บทที่ 3

การประยุกต์ใช้การไหลของกำลังไฟฟ้าที่เหมาะสมและการหาดัชนีความไวของกำลังสูญเสีย

เนื่องจากความต้องการในการใช้ไฟฟ้าในปัจจุเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว ดังนั้นจึงต้องมีการเพิ่มกำลังและวางแผนการจ่ายไฟฟ้าในระบบจำหน่ายไฟฟ้าที่ดีเพื่อรองรับการเจริญเติบโตดังกล่าว ซึ่งในการประยุกต์ใช้เครื่องกำเนิดไฟฟ้าขนาดเล็กในการวางแผนในระบบจำหน่ายไฟฟ้าเราจำเป็นที่จะต้องทราบถึงขนาดกำลังผลิตและตำแหน่งในการติดตั้งที่เหมาะสม เพื่อให้เกิดความคุ้มค่าในการลงทุนมากที่สุด กล่าวคือสามารถจ่ากำลังไฟฟ้าให้เพียงพอต่อความต้องการได้และสามารถควบคุมต้นทุนค่าใช้จ่ายต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

โดยในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาการไหลของกำลังไฟฟ้าที่เหมาะสม (Optimal Power Flow: OPF) เพื่อใช้ในการคำนวณขนาดกำลังผลิตที่เหมาะสมของเครื่องกำเนิดไฟฟ้าขนาดเล็กที่จะติดตั้งเข้าไปในระบบจำหน่ายไฟฟ้าและการหาดัชนีความไวของกำลังสูญเสียเพื่อกำหนดตำแหน่งในการติดตั้งเครื่องกำเนิดไฟฟ้าขนาดเล็กในระบบจำหน่ายไฟฟ้าเช่นเดียวกัน

การคำนวณการไหลของกำลังไฟฟ้าที่เหมาะสมเป็นการจัดสรรกำลังผลิตไฟฟ้าให้สอดคล้องกับการหาค่าเหมาะสมของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective Function) ที่ต้องการ โดยคำนึงถึงสมการการไหลของกำลังไฟฟ้าหรือสมการเพาเวอร์โฟลว์ (Power Flow Equations) และเงื่อนไขต่างๆของระบบ

ทฤษฎีพื้นฐานที่สำคัญในการคำนวณการไหลของกำลังไฟฟ้าที่เหมาะสมแบ่งออกเป็นสองส่วน คือ

1) การวิเคราะห์การไหลของกำลังไฟฟ้า (Power Flow Analysis)
2) การไหลของกำลังไฟฟ้าที่เหมาะสม (Optimal Power Flow : OPF)

3.1 การวิเคราะห์การไหลของกำลังไฟฟ้า (Power Flow Analysis)

การวิเคราะห์การไหลของกำลังไฟฟ้านั้น เริ่มต้นจากการพิจารณาข้อมูลที่เกี่ยวข้อง อาทิเช่น แผนภาพเส้นเดี่ยว (Single line diagram) ของระบบไฟฟ้ากำลัง ทั้งนี้ข้อมูลที่เราให้ความสนใจเป็นอันดับแรกคือ ข้อมูลประจำสายส่งแต่ละเส้น ซึ่งเราสามารถแทนวงจรต่อเฟสได้ด้วยวงจรแบบ π โดยข้อมูลที่ใช้ประกอบไปด้วย ค่าอิมพีแดนซ์ (Z) และแอดมิตแตนซ์อัดประจุ (Line-charging admittance) (Ybus) ค่าต่างๆเหล่านี้จำเป็นต้องใช้เพื่อคำนวณค่าสมาชิกต่างๆของแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์ (Bus admittance matrix) สำหรับระบบไฟฟ้าขนาด N บัสนั้น เราสามารถเขียนค่าสมาชิกเหล่านี้ในรูปทั่วไปได้ด้วย Y_{ij} ซึ่งกำหนดโดย

$$Y_{ij} = |Y_{ij}|\angle\delta_{ij} = |Y_{ij}|\cos(\delta_{ij}) + j|Y_{ij}|\sin(\delta_{ij}) \tag{3.1}$$

นอกจากนี้ข้อมูลที่ต้องใช้ในการวิเคราะห์การไหลของกำลังไฟฟ้ายังรวมถึงค่าอิมพีแดนซ์และค่าพิกัดของหม้อแปลงไฟฟ้ากำลัง ค่าพิกัดของตัวเก็บประจุต่อขนาน (Shunt capacitor) และการตั้งค่าแทปของหม้อแปลง เป็นต้น

ทั้งนี้เราสามารถเริ่มขั้นตอนในการพิจารณาปัญหาได้โดยอาศัยพิกัดเชิงขั้วในการกำหนดค่าแรงดันที่บัส i ใดๆในระบบไฟฟ้าได้ดัง (3.2)

$$V_i = |V_i|\angle\theta_i = |V_i|\cos(\theta_i) + j|V_i|\sin(\theta_i) \tag{3.2}$$

กระแสไฟฟ้าสุทธิที่จ่ายเข้าสู่ระบบ ณ บัส i ในพจน์ของสมาชิกของแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$I_i = Y_{i1}V_1 + Y_{i2}V_2 + \ldots + Y_{iN}V_N = \sum_{k=1}^{N} Y_{ik}V_k \tag{3.3}$$

กำหนดให้ P_i และ Q_i แทนกำลังไฟฟ้าแอกทีฟและรีแอกทีฟสุทธิที่จ่ายเข้าสู่ระบบ ณ บัส i ซึ่งเราสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ว่า $P_i + jQ_i = V_i I_i^*$ ดังนั้นเมื่ออาศัย (3.2) และ (3.3) เราจะได้ค่าสังยุคเชิงซ้อน (Complex conjugate) ของกำลังไฟฟ้าที่จ่ายเข้าบัส i คือ

$$P_i - jQ_i = V_i^* \sum_{k=1}^{N} Y_{ik}V_k \tag{3.4}$$

ซึ่งเราสามารถแทนค่าได้จาก (3.1) และ (3.2) เป็นดังนี้

$$P_i - jQ_i = \sum_{k=1}^{N} |Y_{ik}V_iV_k|\angle\delta_{ik} + \theta_k - \theta_i \tag{3.5}$$

เมื่อทำการกระจาย (3.5) และแยกสมการส่วนจริงและส่วนจินตภาพ เราจะได้

$$P_i = \sum_{k=1}^{N} |V_i V_k Y_{ik}| \cos(\delta_{ik} + \theta_k - \theta_i) \tag{3.6}$$

$$Q_i = -\sum_{k=1}^{N} |V_i V_k Y_{ik}| \sin(\delta_{ik} + \theta_k - \theta_i) \tag{3.7}$$

(3.6) และ (3.7) คือสมการเพาเวอร์โฟลว์ ซึ่งเป็นสมการที่ใช้หาการไหลของกำลังไฟฟ้าแอกทีฟและรีแอกทีฟตามลำดับ โดยที่สมการเพาเวอร์โฟลว์ทั้งสองสมการนั้น มีลักษณะเป็นสมการไม่เชิงเส้น ดังนั้นต้องใช้วิธีการแก้สมการไม่เชิงเส้นเพื่อหาผลเฉลยของสมการ วิธีการที่เหมาะสมสำหรับการสมการไม่เชิงเส้นโดยอาศัยคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ คือ วิธีการวิเคราะห์เชิงเลข (Numerical analysis method) ด้วยกระบวนการทำซ้ำ (Iterative method) ซึ่งมีด้วยกันหลายวิธี เช่น วิธีของเกาส์ (Gauss method), วิธีของเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidei method) และวิธีของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson method) เป็นต้น วิธีที่นิยมนำมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเพาเวอร์โฟลว์มากที่สุด คือ วิธีของนิวตัน-ราฟสัน เนื่องจากมีข้อดี คือ มีคุณสมบัติการลู่เข้าหาคำตอบที่รวดเร็วแบบกำลังสอง (Quadratic convergence) ใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมดน้อยกว่าวิธีอื่น และจำนวนรอบของการคำนวณซ้ำไม่ขึ้นอยู่กับขนาดของระบบไฟฟ้ากำลัง ดังนั้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้วิธีของนิวตัน-ราฟสันในการผลเฉลยของสมการเพาเวอร์โฟลว์

3.1.1 การประยุกต์ใช้วิธีนิวตัน-ราฟสันเพื่อหาผลเฉลยของสมการเพาเวอร์โฟลว์

ในการวิเคราะห์การไหลของกำลังไฟฟ้า เราจะจำแนกบัสออกได้เป็น 3 ประเภท ดังนี้

บัสอ้างอิง (Slack Bus)

บัสอ้างอิงเป็นบัสที่มีเครื่องกำเนิดไฟฟ้าต่ออยู่บัสหนึ่งในระบบ ซึ่งทำหน้าที่ชดเชยค่ากำลังไฟฟ้าแอกทีฟและรีแอกทีฟสูญเสียที่เกิดขึ้น เพื่อให้ระบบเกิดความสมดุลของกำลังไฟฟ้า ณ บัสอ้างอิงนี้เราจะทำการกำหนดขนาดและมุมของแรงดันไฟฟ้า โดยที่ยังไม่สามารถระบุค่ากำลังไฟฟ้าแอกทีฟและรีแอกทีฟได้

บัสควบคุมแรงดัน (PV Bus)

บัสทุกบัสในระบบที่ต่ออยู่กับเครื่องกำเนิดไฟฟ้าเป็นบัสควบคุมแรงดันยกเว้นบัสอ้างอิง โดยบัสควบคุมแรงดันเป็นบัสที่เราสามารถกำหนดค่ากำลังการผลิตไฟฟ้าแอกทีฟและค่าขนาดแรงดันไฟฟ้าได้ ส่วนค่ากำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟจะมีลักษณะเป็นตัวแปรอิสระ และมุมของแรงดันไฟฟ้าจะเป็นตัวแปรสถานะ (State variable) ของบัส

โหลดบัส (PQ Bus)

โหลดบัสเป็นบัสในระบบที่ไม่ต่อเชื่อมอยู่กับเครื่องกำเนิดไฟฟ้า ณ โหลดบัสเราจะทราบค่าความต้องการกำลังไฟฟ้าแอกทีฟและรีแอกทีฟ ส่วนค่าขนาดและมุมของแรงดันไฟฟ้าในบัสนี้จะเป็นตัวแปรสถานะของระบบ

จาก (3.6) และ (3.7) ทำให้ทราบว่ากำลังไฟฟ้าแอกทีฟและรีแอกทีฟที่แต่ละบัสเป็นฟังก์ชันในเทอมของขนาดและมุมเฟสของแรงดันของทุกบัส เมื่อเราระบุค่ากำลังไฟฟ้าแอกทีฟและรีแอกทีฟในแต่ละบัสด้วยตัวยก *Sch* เราสามารถเขียนสมการเพาเวอร์โฟลว์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ll} P_1(\theta_1,\ldots,\theta_N,V_1,\ldots,V_N)=P_1^{Sch} & Q_1(\theta_1,\ldots,\theta_N,V_1,\ldots,V_N)=Q_1^{Sch} \\ \vdots & \vdots \\ P_N(\theta_1,\ldots,\theta_N,V_1,\ldots,V_N)=P_N^{Sch} & Q_N(\theta_1,\ldots,\theta_N,V_1,\ldots,V_N)=Q_N^{Sch} \end{array} \tag{3.8}$$

จาก (3.8) จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} P_1^{Sch}-P_1(\theta_1,\ldots,\theta_N,V_1,\ldots,V_N) \\ \vdots \\ P_N^{Sch}-P_N(\theta_1,\ldots,\theta_N,V_1,\ldots,V_N) \\ Q_1^{Sch}-Q_1(\theta_1,\ldots,\theta_N,V_1,\ldots,V_N) \\ \vdots \\ Q_N^{Sch}-Q_N(\theta_1,\ldots,\theta_N,V_1,\ldots,V_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \vdots \\ \Delta\theta_N \\ \Delta V_1 \\ \vdots \\ \Delta V_N \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

โดยที่

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial\theta_N} & \frac{\partial P_1}{\partial V_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial V_N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P_N}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial P_N}{\partial\theta_N} & \frac{\partial P_N}{\partial V_1} & \cdots & \frac{\partial P_N}{\partial V_N} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial\theta_N} & \frac{\partial Q_1}{\partial V_1} & \cdots & \frac{\partial Q_1}{\partial V_N} \\ \cdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_N}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial Q_N}{\partial\theta_N} & \frac{\partial Q_N}{\partial V_1} & \cdots & \frac{\partial Q_N}{\partial V_N} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

จาก (3.9) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ดัง (3.11)

$$\begin{bmatrix}\Delta P\\ \Delta Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial P}{\partial\theta} & \dfrac{\partial P}{\partial V}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial\theta} & \dfrac{\partial Q}{\partial V}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\theta\\ \Delta V\end{bmatrix} \tag{3.11}$$

ดังนั้นในทุกๆรอบของการคำนวณเราจะได้ค่าปรับแต่ง (Correction) ของขนาดและมุมเฟสของแรงดันในแต่ละบัสดังนี้

$$\begin{bmatrix}\Delta\theta\\ \Delta V\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial P}{\partial\theta} & \dfrac{\partial P}{\partial V}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial\theta} & \dfrac{\partial Q}{\partial V}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\Delta P\\ \Delta Q\end{bmatrix} \tag{3.12}$$

สำหรับการปรับแต่งในแต่ละรอบการคำนวณจะกำหนดโดย

$$\Delta\theta^{(k+1)}=\theta^{(k)}+\Delta\theta^{(k)} \tag{3.13}$$

$$\Delta V^{(k+1)}=V^{(k)}+\Delta V^{(k)} \tag{3.14}$$

3.2 การคำนวณการไหลของกำลังไฟฟ้าที่เหมาะสม (Optimal power flow)

การไหลของกำลังไฟฟ้าที่เหมาะสม คือ การจัดสรรกำลังการผลิตให้สอดคล้องกับการหาค่าเหมาะสมของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ต้องการ โดยคำนึงถึงสมการการไหลของกำลังไฟฟ้า (Power flow equation) และข้อจำกัดด้านต่างของระบบโดยฟังก์ชันวัตถุประสงค์นี้ขึ้นอยู่กับความต้องการของผู้ดำเนินการ (Operator) หรือผู้ทำการวิเคราะห์

ตัวอย่างของฟังก์ชันวัตถุประสงคที่นิยมใช้งานดังนี้

- ต้นทุนการผลิตกำลังไฟฟ้าจริง
- กำลังการสูญเสียรวมในระบบ
- ขนาดหรือจำนวนการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรต่างๆ ในระบบ
- ต้นทุนด้านการเงินต่างๆ ที่สามารถสร้างความสัมพันธ์กับตัวแปรในระบบ

ส่วนข้อจำกัดต่างๆ ในระบบที่นอกเหนือจากสมการการไหลของกำลังไฟฟ้า เช่น พิกัดกำลังของสายส่ง กำลังการผลิตส่งผ่านระหว่างบริเวณ (Power interchange) อัตราการเปลี่ยนแปลงกำลังการผลิต (Generation ramp rate) นั้นสามารถนำมาพิจารณาร่วมกันได้ หากผู้ทำการวิเคราะห์ต้องการการจัดสรรกำลังการผลิตที่สอดคล้องกับข้อจำกัดนั้นๆ

วิธีการคำนวณในการวิเคราะห์กำลังการไหลที่เหมาะสมมีหลายวิธีการ โดยแต่ละวิธีการนั้นจะมีลักษณะและวิธีการใช้งานต่างกันกันออกไป ซึ่งในวิธีการคำนวณแต่ละแบบนั้น ต่างอาศัยหลักการพื้นฐานที่เหมือนกัน คือ สมการลากรอง (Lagrange equation) และเงื่อนไขจำเป็น (Necessary condition) ของ Karush Kuhn Tucker (KKT) ในการแก้ปัญหาเพื่อคำนวณค่าเหมาะสม (Optimization) การคำนวณตามหลักการวิเคราะห์กำลังการไหลที่เหมาะสมสามารถเขียนรูปแบบของปัญหาในสมการทางคณิตศาสตร์ทั่วไปดังนี้

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} && F(x) \\ &\textit{subject to} && g(x)=0 \\ & && h(x)\le 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

โดย $F(x)$ คือ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ในการคำนวณ ส่วนข้อจำกัด $g(x)$ และ $h(x)$ คือข้อจำกัดหรือเงื่อนไขของระบบในรูปของสมการ และอสมการ ตามลำดับ

คำตอบของ (3.15) สามารถหาได้โดย เงื่อนไขจำเป็นของ Karush Kuhn Tucker (KKT) จากสมการลากรอง $L(x,\lambda,\mu)$ ดังแสดงต่อไปนี้

$$L(x,\lambda,\mu)=F(x)+\lambda^T g(x)+\mu^T h(x) \tag{3.16}$$

กำหนดให้ x^*,λ^*,μ^* เป็นเวกเตอร์ตัวแปร ณ จุดคำตอบของ (3.15) จะได้ว่าสมการต่อไปนี้จะต้องเป็นจริง คือ

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_r}=\frac{\partial(F(x)+\lambda^T g(x)+\mu^T h(x))}{\partial x_r}\Big|_{x^*,\lambda^*,\mu^*}&=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_s}=g_s(x)\Big|_{x^*}&=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_t}=h_t(x)\Big|_{x^*}&=0 \quad :\mu_t>0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_t}=h_t(x)\Big|_{x^*}&\le 0 \quad :\mu_t=0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

โดย $\mu_t \ge 0$ และ r, s, t คือลำดับที่สมาชิกของเวกเตอร์ x,λ,μ ตามลำดับ

วิธีการสำคัญในการคำนวณกำลังการไหลที่เหมาะสม สามารถสรุปได้ดังนี้

3.2.1 วิธีการวนซ้ำเพื่อหาค่าแลมบ์ดา (Lambda iteration method)

วิธีการนี้เป็นวิธีการทั่วไปในการจัดสรรกำลังการผลิตอย่างประหยัด (Economic dispatchโดยสมมุติในกรณีที่ระบบมีข้อจำกัดสมดุลกำลังงานเพียงสมการเดียว หลักการในการคำนวณคือเริ่มต้นด้วยการกำหนดค่าแลมบ์ดา จากนั้นหาค่ากำลังการผลิตของบัสต่างๆ จาก (3.17) หากรวมกำลังการผลิตที่ได้แล้ว ไม่เท่ากับโหลดทั้งหมดของระบบก็จะทำการปรับค่าแลมบ์ดาใหม่ ทำเช่นนี้ซ้ำจนกว่ากำลังการผลิตรวมจะเท่ากับโหลดทั้งหมดของระบบ

อย่างไรก็ตามจะพบว่าหากใช้วิธีการนี้ในการคำนวณการวิเคราะห์กำลังการไหลที่เหมาะสมจะมีความยุ่งยากในการคำนวณซ้ำเกิดขึ้น เนื่องจากตัวคูณสัมประสิทธิ์ในสมการลากรองอาจมีได้หลายค่าขึ้นอยู่กับจำนวนของสมการข้อจำกัดและอสมการข้อจำกัดที่มีผล (Active inequality constraint) การปรับค่าแลมป์ใหม่ให้เหมาะสมจึงต้องอาศัยวิธีการที่เหมาะสม ซึ่งกระทำได้ง่าย

ความเร็วในการลู่เข้าหาคำตอบของสมการนี้ ขึ้นอยู่กับวิธีในการปรับค่าแลมป์ดา หรือสัมประสิทธิ์ตัวคูณในสมการลากรองเป็นสำคัญ

3.2.2 วิธีการใช้เกรเดียนท์ (Gradient method)

หลักการของวิธีการใช้เกรเดียนท์ คือ การใช้เกรเดียนท์ของสมการลากรอง $L(x,\lambda,\mu)$ เป็นเวกเตอร์กำหนดทิศทางในการลู่เข้าหาคำตอบ (Steepest descent direction) ดังสมการต่อไปนี้

$$x^{i+1} = x^{i} - \alpha \nabla L \tag{3.18}$$

โดยที่ค่า x^{i} เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรการคำนวณทั้งหมดในรอบที่ i และ α เป็นปริมาณสเกลาร์เพื่อกำหนดขนาดของการปรับค่าเข้าหาจุดคำตอบ ส่วน ∇L เป็นเวกเตอร์เกรเดียนท์ของสมการลากรอง $L(x,\lambda,\mu)$ ดังแสดงใน(3.19)

$$\nabla L = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

โดยที่ n คือจำนวนตัวแปรในการคำนวณทั้งหมด

ข้อเสียของการใช้วิธีเกรเดียนท์ คือความล่าช้าในการลู่เข้าหาจุดคำตอบและความไม่เหมาะสมในการคำนวณการวิเคราะห์กำลังการไหลที่เหมาะสม (OPF) หากในการคำนวณนั้นมีข้อจำกัดแบบอสมการรวมอยู่ด้วย

3.2.3 วิธีของนิวตัน (Newton's method)

ในวิธีการของนิวตันนี้เป็นการนำการกระจายอนุกรมเทเลอร์อันดับที่หนึ่งมาใช้ในการแก้ปัญหาสมการเงื่อนไขจำเป็นของ Karush-Kuhn-Tucker ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$x^{i+1} = x^i - \left[\frac{\partial \nabla L}{\partial x}\right]^{-1} \nabla L \tag{3.20}$$

โดย x^i เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรในการคำนวณทั้งหมดในรอบที่ i ส่วน ∇L และ $\left[\frac{\partial \nabla L}{\partial x}\right]$ มีค่าตาม (3.21) และ (3.22) ตามลำดับ

$$\nabla L = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$\left[\frac{\partial \nabla L}{\partial x}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 x_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n x_1} & & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_{n1}^2} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

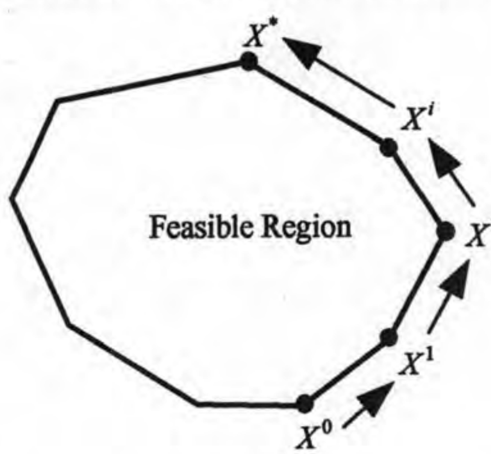
โดยที่ n คือจำนวนตัวแปรในการคำนวณทั้งหมด

ในวิธีการของนิวตันนี้มีข้อได้เปรียบกว่าวิธีการของเกรเดียนท์คือ สามารถลู่เข้าหาคำตอบได้เร็วกว่า อย่างไรก็ตามในวิธีการของนิวตันนี้ยังคงมีปัญหาในการคำนวณกำลังการไหลที่เหมาะสมในกรณีที่ระบบที่มีข้อจำกัดแบบอสมการร่วมอยู่ด้วย

3.2.4 วิธีโปรแกรมเชิงเส้น (Linear programming method)

วิธีโปรแกรมเชิงเส้นนี้มีข้อได้เปรียบเหนือวิธีการทั้งสามข้างต้นคือ สามารถคำนวณการไหลที่เหมาะสมได้ง่าย แม้ในระบบจะมีข้อจำกัดแบบอสมการร่วมอยู่ด้วยอย่างไรก็ตามหากพิจารณาข้อจำกัดของระบบทั้งที่เป็นสมการและอสมการจะพบว่ามีลักษณะความไม่เป็นเชิงเส้นอยู่ เช่น สมการการไหลของกำลังไฟฟ้า อสมการพิกัดการไหลของกำลังไฟฟ้าบนสายส่ง ซึ่งปัญหาดังกล่าวสามารถแก้ได้โดยวิธีการทำให้เป็นเชิงเส้น (Linearization method)

โดยความรวดเร็วในการลู่เข้าหาคำตอบจะขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้นของระบบในการหาคำตอบและจำนวนข้อจำกัดของระบบ เนื่องจากจุดคำตอบของระบบสมการในการคำนวณกำลังการไหลที่เหมาะสม จะอยู่บนจุดยอด (Vertex) ของบริเวณเซตของจุดคำตอบที่เป็นไปได้ (Feasible region) โดยวิธีการหาคำตอบของวิธีโปรแกรมเชิงเส้น คือการเคลื่อนจุดคำตอบไปตามจุดยอดต่างๆ จนกว่าจะพบคำตอบที่เป็นค่าเหมาะสมที่สุด ดังนั้นหากมีข้อจำกัดของระบบอยู่มาก และจุดเริ่มต้นของการคำนวณห่างไกลจุดคำตอบสุดท้าย จะทำให้จำนวนรอบการหาจุดคำตอบมากตามไปด้วย ดังแสดงในรูปที่ 3.1

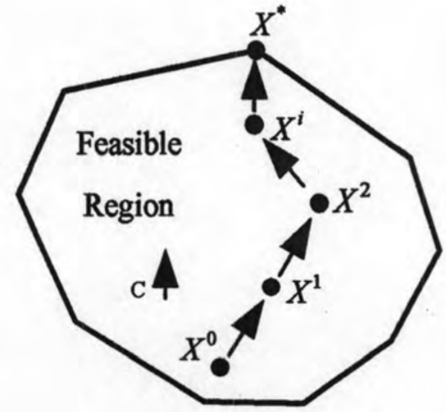


รูปที่ 3.1 การเคลื่อนจุดคำตอบไปตามจุดยอดต่างๆ จนถึงจุดคำตอบสุดท้าย

โดย x^0 คือ เวกเตอร์จุดคำตอบเริ่มต้นในการคำนวณ และค่า x^* คือ เวกเตอร์จุดคำตอบที่เหมาะสมที่สุดในการคำนวณ

3.2.5 วิธีการใช้จุดคำตอบภายใน (Interior point method)

ในวิธีการนี้จุดคำตอบทุกๆรอบในการคำนวณจะอยู่ภายในบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ดังแสดงในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 การเคลื่อนจุดคำตอบภายใน Feasible Region จนถึงจุดคำตอบสุดท้าย

โดย x^0 คือ เวกเตอร์จุดคำตอบเริ่มต้นในการคำนวณ และค่า x^* คือ เวกเตอร์จุดคำตอบที่เหมาะสมที่สุดในการคำนวณ ส่วน C คือ ทิศทางในการลู่เข้าหาคำตอบ

3.2.6 วิธี Sequential Quadratic Programming

วิธีการแก้ปัญหาด้วยวิธี Sequential Quadratic Programming เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมและประสบความสำเร็จในเทคนิคในการแก้ปัญหาสำหรับข้อจำกัดที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยประเด็นสำคัญของหลักการจะอาศัย search direction ในการแก้ปัญญา Quadratic program ซึ่งปัญหาจะประกอบไปด้วยฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่อยู่ในรูปของพีชคณิตกำลังสองและข้อจำกัดจะอยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น ในการนำเสนอเพื่อหาความเหมาะสมจะใช้กฎโดยทั่วไปของวิธี Newton ในกรณีที่ไม่ข้อจำกัด เพื่อใช้ในการแก้ (3.23)

$$\text{Minimize} \quad f(x) \qquad (3.23)$$
$$\text{Subject to} \quad g(x) = 0$$

(3.24)แสดงการประยุกต์ในวิธีนิวตันเพื่อให้มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขของความเหมาะสมโดยสามารถเขียนสมการ Lagrangian ของการแก้ปัญหาใน (3.23)

$$L(x,\lambda) = f(x) - \lambda^T g(x) \tag{3.24}$$

และเงื่อนไข First-order optimality condition

$$\nabla L(x,\lambda) = 0 \tag{3.25}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของวิธีนิวตันได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_k \\ v_k \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

ซึ่ง p_k และ v_k สามารถแก้สมการด้วยระบบเชิงเส้น

$$\nabla^2 L(x_k,\lambda_k)\begin{pmatrix} p_k \\ v_k \end{pmatrix} = -\nabla L(x_k,\lambda_k) \tag{3.27}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้นดังนี้

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L(x_k,\lambda_k) & -\nabla g(x_k) \\ -\nabla g(x_k)^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_x L(x_k,\lambda_k) \\ g(x_k) \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

โดยเราจะใช้ประโยชน์จากรูปแบบที่ปรับปรุงเพื่อให้ประสบความสำเร็จสูงสุดสำหรับข้อจำกัดของความเหมาะสม

(3.29) คือระบบสมการที่นำเสนอใน First order optimality condition สำหรับปัญหาความเหมาะสม

$$\text{Minimize} \quad \frac{1}{2}p^T[\nabla^2_{xx}L(x_k,\lambda_k)]p + p^T[\nabla_x L(x_k,\lambda_k)] \tag{3.29}$$
$$\text{Subject to} \quad [\nabla g(x_k)]^T p + g(x_k) = 0$$

โดยที่ v_k คือ เวคเตอร์ของ Lagrange multipliers

ในการแก้ปัญหาด้วยวิธี Quadratic program จะมีกระบวนวิธีในการให้ได้ค่าที่เป็นฟังก์ชันกำลังสองในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ให้มีความเหมาะสมที่สุดภายใต้ข้อจำกัดที่เป็นเชิงเส้น โดยฟังก์ชันที่เป็นกำลังสองนี้จะมีการประมาณมาจาก Taylor series ที่ของ Lagrangian ที่จุด (x_k,λ_k) และข้อจัดจะประมาณความเป็นเชิงเส้นจาก $g(x_k,p)=0$

ในการแก้ปัญหาของ Sequential quadratic programming ในกระบวนการทุกรอบของโปรแกรมกำลังสองสามารถแก้โดยให้มีความสอดคล้อง (p_k,v_k) โดยกระบวนการของการทำในรอบต่อๆไปจะอาศัยการ Update (x_k,λ_k) และกระบวนการทำซ้ำที่จุดใหม่ [18]

โดยเทคนิคที่สามารถนำมาใช้งานในปัจจุบันมีมากมาย เช่น การใช้ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm function) วิธีการพริมัล-ดูอัล (Primal-Dual method) เป็นต้น

วิธีการนี้สามารถคำนวณการวิเคราะห์การไหลของกำลังไฟฟ้าที่เหมาะสมได้ง่าย แม้ในระบบมีข้อจำกัดแบบอสมการ เช่น เดียวกับวิธีโปรแกรมเชิงเส้น ส่วนความรวดเร็วในการลู่เข้าหาคำตอบโดยทั่วไปสามารถลู่เข้าได้เร็ว อย่างไรก็ตามขึ้นอยู่กับวิธีการหาทิศทางการปรับปรุงค่าสู่จุดคำตอบด้วย

3.3 ดัชนีความไวของกำลังสูญเสีย (Loss Sensitivity Index)

การประยุกต์ใช้เครื่องกำเนิดไฟฟ้าขนาดเล็กในการวางแผนเพื่อรองรับปริมาณของโหลดที่มีปริมาณเพิ่มขึ้นนั้น ปัญหาที่สำคัญอย่างหนึ่งคือตำแหน่งที่จะทำการติดตั้งเพื่อให้เกิดความเหมาะสมที่สุด โดยสนใจตำแหน่งที่ทำให้ค่าของกำลังสูญเสียรวมของระบบเหมาะสมที่สุด จากที่กล่าวมาจะใช้ดัชนีความไวของกำลังสูญเสียเป็นตัวพิจารณาในการเลือกตำแหน่งที่เหมาะสม

การคำนวณค่าดัชนีความไวของกำลังสูญเสียในระบบโดยวิธีนี้จะใช้สมมติฐานว่ากำลังสูญเสียทั้งหมดที่เกิดขึ้นในระบบได้รับการชดเชยจากบัสต่างๆ ในระบบ ดังนั้นสามารถเขียนสมการแสดงการจ่ายกำลังไฟฟ้าของบัสต่างๆ ที่สัมพันธ์กับกำลังไฟฟ้าสูญเสียในระบบได้ดังนี้

$$Pl = \left(P_1 - P_{1,load}\right) + \left(P_2 - P_{2,load}\right) + \ldots + \left(P_i - P_{i,load}\right) + \ldots + \left(P_N - P_{N,load}\right) \tag{3.30}$$

โดยที่

P_i คือ กำลังไฟฟ้าจริงจากเครื่องกำเนิดไฟฟ้าที่บัส i

$P_{i,load}$ คือ กำลังไฟฟ้าจริงที่ร่วมจ่ายให้โหลดในระบบโดยบัส i

P_l คือ กำลังไฟฟ้าจริงทั้งหมดที่สูญเสียในระบบ

(3.30) สามารถเขียนได้ในรูปของกำลังการผลิตของเครื่องกำเนิดไฟฟ้าและปริมาณโหลด ณ แต่ละบัสได้เป็น

$$\sum_{ig=1}^{Ng} P_{ig} + \sum_{it=1}^{Ni} P_{it} = P_L \tag{3.31}$$

โดยที่

P_{ig} คือ ปริมาณการผลิตจากเครื่องกำเนิดไฟฟ้าที่ i_g

P_{it} คือ ปริมาณโหลดที่ it

N_g คือ จำนวณเครื่องกำเนิดไฟฟ้าทั้งหมดในระบบ

N_i คือ จำนวณโหลดทั้งหมดในระบบ

สมการดังกล่าวมีชื่อเรียกว่า สมการสมดุลกำลังไฟฟ้า (Power balance equation) และสามารถแทนผลรวมกำลังการผลิตและปริมาณโหลดด้านซ้ายของสมการด้วยสมการการไหลของกำลังไฟฟ้า (Power flow equation) ของทุกบัสในระบบ ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} |V_i||V_j||Y_{ij}|\left[\cos\left(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}\right)\right] = P_L \tag{3.32}$$

เช่นเดียวกับการคำนวณโดยวิธีพิจารณาว่ากำลังสูญเสียในระบบได้รับการชดเชยจากบัสอ้างอิง โดยการใช้ทฤษฎีอนุพันธ์แยกส่วน (Partial differentiation) และกฎลูกโซ่ (Chain rule) จะได้

$$\frac{\partial P_L}{\partial \delta_m} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial P_L}{\partial P_i}\cdot\frac{\partial P_i}{\partial \delta_m} + \frac{\partial P_L}{\partial Q_i}\cdot\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_m}\right] \tag{3.33}$$

และ

$$\frac{\partial P_L}{\partial |V_m|} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial P_L}{\partial P_i}\cdot\frac{\partial P_i}{\partial |V_m|} + \frac{\partial P_L}{\partial Q_i}\cdot\frac{\partial Q_i}{\partial |V_m|}\right] \tag{3.34}$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_L}{\partial \delta_m} \\ \dfrac{\partial P_L}{\partial |V_m|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_i}{\partial \delta_m} & \dfrac{\partial Q_i}{\partial \delta_m} \\ \dfrac{\partial P_i}{\partial |V_m|} & \dfrac{\partial Q_i}{\partial |V_m|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_L}{\partial P_i} \\ \dfrac{\partial P_L}{\partial Q_i} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

โดยที่ $\dfrac{\partial P_i}{\partial \delta_m}, \dfrac{\partial P_i}{\partial |V_m|}, \dfrac{\partial Q_i}{\partial \delta_m}, \dfrac{\partial Q_i}{\partial |V_m|}$ คือ สมาชิกในเมตริกซ์จาโคเบียน ดังนั้น (3.36) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_L}{\partial \delta_m} \\ \dfrac{\partial P_L}{\partial |V_m|} \end{bmatrix} = \left[J^T \right] \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_L}{\partial P_i} \\ \dfrac{\partial P_L}{\partial Q_i} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

ดังนั้นค่าดัชนีความไวของกำลังสูญเสียในระบบเมื่อเทียบกับกำลังไฟฟ้าสุทธิที่จ่ายเข้าบัสต่างๆ คือ

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_L}{\partial P_i} \\ \dfrac{\partial P_L}{\partial Q_i} \end{bmatrix} = \left[J^T \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_L}{\partial \delta_m} \\ \dfrac{\partial P_L}{\partial |V_m|} \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

กำหนดให้ $\left[J^{-T} \right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

เมื่อเราพิจารณาแต่กำลังไฟฟ้าจริงสุทธิที่จ่ายเข้าไปที่บัสต่างจะทำให้ได้ค่าดัชนีความไวของกำลังสูญเสียดัง(3.39)

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_i} = [A] \cdot \left[\frac{\partial P_L}{\partial \delta_m} \right] + [B] \cdot \left[\frac{\partial P_L}{\partial |V_m|} \right] \tag{3.39}$$

โดยที่

$$\frac{\partial P_L}{\partial \delta_m} = -2 \sum_{j=1}^{N} V_m V_j Y_{mj} \cos\theta_{mj} \cdot \sin\left(\delta_m - \delta_j\right) \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial V_m} = 2\sum_{j=1}^{N} V_j Y_{mj} \cos\theta_{mj} \cdot \cos(\delta_m - \delta_j) \tag{3.41}$$

$[J] = \mathit{Jacobain} \quad \mathit{matrix}$ **ซึ่งได้จากการคำนวณการไหลของกำลังไฟฟ้า (Power Flow)**