บทที่ 3

การลดค่าน้ำหนักแบบเชื่อมตรง

จุดประสงค์หลักของงานวิจัยนี้ คือ การลดน้ำหนักเลขคณิต ของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปแบบแทนจำนวนซ้ำซ้อนของเพนนีย์ โดยแนวคิดของงานวิจัยนี้ มาจากการปรับรูปแบบแทนจำนวนที่ไม่ทำให้ค่าเชิงตัวเลขมีการเปลี่ยนแปลง ทั้งนี้ยังได้นำเสนอแนวทางการปรับค่าด้วยศูนย์ซึ่งวิธีการนี้ไม่ทำให้ค่าเชิงตัวเลขเปลี่ยนแปลงแต่อย่างใด ดังนั้น ขั้นตอนแรกจะเริ่มด้วยการพิจารณารูปแบบซ้ำซ้อนของศูนย์ จากนั้นจะนำเสนอการแปลงรูปแบบแทนจำนวนแบบเชื่อมตรง

3.1 การพิจารณารูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์ในจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์

ระบบจำนวนซ้ำซ้อนโดยทั่วไปจะไม่ยอมให้ศูนย์มีรูปแบบแทนจำนวนได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ นั่นคือทุกตัวเลขต้องเป็น 0 เท่านั้น ดังนั้นการพิจารณารูปแบบซ้ำซ้อนของศูนย์สามารถเกิดขึ้นได้ถ้ารูปแบบแทนจำนวนนั้นใช้ตัวเลขที่นอกเหนือไปจากชุดของตัวเลขที่กำหนดไว้ รูปแบบดังกล่าวสามารถกำหนดได้จากการศึกษาสมการความสัมพันธ์ระหว่างหลัก (ตำแหน่ง) ของตัวเลขในรูปแบบแทนจำนวนนั้น

เมื่อกำหนดให้ฐานของระบบจำนวนเป็น $\beta = (-1 + j)$ ในระบบเลขฐาน จะเห็นได้ว่าสมการ (1) เป็นจริงเมื่อแทน r ด้วย β

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \qquad (1)$$

ทั้งนี้เพราะ β เป็นรากของสมการ (1) นั่นเอง จากความสัมพันธ์นี้ ทำให้เราสรุปได้ว่า

$$1\times(-1 + j)^2 + 2\times(-1 + j)^1 + 2\times(-1 + j)^2 = 0$$

หรือจะได้ว่า $0 = (122)_{-1+j}$ นั่นเอง รูปแบบแทนจำนวนนี้ สามารถนำไปสู่รูปแบบแทนจำนวนของศูนย์ได้อีกมากมายภายใต้ชุดตัวเลขที่แตกต่างไปจากชุดตัวเลขที่กำหนดมาให้

รูปแบบแทนจำนวนของศูนย์ที่เกิดขึ้นที่ความยาวแตกต่างกันเกิดได้จากการผสาน (merge) กันของรูปแบบย่อยที่มีความยาวสามหลายรูปแบบ หลักการพื้นฐานคือ การเลื่อนศูนย์ไปในตำแหน่งทางขวาของจำนวนให้มากที่สุดโดยไม่ให้จำนวนของศูนย์ทั้งหมดลดลงโดยการบวกหรือลบด้วยศูนย์ที่มีรูปแบบต่างๆ กัน ประการแรกเราจะแสดงให้เห็นก่อนว่า ในการบวกหรือลบด้วยศูนย์โดยเริ่มจากด้านซ้ายในแต่ละครั้งของการพิจารณา รูปแบบแทนจำนวนศูนย์ที่ยาวมากขึ้นมีผลทำให้โอกาสในการของการลดค่าน้ำหนักสูงขึ้น

ตัวอย่างที่ 3.1 *แสดงการบวกด้วยรูปแบบแทนจำนวนศูนย์ที่ยาวขึ้นจะทำให้มีโอกาสในการลดค่าน้ำหนักสูงขึ้น โดยกำหนดให้* $Y = y_1y_2y_3y_4\ldots y_n$ *เป็นรูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์*

และ y_i เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0,1\}$ และการลดค่าน้ำหนักโดยการบวกหรือลบด้วยรูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์ โดยให้จำนวนที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์เป็น $X = x_1x_2x_3...x_n$ และ m เป็นความยาวของรูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์

วิธีทำ

กรณีที่ $m = 3$

$Y = 111$

$X = 122$

$$
\begin{array}{rccc}
 & 1 & 1 & 1 \\
- & 1 & 2 & 2 \\
\hline
 & 0 & \bar{1} & \bar{1} \\
\hline\hline
\end{array}
$$

จากด้านบนจะเห็นได้ว่าตัวที่จะมีโอกาสเกิดศูนย์ในหลักด้านซ้ายสุดเพียงตัวเดียวที่ตำแหน่ง y_1 เท่านั้น (เมื่อบวกหรือลบด้วย 2 จะไม่สามารถทำให้ y_i ในตำแหน่งนั้นเป็นศูนย์ได้)

กรณีที่ $m = 4$

$Y = 110\bar{1}$

$X = \bar{1}\bar{1}02$

$$
\begin{array}{rcccc}
 & 1 & 1 & 0 & \bar{1} \\
+ & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 2 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

จากตัวอย่างด้านบนจะสามารถพิจารณาได้ว่าเมื่อแทน X ด้วย $\bar{1}\bar{1}02$ ซึ่งเป็นรูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์และมีความยาวเท่ากับสี่นั้นจะมีโอกาสที่จะสามารถทำให้หลักทางด้านซ้ายถึงสามตัวมีโอกาสเป็นศูนย์ได้ ในรูปทั่วไป รูปแบบที่สามารถทำให้มีโอกาสเกิดส่วนเติมหน้าที่เป็นศูนย์มากที่สุดเท่ากับ m-1 เมื่อ m เป็นขนาดของรูปแบบแทนศูนย์นั้น □

ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะรูปแบบแทนจำนวนของศูนย์ที่มีความยาวสี่เท่านั้น เพราะความยาวที่มากขึ้นสามารถทำได้ด้วยแนวทางเดียวกัน รูปแบบแทนศูนย์ที่มีความขนาดสี่มีทั้งหมดสามรูปแบบที่แตกต่างกันคือ 1220 $110\bar{2}$ และ 0122 แต่เราสนใจเพียงสองรูปแบบ คือ 1220 และ $110\bar{2}$ เท่านั้น ทั้งนี้เพราะรูปแบบแทนจำนวน 0122 จะไม่มีผลกระทบต่อการลดค่าน้ำหนักในตำแหน่งแรกของการพิจารณาเลย (ตำแหน่งแรกเป็นศูนย์) ซึ่งตามหลักการของการทำงานแบบเชื่อมตรงนั้นแต่ละครั้งของการพิจารณาจะสนใจเฉพาะผลลัพธ์ในตำแหน่งซ้ายสุดเท่านั้น

3.2 แนวคิดในการลดค่าน้ำหนักของรูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์

ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาการเลือกรูปแบบแทนศูนย์ที่เหมาะสมมาทำการบวกหรือลบออกจากรูปแบบแทนจำนวนที่ต้องการลดค่าน้ำหนัก

บทตั้งที่ 3.1 *กำหนดให้* $Y = y_1y_2y_3y_4$ *และ* $Z = z_1z_2z_3z_4$ *เป็นรูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ ให้* y_i *และ* z_i *เป็นสมาชิกใน* $\{\bar{1},0,1\}$ *เราสามารถสรุปได้ว่า* $w(Z) \le w(Y)$

3.1.1 ในกรณี $y_1 = y_2 = y_3$ *และไม่เป็นศูนย์ แล้วให้*

$Z = Diff(Y, 1220, y_1)$

3.1.2 ในกรณีที่ $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq \bar{y}_1$ *และ* $y_4 = \bar{y}_1$ *แล้วให้*

$Z = Diff(Y, 110\bar{2}, y_1)$

เมื่อกำหนดให้

$Diff(A, B, c) = Z$ *หมายถึง* $z_i = a_i - (b_i \times c)$ *for all I โดย* $1 \le i \le m$

โดยที่ $A = a_1a_2a_3...a_m$

$B = b_1b_2b_3...b_m$

$c = y_1$

$Z = z_1z_2z_3...z_m$

พิสูจน์ ถ้าพิจารณากรณี 3.1.1 จะเห็นได้ชัดว่า

$z_1 = y_1 - (1 \times y_1) = 0$
$z_2 = y_2 - (2 \times y_1) = \bar{y}_2$
$z_3 = y_3 - (2 \times y_1) = \bar{y}_3$
$z_4 = y_4 - (0 \times y_1) = y_4$

ซึ่งมีผลทำให้ $w(Z) = w(Y) - 1$ เสมอ

ถ้าพิจารณากรณี 3.1.2 จะเห็นได้ชัดว่า

$z_1 = y_1 - (1 \times y_1) = 0$
$z_2 = y_2 - (1 \times y_1) = y_2 - y_1 = 0$ *หรือ* $\bar{y}_1$
$z_3 = y_3 - (0 \times y_1) = y_3$
$z_4 = y_4 - (-2 \times y_1) = y_4 + 2y_1 = y_1$

เพราะจากข้อกำหนด $y_2 \neq \bar{y}_1$, $y_4 = \bar{y}_1$ จะทำให้ z_2 และ z_4 ยังคงเป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0,1\}$ เสมอ $w(Z) \le w(Y)$ ■

ตัวอย่างที่ 3.1 และ 3.2 ต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นการลดค่าน้ำหนักของรูปแบบแทนจำนวนได้ชัดเจน

ตัวอย่างที่ 3.2 *กำหนดให้ให้* $Y = \bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}\,1$ *ค่าน้ำหนักเป็น 4*

วิธีทำ Diff(Y,1220,-1) = 0111 ซึ่งมีค่าน้ำหนักเป็น 3 □

ตัวอย่างที่ 3.3 *กำหนดให้ให้ $Y = \bar{1}011$ ค่าน้ำหนักเป็น 3*

วิธีทำ Diff(Y, $110\bar{2}$,-1) = $011\bar{1}$ ซึ่งมีค่าน้ำหนักเป็น 3 เช่นกัน แต่ค่าตำแหน่งของศูนย์จะเลื่อนไปทางขวาสุดเสมอ □

3.3 อัลกอริทึมการลดค่าน้ำหนักแบบเชื่อมตรง

ในบทนี้เราได้นำเสนออัลกอริทึมแบบเชื่อมตรง โดยใช้แนวคิดจากบทตั้งที่ 3.1 โดยการลดค่าน้ำหนัก โดยใช้รูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์ คือ 1220 และ $110\bar{2}$ จะทำให้เกิด 2 กรณีที่ไม่สอดคล้องกัน คือ เมื่อนำ 1220 หรือ $110\bar{2}$ ไปทำการบวกหรือลบแล้วจะไม่ทำให้เกิดผลลัพธ์ที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์ใน y_1 อย่างแน่นอน คือ กรณีที่ y_1 ขึ้นต้นด้วยศูนย์ กรณีนี้เราไม่มีความจำเป็นต้องเปลี่ยนรูปแบบเพราะผลลัพธ์ทางซ้ายสุดเป็นศูนย์แล้ว และกรณีที่ y_1 ไม่เป็นศูนย์แต่ไม่เข้าข่ายบทตั้งที่ 3.1 แต่เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า ไม่สามารถลดค่าน้ำหนักได้เมื่อพิจารณารูปแบบแทนจำนวนของศูนย์ที่มีขนาดเท่ากับสี่ได้

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า การลดค่าน้ำหนักของรูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์สามารถทำได้โดยการทำงานแบบเชื่อมตรงที่มีค่าความหน่วงเท่ากับสาม

ทฤษฎีบทที่ 3.1 *กำหนดให้ X เป็นรูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ การลดค่าน้ำหนักแบบเชื่อมตรงสามารถทำได้ ด้วยความหน่วงเท่ากับสาม*

พิสูจน์ สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ จะทำโดยการเสนออัลกอริทึมแบบเชื่อมตรงในการลดค่าน้ำหนัก

Algorithm: On-line weight reduction

Input: $X = x_1x_2x_3\ldots x_n$ where $x_i \in \{\bar{1},0,1\}$
Output: $Z = z_1z_2z_3\ldots z_n$ where $z_i \in \{\bar{1},0,1\}$
Begin
  Let $Y = y_1y_2y_3y_4$
  Let $y_1 \leftarrow x_1$, $y_2 \leftarrow x_2$, $y_3 \leftarrow x_3$
  Let $i \leftarrow 3$
  While (not-end-of-data) do
    i++
    Let $y_4 \leftarrow x_i$
    If ($y_1 \neq 0$ and $y_1 = y_2 = y_3$) then
        $Y \leftarrow$ Diff(Y, 1220, y_1)
    endif
    If ($y_1 \neq 0$ and $y_2 \neq \bar{y}_1$ and $y_4 = \bar{y}_1$) then
        $Y \leftarrow$ Diff(Y, $110\bar{2}$, y_1)
    endif
    Output: $z_{i-3} \leftarrow y_1$

Let $y_1 \leftarrow y_2, y_2 \leftarrow y_3, y_3 \leftarrow y_4$
enddo
Output: $z_{i-2} \leftarrow y_1, z_{i-1} \leftarrow y_2, z_i \leftarrow y_3$
End

พิสูจน์อัลกอริทึม ต้องพิจารณาสองส่วนด้วยกันคือ ค่าเชิงตัวเลขไม่เปลี่ยน และค่าน้ำหนักของรูปแทนจำนวนผลลัพธ์น้อยกว่าหรือเท่ากับของเดิม สำหรับการพิสูจน์อัลกอริทึมนั้น จะแสดงให้เห็นว่า สำหรับทุกรอบของการคำนวณแบบเชื่อมตรงของ x_i โดยที่ $1 \le i \le n\text{-}3$ เมื่อพิจารณา $Y = y_1y_2y_3y_4$ โดยที่ y_1 ตำแหน่งตรงกับ x_i y_2 ตำแหน่งตรงกับ x_{i+1} y_3 ตำแหน่งตรงกับ x_i+2 และ y_4 ตำแหน่งตรงกับ x_{i+3} แล้ว สามารถหา $Z = z_1z_2z_3z_4$ ที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับ Y

จากนิยามของ Diff และจากบทตั้งที่ 3.1 ข้อ 3.1.1 จะได้ว่า

Input: $Y = y_1y_2y_3y_4$
Output: $Z = z_1z_2z_3z_4$
เพราะ $z_1 = 0, z_2 = \bar{y}_2, z_3 = \bar{y}_3, z_4 = y_4$ นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
& y_1(-1+j)^3 + y_2(-1+j)^2 + y_3(-1+j) + y_4(-1+j)^0 \\
&= y_1(2j+2) + y_2(-2j) - y_3 + y_3j + y_4 \\
&= y_2(2j+2) + y_2(-2j) - y_3 + y_3j + y_4 \\
&= 2y_2 - y_3 + y_3j + y_4 \\
&= 2y_2 - y_2 + y_3j + y_4 \\
&= y_2 + y_3j + y_4 \\
&= y_3 + y_3j + y_4 \\
&= y_3j + y_3 + y_4 \\
&= 2y_3j - y_3j + y_3 + y_4 \\
&= 2y_2j - y_3j + y_3 + y_4 \\
&= -y_2(-2j) - y_3(-1+j) + y_4 \\
&= \bar{y}_2(-2j) + \bar{y}_3(-1+j) + y_4 \\
&= z_2(-2j) + z_3(-1+j) + z_4 \\
&= 0(2j+2) + z_2(-2j) + z_3(-1+j) + z_4 \\
&= z_1(-1+j)^3 + z_2(-1+j)^2 + z_3(-1+j) + z_4(-1+j)^0
\end{aligned}
$$

นั่นคือ ค่าเชิงตัวเลขของ Y และ Z มีค่าเท่ากัน

ทำนองเดียวกันจากนิยามของ Diff และจากบทตั้งที่ 3.1 ข้อ 3.1.2 จะได้ว่า

Input: $Y = y_1y_2y_3y_4$
Output: $Z = z_1z_2z_3z_4$
เพราะ $z_1 = 0, z_2 = y_2 - y_1, z_3 = y_3, z_4 = y_1$ นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
& y_1(-1+j)^3 + y_2(-1+j)^2 + y_3(-1+j) + y_4(-1+j)^0 \\
&= y_1(2j+2) + y_2(-2j) + y_3(-1+j) + y_4
\end{aligned}
$$

$= y_1(2j+2) + y_2(-2j) + y_3(-1+j) + y_4$

$= 2y_1 + y_1(2j) + y_2(-2j) + y_3(-1+j) + y_4$

$= 2y_1 + (y_2 - y_1)(-2j) + y_3(-1+j) - y_1$

$= (y_2 - y_1)(-2j) + y_3(-1+j) + y_1$

$= z_2(-2j) + z_3(-1+j) + z_4$

$= 0(2j+2) + z_2(-2j) + z_3(-1+j) + z_4$

$= z_1(-1+j)^3 + z_2(-1+j)^2 + z_3(-1+j) + z_4(-1+j)^0$

นั่นคือ ค่าเชิงตัวเลขของ Y และ Z มีค่าเท่ากัน ผลจากบทตั้งที่ 3.1 ทำให้สามารถสรุปได้ว่า ค่าน้ำหนัก $\mathrm{w}(Z) \leq \mathrm{w}(X)$ เสมอ ■

เพื่อความเข้าใจในอัลกอริทึมการลดค่าน้ำหนัก ตัวอย่างที่ 3.4 ต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นการทำงานของอัลกอริทึม

ตัวอย่างที่ 3.4 *กำหนดให้* $X = \bar{1}\bar{1}\bar{1}11110\bar{1}10\bar{1}$ *โดยที่มีค่าน้ำหนักทางเลขคณิตเท่ากับ 11 จงลดค่าน้ำหนักของ X ด้วยอัลกอริทึมแบบเชื่อมตรงที่มีค่าความหน่วงเท่ากับสาม*

วิธีทำ จากอัลกอริทึม การทำงานจะพิจารณาครั้งละสี่ตำแหน่งจากซ้ายไปขวา และแต่ละรอบจะเลื่อนตำแหน่งไปทางขวาหนึ่งตำแหน่งเสมอ การทำงานของอัลกอริทึมสามารถเขียนบรรยายได้ดังนี้ โดย R แสดงรอบของการคำนวณ

<u>R0</u>

แสดงการจะแสดงจำนวนที่จะทำการลดค่าน้ำหนัก

<u>R1</u>

อัลกอริทึมจะเริ่มทำงานโดยการอ่านดิจิตเข้ามา 4 ตำแหน่งจากทางขวา ซึ่งก็คือ $\bar{1}\bar{1}\bar{1}1$ โดยให้ค่า $Y = \bar{1}\bar{1}\bar{1}1$ จากนั้นเราจะทำการจับคู่รูปแบบกรณีในอัลกอริทึม และจำพบว่า Y จะอยู่ในกรณีบทตั้งที่ 3.1.1 ที่ ($y_1 \neq 0$ and $y_2 \neq \bar{y}_1$ and $y_4 = \bar{y}_1$) ดังนั้นเราจะได้ $Y \leftarrow \mathrm{Diff}(Y, 110\bar{2}, y_1)$

$$\begin{array}{rrrrr} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 1 \\ + & 1 & 2 & 2 & 0 \\ \hline & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้นั้นจะเป็นผลลัพธ์ที่ได้นั้นจะเป็น 0111 ซึ่งหลักแรกนั้นจะกลายเป็นผลลัพธ์ที่อัลกอริทึมจะนำออกมาในรอบ R2 ต่อไป

<u>R2</u>

หลังจากที่อัลกอริทึมได้ออกผลลัพธ์ในรอบ R1 คือ 0 ออกมาแล้วนั้น หน้าต่างจะทำการเลื่อนไปยังหลักถัดไป คือ ในรอบ R2 หน้าต่างจะมีตัวเลข 4 หลักหรือ Y โดย Y=1111 และเมื่อจับคู่กรณีในบทตั้งที่ 3.1 แล้ว 1111 จะอยู่ในกรณีที่ 3.1.2 และจะมีวิธีการดังนี้

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & 1 & 2 & 2 & 0 \\ \hline & \mathbf{0} & \bar{1} & \bar{1} & 1 \end{array}$$

ผลลัพธ์ที่ได้นั้นจะเป็น $0\bar{1}\bar{1}1$ ซึ่งหลักแรกคือ 0 นั้นจะกลายเป็นผลลัพธ์ที่อัลกอริทึมจะนำออกมาในรอบ R3 ต่อไป

<u>R3</u>

$Y = \bar{1}\bar{1}11$ โดย Y จะสามารถจับคู่ได้กับบทตั้งที่ 3.1.2 และจะสามารถแสดงวิธีทำในขั้นตอนนี้ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccc} & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 1 \\ + & 1 & 1 & 0 & \bar{2} \\ \hline & \mathbf{0} & 0 & 1 & \bar{1} \end{array}$$

ผลลัพธ์ที่ได้ในรอบนี้คือ 0

<u>R4</u>

$Y = 01\bar{1}1$ โดยในรอบนี้จะพบว่า $y_1 = 0$ ดังนั้นจากอัลกอริทึมแล้ว เราจะทำการให้ผลลัพธ์ที่เท่ากับ 0 ได้เลย และทำการเลื่อนหน้าต่างเพื่อไปทำในขั้นตอนถัดไป

<u>R5</u>

$Y = 1\bar{1}11$ ในรอบนี้จะพบว่าไม่มีกรณีใดเลยในบทตั้ง 3.1 ที่จะสามารถลดน้ำหนักของ Y ได้ ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จะมีค่าเท่ากับ y_1 นั้นก็คือ 1 นั่นเอง

<u>R6</u>

$Y = \bar{1}110$ ในรอบนี้จะพบว่ายังคงไม่มีกรณีใดในบทตั้งที่ 3.1 ที่จะสามารถลดน้ำหนักได้เช่นกัน ผลลัพธ์ที่ได้ก็จะเท่ากับ y_1 นั่นก็คือ $\bar{1}$ อีกเช่นกัน

<u>R7</u>

$Y = 110\bar{1}$ ในรอบนี้ Y จะสามารถจับคู่ได้กับบทตั้งที่ 3.1.2 และจะสามารถลดน้ำหนักได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 0 & \bar{1} \\ - & 1 & 1 & 0 & \bar{2} \\ \hline & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

ในรอบนี้เราจะได้ผลลัพธ์ที่เหลือในหน้าต่างคือ 0001 อัลกอริทึมจะทำการสร้างจำนวนนำออกที่เท่ากับ 0 ออกไป และเลื่อนหน้าต่างเพื่อทำขั้นตอนต่อไป

R8

$Y = 0011$ โดยในรอบนี้จะพบว่า $y_1 = 0$ ดังนั้นจากอัลกอริทึมแล้ว เราจะทำการให้ผลลัพธ์ที่เท่ากับ 0 ได้เลย และทำการเลื่อนหน้าต่างเพื่อไปทำในขั้นตอนถัดไป

R9

$Y = 0110$ โดยในรอบนี้จะพบว่า $y_1 = 0$ ดังนั้นจากอัลกอริทึมแล้ว เราจะทำการให้ผลลัพธ์ที่เท่ากับ 0 ได้เลย และทำการเลื่อนหน้าต่างเพื่อไปทำในขั้นตอนถัดไป

R10

$Y = 110\bar{1}$ ในรอบนี้จะพบว่า Y จะสามารถจับคู่ได้กับกรณีบทตั้งที่ 3.1.2 และจะสามารถทำการลดน้ำหนักได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 0 & \bar{1} \\ - & 1 & 1 & 0 & \bar{2} \\ \hline & \mathbf{0} & 0 & 0 & \bar{1} \end{array}$$

ตารางที่ 3.1 การทำงานของอัลกอริทึมการแปลงค่าน้ำหนักของ $X = \bar{1}\bar{1}\bar{1}11110\bar{1}10\bar{1}$

R0	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	1	1	1	1	1	0	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	1	1	1	1	1	0	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R2	0	1	1	1	1	1	1	1	0	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R3	0	0	$\bar{1}$	$\bar{1}$	1	1	1	1	0	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R4	0	0	0	0	1	$\bar{1}$	1	1	0	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R5	0	0	0	0	1	$\bar{1}$	1	1	0	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R6	0	0	0	0	1	$\bar{1}$	1	1	0	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R7	0	0	0	0	1	$\bar{1}$	1	1	0	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R8	0	0	0	0	1	$\bar{1}$	0	0	0	1	1	0	$\bar{1}$
R9	0	0	0	0	1	$\bar{1}$	0	0	0	1	1	0	$\bar{1}$
R10	0	0	0	0	1	$\bar{1}$	0	0	0	1	1	0	$\bar{1}$
R11	0	0	0	0	1	$\bar{1}$	0	0	0	0	0	0	$\bar{1}$

ดังนั้นจะสามารถสรุปได้ว่า $Z = 00001\bar{1}0000001$ ซึ่งมีค่าน้ำหนักทางเลขคณิตเท่ากับ 3 และมีค่าเท่ากับ X ซึ่งมีค่าน้ำหนักทางเลขคณิตเท่ากับ 11 □

3.4 สรุป

ในบทนี้เราได้นำเสนออัลกอริทึมการลดค่าน้ำหนักโดยใช้ค่าความหน่วงเท่ากับสาม โดยผลลัพธ์ที่ได้นั้นจะอยู่ในชุดตัวเลข $\{\bar{1},0,1\}$ โดยการลดค่าน้ำหนักสามารถทำได้โดยแต่ละรอบการทำงาน จะนำรูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์ไปทำการบวกหรือลบออกจากรูปแบบแทนจำนวนเดิมและมีผลทำให้ ส่วนเติมหน้าของผลลัพธ์ที่เป็นศูนย์ทั้งหมดมีขนาด

ใหญ่มากกว่าหรือเท่ากับของเดิม ผลลัพธ์สุดท้ายจะได้กับรูปแบบแทนจำนวนใหม่ที่มีค่าน้ำหนักน้อยกว่าหรือเท่ากับของเดิม โดยอัลกอริทึมทำงานด้วยค่าความหน่วงเชื่อมตรงเท่ากับสาม และมีค่าความซับซ้อนเชิงเวลาเป็น $O(n)$ เมื่อ n แทนจำนวนของดิจิตที่นำเข้า