การคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น

นางสาวผกาวดี ทวีปัญญายศ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2554

ON-LINE MULTIPLICATION ON FLEXIBLE INTERVAL REPRESENTATION SYSTEM

Miss Pakawadee Taweepanyayote

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Computer Science
Department of Computer Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2011

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น
โดย	นางสาวผกาวดี ทวีปัญญายศ
สาขาวิชา	วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

…………………………………….... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

…………………………………….... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.วันชัย ริ้วไพบูลย์)

…………………………………….... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)

…………………………………….... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิษณุ คนองชัยยศ)

…………………………………….... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง)

ผกาวดี ทวีปัญญายศ : การคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น. (ON-LINE MULTIPLICATION ON FLEXIBLE INTERVAL REPRESENTATION SYSTEM) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผศ. ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์, 45 หน้า.

ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นคือระบบจำนวนที่สามารถแสดงช่วงได้โดยใช้จำนวนเพียงจำนวนเดียวในการแสดงช่วง และระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นนี้สามารถทำการคำนวณพื้นฐานทางเลขคณิตรวมถึงการบวกและการลบแบบขนานได้ แต่ไม่สามารถทำการคำนวณแบบเชื่อมตรงได้ ทำให้ไม่สามารถดำเนินการคำนวณแบบลำดับได้เช่นกัน เนื่องจากรูปแบบแทนจำนวนบางรูปแบบของระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นไม่เหมาะสมกับการดำเนินการคำนวณแบบเชื่อมตรง ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นไปที่การทำให้ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นสามารถทำการคำนวณแบบเชื่อมตรงโดยเฉพาะการคูณแบบเชื่อมตรงได้ เราจึงปรับปรุงระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นให้สามารถดำเนินการคูณแบบเชื่อมตรงได้ จากนั้นเราจะนำเสนออัลกอริทึมการคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นพร้อมทั้งหาค่าความหน่วงที่เหมาะสมสำหรับการคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นนี้

ภาควิชา...วิศวกรรมคอมพิวเตอร์........ ลายมือชื่อนิสิต..

สาขาวิชา...วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์..... ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก...................

ปีการศึกษา...2554.........................

5170389121 : MAJOR COMPUTER ENGINEERING
KEYWORDS : INTERVAL ARITHMETIC / FLEXIBLE INTERVAL REPRESENTATION SYSTEM / ON-LINE READY FLEXIBLE INTERVAL REPRESENTATION SYSTEM / ON-LINE MULTIPLICATION

PAKAWADEE TAWEEPANYAYOTE : ON-LINE MULTIPLICATION ON FLEXIBLE INTERVAL REPRESENTATION SYSTEM. ADVISOR : ATHASIT SURARERKS, Ph.D., 45 pp.

Flexible interval representation system is a system number that any interval can be represented as a sequence of digits. The fundamental arithmetic computation, including parallel addition and subtraction can be performed on flexible interval representation system, however this system still have a limitation – it is not able to perform neither on-line arithmetic nor sequential computation. So, this thesis focuses on perform flexible interval representation system for on-line multiplication. We thus modify flexible interval representation system for on-line multiplication. We also purpose basic arithmetic computation especially in on-line multiplication on flexible interval representation system and obtain suitable for this system.

Department: ....Computer Engineering.... Student's Signature......................................
Field of Study: ...Computer Science..... Advisor's Signature......................................
Academic Year:...2011......................

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความอนุเคราะห์และความช่วยเหลืออย่างดียิ่ง จาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งเป็นผู้ให้ข้อคิด แนวทาง คำปรึกษา และข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อการวิจัย ตลอดจนเป็นผู้ตรวจทาน แก้ไข ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วง

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.วันชัย ริ้วไพบูลย์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิษณุ คนองชัยยศ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง ประธานกรรมการและกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำในการแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้มีคุณภาพยิ่งขึ้น และขอขอบพระคุณคณาจารย์ในภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยทุกท่านที่ประสิทธิประสาทความรู้อันมีค่ายิ่งแก่ผู้วิจัย

ท้ายนี้ ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่เป็นกำลังสำคัญตลอดมา และขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ และน้องๆ ทุกคน โดยเฉพาะสมาชิกห้องปฏิบัติการวิจัย ELITE ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ เสนอแนะ และแก้ไขเอกสาร จนกระทั่งวิทยานิพนธ์สำเร็จด้วยดี

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย..ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ..จ

กิตติกรรมประกาศ..ฉ

สารบัญ...ช

สารบัญตาราง..ฌ

สารบัญรูป...ญ

บทที่

1 บทนำ..1

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย..2

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย 2

1.4 ขั้นตอนและวิธีดำเนินงานวิจัย..2

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย...2

1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์ 3

2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 4

2.1 ระบบแทนจำนวน...4

2.2 ระบบเลขฐานสองแบบมีเครื่องหมาย..4

2.3 ส่วนเติมเต็ม...5

2.4 ระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมาย 6

2.5 ระบบแทนช่วง..8

2.6 การดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตบนระบบแทนช่วง.....................................9

2.7 เลขคณิตแบบเชื่อมตรง 10

3 ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น..15

3.1 บทกล่าวนำ..15

บทที่ หน้า

3.2 ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น……………………………………………………………..16

3.3 ความสมบูรณ์ของรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงสำหรับ
ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น……………………………………………………………..22

3.4 การคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น………………………………..31

4 บทวิเคราะห์ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น…………………………………………………40

4.1 เวลาที่ใช้ในการคำนวณ……………………………………………………………………40

4.2 เนื้อที่ที่ใช้ในการแสดงช่วง ………………………………………………………………40

5 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ…………………………………………………………41

5.1 สรุปผลงานวิจัย……………………………………………………………………………41

5.2 ข้อเสนอแนะ……………………………………………………………………………….42

รายการอ้างอิง……………………………………………………………………………………..43

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์……………………..……………………………………………..45

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

2.1 แสดงส่วนเติมเต็มหนึ่งของระบบเลขฐานสอง 5
2.2 แสดงส่วนเติมเต็มสองของระบบเลขฐานสอง..6
3.1 แสดงขอบเขตล่างและขอบเขตบนของตัวเลขยืดหยุ่น....................................16
3.2 แสดงตัวอย่างของระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น..17
3.3 แสดงตัวอย่างของระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นที่มีรูปแบบแทนจำนวน
ได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ 18
3.4 แสดงรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงที่ใช้พิจารณาประเภทช่วง 18
3.5 แสดงการเปรียบเทียบการอ่านชุดตัวเลขหลักต่อหลักระหว่าง
ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นกับรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง..........................19
3.6 แสดงประเภทของช่วงของชุดตัวเลข $\alpha\alpha\alpha\gamma$ เมื่อแทนค่าขอบเขตล่าง
ของตัวเลขยืดหยุ่น...20
3.7 แสดงประเภทของช่วงของชุดตัวเลข $\alpha\bar{1}11\bar{\gamma}$ เมื่อแทนค่าขอบเขตล่าง
ของตัวเลขยืดหยุ่น...20
3.8 แสดงประเภทของช่วงของชุดตัวเลข $\alpha\alpha\alpha\gamma$ เมื่อแทนค่าขอบเขตบน
ของตัวเลขยืดหยุ่น...21
3.9 แสดงประเภทของช่วงของชุดตัวเลข $\alpha\bar{1}11\bar{\gamma}$ เมื่อแทนค่าขอบเขตบน
ของตัวเลขยืดหยุ่น...21
3.10 แสดงขั้นตอนการแปลงช่วง [00011, 01100] ให้อยู่ในรูปแบบ
ที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง...30
3.11 แสดงขั้นตอนการแปลงช่วง [11111111101, 01111100111] ให้อยู่ในรูปแบบ
ที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง...31
3.12 แสดงผลคูณของตัวเลขในเซต $\{\bar{1},0,1\}$ 34
3.13 แสดงค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ Z 34
3.14 แสดงกฎการคูณระหว่างช่วงลบ-บวกสองช่วง..35
3.15 แสดงกฎการคูณระหว่างช่วงลบ-บวกสองช่วง..36
3.16 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคูณแบบเชื่อมตรงของช่วง $A=(0.00\alpha\bar{1}1\bar{\gamma}1)_2$ และ
$B=(0.00\alpha\bar{1}1\bar{\gamma}10)_2$ 39

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

2.1 แสดงแผนผังการคูณแบบเชื่อมตรงของจำนวนสองจำนวนที่มี n หลัก.......................13

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการคำนวณเป็นปัญหาที่สำคัญอย่างหนึ่งในงานวิจัยทางเลขคณิตสำหรับคอมพิวเตอร์ เนื่องจากงานวิจัยทางเลขคณิตสำหรับคอมพิวเตอร์นั้นต้องการออกแบบการคำนวณให้มีความถูกต้องสูง ซึ่งความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นนี้อาจจะเกิดจากปัจจัยภายนอกและปัจจัยภายใน ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากปัจจัยภายนอก เช่น ความผิดพลาดของเครื่องมือวัด ทำให้ข้อมูลนำเข้ามีความคลาดเคลื่อนไปด้วย ในกรณีนี้เราไม่สามารถที่จะหาผลลัพธ์ของการคำนวณที่ไม่มีความคลาดเคลื่อนได้เลย ส่วนความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากปัจจัยภายในนั้น เกิดจากการที่ระบบคอมพิวเตอร์ไม่สามารถแทนระบบจำนวนจริงด้วยรูปแบบที่จำกัด (finite representation) ได้ ทำให้ผลลัพธ์ของการคำนวณอาจจะต้องมีการปัดเศษทศนิยมในตำแหน่งที่หน่วยประมวลผลไม่สามารถแสดงได้ (round-off error) [1] ส่งผลให้ผลลัพธ์ของการคำนวณมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น และเมื่อนำผลลัพธ์ของการคำนวณที่มีความคลาดเคลื่อนนี้ไปคำนวณต่อจะทำให้เกิดค่าความคลาดเคลื่อนสะสม [2] ปัญหาความคลาดเคลื่อนนี้สามารถแก้ไขได้โดยการจำกัดขอบเขตของการคำนวณว่าผลลัพธ์ของการคำนวณควรอยู่ในช่วงใด *ระบบแทนจำนวนแบบช่วง* (interval number representation system) จึงได้ถูกนำเสนอขึ้น ซึ่งระบบแทนจำนวนแบบช่วงจะใช้การแสดงจำนวนต่างๆ ให้อยู่ในรูปของช่วงที่ครอบคลุมค่าที่ถูกต้องแทนรูปแบบแทนจำนวนที่มีข้อจำกัด ถึงแม้ว่าระบบแทนจำนวนแบบช่วงจะสามารถแก้ไขปัญหาเกี่ยวกับความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการคำนวณได้ แต่ระบบแทนจำนวนแบบช่วงก็ประสบปัญหาเกี่ยวกับการสิ้นเปลืองเนื้อที่และการคำนวณมีความล่าช้า การแก้ปัญหาเกี่ยวกับความล่าช้าในการคำนวณของระบบแทนจำนวนแบบช่วงก็คือ การนำระบบจำนวนซ้ำซ้อน (redundant number system) เข้ามาใช้ ซึ่งสามารถเพิ่มความเร็วในการคำนวณให้สูงขึ้น แต่ยังไม่สามารถแก้ปัญหาเกี่ยวกับการสิ้นเปลืองเนื้อที่ได้ เนื่องจากระบบจำนวนซ้ำซ้อนมีการขยายชุดตัวเลข (digit set) เพิ่มขึ้นเกือบสองเท่า ทำให้ต้องใช้ขนาดของเนื้อที่ (space) ในการแทนค่าตัวเลข (digit) เพิ่มเป็นสองเท่าตามไปด้วย สำหรับวิธีการแก้ไขปัญหาเรื่องขนาดของเนื้อที่ดังกล่าว ในงานวิจัย [3] ได้นำเสนอ *ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น* (flexible interval representation system) ขึ้น ซึ่งเป็นระบบแทนช่วงรูปแบบใหม่ที่ใช้เนื้อที่น้อยลง โดยใช้ตัวเลขเพียงชุดเดียวในการนำเสนอรูปแบบแทนช่วง และสามารถลด

เวลาในการคำนวณลงได้ โดยการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิต รวมถึงการดำเนินการบวกและลบแบบขนาน [4] สามารถดำเนินการคำนวณบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นนี้ได้ แต่ถ้าข้อมูลนำเข้ามีความยาวสูงมาก การคำนวณบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นนี้ก็จะใช้เวลาในการคำนวณมากตามไปด้วย

งานวิจัยนี้มุ่งเน้นไปที่การทำให้ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นสามารถทำการคำนวณเกี่ยวกับการคูณได้รวดเร็วขึ้น โดยใช้ขนาดในการจัดเก็บข้อมูลเท่าเดิม ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้มีการปรับปรุงระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นให้สามารถทำการคูณแบบเชื่อมตรง (on-line multiplication) บนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นได้ พร้อมทั้งนำเสนออัลกอริทึมการคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น รวมถึงวิธีการหาค่าความหน่วง (delay) ของการคูณแบบเชื่อมตรงด้วย

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

เพื่อปรับปรุงระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นให้สามารถทำการคูณแบบเชื่อมตรงได้ และสร้างอัลกอริทึมการคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น พร้อมทั้งหาค่าความหน่วงของการคูณแบบเชื่อมตรงที่เหมาะสมกับระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) ปรับปรุงระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นให้สามารถทำการคูณแบบเชื่อมตรงได้
2) อัลกอริทึมการคูณแบบเชื่อมตรงที่พัฒนาขึ้นนี้สามารถนำไปใช้กับระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น
3) ค่าความหน่วงที่หาได้นี้ สามารถนำไปใช้กับระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น

1.4 ขั้นตอนและวิธีดำเนินงานวิจัย

1) ศึกษางานวิจัยทางด้านการคำนวณแบบช่วงและการคำนวณแบบเชื่อมตรง
2) วิเคราะห์ปัญหาของงานวิจัยที่มีความสอดคล้องกับงานวิจัยที่สนใจ
3) ปรับปรุงระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น
4) ออกแบบอัลกอริทึมสำหรับการคูณแบบเชื่อมตรง
5) พิสูจน์อัลกอริทึมที่ได้ออกแบบไว้
6) จัดทำวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

1) ได้รูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น
2) ได้อัลกอริทึมการคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น
3) ได้ค่าความหน่วงของการคูณแบบเชื่อมตรงที่เหมาะสมสำหรับระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น

1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์

ส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์ที่ได้รับการตีพิมพ์เป็นผลงานวิชาการในหัวข้อเรื่องดังต่อไปนี้

1) "On-line Ready Flexible Interval Representation System" โดย ผกาวดี ทวีปัญญายศ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ The 2011 International Computer Science and Engineering Conference (ICSEC 2011) (Poster Section)
2) "On-line Multiplication on signed Flexible Interval Representation System" โดย ผกาวดี ทวีปัญญายศ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ IEEE Analog and Digital Techniques in Electrical Engineering: IEEE-TENCON 2011 (TENCON 2011)

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 **ระบบแทนจำนวน** (number representation systems)

ระบบแทนจำนวน (β, D) ประกอบด้วย β ซึ่งหมายถึงเลขฐานที่อาจจะเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $\|\beta\| > 1$ และ D หมายถึงชุดตัวเลขแบบจำกัด (finite digit set) โดยมีสมาชิกเป็นได้ทั้งจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

เราสามารถเขียน รูปแบบแทนจำนวน (number representation) X ในระบบเลขฐาน β ได้ดังนี้

$$X = (x_0 x_1 x_2 \ldots x_n)_\beta$$

โดยที่ $x_i \in D$ ซึ่ง $0 \le i \le n$ และ $n \in Z$

ค่าเชิงตัวเลข (numerical value) ของรูปแบบแทนจำนวน X เขียนได้ด้วย $\|X\|$ สามารถคำนวณได้จาก

$$\|X\| = \sum_{i=0}^{n} x_i \beta^{n-i}$$

ตัวอย่าง 2.1 *กำหนดให้ระบบแทนจำนวนประกอบด้วยเลขฐาน* $\beta = 4$ *และมีชุดตัวเลข* $D = \{0,1,2,3\}$ *รูปแบบแทนจำนวนของ* $X = 2468$ *สามารถเขียนให้อยู่ในระบบนี้ได้เป็น*

$$2468 = (212210)_4 \qquad \square$$

2.2 **ระบบเลขฐานสองแบบมีเครื่องหมาย** (signed binary number system)

ระบบเลขฐานสองแบบมีเครื่องหมาย ประกอบด้วยฐาน $\beta = 2$ และชุดตัวเลข $D = \{0,1\}$ เราสามารถเขียนรูปแบบแทนจำนวน X ที่มีข้อมูล n หลัก ด้วยระบบเลขฐานสองแบบมีเครื่องหมายได้ทั้งหมด $n+1$ หลัก ดังนี้

$$X = (x_0 x_1 x_2 \ldots x_n)_2$$

เมื่อ $x_i \in D$ ซึ่ง $0 \le i \le n$ โดย x_0 จะถูกใช้แทนความหมายของค่าบวก (positive) และค่าลบ (negative) กล่าวคือ ถ้า x_0 เป็น 0 จะถูกแทนด้วยจำนวนบวก และถ้า x_0 เป็น 1 จะถูกแทนด้วยจำนวนลบ

ค่าเชิงตัวเลขของระบบเลขฐานสองแบบมีเครื่องหมาย X เขียนได้ด้วย $\|X\|$ สามารถคำนวณได้จาก

$$\|X\| = \sum_{i=0}^{n} x_i \beta^{n-i}$$

หมายเหตุ *ในงานวิจัยนี้ต้องการนำระบบเลขฐานสองแบบมีเครื่องหมายไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณแบบเชื่อมตรง จึงมีการเริ่มต้นนับบิต (bit) แรกของชุดตัวเลขจากซ้ายไปขวา ดังนั้นจึงกำหนดให้บิตแรกเริ่มต้นด้วย x_0 ซึ่งเป็นบิตเครื่องหมาย*

ตัวอย่าง 2.2 *จงหาค่าเชิงตัวเลขของระบบเลขฐานสองแบบมีเครื่องหมายต่อไปนี้* $(00111)_2$ *และ* $(10111)_2$

ระบบเลขฐานสองแบบมีเครื่องหมาย $(00111)_2$ มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับ +7

ระบบเลขฐานสองแบบมีเครื่องหมาย $(10111)_2$ มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับ -7 □

2.3 ส่วนเติมเต็ม (complement)

2.3.1 ส่วนเติมเต็มหนึ่ง (one's complement)

สำหรับรูปแบบแทนจำนวน $X = (x_0 x_1 x_2 ... x_n)_2$ ที่มีจำนวน $n+1$ หลัก สามารถเขียนให้อยู่ในรูปส่วนเติมเต็มหนึ่งของ X ได้ดังนี้

$$Y = (y_0 y_1 y_2 ... y_n)_2$$

โดยที่ $y_i = 0$ เมื่อ $x_i = 1$ และ $y_i = 1$ เมื่อ $x_i = 0$ ทุก i ที่เป็นจำนวนเต็ม และ $0 \le i \le n$

ตัวอย่าง 2.3 *จงหาส่วนเติมเต็มหนึ่งของรูปแบบแทนจำนวนต่อไปนี้* $(0001011)_2$ *และ* $(1111111)_2$

ตารางที่ 2.1 แสดงส่วนเติมเต็มหนึ่งของรูปแบบแทนจำนวน $(0001011)_2$

ระบบเลขฐานสอง	ส่วนเติมเต็มหนึ่ง
$(0001011)_2$	$(1110100)_2$
$(1111111)_2$	$(0000000)_2$

2.3.2 **ส่วนเติมเต็มสอง** (two's complement)

สำหรับรูปแบบแทนจำนวน X ที่มีจำนวน $n+1$ หลัก สามารถเขียนให้อยู่ในรูปส่วนเติมเต็มสองของ X ได้ โดยนำส่วนเติมเต็มหนึ่งมาบวก 1

ตัวอย่าง 2.4 *จงหาส่วนเติมเต็มสองของรูปแบบแทนจำนวนต่อไปนี้* $(0001011)_2$ *และ* $(1111111)_2$

ตารางที่ 2.2 แสดงส่วนเติมเต็มสองของรูปแบบแทนจำนวน $(0001011)_2$

ระบบเลขฐานสอง	ส่วนเติมเต็มหนึ่ง	ส่วนเติมเต็มสอง
$(0001011)_2$	$(1110100)_2$	$(1110101)_2$
$(1111111)_2$	$(0000000)_2$	$(0000001)_2$

2.4 **ระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมาย** (signed digit number representation systems)

ระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมายถูกพัฒนามาจากระบบแทนจำนวนแบบดั้งเดิม (classical number representation) โดยมีวัตถุประสงค์หลักในการจัดการในเรื่องของการจำกัดการแพร่ของตัวทดที่เกิดขึ้นในระหว่างการคำนวณ ผลที่ตามมาคือการคำนวณสามารถทำได้อย่างรวดเร็วขึ้น ระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมายนี้ได้ถูกนำเสนอขึ้นครั้งแรกโดย อวีเซียนีส (Avizienis) [5] ปี ค.ศ.1961 ชุดตัวเลขใหม่ถูกสร้างขึ้นมาโดยตัวเลขเหล่านั้นสามารถมีเครื่องหมายกำกับได้ นอกจากนี้จำนวนตัวเลขในชุดตัวเลขจะมีมากกว่าจำนวนตัวเลขในระบบดั้งเดิม

ระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมายของอวีเซียนีสนั้น กำหนดให้ฐาน β เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $\beta > 3$ โดยชุดตัวเลขกำหนดให้เป็น

$$D=\{-a,-a+1,-a+2,\ldots,-1,0,1,\ldots,a+2,a+1,a\}$$

โดยที่ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ ที่อยู่ในช่วง $\frac{1}{2}\beta \le a < \beta$ สำหรับจำนวนเต็ม $\beta \ge 2$

หมายเหตุ *ในการเขียนตัวเลขในชุดตัวเลขแบบมีเครื่องหมาย นิยมใช้สัญลักษณ์ $\bar{d}$ แทนตัวเลข $-d$*

ระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมายนี้มีสมบัติสำคัญประการหนึ่งคือ สมบัติซ้ำซ้อน (redundant property) ซึ่งหมายความว่า จำนวนบางจำนวนสามารถมีรูปแบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมายได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ

ตัวอย่าง 2.5 *กำหนดให้ระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมายประกอบด้วยเลขฐาน $\beta = 4$ และมีชุดตัวเลข $D=\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ รูปแบบแทนจำนวนของ $X = 2468$ สามารถเขียนให้อยู่ในระบบนี้ได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบคือ*

$$2468=(212210)_4=(1\bar{2}12210)_4 \qquad \square$$

ต่อมาในปี ค.ศ.1990 พาร์ฮามี (Parhami) [6] ได้เสนอรูปแบบทั่วไปของระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมาย (generalized signed-digit: GSD) ซึ่งสมบัติที่แตกต่างจากระบบเดิมคือ ชุดตัวเลขไม่จำเป็นต้องเป็นเซตที่สมมาตร โดยกำหนดเลขฐาน β เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $\beta \ge 2$ ชุดตัวเลขสามารถกำหนดให้เป็น

$$D=\{l,l+1,l+2,\ldots,-1,0,1,\ldots,m-2,m-1,m\}$$

โดยที่ $l \le 0$ และ $m \ge 0$ โดยที่ $m-l+1>\beta$

ตัวอย่าง 2.6 *กำหนดให้ระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมายประกอบด้วยเลขฐาน $\beta = 4$ และมีชุดตัวเลข $D=\{\bar{2},\bar{1},0,1,2,3\}$ รูปแบบแทนจำนวนของ $X = 2468$ สามารถเขียนให้อยู่ในระบบนี้ได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบคือ*

$$2468=(213\bar{2}10)_4=(3\bar{2}\,\bar{1}\,\bar{2}10)_4 \qquad \square$$

ข้อดีของระบบแทนจำนวนซ้ำซ้อนคือ มีความสามารถในการจำกัดการแพร่ของตัวทดในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ไม่ให้แพร่ไปอย่างไม่จำกัดได้ ซึ่งต่างไปจากระบบแทนจำนวนไม่ซ้ำซ้อน เพราะฉะนั้นระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมายจึงสามารถทำการคำนวณแบบขนานได้สำหรับบางตัวดำเนินการ (operator) ทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณคงที่และไม่ขึ้นกับขนาดความยาวของตัวถูกดำเนินการ (operand)

2.5 **ระบบแทนช่วง** (interval representation systems)

ในระบบการคำนวณสำหรับจำนวนจริงนั้น ความผิดพลาดอาจเกิดขึ้นได้ในระหว่างการคำนวณ ทั้งนี้เพราะรูปแบบที่จำกัดของการแทนจำนวน (finite representation of number) แนวคิดในการแทนจำนวนโดยใช้ช่วงและการคำนวณในรูปแบบของช่วงนี้เสมือนเป็นการคำนวณเพื่อหาขอบเขต (bound) ที่เป็นไปได้ของคำตอบในกรณีที่จำนวนที่ต้องการนำมาคำนวณนั้นมีความคลาดเคลื่อนไปได้ในช่วงที่กำหนด โดยมีการกำหนดค่าต่ำสุด (x_l) และค่าสูงสุด (x_u) ของช่วง ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณสามารถรับประกันได้ว่า ผลลัพธ์ที่ถูกต้องปรากฏอยู่ในช่วงที่ได้จากการคำนวณแน่นอน ในที่นี้จะขออธิบายพอสังเขปดังนี้

กำหนดให้ x_T และ y_T เป็นค่าจริงสองจำนวนที่ต้องการนำมาคำนวณ

กำหนดให้ x_A และ y_A เป็นจำนวนจริงสองจำนวนที่มีความคลาดเคลื่อนมาจาก x_T และ y_T ตามลำดับ (อาจได้มาจากการปัดเศษเลขทศนิยม เป็นต้น)

ดังนั้นค่าความคลาดเคลื่อน (E) ที่เกิดขึ้นจะเป็นไปตามสมการคือ

$$E = (x_T \omega y_T) - (x_A \omega y_A)$$

โดยที่ ω แทนเครื่องหมาย “+”, “−”, “×” หรือ “÷” และค่า E ที่เกิดขึ้นเรียกว่า ค่าผิดพลาดจากการแพร่ (propagated error)

ในกรณีที่สามารถกำหนดค่าขอบเขตของความคลาดเคลื่อน $x_T - x_A$ ได้ โดยการแสดงขอบเขต x_A ด้วยช่วง ทำนองเดียวกัน ค่าของ y_A ก็สามารถกำหนดได้ด้วยช่วงเช่นกัน เราสามารถคำนวณหาช่วงที่เป็นไปได้ทั้งหมดของคำตอบที่ถูกต้องได้จากช่วงทั้งสองดังกล่าว และรับประกันได้ว่าคำตอบที่ถูกต้องจะอยู่ในช่วงที่คำนวณได้

กำหนดให้ X เป็นค่าเชิงตัวเลขใดๆ ในระบบแทนช่วง รูปแบบการแทนช่วงของ X ในระบบแทนช่วงเป็นดังนี้

$$X = [x_l, x_u]$$

ตัวอย่าง 2.7 *กำหนดให้* $x_A = 3.14$ *และ* $y_A = 2.651$ *เป็นค่าที่เกิดจากการปัดเศษเลขทศนิยมของ* x_T *และ* y_T *และค่าขอบเขตคือ 0.005* จงหาช่วงของ $x_T + y_T$

$$\left|x_A - x_T\right| \le 0.005 \text{ , } \left|y_A - y_T\right| \le 0.005$$

หรือ

$$3.135 \le x_T \le 3.145 \text{ , } 2.646 \le y_T \le 2.656$$

ในการคำนวณค่าของ $x_T + y_T$ จะได้

$$3.135 + 2.646 \le x_T + y \le 3.145 + 2.656$$
$$5.781 \le x_T + y \le 5.801$$

ดังนั้นช่วงของ $x_T + y_T = [5.781, 5.801]$ □

2.6 การดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตบนระบบแทนช่วง (fundamental arithmetic operations for interval representation systems)

กำหนดให้ $[x_l, x_u]$ และ $[y_l, y_u]$ เป็นรูปแบบแทนจำนวนของ X และ Y ตามลำดับ การดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตบนระบบแทนช่วงเป็นการคำนวณที่เกิดจากการบวก ลบ คูณ และหารกันของค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของช่วง โดยสามารถศึกษาได้จาก [7-9] ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
x + y &= [x_l + y_l, x_u + y_u] \\
x - y &= [x_l - y_u, x_u - y_l] \\
x \times y &= \begin{bmatrix} \min\{x_l \times y_l, x_l \times y_u, x_u \times y_l, x_u \times y_u\}, \\ \max\{x_l \times y_l, x_l \times y_u, x_u \times y_l, x_u \times y_u\} \end{bmatrix} \\
x \div y &= \begin{bmatrix} \min\{x_l \div y_l, x_l \div y_u, x_u \div y_l, x_u \div y_u\}, \\ \max\{x_l \div y_l, x_l \div y_u, x_u \div y_l, x_u \div y_u\} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

สำหรับการหารนั้น ช่วงที่เป็นตัวหารจะต้องไม่ครอบคลุมศูนย์

ตัวอย่าง 2.8 *กำหนดให้* $X = [4.35, 6.62]$ *และ* $Y = [6.2, 9.16]$ *จงแสดงการบวก ลบ คูณ และหารของช่วง* X *และ* Y

วิธีทำ การคำนวณพื้นฐานของตัวดำเนินการบวก ลบ คูณ และหารของช่วง X และ Y สามารถแสดงได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
X + Y &= [10.55, 15.78] \\
X - Y &= [-4.81, 0.42] \\
X \times Y &= \begin{bmatrix} \min\{26.97, 39.84, 41.04, 60.63\}, \\ \max\{26.97, 39.84, 41.04, 60.63\} \end{bmatrix} \\
&= [26.97, 60.63] \\
X \div Y &= \begin{bmatrix} \min\{0.70, 0.47, 1.06, 0.72\}, \\ \max\{0.70, 0.47, 1.06, 0.72\} \end{bmatrix} \\
&= [0.47, 1.06]
\end{aligned}
$$

□

2.7 เลขคณิตแบบเชื่อมตรง (on-line arithmetic)

การดำเนินการคำนวณพื้นฐานทั่วไปนั้นจะรับข้อมูลนำเข้า (input data) เข้าไปทั้งหมดก่อนแล้วค่อยดำเนินการคำนวณและส่งผลออกมา ถ้าหากข้อมูลนำเข้านั้นมีขนาดและความยาวมาก ก่อนดำเนินการคำนวณจะต้องเสียเวลาในการรับข้อมูลเข้ามาทั้งหมดก่อน อีกทั้งเสียเนื้อที่ในการเก็บข้อมูลก่อนนำไปคำนวณอีก และในกรณีเลวร้าย (worse case) หากข้อมูลนำเข้ามีความยาวไม่รู้จบ (infinity) ระบบก็จะรับข้อมูลไม่รู้จบและไม่สามารถเริ่มคำนวณได้ ในปี ค.ศ.1977 ทราเวดิและเออเซโกวัก (Trivedi and Ercegovac) ได้นำเสนอการทำงานแบบเชื่อมตรง [10-11] ลักษณะของระบบคือระบบจะรับข้อมูลนำเข้ามาทีละตัว มาดำเนินการคำนวณและส่งคำตอบออกไปทีละตัวเลข ดังนั้นถึงแม้จะมีข้อมูลนำเข้าที่ความยาวไม่รู้จบ ระบบนี้ก็สามารถคำนวณได้ทางทฤษฎี ทิศทางการดำเนินการคำนวณนั้นจะคำนวณจากตำแหน่งที่มีนัยสำคัญมากไปตำแหน่งที่มีนัยสำคัญน้อย (Most Significant Digit First: MSDF)

สิ่งสำคัญที่ต้องคำนึงในการดำเนินการแบบเชื่อมตรงคือ ค่าความหน่วงเชื่อมตรง (on-line delay: δ) ซึ่งเมื่อรับข้อมูลนำเข้าและดำเนินการคำนวณแล้ว ในบางกรณีข้อมูลนำเข้าที่รับเข้าไปแล้วนั้นยังไม่พร้อมที่จะดำเนินการคำนวณ ต้องมีการรับข้อมูลนำเข้าเพิ่มเข้ามา ในส่วนนี้คือค่า

ความหน่วงเชื่อมตรง ซึ่งก็คือจำนวนข้อมูลนำเข้าที่รับเข้ามาแล้วยังไม่สามารถผลิตคำตอบได้นั่นเอง ถ้าค่าความหน่วงเชื่อมตรงมีค่ามาก หมายถึงต้องรับข้อมูลนำเข้าไปหลายตัวก่อนจึงจะผลิตคำตอบออกมาได้ ค่าความหน่วงเชื่อมตรงที่ต่ำที่สุดคือ 0 ซึ่งก็คือรับข้อมูลนำเข้าเพียงตัวแรกตัวเดียวก็สามารถผลิตคำตอบได้ทันที ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า ผลลัพธ์จำนวน n ตำแหน่งแรกนั้นสามารถคำนวณออกมาได้จากตัวถูกดำเนินการ $n+\delta$ ตำแหน่งแรก โดยค่าความหน่วงเชื่อมตรงในแต่ละครั้งจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับทิศทางการดำเนินการคำนวณและประเภทของการดำเนินการคำนวณด้วย [12]

การดำเนินการแบบเชื่อมตรงสามารถให้นิยามได้ชัดเจน ดังนี้

กำหนดให้ β เป็นเลขฐานของระบบจำนวน

D และ E เป็นชุดตัวเลขแบบจำกัด

ตัวดำเนินการแบบเชื่อมตรง (φ) คือ การประมวลผลจากข้อมูลนำเข้า X ในระบบจำนวน (β, D) และให้ผลลัพธ์เป็น Y ในระบบจำนวน (β, E) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันได้ดังนี้

$$\varphi : D^N \rightarrow E^N$$

โดยที่ D^N และ E^N หมายถึงเซตของลำดับของชุดตัวเลขที่มีความยาวไม่จำกัดบน D และ E ตามลำดับ

กำหนดให้ $X = (x_i x_{i+1} x_{i+2} \ldots)_\beta$ และ $Y = (y_i y_{i+1} y_{i+2} \ldots)_\beta$ โดยที่ สำหรับทุกค่า $i \geq 1$ และ x_i และ y_i เป็นสมาชิกใน D และ E ตามลำดับ นั่นคือ

$$\varphi(x_i x_{i+1} x_{i+2} \ldots) = (y_i y_{i+1} y_{i+2} \ldots)$$

เนื่องจากฟังก์ชัน φ เป็นฟังก์ชันการคำนวณแบบเชื่อมตรง และมี δ เป็นค่าความหน่วงเชื่อมตรง จะมีฟังก์ชัน ϕ_i ดังนี้

$$\phi_i : D^{i+\delta} \rightarrow E$$

และ

$$\phi_i\left(x_i x_{i+1} \ldots x_{i+\delta}\right) = y_i$$

นอกจากนี้การคำนวณแบบลำดับ (sequential) สามารถเพิ่มประสิทธิภาพได้ โดยใช้แนวคิดการดำเนินการแบบท่อตรง (pipeline process) ซึ่งทำให้การคำนวณต่างๆ ที่ต่อเนื่องกันสามารถดำเนินไปได้โดยไม่จำเป็นต้องรอให้การดำเนินการคำนวณก่อนหน้าเสร็จสมบูรณ์ก่อน แต่นั่นหมายความว่าทุกตัวดำเนินการคำนวณจะต้องมีทิศทางในการคำนวณเป็นทิศทางเดียวกัน

การบวก การลบ และการคูณในแบบดั้งเดิมนั้นจะมีทิศทางในการคำนวณจากตำแหน่งที่มีนัยสำคัญน้อยกว่าไปตำแหน่งที่มีนัยสำคัญมากกว่า ซึ่งค่าความหน่วงสำหรับการบวก การลบ และการคูณจะมีค่าเป็นศูนย์ แต่การหารนั้นได้รับการพิสูจน์แล้วว่ามีทิศทางการคำนวณได้เพียงทางเดียวคือ คำนวณจากตำแหน่งที่มีนัยสำคัญมากกว่าไปตำแหน่งที่มีนัยสำคัญน้อยกว่าเท่านั้น สำหรับการทำงานแบบเชื่อมตรง ตัวดำเนินการคำนวณทุกตัวจะต้องมีทิศทางในการคำนวณไปในทิศเดียวกัน ดังนั้นการบวก การลบ การคูณ และการหารจะต้องมีทิศทางการคำนวณจากตำแหน่งที่มีนัยสำคัญมากไปหาตำแหน่งที่มีนัยสำคัญน้อย

ตัวอย่าง 2.9 *กำหนดให้* $X = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ *และ* $Y = y_1 y_2 y_3 \ldots y_n$ *เป็นสองจำนวนใดๆ ในระบบ และมีผลการคูณเป็น* $S = s_1 s_2 s_3 \ldots s_n$ *โดยมี* $\delta = 0$ *จงอธิบายหลักการทำงานของการคูณแบบเชื่อมตรง*

วิธีทำ

ในกระบวนการคูณแบบเชื่อมตรง ตัวเลขที่นำมาคูณกันจะมีค่าเชิงตัวเลขดังสมการต่อไปนี้

$$X = \sum_{i-1}^{n} x_i \beta^{-i} \qquad \text{----- (1)}$$

$$Y = \sum_{i-1}^{n} y_i \beta^{-i} \qquad \text{----- (2)}$$

กำหนดให้

X_j เป็นผลรวมของ x โดยที่ $x \in X_n$ เมื่อพิจารณาค่าจากหลักที่ 1 ถึงหลักที่ j

Y_j เป็นผลรวมของ y โดยที่ $y \in Y_n$ เมื่อพิจารณาค่าจากหลักที่ 1 ถึงหลักที่ j

จะได้

$$X_i = \sum_{i-1}^{j} x_i \beta^{-i} = X_{j-1} + x_j \beta^{-j} \qquad \text{----- (3)}$$

$$Y_i = \sum_{i-1}^{j} y_i \beta^{-i} = Y_{j-1} + y_j \beta^{-j} \qquad \text{----- (4)}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & & x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \\
 & & & & & & y_1 & y_2 & \cdots & y_i & \cdots & y_n \\ \cline{7-12}
 & & & & & & x_1 y_n & x_2 y_n & \cdots & x_i y_n & \cdots & x_n y_n \\
 & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & & x_1 y_i & x_2 y_i & \cdots & x_i y_i & \cdots & x_n y_i & & \\
 & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
 & & x_1 y_2 & x_2 y_2 & \cdots & x_i y_2 & \cdots & x_n y_2 & & & & \\
 & x_1 y_1 & x_2 y_1 & \cdots & x_i y_1 & \cdots & x_n y_1 & & & & & \\ \cline{2-12}
s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & s_n \\ \hline \hline
\end{array} \times$$

รูปที่ 2.1 แสดงแผนผังการคูณแบบเชื่อมตรงของจำนวนสองจำนวนที่มี n หลัก

จากรูปที่ 2.1 เมื่อพิจารณาการคูณของข้อมูล j หลัก ผลคูณ $X_j Y_j$ จะสามารถหาค่าได้เป็น

$$X_j Y_j = X_{j-1} Y_{j-1} + \left(X_j y_j + Y_{j-1} X_j \right) \beta^{-j} \qquad \text{----- (5)}$$

กล่าวคือ เมื่อข้อมูลนำเข้าคือ ตัวตั้ง $X = x_1 x_2 x_3 ... x_n$ และตัวคูณ $Y = y_1 y_2 y_3 ... y_n$ ทุกรอบที่มีการอ่านข้อมูลนำเข้าทั้งสองจำนวน (x_j และ y_j) ผลคูณ

$X_j y_j = x_1 y_j + x_2 y_j + \ldots + x_j y_j$ และ $Y_{j-1} x_j = y_1 x_j + y_2 x_j + \ldots + y_{j-1} x_j$ โดย $X_j y_j$ และ $Y_{j-1} x_j$ จะเกิดเพิ่มขึ้นมาในทุกรอบที่ j ของการคูณและจะถูกนำไปรวมกับผลบวกย่อยจากรอบที่ผ่านมา ทำให้เราสามารถคำนวณคำตอบ S_j ได้

คำตอบที่ได้จากสมการ (5) คือคำตอบที่สามารถผลิตออกมาได้เมื่อมีการคำนวณเสร็จสิ้นบางส่วน โดยอัลกอริทึมจะต้องทำการคำนวณข้อมูล $\delta + 1$ หลักถึงจะผลิตคำตอบหลักแรกได้ ดังนั้นเมื่อทำการคำนวณหลักที่ $j > \delta$ จะต้องมีการผลิตคำตอบในหลักที่ $(j - \delta)$ ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการคำนวณรอบถัดไป เราจึงต้องทำการเลื่อนจุดทศนิยมไปอยู่ในตำแหน่งหลังจากหลักของคำตอบที่ต้องการ โดยการคูณ β^j ให้กับผลลัพธ์ที่ได้จากสมการ (5) ดังนี้

$$P = \left(X_{j-1} Y_{j-1} + \left(X_j y_j + Y_{j-1} X_j\right)\beta^{-j}\right)\beta^j \qquad \text{----- (6)}$$

จากสมการ (6) ในแต่ละรอบของการทำงาน เราจะได้คำตอบที่เป็นเลขทศนิยม ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็นสองส่วน คือส่วนที่อยู่หน้าทศนิยมและส่วนที่อยู่หลังทศนิยม โดยส่วนที่อยู่หน้าทศนิยมคือผลลัพธ์ที่ได้จากการคูณกันของเลขสองจำนวน ส่วนที่อยู่หลังทศนิยมก็คือค่าที่เหลืออยู่ในระบบที่จะนำไปใช้ในการคำนวณรอบต่อไป

บทที่ 3

ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น

จุดประสงค์หลักของงานวิจัยนี้ คือ นำเสนออัลกอริทึมการคูณแบบเชื่อมตรง (on-line multiplication) บนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น (Flexible Interval Representation System, FIRS) โดยระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นนี้จะใช้จำนวนเพียงจำนวนเดียวในการแสดงช่วง ทำให้สามารถลดเนื้อที่ที่ใช้ในการแสดงช่วงให้น้อยลงได้

สำหรับเนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงแรงจูงใจในการนำเสนออัลกอริทึมการคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น โดยจะทำการปรับปรุงระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นให้สามารถทำการคูณแบบเชื่อมตรงได้

3.1 บทกล่าวนำ

ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นเป็นระบบจำนวนที่ถูกพัฒนามาจากระบบแทนช่วง ซึ่งระบบแทนช่วงเป็นระบบที่ถูกเสนอขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นระหว่างการคำนวณทางคณิตศาสตร์ ที่ในบางครั้งอาจมีความจำเป็นต้องปัดเศษที่ได้จากการคำนวณในบางตำแหน่งทิ้งเพื่อลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณ หรือในกรณีที่ระบบมีรูปแบบแทนจำนวนที่จำกัดทำให้ระบบไม่สามารถรองรับการคำนวณให้ครบทุกตัวเลขได้ ทำให้มีความจำเป็นต้องปัดเศษในบางตำแหน่งทิ้งเพื่อให้ระบบสามารถทำงานต่อไปได้ อีกทั้งยังมีความผิดพลาดของข้อมูลที่อาจเกิดจากความคลาดเคลื่อนของอุปกรณ์การวัด หรือจากข้อมูลนำเข้า ซึ่งปัญหาต่างๆ เหล่านี้ส่งผลให้คำตอบที่ได้จากการคำนวณมีความผิดพลาดคลาดเคลื่อน ดังนั้นวิธีการแก้ปัญหาในเรื่องนี้คือการแทนข้อมูลที่ได้มาด้วยช่วงซึ่งประกอบด้วยค่าขอบเขตสองค่า การแทนข้อมูลด้วยช่วงนี้สามารถรับประกันได้ว่าคำตอบที่ถูกต้องจะปรากฏอยู่ในช่วงที่ได้จากการคำนวณอย่างแน่นอน แต่ระบบแทนช่วงประสบปัญหาทางด้านความสิ้นเปลืองเนื้อที่และมีความล่าช้าในการคำนวณ

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้น ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นจึงได้ถูกนำเสนอขึ้นโดยใช้แนวคิดของระบบแทนช่วงมาประยุกต์ใช้กับระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมาย ทำให้ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นนี้สามารถลดความสิ้นเปลืองของเนื้อที่ให้น้อยลงได้ 25 เปอร์เซ็น เมื่อเทียบกับระบบแทนช่วงแบบมีเครื่องหมายดั้งเดิม (classical signed digit interval representation system) ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นนี้สามารถแสดงช่วงได้โดยใช้ชุดตัวเลขเพียงชุดเดียวเท่านั้น การดำเนินการ

พื้นฐานทางเลขคณิต ได้แก่ การบวก การลบ การคูณ และการหาร แบบลำดับสามารถดำเนินการบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นนี้ได้ รวมถึงการบวกและการลบแบบขนาน (parallel addition and subtraction) ก็สามารถดำเนินการบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นนี้ได้เช่นกัน ซึ่งการบวกและการลบแบบขนานนี้สามารถลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลงได้

เพื่อให้ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นสามารถดำเนินการแบบท่อตรงได้ แนวคิดของการคำนวณแบบเชื่อมตรงได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้กับระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น โดยจะมุ่งเน้นไปที่การคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น เนื่องจากบางรูปแบบแทนจำนวนของระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นไม่สามารถทำการคูณแบบเชื่อมตรงได้ ดังนั้นจะต้องมีการปรับปรุงระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นเพื่อให้รองรับการคูณแบบเชื่อมตรงได้

3.2 ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น

ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นใช้แนวคิดของการแสดงขอบเขตล่างและขอบเขตบนไว้ในตัวเลขเพียงตัวเดียว เรียกว่า “ตัวเลขยืดหยุ่น” กล่าวคือจะมองตัวเลขแต่ละตัวในรูปของช่วงทำให้ระบบนี้สามารถใช้จำนวนเพียงจำนวนเดียวในการแทนค่าช่วงได้ โดยระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นมีนิยามดังต่อไปนี้

นิยามที่ 3.1 *ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นประกอบด้วยฐาน* β *และชุดตัวเลข* D *โดยที่* $\beta = 2$ *และ* $D = \{\overline{1}, \gamma, 0, \alpha, 1, \bar{\gamma}, \overline{\alpha}\}$ *ซึ่ง* $\gamma, \alpha, \bar{\gamma}, \overline{\alpha}$ *เรียกว่า ตัวเลขยืดหยุ่น (flexible digit) โดยที่* $\bar{\gamma}$ *เป็นตัวผกผันการบวกของ* γ *และ* $\overline{\alpha}$ *เป็นตัวผกผันการบวกของ* α *โดยขอบเขตล่างและขอบเขตบนของตัวเลขยืดหยุ่นสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3.1*

ตารางที่ 3.1 แสดงขอบเขตล่างและขอบเขตบนของตัวเลขยืดหยุ่น

ตัวเลขยืดหยุ่น	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน
γ	$\overline{1}$	0
α	0	1
$\bar{\gamma}$	1	0
$\overline{\alpha}$	0	$\overline{1}$

นิยามที่ 3.2 *รูปแบบแทนช่วง* $X = x_0 x_1 x_2 ... x_n$ *ใน* $x_i \in D$ *สำหรับ* $0 \le i \le n$ *ในระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น สามารถแสดงช่วง* $[A, B]$ *ได้โดย*

$$A = \sum_{i=0}^{n} \min(x_i) \times 2^{n-i} \quad \text{และ} \quad B = \sum_{i=0}^{n} \max(x_i) \times 2^{n-i}$$

ตัวอย่างที่ 3.1 *ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น*

ตารางที่ 3.2 แสดงตัวอย่างของระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น

ช่วง	ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น
$[9,16]$	$10\gamma\gamma\gamma$
$[-3,1]$	$\gamma\bar{\gamma}01$
$[0.25,1.25]$	$\alpha.010$
$[35, 35]$	100011

จากตารางที่ 3.2 พิจารณาค่าของ $10\gamma\gamma\gamma$ ที่ใช้แสดงช่วง $[9,16]$ เมื่อแทนค่า γ ด้วย $\bar{1}$ หรือ 0 ใน $10\gamma\gamma\gamma$ แล้ว เราสามารถหาได้สองค่าคือ

$10\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ ซึ่งมีค่าเป็น 9 เมื่อ γ มีค่าเป็น $\bar{1}$

10000 ซึ่งมีค่าเป็น 16 เมื่อ γ มีค่าเป็น 0

นั่นคือ ค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดที่อยู่ในช่วง $[9,16]$ ด้วยวิธีนี้การคำนวณค่าของช่วงสามารถทำได้โดยการแทนค่าของ γ, α, $\bar{\gamma}$ และ $\bar{\alpha}$ ด้วยค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมด ค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดที่ได้จะเป็นขอบเขตล่างและขอบเขตบนของช่วงดังกล่าว

สมบัติที่สำคัญของระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นคือ ระบบนี้สามารถแสดงช่วงได้โดยใช้จำนวนเพียงจำนวนเดียว (ชุดตัวเลขหนึ่งชุด) เนื่องจากระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นมีความซ้ำซ้อน จำนวนช่วงในระบบนี้จึงอาจมีรูปแบบแทนจำนวนได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ ดังตัวอย่างในตารางที่ 3.3

ตารางที่ 3.3 แสดงตัวอย่างของระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นที่มีรูปแบบแทนจำนวนได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ

ช่วง	ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น
$[3,11]$	$\alpha 011$, $\alpha\bar{\alpha}011$
$[-2,2]$	$\gamma\bar{\gamma}10$, $\alpha\bar{1}0$
$[0.25,1.25]$	$\alpha.010$
$[16,16]$	10000

เนื่องจากระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นมีรูปแบบแทนจำนวนได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ แต่บางรูปแบบแทนจำนวนไม่สามารถดำเนินการคูณแบบเชื่อมตรงได้ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอการปรับปรุงระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นให้สามารถดำเนินการคูณแบบเชื่อมตรงได้ รูปแบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นที่ถูกปรับปรุงนี้จะถูกเรียกว่า รูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง (On-line Ready form for FIRS, ORFIRS)

นิยามที่ 3.3 *รูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นสามารถจำแนกประเภทของช่วงได้ เพียงพิจารณาตัวเลขในสองตำแหน่งแรก* (x_0, x_1) *ของชุดตัวเลขเท่านั้น ซึ่งรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงที่ใช้พิจารณาประเภทของช่วงสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 3.4*

ตารางที่ 3.4 แสดงรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงที่ใช้พิจารณาประเภทของช่วง

ORFIRS	ประเภทของช่วง
$x_0 = 1$	ช่วงบวก-บวก
$x_0 = \alpha, x_1 = 0$ หรือ $x_0 = \alpha, x_1 = \alpha$	ช่วงศูนย์-บวก
$x_0 = \bar{1}$	ช่วงลบ-ลบ
$x_0 = \gamma, x_1 = 0$ หรือ $x_0 = \gamma, x_1 = \gamma$	ช่วงลบ-ศูนย์
$x_0 = \alpha, x_1 = \bar{1}$ หรือ $x_0 = \alpha, x_1 = \gamma$ หรือ $x_0 = \gamma, x_1 = 1$ หรือ $x_0 = \gamma, x_1 = \alpha$	ช่วงลบ-บวก

หมายเหตุ *เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ เราจะแบ่งประเภทของช่วงออกเป็นหกประเภทดังนี้ ช่วงบวก-บวก* $[+,+]$, *ช่วงศูนย์-บวก* $[0,+]$, *ช่วงลบ-ลบ* $[-,-]$, *ช่วงลบ-ศูนย์* $[-,0]$, *ช่วงลบ-บวก* $[-,+]$ *และช่วงศูนย์* $[0,0]$

ตัวอย่างที่ 3.2 *แสดงการเปรียบเทียบการอ่านชุดตัวเลขหลักต่อหลักระหว่างระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นกับรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง*

ตารางที่ 3.5 แสดงการเปรียบเทียบการอ่านชุดตัวเลขหลักต่อหลัก
ระหว่างระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นกับรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง

ประเภทของช่วง	FIRS	**จำนวนครั้งในการอ่าน (หลัก)**	ORFIRS	**จำนวนครั้งในการอ่าน (หลัก)**
ช่วงบวก-บวก	$0\alpha 1$	2	$1\bar{\gamma}1$	1
ช่วงลบ-ลบ	$\gamma\bar{\gamma}01$	2	$\bar{1}\alpha 01$	1
ช่วงลบ-บวก	$\alpha\alpha\alpha\gamma$	4	$\alpha\bar{1}11\bar{\gamma}$	2

จากตัวอย่างที่ 3.2 พิจารณาชุดตัวเลข $\alpha\alpha\alpha\gamma$ ที่ใช้แสดงช่วงลบ-บวกของระแบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น และชุดตัวเลข $\alpha\bar{1}1\bar{\gamma}1$ ที่ใช้แสดงช่วงลบ-บวกของรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ เราจะทำการพิจารณาแยกเป็นสองกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 : พิจารณาประเภทช่วงจากค่าขอบเขตล่าง

เราจะทำการแทนค่าขอบเขตล่างของตัวเลขยืดหยุ่นลงในชุดตัวเลข $\alpha\alpha\alpha\gamma$ และชุดตัวเลข $\alpha\bar{1}11\bar{\gamma}$ ตามลำดับ จะได้ประเภทของช่วงของชุดตัวเลขทั้งสอง ดังตารางที่ 3.6 และตารางที่ 3.7

ตารางที่ 3.6 แสดงประเภทของช่วงของชุดตัวเลข $\alpha\alpha\alpha\gamma$
เมื่อแทนค่าขอบเขตล่างของตัวเลขยืดหยุ่น

ชุดตัวเลข	การแทนค่า	ประเภทของช่วง
α	$0 \quad = 0$	ศูนย์
$\alpha\alpha$	$00 \quad = 0$	ศูนย์
$\alpha\alpha\alpha$	$000 \quad = 0$	ศูนย์
$\alpha\alpha\alpha\gamma$	$000\bar{1} \quad = \bar{1}$	ลบ

ตารางที่ 3.7 แสดงประเภทของช่วงของชุดตัวเลข $\alpha\bar{1}11\bar{\gamma}$
เมื่อแทนค่าขอบเขตล่างของตัวเลขยืดหยุ่น

ชุดตัวเลข	การแทนค่า	ประเภทของช่วง
α	$0 \quad = 0$	ศูนย์
$\alpha\bar{1}$	$0\bar{1} \quad = \bar{1}$	ลบ
$\alpha\bar{1}1$	$0\bar{1}1 \quad = \bar{1}$	ลบ
$\alpha\bar{1}11$	$0\bar{1}11 \quad = \bar{1}$	ลบ
$\alpha\bar{1}11\bar{\gamma}$	$0\bar{1}111 \quad = \bar{1}$	ลบ

จากตารางที่ 3.6 และตารางที่ 3.7 เมื่อพิจารณาประเภทของช่วงของชุดตัวเลขทั้งสองจะพบว่า ชุดตัวเลข $\alpha\alpha\alpha\gamma$ จะต้องทำการอ่านตัวเลขทั้งหมด 4 หลักจึงจะทราบว่าเป็นช่วงลบ แต่ชุดตัวเลข $\alpha\bar{1}11\bar{\gamma}$ ทำการอ่านตัวเลขเพียง 2 หลักก็ทราบแล้วว่าเป็นช่วงลบ

กรณีที่ 2 : พิจารณาประเภทช่วงจากค่าขอบเขตบน

เราจะทำการแทนค่าขอบเขตบนของตัวเลขยืดหยุ่นลงในชุดตัวเลข $\alpha\alpha\alpha\gamma$ และชุดตัวเลข $\alpha\bar{1}11\bar{\gamma}$ ตามลำดับ จะได้ประเภทของช่วงของชุดตัวเลขทั้งสอง ดังตารางที่ 3.8 และตารางที่ 3.9

ตารางที่ 3.8 แสดงประเภทของช่วงของชุดตัวเลข $\alpha\alpha\alpha\gamma$
เมื่อแทนค่าขอบเขตบนของตัวเลขยืดหยุ่น

ชุดตัวเลข	การแทนค่า	ประเภทของช่วง
α	$1 \quad = 1$	บวก
$\alpha\alpha$	$11 \quad = 3$	บวก
$\alpha\alpha\alpha$	$111 \quad = 7$	บวก
$\alpha\alpha\alpha\gamma$	$1110 \quad = 14$	บวก

ตารางที่ 3.9 แสดงประเภทของช่วงของชุดตัวเลข $\alpha\bar{1}11\bar{\gamma}$
เมื่อแทนค่าขอบเขตบนของตัวเลขยืดหยุ่น

ชุดตัวเลข	การแทนค่า	ประเภทของช่วง
α	$1 \quad = 1$	บวก
$\alpha\bar{1}$	$1\bar{1} \quad = 1$	บวก
$\alpha\bar{1}1$	$1\bar{1}1 \quad = 3$	บวก
$\alpha\bar{1}11$	$1\bar{1}11 \quad = 7$	บวก
$\alpha\bar{1}11\bar{\gamma}$	$1\bar{1}110 \quad = 14$	บวก

จากตารางที่ 3.8 และตารางที่ 3.9 เมื่อพิจารณาประเภทของช่วงของชุดตัวเลขทั้งสองจะพบว่า ชุดตัวเลข $\alpha\alpha\alpha\gamma$ และชุดตัวเลข $\alpha\bar{1}11\bar{\gamma}$ ทำการอ่านตัวเลขเพียง 1 หลักก็ทราบแล้วว่าเป็นช่วงบวก

เมื่อต้องพิจารณาประเภทของช่วงของชุดตัวเลขทั้งสอง เราจะต้องทำการพิจารณาทั้งขอบเขตล่างและขอบเขตบนของชุดตัวเลขไปพร้อมๆ กัน ซึ่งจะทำให้ชุดตัวเลข $\alpha\alpha\alpha\gamma$ จะต้องทำการอ่านตัวเลขทั้งหมด 4 หลัก จึงจำแนกได้ว่าชุดตัวเลข $\alpha\alpha\alpha\gamma$ นี้เป็นช่วงลบ-บวก ซึ่งต่างจากชุดตัวเลข $\alpha\bar{1}11\bar{\gamma}$ ที่อ่านตัวเลขเพียง 2 หลักก็เพียงพอที่จะจำแนกได้ว่าเป็นช่วงลบ-บวก

3.3 ความสมบูรณ์ของรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น

เนื่องจากมีการปรับปรุงระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นให้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง ทำให้ต้องคำนึงถึงความสมบูรณ์ (completeness) ของรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง โดยจะแสดงให้เห็นว่าช่วงใดๆ สามารถหารูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงได้ ดังทฤษฎีบทที่ 3.1

ทฤษฎีบทที่ 3.1 *สำหรับจำนวนจริง* X *และ* Y *ใดๆ ช่วง* $[X,Y]$ *สามารถมีรูปแบบแทนช่วง (interval representation) ที่อยู่ในรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงได้*

พิสูจน์

วิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ จะเสนออัลกอริทึมสำหรับการแปลง (conversion) ช่วงใดๆ ที่อยู่ในรูปของรูปแบบแทนช่วงของระบบเลขฐานสอง (binary interval representation) ให้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง

Algorithm 1 : ConvertBiToORFIRS (Convert binary interval representation to on-line ready form for FIRS)

Input: interval [A, B]

$A = a_0a_1a_2\ldots a_n$ where $a_i \in \{0,1\}$ and a_0 is a signed bit

$B = b_0b_1b_2\ldots b_n$ where $b_i \in \{0,1\}$ and b_0 is a signed bit

Output: $S = s_0s_1s_2\ldots s_n$ where $s_i = \{\bar{1}, \gamma, 0, \alpha, 1, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}\}$

Begin

if ($A > 0$) **then** $\{ 0 < A < B \}$

A' = Two's complement (A)

B' = Two's complement (B)

Lower = BiToSignedDigit (A')

Upper = BiToSignedDigit (B')

$s_1s_2\ldots s_n$ = ConverToFIRS (Lower, Upper)

s_0 = 1

else if ($A = 0$) **then** $\{ 0 = A < B \}$

Lower = BiToSignedDigit (A)

Upper = BiToSignedDigit (B)

S = ConverToFIRS (Lower, Upper)

else if ($B < 0$) **then** $\{ A < B < 0 \}$

A' = Two's complement (A)

B' = Two's complement (B)

Lower = BiToSignedDigit (A')

Upper = BiToSignedDigit (B')

$s_1 s_2 \ldots s_n$ = ConverToFIRS (Lower, Upper)

$s_0 = \overline{1}$

else if ($B = 0$) **then** $\{ A < B = 0 \}$

Lower = BiToSignedDigit (A)

Upper = BiToSignedDigit (B)

S = ConverToFIRS (Lower, Upper)

else if ($A < 0$ and $B > 0$) **then** $\{ A < 0 \text{ and } B > 0 \}$

if ($a_1 a_2 \ldots a_n < b_1 b_2 \ldots b_n$) **then**

if ($a_1 = 0$) **then**

$s_0 = \alpha$

$s_1 = \overline{1}$

A' = Two's complement ($a_2 \ldots a_n$)

$B' = b_2 \ldots b_n$

Lower $= A'$

Upper $= B'$

$s_2 \ldots s_n$ = ConverToFIRS (Lower, Upper)

else

$s_0 = \alpha$

$s_1 = \gamma$

$A' = \overline{1} \times (a_2 \ldots a_n)$

B' = $\overline{1}\times$ Two's complement ($b_2 \ldots b_n$)

Lower = A'

Upper = B'

$s_2 \ldots s_n$ = ConverToFIRS (Lower, Upper)

end if

else

if (b_1 = 0) then

s_0 = γ

s_1 = 1

A' = $\overline{1}\times$ ($a_2 \ldots a_n$)

B' = $\overline{1}\times$ Two's complement ($b_2 \ldots b_n$)

Lower = A'

Upper = B'

$s_2 \ldots s_n$ = ConverToFIRS (Lower, Upper)

else

s_0 = γ

s_1 = α

A' = Two's complement ($a_2 \ldots a_n$)

B' = $b_2 \ldots b_n$

Lower = A'

Upper = B'

$s_2 \ldots s_n$ = ConverToFIRS (Lower, Upper)

end if

end if

end if

End

แนวคิดของอัลกอริทึม 1

อัลกอริทึม 1 เป็นอัลกอริทึมหลักที่ใช้ในการแปลงระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นไปเป็นรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็นห้ากรณี คือ ช่วงบวก-บวก, ช่วงศูนย์-บวก, ช่วงลบ-ลบ, ช่วงลบ-ศูนย์ และช่วงลบ-บวก

ขั้นตอนการทำงานของอัลกอริทึม 1 เป็นดังนี้

Input : Binary Number System

↓

Two's Complement

↓

Signed Digit Number Systems

↓

FIRS

↓

Output : ORFIRS

Algorithm 2 : BiToSignedDigit (Convert binary digit to signed digit number system)

Input: binary digit X

$X = x_0x_1x_2\ldots x_n$ where $x_i \in \{0,1\}$ and x_0 is a signed bit

Output: $Y = y_1y_2\ldots y_n$ where $y_i = \{\bar{1},0,1\}$

Begin

$i = 1$

while ($i \leq n$) do

if ($x_0 = 1$) then $y_i = -x_i$ else $y_i = x_i$ end if

$i = i + 1$

end do

End

แนวคิดของอัลกอริทึม 2

อัลกอริทึม 2 เป็นอัลกอริทึมที่ใช้ในการแปลงระบบเลขฐานสองที่อยู่ในรูป two's complement ไปเป็นระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมาย เพื่อให้ทราบค่าเครื่องหมายที่แท้จริงของระบบเลขฐานสอง

Algorithm 3 : ConvertToFIRS (Convert signed digit number system to FIRS)

Input: interval [A, B]

$A = a_0 a_1 a_2 \ldots a_n$ where $a_i \in \{0,1\}$ and a_0 is a signed bit

$B = b_0 b_1 b_2 \ldots b_n$ where $b_i \in \{0,1\}$ and b_0 is a signed bit

Output: $S = s_0 s_1 s_2 \ldots s_n$ where $s_i = \{\overline{1}, \gamma, 0, \alpha, 1, \overline{\gamma}, \overline{\alpha}\}$

Begin

while (not-end-of-data) **do**

if ($a_i = \overline{1}$ and $b_i = \overline{1}$) **then** $s_i = \overline{1}$

else if ($a_i = \overline{1}$ and $b_i = 0$) **then** $s_i = \gamma$

else if ($a_i = 0$ and $b_i = 0$) **then** $s_i = 0$

else if ($a_i = 0$ and $b_i = 1$) **then** $s_i = \alpha$

else if ($a_i = 1$ and $b_i = 1$) **then** $s_i = 1$

else if ($a_i = 1$ and $b_i = 0$) **then** $s_i = \overline{\gamma}$

else if ($a_i = 0$ and $b_i = \overline{1}$) **then** $s_i = \overline{\alpha}$

end if

end do

End

แนวคิดของอัลกอริทึม 3

อัลกอริทึม 3 เป็นอัลกอริทึมที่ใช้ในการแปลงระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมายไปเป็นระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น จุดมุ่งหมายของอัลกอริทึมนี้คือ ต้องการรวมขอบเขตบนและขอบเขตล่างให้อยู่ในชุดตัวเลขเพียงชุดเดียว

พิสูจน์อัลกอริทึม

เราจะต้องแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ของอัลกอริทึมข้างต้นนี้คือ รูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง พิจารณาช่วง [A, B] เมื่อ

$A = a_0a_1a_2\ldots a_n$ โดยที่ $a_i \in \{0,1\}$ และ a_0 คือบิตเครื่องหมาย

$B = b_0b_1b_2\ldots b_n$ โดยที่ $b_i \in \{0,1\}$ และ b_0 คือบิตเครื่องหมาย

โดยจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นห้ากรณีตามประเภทของช่วง ดังนี้

กรณีที่ 1 : ช่วงบวก-บวก

เราจะทำการแปลง A และ B ที่เป็นเลขฐานสองไปเป็นระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมาย และนำจำนวนทั้งสองจำนวนนี้ไปแปลงให้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง

ดังนั้น $A = a_1a_2\ldots a_n$ และ $B = b_1b_2\ldots b_n$ เมื่อ $a_1a_2\ldots a_n$ = 10…0 – (Two's complement ของ $a_1a_2\ldots a_n$) และ 10…0 คือเลขฐานสองที่ 0 อยู่ n ตำแหน่ง

สมมุติให้ $a'_1a'_2\ldots a'_n$ และ $b'_1b'_2\ldots b'_n$ แทนค่าที่เป็นลบของ two's complement ของ $a_1a_2\ldots a_n$ และ $b_1b_2\ldots b_n$ ตามลำดับ ดังนั้น $a_1a_2\ldots a_n$ = 10…0 + $a'_1a'_2\ldots a'_n$ และ $b_1b_2\ldots b_n$ = 10…0 + $b'_1b'_2\ldots b'_n$

ข้อสังเกต ค่าที่เป็นไปได้ของชุดตัวเลขทั้ง $a'_1a'_2\ldots a'_n$ และ $b'_1b'_2\ldots b'_n$ คือ 0 หรือ $\overline{1}$ เพราะ $a'_1a'_2\ldots a'_n$ และ $b'_1b'_2\ldots b'_n$ มีค่าเป็นลบ เราจึงสามารถจับคู่ของชุดตัวเลขทีละหลักได้ เช่น $[a'_1, b'_1]$, $[a'_{21}, b'_2]$ ซึ่งแต่ละคู่นั้นมีค่าเป็น 0, $\overline{\alpha}$, γ หรือ $\overline{1}$

จากข้อมูลข้างต้นแสดงให้เห็นว่า เราสามารถแสดงรูปแบบแทนช่วงของระบบเลขฐานสอง [A, B] ให้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงที่มี n + 1 ตำแหน่งได้ และตำแหน่งแรกมีค่าเท่ากับ 1

กรณีที่ 2 : ช่วงศูนย์-บวก

เราจะทำการแปลง A และ B ที่เป็นเลขฐานสองไปเป็นระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมาย และนำจำนวนทั้งสองจำนวนนี้ไปแปลงให้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง

ค่าที่เป็นไปได้ของชุดตัวเลขทั้ง $a_1a_2\ldots a_n$ และ $b_1b_2\ldots b_n$ คือ 0 หรือ 1 เราจึงสามารถจับคู่ของชุดตัวเลขทีละหลักได้ เช่น [a_1, b_1], [a_2, b_2] ซึ่งแต่ละคู่นั้นมีค่าเป็น 0 หรือ α

จากข้อมูลข้างต้นแสดงให้เห็นว่า เราสามารถแสดงรูปแบบแทนช่วงของระบบเลขฐานสอง [*A*, *B*] ให้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงที่มี *n* ตำแหน่งได้ และสองตำแหน่งแรกมีค่าเท่ากับ $\alpha 0$ หรือ $\alpha\alpha$

กรณีที่ 3 : ช่วงลบ-ลบ

เราจะทำการแปลง *A* และ *B* ที่เป็นเลขฐานสองไปเป็นระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมาย และนำจำนวนทั้งสองจำนวนนี้ไปแปลงให้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง

ดังนั้น $A = \overline{a}_1\overline{a}_2...\overline{a}_n$ และ $B = \overline{b}_1\overline{b}_2...\overline{b}_n$ เมื่อ $\overline{a}_1\overline{a}_2...\overline{a}_n = \overline{1}0...0$ – (two's complement ของ $a_1a_2…a_n$) และ $\overline{1}0...0$ คือเลขฐานสองที่ 0 อยู่ *n* ตำแหน่ง

สมมุติให้ $a_1'a_2'...a_n'$ และ $b_1'b_2'...b_n'$ แทนค่าที่เป็นลบของ two's complement ของ $a_1a_2…a_n$ และ $b_1b_2…b_n$ ตามลำดับ ดังนั้น $\overline{a}_1\overline{a}_2...\overline{a}_n = \overline{1}0...0 + a_1'a_2'...a_n'$ และ $\overline{b}_1\overline{b}_2...\overline{b}_n = \overline{1}0...0 + b_1'b_2'...b_n'$

ข้อสังเกต ค่าที่เป็นไปได้ของชุดตัวเลขทั้ง $a_1'a_2'...a_n'$ และ $b_1'b_2'...b_n'$ คือ 0 หรือ 1 เพราะ $a_1'a_2'...a_n'$ และ $b_1'b_2'...b_n'$ มีค่าเป็นบวก เราจึงสามารถจับคู่ของชุดตัวเลขทีละหลักได้ เช่น $[a_1', b_1']$, $[a_{21}', b_2']$ ซึ่งแต่ละคู่นั้นมีค่าเป็น 0, α , $\bar{\gamma}$ หรือ 1

จากข้อมูลข้างต้นแสดงให้เห็นว่า เราสามารถแสดงรูปแบบแทนช่วงของระบบเลขฐานสอง [*A*, *B*] ให้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงที่มี *n* + 1 ตำแหน่งได้ และตำแหน่งแรกมีค่าเท่ากับ $\overline{1}$

กรณีที่ 4 : ช่วงลบ-ศูนย์

เราจะทำการแปลง *A* และ *B* ที่เป็นเลขฐานสองไปเป็นระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมาย และนำจำนวนทั้งสองจำนวนนี้ไปแปลงให้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง

ค่าที่เป็นไปได้ของชุดตัวเลขทั้ง $a_1a_2…a_n$ และ $b_1b_2…b_n$ คือ 0 หรือ $\overline{1}$ เราจึงสามารถจับคู่ของชุดตัวเลขทีละหลักได้ เช่น $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ ซึ่งแต่ละคู่นั้นมีค่าเป็น 0 หรือ γ

จากข้อมูลข้างต้นแสดงให้เห็นว่า เราสามารถแสดงรูปแบบแทนช่วงของระบบเลขฐานสอง [*A*, *B*] ให้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงที่มี *n* ตำแหน่งได้ และสองตำแหน่งแรกมีค่าเท่ากับ $\gamma 0$ หรือ $\gamma\gamma$

กรณีที่ 5 : ช่วงลบ-บวก

สำหรับกรณีนี้จะแบบออกเป็นสองกรณีย่อยที่ต้องพิจารณาดังนี้

กรณีที่ 5.1 : $\|B\|$ อยู่ห่างจากศูนย์มากกว่า $\|A\|$ $\left(\|b_1b_2...b_n\| \geq \|a_1a_2...a_n\|\right)$ ในกรณีนี้เราจะใช้ $\alpha\overline{1}$ แทนช่วงลบ-บวก ดังนั้น b_1 = 1 จะได้ B = $1b_2...b_n$ ซึ่ง $b_2...b_n$ คือระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมาย n ตำแหน่ง และตำแหน่งแรกมีค่าเท่ากับ 1

ถ้า a_1 = 0 ดังนั้น $A = \overline{a}_2...\overline{a}_n$ เราสามารถแทนค่า A ในระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมาย n ตำแหน่งได้ และตำแหน่งแรกมีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งเหมือนกับกรณีที่ 4 ช่วงลบ-ลบ

ดังนั้น $A = 1a'_2...a'_n$ สำหรับ $a'_2...a'_n$ คือ two's complement ของ $a_2...a_n$

ค่าที่เป็นไปได้ของชุดตัวเลข $a'_2...a'_n$ และ $b_2...b_n$ คือ 0 หรือ 1 เราจึงสามารถจับคู่ของชุดตัวเลขทีละหลักได้ เช่น [a_1, b_1], [a_2, b_2] สำหรับ [a_1, b_1] = $\alpha\overline{1}$ และคู่อื่นๆ มีค่าเป็น 0 , $\overline{\gamma}$, α หรือ 1

ถ้า a_1 = 1 ดังนั้น $A = \overline{a}_2...\overline{a}_n$ เราสามารถแทนค่า A ในระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมาย n ตำแหน่งได้ และตำแหน่งแรกมีค่าเท่ากับ $\overline{1}$ ในกรณีนี้เราจะใช้ $\alpha\gamma$ แทน $\alpha\overline{1}$

สำหรับ B = $1b_2...b_n$ เราสามารถแทนค่า B ในระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมายที่มี n + 1 ตำแหน่ง และตำแหน่งแรกมีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งมีความคล้ายคลึงกับกรณีที่ 1 ช่วงบวก-บวก

ดังนั้น $B = 10b'_2...b'_n$ ซึ่ง $b'_2...b'_n$ แทนค่าที่เป็นลบของ two's complement ของ $b_2...b_n$ และค่าที่เป็นบวกของ $b_2...b_n$ คือ 0 หรือ 1

ในกรณี $A = \overline{1}\overline{a}_2...\overline{a}_n$ เราสามารถแทนค่า A ในระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมายที่มี n ตำแหน่ง และตำแหน่งแรกมีค่าเท่ากับ $\overline{1}$ และค่าที่เป็นบวกของ $\overline{a}_2...\overline{a}_n$ คือ 0 หรือ 1

ดังนั้นเราจึงสามารถจับคู่ของชุดตัวเลขทีละหลักได้ เช่น [a_1, b_1], [a_2, b_2] สำหรับ [a_1, b_1] = $\alpha\gamma$ และคู่อื่นๆ มีค่าเป็น 0 , $\overline{\gamma}$, α หรือ 1

กรณีที่ 5.2 : $\|A\|$ อยู่ห่างจากศูนย์มากกว่า $\|B\|$ $\left(\|a_1a_2...a_n\| \geq \|b_1b_2...b_n\|\right)$ การพิสูจน์ทำได้เหมือนกับกรณี 5.1 ในกรณีนี้เราจะใช้ $\gamma 1$ หรือ $\gamma\alpha$

จากกรณีที่ 5.1 และกรณีที่ 5.2 เราสามารถแสดงรูปแบบแทนช่วงของระบบเลขฐานสอง [A, B] ให้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงที่มี n + 1 ตำแหน่งได้ และสองตำแหน่งแรกมีค่าเท่ากับ $\alpha\overline{1}$, $\alpha\gamma$, $\gamma 1$ หรือ $\gamma\alpha$

ตัวอย่างที่ 3.3 *จงหารูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงของ [00011, 01100]*

วิธีทำ ขั้นตอนการหารูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงจะแสดงในตารางที่ 3.10

ตารางที่ 3.10 แสดงขั้นตอนการแปลงช่วง [00011, 01100]
ให้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง

ขั้นตอนการแปลง	ผลลัพธ์
1.ช่วง [00011, 01100]	A = 00011 และ B = 01100
2.รูปแบบ Two's complement	A' = 11101 และ B' = 10100
3.ระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมาย	Lower = $\bar{1}\bar{1}0\bar{1}$ และ Upper = $0\bar{1}00$
4.แปลงขั้นตอนที่ 3 ทีละตำแหน่ง	$1\gamma\bar{1}0\gamma$

ตัวอย่างที่ 3.4 *จงหารูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงของ [11111111101, 01111100111]*

วิธีทำ ขั้นตอนการหารูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงจะแสดงในตารางที่ 3.11

ตารางที่ 3.11 แสดงขั้นตอนการแปลงช่วง [11111111101, 01111100111] ให้อยู่ในรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง

ขั้นตอนการแปลง	**ผลลัพธ์**
1.ช่วง [11111111101, 01111100111]	A = 11111111101 และ B = 01111100111
2.รูปแบบ Two's complement	A' = 00000000011 และ B' = 10000011001
3.ระบบแทนจำนวนแบบมีเครื่องหมาย	Lower = 00000000011 และ Upper = 10000011001
4.แปลงขั้นตอนที่ 3 ทีละตำแหน่ง	$\alpha\bar{1}1111\bar{\gamma}\bar{\gamma}1\alpha1$

3.4 การคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น

การดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตของงานวิจัยนี้ จะมุ่งเน้นไปที่การคูณแบบเชื่อมตรง โดยจะทำการคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น แต่ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นบางรูปแบบไม่สามารถดำเนินการคูณแบบเชื่อมตรงได้ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงได้ทำการปรับปรุงระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นเพื่อนำมาใช้ดำเนินการคูณแบบเชื่อมตรง ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นที่ถูกปรับปรุงมีชื่อเรียกว่า รูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง

บทตั้งที่ 1 ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นมีสมบัติปิดการคูณ

พิสูจน์

วิธีการพิสูจน์บทตั้งนี้ จะเสนออัลกอริทึมการสร้างกฎการคูณแบบเชื่อมตรง

Algorithm 4 : MultiplicationRules (Generate multiplication rules)

Input: d_x, d_y where $d_x, d_y \in \{\bar{1}, \gamma, 0, \alpha, 1, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}\}$

Output: d_z where $d_z \in \{\bar{1}, \gamma, 0, \alpha, 1, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}\}$

Begin

X = [min$X$, max$X$]

Y = [min$Y$, max$Y$]

foreach (d_x in digit set of ORFIRS)

foreach (d_y in digit set of ORFIRS)

if (min$X$ = positive) **then**

if (min$Y$ = positive) **then**

d_z = combine (min$d_x \times$ mind_y , max$d_x \times$ maxd_y)

else if (max$Y$ = negative) **then**

d_z = combine (max$d_x \times$ mind_y , min$d_x \times$ maxd_y)

else if ($0 \in Y$) **then**

d_z = combine (max$d_x \times$ mind_y , max$d_x \times$ maxd_y)

end if

else if (max$X$ = negative) **then**

if (min$Y$ = positive) **then**

d_z = combine (min$d_x \times$ maxd_y , max$d_x \times$ mind_y)

else if (max$Y$ = negative) **then**

d_z = combine (max$d_x \times$ maxd_y , min$d_x \times$ mind_y)

else if ($0 \in Y$) **then**

d_z = combine (min$d_x \times$ maxd_y , min$d_x \times$ mind_y)

end if

else if ($0 \in X$) **then**

if (min$Y$ = positive) **then**

d_z = combine (min$d_x \times$ maxd_y , max$d_x \times$ maxd_y)

else if (max$Y$ = negative) **then**

d_z = combine (max$d_x \times$ mind_y , min$d_x \times$ mind_y)

else if ($0 \in Y$) **then**

a = lower endpoint of X; b = upper endpoint of X

c = lower endpoint of Y; d = upper endpoint of Y

minZ = min {$b \times c$, $a \times d$}

maxZ = max {$a \times c$, $b \times d$}

if (minZ = $b \times c$ and maxZ = $a \times c$) **then**

d_z = combine (max$d_x \times$ maxd_y , min$d_x \times$ mind_y)

else if (minZ = $a \times d$ and maxZ = $a \times c$) **then**

d_z = combine (min$d_x \times$ maxd_y , min$d_x \times$ mind_y)

else if (minZ = $b \times c$ and maxZ = $b \times d$) **then**

d_z = combine (max$d_x \times$ maxd_y , max$d_x \times$ maxd_y)

else if (minZ = $a \times d$ and maxZ = $b \times d$) **then**

d_z = combine (min$d_x \times$ mind_y , max$d_x \times$ maxd_y)

end if

end if

end if

end for

end for

End

แนวคิดของอัลกอริทึม 4

อัลกอริทึม 4 เป็นอัลกอริทึมที่ใช้ในการสร้างกฎการคูณแบบเชื่อมตรง โดยนำแนวคิดการคูณบนระบบแทนช่วงมาประยุกต์ใช้ โดยแบ่งตามประเภทของช่วงของข้อมูลนำเข้า X และ Y ดังนี้

กรณีที่ 1 $X \in [+,+] \times Y \in [+,+]$
กรณีที่ 2 $X \in [+,+] \times Y \in [-,+]$
กรณีที่ 3 $X \in [+,+] \times Y \in [-,-]$
กรณีที่ 4 $X \in [-,+] \times Y \in [+,+]$
กรณีที่ 5 $X \in [-,+] \times Y \in [-,+]$
กรณีที่ 6 $X \in [-,+] \times Y \in [-,-]$
กรณีที่ 7 $X \in [-,-] \times Y \in [+,+]$
กรณีที่ 8 $X \in [-,-] \times Y \in [-,+]$
กรณีที่ 9 $X \in [-,-] \times Y \in [-,-]$

พิสูจน์อัลกอริทึม

กำหนดให้

$D=\{\bar{1},\gamma,0,\alpha,1,\bar{\gamma},\bar{\alpha}\}$ เป็นชุดตัวเลขของระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น

X , Y และ Z เป็นสมาชิกในชุดตัวเลข D โดยที่ $Z=X\times Y$

จะแสดงว่า Z ซึ่งเป็นผลคูณของ X และ Y เป็นสมาชิกในชุดตัวเลข D

จาก X และ Y เป็นสมาชิกในชุดตัวเลข D จะได้ว่า $X_{\min}$, $X_{\max}$, $Y_{\min}$ และ $Y_{\max}$ จะมีค่าที่เป็นไปได้เป็นสมาชิกของเซต $\{\bar{1},0,1\}$ และจากการคูณแบบดั้งเดิมบนระบบแทนช่วง จะได้ว่า

$$Z=X\times Y=\begin{bmatrix}\min\{X_{\min}\times Y_{\min},X_{\min}\times Y_{\max},X_{\max}\times Y_{\min},X_{\max}\times Y_{\max}\},\\ \max\{X_{\min}\times Y_{\min},X_{\min}\times Y_{\max},X_{\max}\times Y_{\min},X_{\max}\times Y_{\max}\}\end{bmatrix}$$

เมื่อพิจารณาการคูณในตารางที่ 3.12 จะเห็นว่า ผลคูณของตัวเลขในเซต $\{\bar{1},0,1\}$ จะมีคุณสมบัติปิดการคูณในเซต $\{\bar{1},0,1\}$

ตารางที่ 3.12 แสดงผลคูณของตัวเลขในเซต $\{\bar{1},0,1\}$

ผลคูณ		**ตัวตั้ง**		
		$\bar{1}$	0	1
ตัวคูณ	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
	0	0	0	0
	1	$\bar{1}$	0	1

ดังนั้นขอบเขตล่างและขอบเขตบนของ Z จะเกิดจากการรวมกันของผลคูณของ $\{\bar{1},0,1\}$ โดยค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ Z แสดงได้ดังตารางที่ 3.13

ตารางที่ 3.13 แสดงค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ Z

Z		**ขอบเขตบน**		
		$\bar{1}$	0	1
ขอบเขตล่าง	$\bar{1}$	$[\bar{1},\bar{1}]=\bar{1}$	$[\bar{1},0]=\gamma$	$[\bar{1},1]$
	0	$[0,\bar{1}]=\bar{\alpha}$	$[0,0]=0$	$[0,1]=\alpha$
	1	$[1,\bar{1}]$	$[1,0]=\bar{\gamma}$	$[1,1]=1$

จากตารางที่ 3.9 พบว่า $[\bar{1},1]$ และ $[1,\bar{1}]$ เป็นค่าขอบเขตล่างและขอบเขตบนของ Z ที่ไม่สามารถเกิดขึ้นจริง

พิจารณา $[\bar{1},1]$ ค่า $\bar{1}$ จะเกิดจากการคูณของ $\bar{1}\times 1$ หรือ $1\times\bar{1}$

ค่า 1 จะเกิดจากการคูณของ 1×1 หรือ $\bar{1}\times\bar{1}$

ดังนั้นค่า $[\bar{1},1]$ จะเกิดได้จากการคูณของ $[\bar{1}\times 1]\times[1,1]$, $[\bar{1},\bar{1}]\times[\bar{1},1]$, $[1,\bar{1}]\times[1,1]$ และ $[\bar{1},\bar{1}]\times[1,\bar{1}]$ แต่ $[\bar{1},1]$ และ $[1,\bar{1}]$ ไม่ได้เป็นสมาชิกในชุดตัวเลข D ดังนั้น $[\bar{1},1]$ และ $[1,\bar{1}]$ จึงไม่สามารถเป็นผลคูณที่เกิดได้จริงของ $X\times Y$

ในทางเดียวกัน เมื่อพิจารณาผลลัพธ์ที่ทำให้เกิดค่า $[1,\bar{1}]$ นั้นก็เกิดขึ้นจริงไม่ได้เช่นเดียวกับ $[\bar{1},1]$

ดังนั้น ค่า Z ที่เป็นผลคูณของ X และ Y จะมีค่าอยู่ในชุดตัวเลข D เสมอ

จากอัลกอริทึมข้างต้น เราสามารถสร้างกฎการคูณแบบเชื่อมตรงได้ ดังตัวอย่างกฎการคูณแบบเชื่อมตรงที่แสดงในตารางที่ 3.14 และตารางที่ 3.15

ตารางที่ 3.14 แสดงกฎการคูณระหว่างช่วงลบ-บวกสองช่วง

$[-,+]$ \ $[-,+]$		X						
		$\bar{1}$	0	1	α	γ	$\bar{\alpha}$	$\bar{\gamma}$
Y	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\gamma}$	α	γ
	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	$\bar{1}$	0	1	α	γ	$\bar{\alpha}$	$\bar{\gamma}$
	α	$\bar{1}$	0	1	α	γ	$\bar{\alpha}$	$\bar{\gamma}$
	γ	1	0	$\bar{1}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\gamma}$	α	γ
	$\bar{\alpha}$	0	0	0	0	0	0	0
	$\bar{\gamma}$	γ	0	$\bar{\gamma}$	$\bar{\gamma}$	0	γ	0

ตารางที่ 3.15 แสดงกฎการคูณระหว่างช่วงลบ-บวกสองช่วง

$[-,+]$ \ $[-,+]$		X						
		$\bar{1}$	0	1	α	γ	$\bar{\alpha}$	$\bar{\gamma}$
Y	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	$\bar{1}$	0	1	1	0	$\bar{1}$	0
	α	$\bar{\alpha}$	0	α	α	0	$\bar{\alpha}$	0
	γ	$\bar{\gamma}$	0	γ	γ	0	$\bar{1}$	0
	$\bar{\alpha}$	α	0	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	0	α	0
	$\bar{\gamma}$	γ	0	$\bar{\gamma}$	$\bar{\gamma}$	0	γ	0

หลังจากเราทราบกฎการคูณแบบเชื่องตรงของรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงแล้ว เราสามารถทำการคูณแบบเชื่อมตรงได้ดังทฤษฎีบทที่ 3.1

ทฤษฎีบทที่ 3.2 การคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นสามารถคำนวณได้

พิสูจน์

วิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ จะเสนออัลกอริทึมการคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น

Algorithm 5 : On-lineMultiplication

Input: ORFIR *X*, *Y*

$X = (X_i)_{i\geq 1}$ where $x_1 = ... = x_\delta = 0$ and $x_i \in \{\bar{1}, \gamma, 0, \alpha, 1, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}\}$

$Y = (Y_i)_{i\geq 1}$ where $y_1 = ... = y_\delta = 0$ and $y_i \in \{\bar{1}, \gamma, 0, \alpha, 1, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}\}$

Output: ORFIR *Z*

$Z = (Z_i)_{i\geq 1}$ where $z_i \in \{\bar{1}, \gamma, 0, \alpha, 1, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}\}$ such that

$$\sum_{i\geq 1} z_i \beta^{-i} = \sum_{i\geq 1} x_i \beta^{-i} \times \sum_{i\geq 1} y_i \beta^{-i}$$

Begin

$z_1 = ... = z_\delta = 0$

$W_\delta = 0$

$i = \delta + 1$

if ($i \ge \delta + 1$) then

[min*X*, max*X*] = CheckSigned (*X*)

[min*Y*, max*Y*] = CheckSigned (*Y*)

$z_1 = ... = z_\delta = 0$

$W_1 = ... = W_\delta = 0$

$i = \delta + 1$

while ($i \ge \delta + 1$) do

$W_i = \beta(W_{i-1} - Z_{i-1})$ + MultiplicationRules ($y_i X_i$)

+ MultiplicationRules ($x_i Y_{i-1}$)

z_i = round (W_i)

end do

end if

End

แนวคิดของอัลกอริทึม 5

อัลกอริทึม 5 เป็นอัลกอริทึมหลักที่ใช้ในการคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น หลักการการทำงานของอัลกอริทึม 5 คือจะตรวจสอบเครื่องหมายของข้อมูลนำเข้าก่อนการคำนวณ เพื่อแยกกรณีการคูณตามประเภทของช่วง

Algorithm 6 : CheckSigned (Check sign of ORFIRS)

Input: ORFIR *A*

$A = 0.00a_1a_2a_3\ldots a_n$ where $a_i \in \{\overline{1}, \gamma, 0, \alpha, 1, \overline{\gamma}, \overline{\alpha}\}$

Output: min*A*, max*A*

Begin

if (a_0 = 1) then

[min*A*, max*A*] = [positive, positive]

else

    end if
End

แนวคิดของอัลกอริทึม 6

อัลกอริทึม 6 เป็นอัลกอริทึมที่ใช้ในการตรวจสอบเครื่องหมายของรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง เพื่อจะได้รู้ว่ารูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงนี้แทนประเภทของช่วงใด

พิสูจน์อัลกอริทึม

เราจะต้องแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ของอัลกอริทึมข้างต้นนี้เป็นผลลัพธ์ที่อยู่ในช่วงที่ถูกต้อง โดยจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสองกรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 : การพิจารณาค่าขอบเขตล่าง

เราจะแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ Z_i จากอัลกอริทึมข้างต้นนี้อยู่ในชุดตัวเลข $D = \{\overline{1},0,1\}$ ผลลัพธ์ Z_i จะอยู่ในชุดตัวเลข $D = \{\overline{1},0,1\}$ ถ้า

$$-1 \leq Z_i \leq 1 \tag{1}$$

จากอัลกอริทึม 5

$$z_i = \text{round}\ (W_i) \tag{2}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$\frac{-1}{2} \leq W_{i-1} - Z_{i-1} \leq \frac{1}{2} \tag{3}$$

จากอัลกอริทึม 5

$$W_i = \beta\left(W_{i-1} - Z_{i-1}\right) + \text{MultiplicationRules}\ (y_i X_i) + \text{MultiplicationRules}\ (x_i Y_{i-1}) \tag{4}$$

จาก (3) และ (4) จะได้ว่า

$$\frac{-\beta}{2} + \frac{\beta^2}{2\beta^{\delta}(\beta-1)} \leq W_i \leq \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{2\beta^{\delta}(\beta-1)} \tag{5}$$

จาก (5) เราสามารถสรุปได้ว่า การคูณแบบเชื่อมตรงบนฐาน $\beta = 2$ สามารถดำเนินการได้โดยมีค่าความหน่วงเท่ากับสอง

กรณีที่ 2 : การพิจารณาค่าขอบเขตบน

การพิสูจน์เหมือนกับกรณีที่ 1

จากการพิสูจน์สามารถสรุปได้ว่า ค่าความหน่วงของการคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นมีค่าเท่ากับสอง

ตัวอย่างที่ 3.5 *การคูณแบบเชื่อมตรงของช่วง* $A = \left(0.00\alpha\bar{1}1\bar{\gamma}1\right)_2$ *และ* $B = \left(0.00\alpha\bar{1}1\bar{\gamma}10\right)_2$ *ในระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น*

วิธีทำ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคูณแบบเชื่อมตรงของช่วง $A = \left(0.00\alpha\bar{1}1\bar{\gamma}1\right)_2$ และ $B = \left(0.00\alpha\bar{1}1\bar{\gamma}10\right)_2$ แสดงได้ดังตารางที่ 3.12

ตารางที่ 3.16 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคูณแบบเชื่อมตรงของช่วง $A = \left(0.00\alpha\bar{1}1\bar{\gamma}1\right)_2$ และ $B = \left(0.00\alpha\bar{1}1\bar{\gamma}10\right)_2$

i	W_i	z_i
5	$.\alpha\bar{1}\bar{\gamma}01$	0
6	α $.\bar{1}\bar{\gamma}\bar{\gamma}\alpha\bar{\gamma}0$	α
7	$\bar{1}$ $.\bar{\gamma}10\bar{\alpha}1\bar{\gamma}0$	$\bar{1}$
8	$\bar{\gamma}$ $.10\bar{\alpha}1\bar{\gamma}0$	$\bar{\gamma}$
9	1 $.0\bar{\alpha}1\bar{\gamma}0$	1
10	$.\bar{\alpha}1\bar{\gamma}0$	0
11	$\bar{\alpha}$ $.1\bar{\gamma}0$	$\bar{\alpha}$
12	1 $.\bar{\gamma}0$	1
13	$\bar{\gamma}$ $.0$	$\bar{\gamma}$
14	$.0$	0

ผลลัพธ์ที่ได้จากการคูณแบบเชื่อมตรงคือ $S = \left(0.00000\alpha\bar{1}\bar{\gamma}10\bar{\alpha}1\bar{\gamma}0\right)_2$

บทที่ 4

บทวิเคราะห์ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงบทวิเคราะห์เกี่ยวกับระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นเทียบกับรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง โดยมีหัวข้อดังต่อไปนี้

4.1 เนื้อที่ที่ใช้ในการแสดงช่วง

ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นกับรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงนั้นใช้จำนวนบิตในการแสดงช่วงเท่ากันจึงไม่ส่งผลกระทบต่อการเพิ่มเนื้อที่ในการแสดงตัวเลขในช่วง แต่รูปแบบแทนจำนวนของรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงมีน้อยกว่ารูปแบบแทนจำนวนของระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น กล่าวคือรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงเป็นสับเซต (sub set) ของระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น ถึงแม้ว่ารูปแบบแทนจำนวนของรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงจะมีน้อยกว่าแต่ก็สามารถแสดงช่วงได้ครอบคลุมทุกช่วง ดังที่ได้พิสูจน์แล้วในทฤษฎีที่ 3.1

ข้อดีของรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงคือ สามารถจำแนกประเภทของช่วงได้จากการพิจารณาตัวเลขเพียงสองบิตแรกของชุดตัวเลขเท่านั้น ซึ่งบางรูปแบบแทนจำนวนของระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นไม่สามารถทำได้ ส่งผลให้รูปแบบแทนจำนวนดังกล่าวไม่สามารถดำเนินการแบบเชื่อมตรงโดยเฉพาะการคูณได้

4.2 เวลาที่ใช้ในการคำนวณ

การคูณแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นใช้เวลาเป็น $\theta(n)$ ซึ่งเร็วกว่าการคูณแบบดั้งเดิมบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นเพียงเล็กน้อยเท่านั้น แต่ข้อดีของการคูณแบบเชื่อมตรงคือสามารถนำไปใช้ร่วมกับการดำเนินการแบบท่อตรง เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการคำนวณแบบลำดับ และการคำนวณแบบเชื่อมตรงเป็นการดำเนินการที่ใช้กับตัวเลขที่มีความยาวไม่จำกัดได้ หมายความว่าถ้าเราต้องการผลลัพธ์ที่มีความละเอียดสูงมาก เราสามารถทำต่อไปได้หรือต้องการความละเอียดของผลลัพธ์เท่าใดก็หยุดได้เท่านั้น

บทที่ 5

สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลงานวิจัย

ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นไม่สามารถทำการคำนวณแบบเชื่อมตรงได้ เนื่องจากรูปแบบแทนจำนวนบางรูปแบบของระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นไม่เหมาะสมกับการดำเนินการคำนวณแบบเชื่อมตรง ส่งผลให้ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นนี้ไม่สามารถดำเนินการคำนวณแบบท่อตรงได้ด้วย ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงได้ทำการปรับปรุงระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นให้สามารถทำการคูณแบบเชื่อมตรงได้ เราจะเรียกระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นที่ถูกปรับปรุงนี้ว่า รูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง

เราสามารถจำแนกประเภทช่วงจากรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง โดยพิจารณาเพียงสองตำแหน่งแรกของชุดตัวเลขก็สามารถทราบได้แล้วว่ารูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงนี้แสดงช่วงใด โดยช่วงของข้อมูลที่รูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงสามารถแสดงได้แบ่งเป็นห้ากรณีด้วยกันคือ ช่วงบวก-บวก, ช่วงศูนย์-บวก, ช่วงลบ-ลบ, ช่วงลบ-ศูนย์ และช่วงลบ-บวก เมื่อพิจารณาสองตำแหน่งแรกของรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรง จะได้ว่ารูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงที่แสดงช่วงบวก-บวกคือ 1, รูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงที่แสดงช่วงศูนย์-บวกคือ $\alpha 0$ หรือ $\alpha\alpha$, รูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงที่แสดงช่วงลบ-ลบคือ $\overline{1}$, รูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงที่แสดงช่วงลบ-ศูนย์คือ $\gamma 0$ หรือ $\gamma\gamma$ และรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงที่แสดงช่วงลบ-บวกคือ $\alpha\overline{1}$, $\alpha\gamma$, $\gamma 1$ หรือ $\gamma\alpha$ ซึ่งเราสามารถนำรูปแบบที่พร้อมใช้งานแบบเชื่อมตรงนี้มาทำการคูณแบบเชื่อมตรง โดยจะมีค่าหน่วงของการคูณแบบเชื่อมตรงเท่ากับสอง

แม้ว่าเราจะปรับปรุงให้ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นสามารถทำการคูณแบบเชื่อมตรงได้แล้ว แต่ในอัลกอริทึมการคูณแบบเชื่อมตรงนั้น จะมีการสร้างกฎการคูณแบบเชื่อมตรง โดยกฎการคูณแบบเชื่อมตรงนี้จะถูกสร้างเก็บไว้ในหน่วยความจำของระบบ ทำให้สิ้นเปลืองเนื้อที่มากขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับการคูณแบบดั้งเดิมบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น เนื่องจากการคูณแบบเชื่อมตรงจะต้องสร้างกฎการคูณทั้งหมดสิบสองตารางเพื่อให้ครอบคลุมการคูณแบบเชื่อมตรงทั้งหมด แต่การคูณแบบดั้งเดิมนั้นสร้างกฎการคูณเพียงตารางเดียวก็ครอบคลุมการคูณทั้งหมดแล้ว

เมื่อเปรียบเทียบเรื่องเวลาที่ใช้ในการคำนวณ จะพบว่าเวลาที่ใช้ในการคูณแบบเชื่อมตรงนั้นไม่ได้น้อยกว่าเวลาที่ใช้ในการคูณแบบดั้งเดิมเท่าไรนัก แต่ข้อดีของการคูณแบบเชื่อมตรงคือสามารถนำไปทำการคำนวณแบบท่อตรงได้ ส่งผลให้การคำนวณแบบลำดับมีประสิทธิภาพมากขึ้น

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. ในอัลกอริทึมการคูณแบบเชื่อมตรง จะมีการสร้างกฎการคูณแบบเชื่อมตรง โดยกฎการคูณแบบเชื่อมตรงนี้จะถูกสร้างเก็บไว้ในหน่วยความจำของระบบ ทำให้สิ้นเปลืองเนื้อที่ ดังนั้นควรจะมีวิธีการสร้างกฎการคูณแบบใหม่เพื่อให้สิ้นเปลืองเนื้อที่น้อยลง
2. การออกแบบการดำเนินการบวกและการลบแบบเชื่อมตรงบนระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่น เมื่อการออกแบบการดำเนินการแบบเชื่อมตรงสมบูรณ์ จะส่งผลให้ระบบแทนช่วงแบบยืดหยุ่นสามารถดำเนินการคำนวนแบบท่อตรงได้ ซึ่งเป็นการเพิ่มประสิทธิภาพให้กับการคำนวณแบบลำดับ

รายการอ้างอิง

[1] Skeel, R. Round-off Error and the Patriot Missile. *SIAM News* 25 (July 1992) : 11.

[2] Hayes, B. A Lucid Interval. *American Scientist* 91 (November – December 2003) : 484-488.

[3] Pipop Thienprapasith. *Flexible Interval Representation System*. Master's Thesis, Department of Computer Engineering, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University, 2007.

[4] Jakrapan Sukontarach. *Parallel Additive Operation for Flexible Interval Representation System*. Master's Thesis, Department of Computer Engineering, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University, 2008.

[5] Avizienis, A. Signed-Digit Number Representations for Fast Parallel Arithmetic. *IRE Transactions of Electronic Computer* 10 (1961) : 389-400.

[6] Parhami, B. Generalized Signed-Digit Number Systems: A Unifying Framework for Redundant Number Representations. *IEEE Transactions on Computer* 39 (1990) : 89-98.

[7] Moore, R.E. Methods and Application of Interval Analysis. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia (1979).

[8] Kearfott, R.B. Interval Computations: Introduction, Uses, and Resources. *Euromath Bulletin* 2 (1996) : 95-112.

[9] Daumas, M., Melquiond, G., and Muñoz, C. Guaranteed Proofs Using Interval Arithmetic. *Proceedings of the 17^{th} IEEE Symposium on Computer Arithmetic* (2005) : 188-195.

[10] Ercegovac, M.D. On-line Arithmetic: An Overview. *Real time Signal Processing VII SPIE* 495 (1984) : 86-93.

[11] Trivedi, K.S., and Ercegovac, M.D. On-line Algorithm for Division and Multiplication. *IEEE Transactions on Computer* 26 (July 1977) : 681-687.

[12] Frougny, C., and Surarerks, A. On-line multiplication in real and complex base. *Proceedgins of the 16th IEEE Symposium on Computer Arithmetic* (2003) : 212-219.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวผกาวดี ทวีปัญญายศ เกิดเมื่อวันที่ 16 กันยายน พ.ศ. 2527 เรียนจบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลายจากโรงเรียนศรัทธาสมุทร จังหวัดสมุทรสงคราม เข้ารับการศึกษาต่อในระดับปริญญาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ จนสำเร็จการศึกษาในปีการศึกษา 2549