses.

Lt. Montree Wuttamee

LIST OF TABLES

Page

Table 1. Multiplication table 12

Table 2. Matrix representation 15

Table 3. Illustrative character table 17

Table 4. Character table for the group D_4 40

Table 5. Character table for the group D_{4h} 41

Table 6. Character table for the group D_{2h} 43

LIST OF FIGURES

Page

Figure 1. Displacement coordinates x_1 and x_2 6

Figure 2. Symmetry axes of the equilateral triangle 11

Figure 3. Original displacement coordinates of the system belonging to D_{4h} 31

Figure 4. Displacement coordinates under the operation C_2 32

Figure 5. Displacement coordinates under the operation C_4 33

Figure 6. Displacement coordinates under the operation C_2' 35

Figure 7. Displacement coordinates under the operation C_2'' 36

Figure 8. Diagram, showing the rotations, R_x, R_y, and R_z 39

Figure 9. Original displacement coordinates of the system belonging to D_{2h} 42

Figure 10. (a), 10,(b) Normal modes of vibration of the system belonging to the group D_{4h} 50-51

Figure 11. (a), 11.(b) Normal modes of vibration of the system belonging to the group D_{2h} 52-53

TABLE OF CONTENTS

	Page
ABSTRACT (IN THAI)	iii
ABSTRACT (IN ENGLISH)	iv
ACKNOWLEDGEMENTS	vi
LIST OF TABLES	vii
LIST OF FIGURES	viii
CHAPTER I: INTRODUCTION	1
Vibration Theory and Normal Coordinates	1
CHAPTER II: GROUP THEORY	9
Definition of Group	9
Isomorphism and Homomorphism	12
The General Principle of Group Theory	13
Representation of Group	14
Reducible and Irreducible Representations	16
Theorems	17
Decomposition of Reducible Representations	26
CHAPTER III: APPLICATION	27
Symmetry Group	27
Normal Vibration Modes of the Systems with 5 Masses	30

Page

CHAPTER IV: VIBRATIONS AND MODE ANALYSIS 44

Normal Frequency Calculations for Systems with 5 Masses 44

Schematic Representations 50

BIBLIOGRAPHY 54

VITA 55