

บทที่ 4

ขั้นตอนการคำนวณดัชนีสมรรถนะ

ในบทนี้นำเสนอกระบวนการคำนวณค่าสั่งเชิงเลข (numerical procedure) สำหรับคำนวณดัชนีสมรรถนะของระบบ (2.7) สำหรับเซตเป็นไปได้อื่น (2.14) กระบวนการคำนวณที่เสนอเป็นผลมาจากบทที่ 3 ขั้นตอนการคำนวณหลักกล่าวในหัวข้อ 4.1 เป็นขั้นตอนทั่วไปสำหรับระบบที่มีเสถียรภาพแบบสัญญาณเข้ามีขอบเขต/สัญญาณออกมีขอบเขต ในหัวข้อ 4.2 พิจารณาหาสูตรการคำนวณขอบเขตบนของค่าฟังก์ชันนัลคลาดเคลื่อน $e_T(f)$ ที่เกิดจากการตัดปลายฟังก์ชันวัตถุประสงค์ สำหรับระบบที่มีเสถียรภาพเลขชี้กำลัง (exponentially stable system) ซึ่งเป็นระบบที่มีเสถียรภาพแบบสัญญาณเข้ามีขอบเขต/สัญญาณออกมีขอบเขตด้วย สูตรที่ได้มีความสำคัญในการกำหนดเวลาตัดปลาย T ที่ทำให้ความต้องการ $e_T \leq \epsilon_T$ เป็นจริง สำหรับค่าขอบเขต ϵ_T ที่กำหนดให้ค่าหนึ่ง ผลประการหนึ่งที่สำคัญคือสูตรที่ได้สามารถนำไปสร้างขั้นตอนเชิงเลขชนิดคำนวณได้อัตโนมัติ (automatic computation) ในการหาค่า T ทำให้การคำนวณค่าดัชนีสมรรถนะ และการออกแบบระบบควบคุมเพื่อให้บรรลุเงื่อนไข (1.2) สามารถคำนวณได้แบบอัตโนมัติเช่นกัน

4.1 ขั้นตอนหลักสำหรับคำนวณดัชนีสมรรถนะ

ถ้าเวลา T และจำนวนจุดตัวแทนสัญญาณ n มีค่ามากเพียงพอ จากประพจน์ที่ 3.1 ปัญหาการหาค่าดัชนีสมรรถนะสามารถแทนได้ด้วยปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ขนาดใหญ่ ที่นิยมในปริภูมิแบบยุคลิด ซึ่งในปัจจุบันปัญหาดังกล่าวสามารถหาค่าตอบได้ในทางปฏิบัติและใช้เวลาไม่นาน แม้ว่าปัญหาจะมีตัวแปรเป็นจำนวนมาก (เช่นมากกว่า 100,000 ตัวแปร) วิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าวมีหลายวิธี อาทิเช่นโดยวิธีจุดภายใน (interior-point method) วิทยานิพนธ์นี้ใช้ซอฟต์แวร์ SeDuMi พัฒนาโดย Sturm (1999) ในการหาค่าตอบสำหรับปัญหา (3.33) นอกจากนี้ยังมีซอฟต์แวร์อื่นที่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าวได้อีก อาทิเช่น SDPT3 (Tütüncü, Toh and Todd, 2003)

กระบวนการคำนวณค่าสั่งสำหรับการคำนวณดัชนีสมรรถนะของระบบ (2.7) สำหรับเซตเป็นไปได้อื่น P_j^* นิยามใน (2.14) แสดงในกระบวนการคำนวณ 4.1

กระบวนการคำนวณที่ 4.1 (Silpsrikul and Arunsawatwong, 2009)

ขั้นตอน 4.1.1: กำหนดตัวแทนสัญญาณ $h(t)$ สำหรับ $t \in [-T, T]$

ขั้นตอน 4.1.2: สร้างเวกเตอร์ c_h นิยามในสมการ (3.20)

ขั้นตอน 4.1.3: สร้างเมทริกซ์ Q_d ตามที่ระบุในสมการ (3.16)

ขั้นตอน 4.1.4: กำหนดเงื่อนไขนอร์ม L_2 ตามสมการ (3.29) และ/หรือ (3.31)

ขั้นตอน 4.1.5: กำหนดเงื่อนไขนอร์ม L_∞ ตามสมการ (3.30) และ/หรือ (3.32)

ขั้นตอน 4.1.6: แก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ (3.33)

4.2 ขั้นตอนการคำนวณดัชนีสมรรถนะสำหรับระบบที่มีเสถียรภาพเลขชี้กำลัง

ในหัวข้อนี้เสนอขั้นตอนการคำนวณดัชนีสมรรถนะ สำหรับระบบมีเสถียรภาพเลขชี้กำลัง อาศัยคุณสมบัติของระบบที่มีเสถียรภาพเลขชี้กำลัง ทำให้ขอบเขตบนของค่าฟังก์ชันนัลคลาดเคลื่อน e_T นิยามในสมการ (3.3) สามารถคำนวณได้ และสามารถคำนวณเวลาดัดปลาย T ที่ทำให้

$$e_T \leq \varepsilon_T \quad (4.1)$$

เมื่อกำหนดค่าขอบเขต ε_T ไว้ล่วงหน้า สูตรดังกล่าวมีส่วนสำคัญในการพัฒนากระบวนการคำนวณที่ 4.1 เพื่อให้กระบวนการดังกล่าวสามารถคำนวณได้แบบอัตโนมัติ

ระบบเชิงเส้น (2.7) ที่มีเสถียรภาพเลขชี้กำลังนิยามดังนี้

นิยาม 4.1 ระบบเชิงเส้น (2.7) มีเสถียรภาพเลขชี้กำลัง ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง $M > 0$, $T > 0$ และ $\alpha < 0$ ที่สอดคล้องกับ

$$|h(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad \text{สำหรับ } t \geq T \quad (4.2)$$

□

สังเกตว่าถ้าระบบ (2.7) มีเสถียรภาพเลขชี้กำลังแล้ว ระบบ (2.7) จะมีเสถียรภาพแบบสัญญาณเข้ามีขอบเขต/สัญญาณออกมีขอบเขตด้วย (เนื่องจากระบบที่มีเสถียรภาพแบบสัญญาณเข้ามีขอบเขต/สัญญาณออกมีขอบเขต สมมูลกับ $\|h\|_\infty < \infty$, ดู Chen (1983)) โดยทั่วไปเสถียรภาพแบบสัญญาณเข้ามีขอบเขต/สัญญาณออกมีขอบเขตของระบบเชิงเส้น (2.7) ไม่สมมูลกับเสถียรภาพเลขชี้กำลัง อย่างไรก็ตามมีระบบ (2.7) บางจำพวก อาทิเช่น ระบบตรรกยะ ระบบ RDDSs และระบบป้อนกลับด้วยสมการความร้อน (feedback systems with a heat equation) ที่เสถียรภาพทั้งสองสมมูลกัน และในกรณีระบบเหล่านี้ค่า α มีความสัมพันธ์กับพิกัดของเสถียรภาพ λ ดังนี้ $\lambda \leq \alpha$ (λ คือพิกัดของเสถียรภาพ ของฟังก์ชันลักษณะสมบัติระบบ (system's characteristic function) $D(\lambda)$ นิยามใน (2.18) หัวข้อ 2.5)

สำหรับระบบที่มีเสถียรภาพเลขชี้กำลัง ค่าขอบเขตบนของ $e_T(f)$ คำนวณได้จากสูตรในประพจน์ดังต่อไปนี้

ประพจน์ที่ 4.1 สมมติว่าระบบ (2.7) มีเสถียรภาพเลขชี้กำลัง และให้ f เป็นสัญญาณเข้าในเซตเป็นไปได้อัน \mathcal{P}_j นิยามใน (2.14) สำหรับค่า M , T และ α ที่สอดคล้องกับนิยาม 4.1 ค่า e_T คำนวณได้จาก

$$|e_T(f)| \leq F_m M e^{\alpha T} \quad (4.3)$$

โดยที่ $F_m = \max \{M_\infty/|\alpha|, M_2/\sqrt{2|\alpha|}\}$

พิสูจน์ ในการพิสูจน์พิจารณาเฉพาะพจน์ทางขวามือของสมการ (3.3) แยกการพิจารณาออกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ให้ $\|f\|_\infty \leq M_\infty$ และใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรในปริพันธ์ กล่าวคือ $t = -\tau$ จะให้ผลดังนี้

$$\left| \int_{-\infty}^{-T} h(-\tau) f(\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{-T} |h(-\tau)| |f(\tau)| d\tau \leq M_\infty \int_T^\infty |h(t)| dt \quad (4.4)$$

$$\leq M_\infty \int_T^\infty M e^{\alpha t} dt \quad (4.5)$$

$$\therefore \left| \int_{-\infty}^{-T} h(-\tau) f(\tau) d\tau \right| \leq \frac{M_\infty}{|\alpha|} M e^{\alpha T} \quad (4.6)$$

กรณีที่ 2 ให้ $\|f\|_2 \leq M_2$ เมื่อให้ T มีค่ามากเพียงพอ สัญญาณ f และ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรในปริพันธ์ให้ผลดังนี้

$$\left(\int_{-\infty}^{-T} h(-\tau) f(\tau) d\tau \right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^\infty f^2(\tau) d\tau \right) \left(\int_T^\infty h^2(t) dt \right) \quad (4.7)$$

$$\leq M_2^2 \left(\int_T^\infty M^2 e^{2\alpha t} dt \right) \quad (4.8)$$

$$\therefore \left| \int_{-\infty}^{-T} h(-\tau) f(\tau) d\tau \right| \leq \frac{M_2}{\sqrt{2|\alpha|}} M e^{\alpha T} \quad (4.9)$$

ดังนั้นผลของประพจน์เป็นไปตามสมการ (4.6) และ (4.9) □

ประพจน์ที่ 4.1 แสดงให้เห็นว่า

$$F_m M e^{\alpha T} \leq \varepsilon_T \Rightarrow e_T \leq \varepsilon_T \quad (4.10)$$

สำหรับระบบที่มีเสถียรภาพเลขชี้กำลัง เวลาตัดปลาย T ที่ทำให้ (4.1) เป็นจริงคำนวณได้จากกระบวนการคำนวณดังต่อไปนี้

กระบวนการคำนวณที่ 4.2

ขั้นตอนที่ 4.2.1: คำนวณค่าพิกัดเสถียรภาพ $\hat{\lambda}$ และเลือกค่า α ที่สอดคล้องกับ $\hat{\lambda} \leq \alpha < 0$

ขั้นตอนที่ 4.2.2: หาค่า T และ M ที่สอดคล้องกับ $F_m M e^{\alpha T} \leq \varepsilon_T$

จากขั้นตอนการคำนวณ 4.3 และ 4.4 ที่จะกล่าวถึงต่อไป

ค่าพิกัดเสถียรภาพของระบบตรรกะคำนวณได้จากขั้ว (pole) ของระบบ หรือวิธีที่เสนอโดย Zakian (1979a) สำหรับวิธีการคำนวณค่าพิกัดเสถียรภาพของ DDS และ RFDDS พัฒนา

โดย Arunsawatwong (1996) และ Nguyen and Arunsawatwong (2008) ตามลำดับ การคำนวณค่าพิกัดเสถียรภาพของระบบทั้งสองไม่สามารถหาได้ง่ายอย่างเช่นระบบตรรกยะ เนื่องจากจำนวนรากของสมการลักษณะสมบัติของระบบทั้งสองประเภทมีจำนวนอนันต์

เนื่องจากค่าพิกัดเสถียรภาพ λ เป็นแบบแผน (mode) ที่ช้าที่สุดของระบบ ดังนั้นเมื่อ T มีค่ามาก กราฟ $|h(t)|$ เมื่อ $t \geq T$ จะอยู่ในกรอบของเลขชี้กำลัง (exponential envelope) ซึ่งกำหนดด้วยค่า α ที่ถูกเลือกในกระบวนการคำนวณที่ 4.2 ถ้าเลือกค่า α ใกล้หรือเท่ากับค่าพิกัดเสถียรภาพ λ ของเลขชี้กำลังจะเป็นตัวแทนของ $|h(t)|$ ในการหาขอบเขตบนของ ε_T ได้ดี และจะมีผลต่อเวลาที่ใช้คำนวณค่าดัชนีสมรรถนะ

เมื่อกำหนดค่าขอบเขต ε_T และ α แล้ว เวลาตัดปลาย T และ M หารได้จากกระบวนการคำนวณ 4.3 และ 4.4 ซึ่งอธิบายอย่างคร่าวดังต่อไปนี้

กระบวนการคำนวณที่ 4.3

ขั้นตอนที่ 4.3.1: กำหนดค่าเริ่มต้นของ T จาก $4/|\alpha|$

ขั้นตอนที่ 4.3.2: คำนวณค่า F_m และค่า M จากประพจน์ 4.1 และขั้นตอนการคำนวณ 4.4 ตามลำดับ

ขั้นตอนที่ 4.3.3: ถ้า $F_m M e^{\alpha T} \leq \varepsilon_T$ แล้วค่า M และ T สามารถนำไปใช้ได้ มิเช่นนั้นแล้วให้เพิ่มค่า T เป็นสองเท่าและกลับไปดำเนินการขั้นตอน 4.3.2

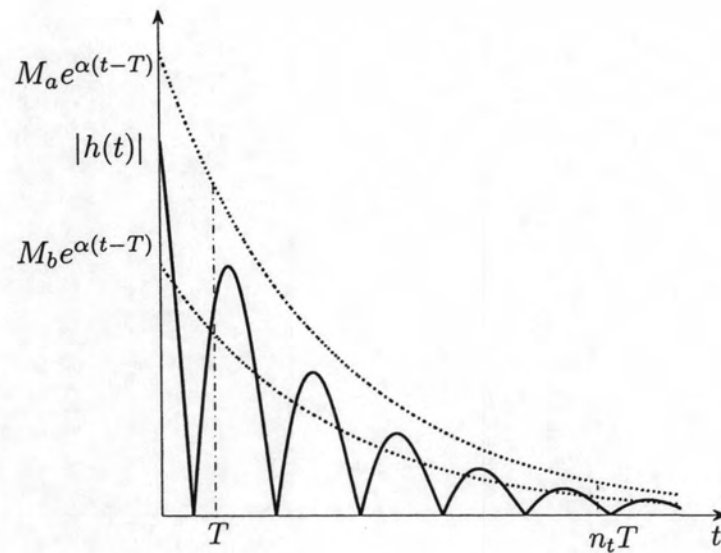
ค่าเริ่มต้นของเวลา T ที่กำหนดในกระบวนการคำนวณที่ 4.3 กำหนดจาก ค่าสถานะคงตัว (steady state time) ของระบบ หรือ 4 เท่าของค่าคงตัวเวลา (time constant) ซึ่งกำหนดจากแบบแผนที่ช้าที่สุดของระบบ ดังนั้นค่า T กำหนดมีความเหมาะสมเพียงพอที่จะใช้กำหนดจุดเริ่มของเลขชี้กำลังของ $|h(t)|$ สำหรับ $t \geq T$

กระบวนการคำนวณที่ 4.4

ขั้นตอนที่ 4.4.1: เลือกค่าเริ่มต้น M_a และ M_b เพื่อให้บางส่วนของกราฟสัญญาณ $|h(t)|$ อยู่ระหว่างกราฟ $M_a e^{\alpha(t-T)}$ และ $M_b e^{\alpha(t-T)}$ สำหรับ $t \in [T, n_t T]$, $n_t \geq 2$ ดูรูปที่ 4.1

ขั้นตอนที่ 4.4.2: ลดช่องว่างระหว่างกราฟ $M_a e^{\alpha(t-T)}$ และ $M_b e^{\alpha(t-T)}$ ให้มีค่าเล็กเพียงพอ โดยใช้ขั้นตอนแบ่งครึ่ง (bisection algorithm)

กำหนดให้เวกเตอร์ \bar{h}_T และ \bar{e}_T แทนกราฟสัญญาณ $|h(t)|$ และ $e^{\alpha(t-T)}$ สำหรับ $t \in [T, n_t T]$ ตามลำดับ ค่า $n_t \geq 2$ เป็นตัวกำหนดช่วงกว้างที่ใช้ในกระบวนการพิจารณาค่า M เมื่อ n_t มีค่ามากจะให้ผลการคำนวณที่มีความน่าเชื่อถือมากขึ้น แต่ในขณะเดียวกันทำให้การคำนวณหาค่า M ใช้เวลามากเช่นกัน ในทางปฏิบัติใช้ค่า $n_t = 2$ มีความเพียงพอแล้ว เพราะช่วงเวลาที่ดำเนินการกระบวนการที่ 4.4 ผลตอบฮิมพัลส์หนึ่งหน่วยอยู่ในช่วงสถานะอยู่ตัวแล้ว ขั้นตอนการคำนวณสำหรับกระบวนการที่ 4.3 และ 4.4 แสดงในขั้นตอนการคำนวณ 4.1 และ 4.2 ตามลำดับ



รูปที่ 4.1: การหาค่าพารามิเตอร์ M

ขั้นตอนวิธี 4.1

Choose α and ε_T ;

$F_m = \max\{M_\infty/|\alpha|, M_2/\sqrt{2|\alpha|}\}$;

$T = 2/|\alpha|$;

repeat

$T = 2T$;

 compute $h(t)$ for $t \in [0, 2T]$;

 evaluate M ; % Call algorithm 4.2

until $F_m M e^{\alpha T} \leq \varepsilon_T$;

ขั้นตอนวิธี 4.2

```

 $M_b = 0.5 * |h(T)|;$ 
 $M_a = M_b;$ 
repeat
   $M_a = 2 * M_a;$ 
until ( $M_a \bar{e}_T > \bar{h}_T$ );
repeat
   $M = (M_a + M_b)/2;$ 
  if ( $M_a \bar{e}_T > \bar{h}_T$ );
     $M_a = M;$ 
  else
     $M_b = M;$ 
  end;
until ( $(M_a - M_b)/M_a \leq \epsilon_M$ );
 $M = M_a;$ 

```

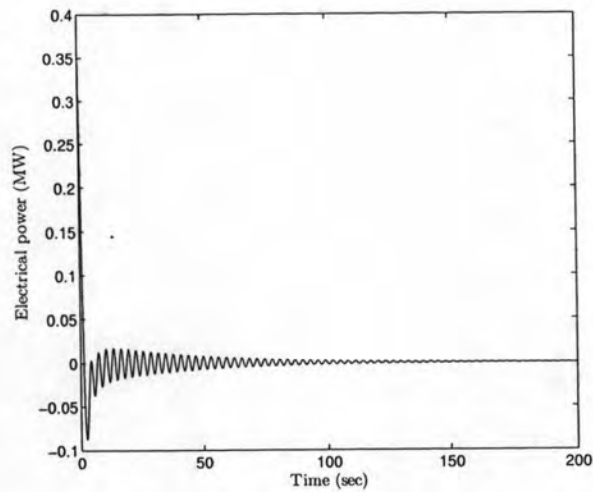
4.3 ตัวอย่างเชิงเลข

ตัวอย่างเชิงเลขที่นำมาแสดงในหัวข้อนี้คือ การคำนวณดัชนีสมรรถนะกำลังไฟฟ้าขาออก (electrical power output) ของระบบควบคุมเครื่องกำเนิดไฟฟ้ากังหันลม (wind turbine generating control system) สำหรับเซตเป็นไปได้อันที่กำหนดลักษณะด้วยเซต P_2^2 ระบบถูกรบกวนด้วยสัญญาณภายนอกคือสัญญาณรบกวนที่เกิดจากลมกระโชก (gust wind) ซึ่งเป็นสัญญาณเข้าเป็นไปได้อันแบบชั่วคราว (Lane, 1995; Lane, 2005) เนื่องด้วยวัตถุประสงค์ของหัวข้อนี้เพื่อเป็นตัวอย่างการคำนวณเชิงเลข รายละเอียดเกี่ยวกับระบบขอละไว้ ผู้อ่านสามารถอ่านเพิ่มเติมได้ใน Lane (1995, 2005) สมการสถานะของระบบดังกล่าวแสดงในภาคผนวก ก)

วัตถุประสงค์ของตัวอย่างการคำนวณที่แสดงในหัวข้อนี้คือ ต้องการเปรียบเทียบวิธีการคำนวณดัชนีสมรรถนะที่เสนอในวิทยานิพนธ์นี้ กับวิธีการคำนวณดัชนีสมรรถนะสำหรับเซตเป็นไปได้อัน P_2^2 ที่เสนอโดย Lane (1995) ซึ่งเซตเป็นไปได้อัน P_2^2 เป็นกรณีพิเศษของเซตเป็นไปได้อัน P_j^j ที่นิยามใน (2.14) แสดงให้เห็นถึงภาวะถ่วงดุล (trade off) ระหว่างจำนวนตัวแปรที่เพิ่มขึ้น กับค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์และเวลาที่ใช้ในการคำนวณ และลักษณะสัญญาณเข้าใหญ่สุดสำหรับเซตเป็นไปได้อัน P_2^2 ที่ทำให้เกิดขนาดของกำลังไฟฟ้าขาออกมาสุด

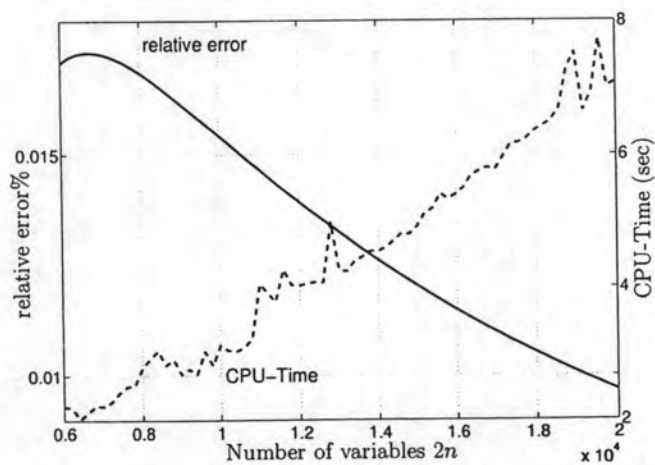
จากรูปที่ 4.2 เวลาหลังจาก 160 วินาที ผลตอบฮิมพัลส์หนึ่งหน่วยของสัญญาณออกที่พิจารณาเข้าอยู่ในสภาวะอยู่ตัวแล้ว ดังนั้นกำหนดให้เวลาดัดปลาย $T = 160$ วินาที นิยามค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

$$\text{ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์} \triangleq \frac{|\hat{v}_L(P_2^2) - \hat{v}_P(P_2^2)|}{\hat{v}_L(P_2^2)} \times 100\% \quad (4.11)$$



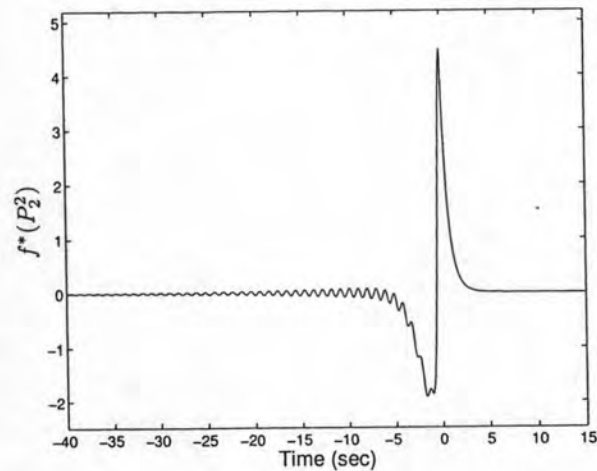
รูปที่ 4.2: ผลตอบอิมพัลส์หนึ่งหน่วยของกำลังไฟฟ้าขาออกระบบควบคุมเครื่องกำเนิดไฟฟ้ากังหันลม

โดยที่ $\hat{v}_L(P_2^2) = 1.1834$ MW เป็นค่าดัชนีสมรรถนะที่ได้จาก Lane (1995) และ $\hat{v}_P(P_2^2)$ เป็นดัชนีสมรรถนะที่ได้จากวิธีที่เสนอในวิทยานิพนธ์นี้โดยใช้จำนวนตัวแปรในการคำนวณต่างกัน รูปที่ 4.3 แสดงการถ่วงดุลกันระหว่างจำนวนตัวแปรกับ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และเวลาที่ใช้ในการคำนวณ เมื่อตัวแปรมากขึ้น ถึง 20,000 ตัวแปร เวลาที่ใช้ในการคำนวณดัชนีสมรรถนะน้อยกว่า 8 วินาที ในขณะที่ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ลดลงอยู่ในพิสัยที่ยอมรับได้



รูปที่ 4.3: กราฟแสดงค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และเวลาที่ใช้ในการคำนวณ ระหว่างจำนวนตัวแปร

สัญญาณเข้ามากที่สุดของระบบที่พิจารณาในตัวอย่างนี้แสดงในรูปที่ 4.4 เนื่องจากการกำหนดรูปแบบปัญหาในบทที่ 2 พิจารณาว่าค่าดัชนีสมรรถนะเกิดขึ้น ณ เวลา $t = 0$ ทำให้สัญญาณออกมากที่สุดสำหรับเซตเป็นไปได้ P_2^2 เกิดขึ้นก่อนเวลา $t = 0$



รูปที่ 4.4: สัญญาณเข้ามากสุดของระบบที่ใช้เป็นตัวอย่างการคำนวณเชิงเลข

ผลที่ได้ในตัวอย่างนี้คำนวณโดยใช้โปรแกรม MATLAB 7.5 สำหรับ Windows XP บนคอมพิวเตอร์แบบตั้งโต๊ะด้วยตัวประมวลผลแบบ Intel Core(TM)2 ความเร็ว 1.86 GHz จำนวนความจำเข้าถึงแบบสุ่ม (random access memory หรือ RAM) 1.0 GB

4.4 สรุป

กระบวนการคำนวณ 4.1 เป็นขั้นตอนหลักคำนวณดัชนีสมรรถนะ ซึ่งเป็นขั้นตอนทั่วไปสำหรับระบบที่มีเสถียรภาพแบบสัญญาณเข้ามีขอบเขต/สัญญาณออกมีขอบเขต เวลาตัดปลาย T สามารถกำหนดได้โดยผู้ออกแบบ ผู้ออกแบบสามารถตรวจสอบลักษณะของผลตอบอิมพัลส์หนึ่งหน่วย และเปลี่ยนเวลาตัดปลาย T ได้ระหว่างการค้นหาตัวควบคุมที่สอดคล้องอสมการ $\hat{v} \leq \epsilon$ ด้วยวิธีเชิงเลขในปริภูมิของพารามิเตอร์การออก ตัวอย่างการนำกระบวนการ 4.1 นำไปใช้สำหรับระบบ RFDDs แสดงในบทที่ 6 การออกแบบระบบควบคุมหอกลับแยกสารสองชนิด

ในกรณีสำหรับระบบที่มีเสถียรภาพแบบสัญญาณเข้ามีขอบเขต/สัญญาณออกมีขอบเขต สมมูลกับเสถียรภาพเลขชี้กำลัง อาทิเช่น ระบบตรรกยะ (ตัวอย่างในบทที่ 5) เป็นต้น กระบวนการคำนวณดัชนีสมรรถนะสามารถดำเนินการในรูปแบบการคำนวณอัตโนมัติได้ โดยอาศัยคุณสมบัติของระบบที่มีเสถียรภาพเลขชี้กำลังในนิยาม (4.1) และผลของประพจน์ที่ (4.1) เนื่องจากค่าพิกัดเสถียรภาพสามารถคำนวณได้ง่ายในทางปฏิบัติ ทำให้ค่าเวลาตัดปลาย T สามารถหาได้จากกระบวนการคำนวณที่ 4.3