บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เนื่องจากในปัจจุบันจำนวนเชิงซ้อนได้เข้ามามีบทบาทสำคัญอย่างมากในการคำนวณทางวิทยาศาสตร์ จำนวนเชิงซ้อนยังได้ถูกใช้ในกระบวนการทางดิจิทัล เช่น ผลการแปลงฟูเรียร์แบบเร็ว (fast Fourier transform) และเรขาคณิตวิเคราะห์ (geometric analysis) ในกระบวนการทางกราฟฟิกและรูปภาพ เป็นต้น โดยโปรแกรมประยุกต์เหล่านี้ต้องการรูปแบบแสดงจำนวนที่มีประสิทธิภาพสูงของจำนวนเชิงซ้อน ในคอมพิวเตอร์ปัจจุบันกระบวนการทำงานของจำนวนเชิงซ้อนนั้นจะทำส่วนของจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพแยกจากกัน และนำผลทั้งสองมารวมกันเพื่อออกเป็นผลลัพธ์สุดท้าย เช่น ในการคูณของจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน $(a+ib)$ และ $(c+id)$ นั้น จะต้องทำการคูณทั้งหมด 4 ครั้ง คือ (ac), (ad), (bc), (bd), การลบ 1 ครั้ง ($j^2bd=-bd$), และการบวกอีก 1 ครั้ง $(ac+j(ad+bc)+(-bd))$ ดังนั้น การแทนจำนวนเชิงซ้อนให้มีค่าน้ำหนักลดลงนั้นจะเป็นการช่วยลดกระบวนการคูณ, ลบ, และบวกตามลำดับได้เป็นอย่างดี โดยค่าน้ำหนักหมายถึงจำนวนของตัวเลขที่ไม่เป็นศูนย์ (non-zero digit) เนื่องจากค่าน้ำหนักมีผลต่อเวลาที่ใช้ในการคำนวณ โดยเมื่อเปรียบเทียบกับรูปแบบแทนจำนวนที่มีความยาวเท่ากันแล้ว รูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักมาก จะใช้เวลาในการคำนวนมากกว่ารูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยกว่า

เรื่องจำนวนเชิงซ้อนนั้น เป็นประเด็นที่น่าสนใจในหมู่นักคณิตศาสตร์และวิศวกร และได้นำไปสู่การนำเสนอระบบจำนวนอื่นที่สามารถแปลงกลับมาเป็นระบบพื้นฐานของคอมพิวเตอร์ (ระบบเลขฐานสอง) ได้ ในปี ค.ศ.1960 คนุท (E. Knuth) ได้นำเสนอระบบจำนวนเชิงซ้อนด้วยฐาน -2j แต่คนุทยังคงมีปัญหาเรื่องการจัดการเกี่ยวกับวิธีการหารของระบบจำนวนของเขาเอง

ในปี ค.ศ.1964 เพนนีย์ (Penny) [1] ได้นำเสนอระบบจำนวนเชิงซ้อนแบบเพนนีย์ขึ้นมาโดยใช้ฐาน (-1+j) แต่อย่างไรก็ตามระบบจำนวนเชิงซ้อนนี้ก็ยังคงมีปัญหาเรื่องกระบวนการการหารอยู่ ต่อมา สเตปพาเนนโก (Stepanenko) ได้นำเสนอระบบจำนวนโดยใช้ฐาน $j\sqrt{2}$ ซึ่งประสบความสำเร็จกับวิธีการหารที่เรียกว่า ออล-อิน-วัน (all-in-one) แล้ว แต่วิธีการของสเตปพาเนนโกก็ยังไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่าวิธีการของเขาสามารถทำงานได้ในทุกกรณี

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สนใจการแปลงจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ระบบฐานเพนนีย์ (-1+j) เนื่องจากฐาน (-1+j) นี้มีการรวมระหว่างจำนวนจริงกับจำนวนจินตภาพเข้าด้วยกัน โดยให้

จำนวนนำออกมีค่าน้ำหนักลดลง และยังคงอยู่ในเลขชุดเดิม โดยผลลัพธ์ที่ได้จะต้องอยู่ในรูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักลดลง วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอการแปลงแบบเชื่อมตรง (on-line conversion) โดยเวลาที่ใช้ในการแปลงจะเป็น $O(n)$ เมื่อ n เป็นขนาดของจำนวนตัวเลข (digit) ของจำนวนที่แสดงจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์

ในกระบวนการทำงานที่มีความซับซ้อนสูงและต้องการความเร็ว นอกจากการเลือกใช้วิธีการคำนวณทางเลขคณิตให้ดีแล้ว การเลือกใช้รูปแบบแทนจำนวน (representation) ที่เหมาะสมนั้นมีส่วนสำคัญในการทำงานเช่นกัน ในงานวิจัยนี้ได้นำทฤษฎีหนึ่งมาใช้ในการแปลงรูปแบบแทนจำนวนที่ช่วยเพิ่มประสิทธิภาพ คือ การคำนวณเชิงเลขคณิตแบบเชื่อมตรง (on-line arithmetic computation) ซึ่งมีลักษณะที่การทำงานทุกตัวดำเนินการกระทำไปในทิศทางเดียวกันแบบลำดับ (sequential) ผนวกเข้ากับ การทำงานแบบท่อตรง (pipeline) โดยที่ตัวดำเนินการต่างๆ สามารถเริ่มต้นทำงานได้โดยไม่ต้องรอให้ตัวดำเนินการที่อยู่ในลำดับก่อนหน้าทำเสร็จเสียก่อน การทำงานจะเริ่มต้นจากตัวเลขตำแหน่งที่มีนัยสำคัญสูงสุด (most significant digit: MSB) ไปยัง ตัวเลขตำแหน่งที่มีนัยสำคัญต่ำสุด (least significant digit: LSB)

ในงานวิจัยนี้จะนำเสนอขั้นตอนวิธีการแปลงรูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้ระบบฐานเพนนีย์ที่มีชุดตัวเลข (digit set) เป็น $\{\bar{1}, 0, 1\}$ ให้มีค่าน้ำหนักหรือตัวเลข ที่ไม่เป็นศูนย์ลดลงหรือเท่าเดิม โดยการใช้ทฤษฎีกระบวนการทำงานแบบเชื่อมตรง

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

นำเสนออัลกอริทึมการหาค่าน้ำหนักแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์พร้อมบทพิสูจน์ ซึ่งแนวคิดของอัลกอริทึมคือการเปลี่ยนแปลงรูปแบบแทนจำนวนด้วยรูปแบบซ้ำซ้อนของศูนย์ โดยที่ค่าเชิงตัวเลขจะมีค่าเท่ากันถึงแม้จะมีรูปแบบแทนจำนวนที่แตกต่างกัน

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) เสนออัลกอริทึมการหาค่าน้ำหนักแบบเชื่อมตรงสำหรับระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์พร้อมบทพิสูจน์ โดยค่าความหน่วงของการคำนวณมีค่าเท่ากับ 3
2) ผลลัพธ์ที่ได้อยู่ในชุดตัวเลข $\{\bar{1}, 0, 1\}$
3) ค่าน้ำหนักของจำนวนที่ได้จะไม่เพิ่มขึ้น แต่จะลดลง หรือเท่าเดิมในกรณีที่จำนวนนำเข้ามีค่าน้ำหนักที่น้อยอยู่แล้ว

1.4 ขั้นตอนและวิธีดำเนินงานวิจัย

1) ศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ และการคำนวณเชิงเลขคณิตแบบเชื่อมตรง

2) ศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาของงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
3) ศึกษารูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์ในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์
4) ออกแบบอัลกอริทึมการหาค่าน้ำหนักแบบเชื่อมตรงในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์
5) พิสูจน์อัลกอริทึมที่ได้ออกแบบไว้
6) จัดทำรายงานวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

อัลกอริทึมการหาค่าน้ำหนักแบบเชื่อมตรงในระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์

1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์

ส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์นี้ได้รับการตีพิมพ์เป็นผลงานวิชาการในหัวข้อเรื่องดังต่อไปนี้

"On-Line weight reduction in Penny's complex number system" โดย ธัญจิรา ทองมี และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ National Computer Science and Engineering Conference (NCSEC2007)