

## บทที่ 5

### การจำลองแบบด้วยวิธีเชิงตัวเลข

#### 5.1 เคอร์เนลอัตราขยายการป้อนกลับ

ในหัวข้อนี้จะแสดงกราฟของเคอร์เนลอัตราขยายการป้อนกลับต่างๆ ที่ใช้ในตัวควบคุมและตัวสังเกตที่ออกแบบ โดยใช้วิธีการประมาณสืบเนื่อง (successive approximation method) ซึ่งมีหลักการคือการหาจุดตรึง (fixed point) โดยเขียนเคอร์เนลให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrent relation) และแสดงว่าความสัมพันธ์เวียนเกิดดังกล่าวเข้าสู่จุดตรึง

##### 5.1.1 เคอร์เนลอัตราขยายการป้อนกลับที่ใช้ในตัวควบคุม

เราจะแสดงกราฟของเคอร์เนลอัตราขยายการป้อนกลับ  $k(1, y)$  และ  $k_x(1, y)$  ที่ใช้ในตัวควบคุม (3.11) และสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3.16)–(3.18)

จากวิธีการประมาณสืบเนื่อง จะได้ว่าเคอร์เนล  $k(x, y)$  สอดคล้องกับความสัมพัทธ์เวียนเกิดต่อไปนี้ [14]

$$k(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(x, y) \quad (5.1)$$

$$k_0(x, y) = -\frac{A}{2I} y \cosh\left(\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y)\right) \quad (5.2)$$

$$k_{n+1}(x, y) = k_0(x, y) + \frac{A}{I} \int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}} \int_0^{\frac{x-y}{2}} k_n(\sigma+s, \sigma-s) ds d\sigma \\ + \left(\frac{A}{I}\right)^{3/2} \int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}} \int_0^{\frac{x-y}{2}} \int_{\sigma-s}^{\sigma+s} k_n(\sigma+s, \xi) \sinh\left(\sqrt{\frac{A}{I}}(\xi-\sigma+s)\right) d\xi ds d\sigma \quad (5.3)$$

$$k(1, 1) = -\frac{A}{2I} \quad (5.4)$$

##### 5.1.2 เคอร์เนลอัตราขยายการป้อนกลับที่ใช้ในตัวสังเกต

เราจะแสดงกราฟของเคอร์เนลอัตราขยายการป้อนกลับ  $p(x, 0)$  และ  $p_y(x, 0)$  ที่ใช้ในตัวสังเกต (3.21) และสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3.42)–(3.44)

จากวิธีการประมาณสี่เหลี่ยม จะได้ว่าเคอร์เนล  $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y})$  สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดต่อไปนี้

$$\bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}_n(\bar{x}, \bar{y}) \quad (5.5)$$

$$\bar{p}_0(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{A}{2I} \left( \bar{y} \cosh \left( \sqrt{\frac{A}{I}}(\bar{x} - \bar{y}) \right) + \sqrt{\frac{I}{A}} \sinh \left( \sqrt{\frac{A}{I}}(\bar{x} - \bar{y}) \right) \right) \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_{n+1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{p}_0(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{A}{I} \int_{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}^{\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} \bar{p}_n(\sigma + s, \sigma - s) ds d\sigma \\ &\quad + \frac{2A}{I} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} \int_0^{\sigma} \bar{p}_n(\sigma + s, \sigma - s) ds d\sigma \\ &\quad + \left(\frac{A}{I}\right)^{3/2} \int_{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}}^{\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} \int_{\sigma-s}^{\sigma+s} \bar{p}_n(\sigma + s, \xi) \sinh \left( \sqrt{\frac{A}{I}}(\xi - \sigma + s) \right) d\xi ds d\sigma \\ &\quad + 2\left(\frac{A}{I}\right)^{3/2} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} \int_0^{\sigma} \int_{\sigma-s}^{\sigma+s} \bar{p}_n(\sigma + s, \xi) \sinh \left( \sqrt{\frac{A}{I}}(\xi - \sigma + s) \right) d\xi ds d\sigma \end{aligned} \quad (5.7)$$

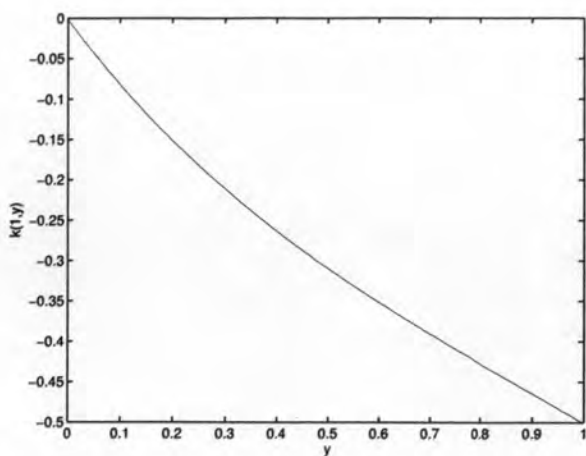
$$p(x, 0) = \bar{p}(1, 1 - x) \quad (5.8)$$

$$p_y(x, 0) = -\bar{p}_x(1, 1 - x) \quad (5.9)$$

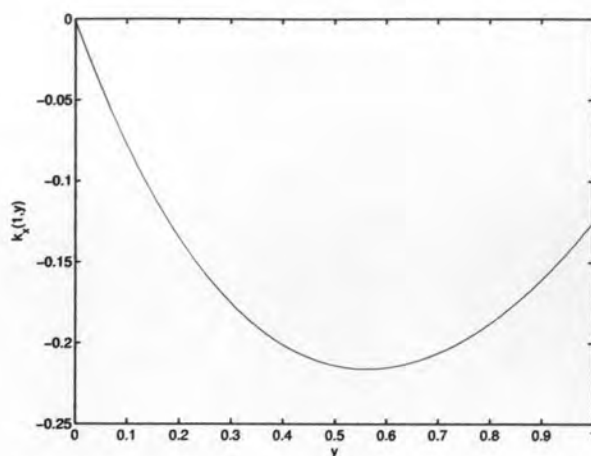
$$p(0, 0) = -\frac{A}{2I} \quad (5.10)$$

ต่อไปนี้จะเลือกใช้ค่าพารามิเตอร์  $\rho = 100$ ,  $A = 0.01$  และ  $I = 0.01$  ในการแสดงกราฟของเคอร์เนลอัตราขยายการป้อนกลับ  $k(1, y)$ ,  $k_x(1, y)$ ,  $p(x, 0)$  และ  $p_y(x, 0)$  รวมถึงการจำลองแบบผลตอบสนองในกรณีต่างๆ

จาก (5.2)–(5.3) และ (5.6)–(5.9) เราใช้การคำนวณเชิงสัญลักษณ์ (symbolic computation) ใน MATLAB โดยใช้ช่วงก้าว (step size)  $h = 0.01$  จะได้กราฟของเคอร์เนลอัตราขยายการป้อนกลับ  $k(1, y)$ ,  $k_x(1, y)$ ,  $p(x, 0)$  และ  $p_y(x, 0)$  ดังที่แสดงรูปที่ 5.1(a), 5.1(b), 5.2(a) และ 5.2(b) ตามลำดับ

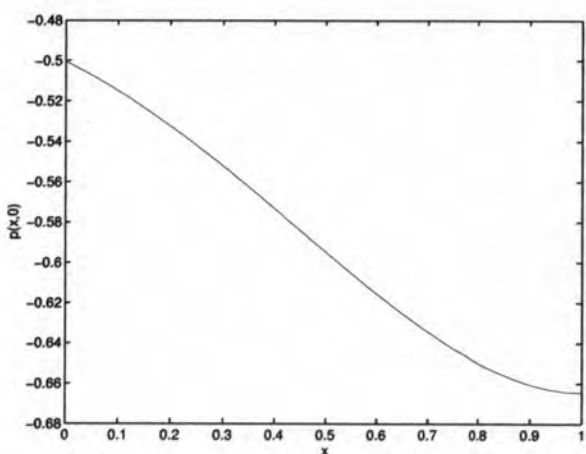


(a)

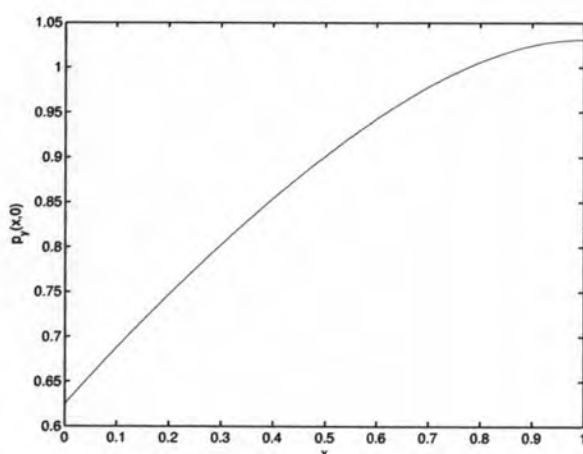


(b)

รูปที่ 5.1: (a) เคอร์เนลอัตราขยายการป้อนกลับ  $k(1,y)$  ของตัวควบคุม (3.11) (b) เคอร์เนลอัตราขยายการป้อนกลับ  $k_x(1,y)$  ของตัวควบคุม (3.11)



(a)



(b)

รูปที่ 5.2: (a) เคอร์เนลอัตราขยายการป้อนกลับ  $p(x,0)$  ของตัวสังเกต (3.21) (b) เคอร์เนลอัตราขยายการป้อนกลับ  $p_y(x,0)$  ของตัวสังเกต (3.21)

### 5.2 การจำลองแบบผลตอบสนอง

ในหัวข้อนี้จะจำลองแบบผลตอบสนองของคานาเรย์ลีในกรณีต่างๆ โดยจะใช้แบบจำลองที่ถูกแปลง (2.6) ในการจำลองแบบผลตอบสนอง แล้วจึงใช้สมการ (2.5) ในการแปลงกลับ สำหรับวิธีการในการจำลองแบบผลตอบสนองคือ การทำเป็นวิยุต (discretization) เฉพาะในตัวแปรตำแหน่ง จะทำให้สมการเชิงอนุพันธ์-ปริพันธ์ย่อยกลายเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งสามารถหาผลเฉลยได้โดยใช้วิธีการเวียนเกิด  $I_{MN}$  ของซาเกียน (Zakian  $I_{MN}$  recursions) ซึ่งมีความแม่นยำสูง สามารถใช้กับระบบที่แข็ง (stiff) และเป็นวิธีที่มีเสถียรภาพแบบ A (A-stable) [21], [22] อันเหมาะสมกับระบบที่เราพิจารณา

โดยเราจะกล่าวว่าวิธีทางเชิงเลขนั้นมีเสถียรภาพแบบ A ถ้าใช้วิธีการดังกล่าวกับสมการทดสอบสเกลาร์  $\dot{x}(t) = \lambda x(t)$  ด้วยค่าคงตัวเชิงซ้อน  $\lambda$  ที่มีส่วนจริงเป็นลบ แล้วผลเฉลยเชิงเลขที่คำนวณได้จะเข้าสู่ศูนย์เมื่อ  $t \rightarrow \infty$  สำหรับทุกช่วงก้าวมากกว่าศูนย์ [24]

### 5.2.1 การเวียนเกิด $I_{MN}$ ของซาเกียนสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

พิจารณาสมการอันดับสองที่อยู่ในรูป

$$A\ddot{z}(t) + B\dot{z}(t) + Cz(t) = 0 \quad (5.11)$$

$$z(0) = D_1 \quad (5.12)$$

$$\dot{z}(0) = D_2 \quad (5.13)$$

เราสามารถเขียนสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปสมการอันดับหนึ่งดังนี้

$$\dot{Z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{bmatrix} Z(t) = GZ \quad (5.14)$$

$$Z(0) = \begin{bmatrix} D_1^T & D_2^T \end{bmatrix}^T \quad (5.15)$$

เมื่อ  $Z = \begin{bmatrix} z^T & \dot{z}^T \end{bmatrix}^T$

นิยาม ตัวประมาณเชิงเส้น  $I_{MN}$  ดังนี้ [22]

$$I_{MN}(Z, t) = \int_0^\infty Z(\lambda t) \sum_{i=1}^N K_i e^{-\alpha_i \lambda} d\lambda \quad (5.16)$$

เมื่อ  $\alpha_i, K_i$  เป็นค่าคงตัวใดๆ

จำนวนเต็ม  $M, N$  คืออันดับของพจน์เศษและพจน์ส่วนของผลการแปลงลาปลาซของ  $\sum_{i=1}^N K_i e^{-\alpha_i \lambda}$

ในที่นี้ต้องการให้

$$Z(t) \approx I_{MN}(Z, t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^N K_i \mathcal{Z}\left(\frac{\alpha_i}{t}\right) \quad t \neq 0 \quad (5.17)$$

เมื่อ  $\mathcal{Z}(s)$  คือผลการแปลงลาปลาซของ  $Z(t)$  และค่าของ  $(\alpha_i, K_i)$  สามารถหาได้จาก [25]

ผลการแปลงลาปลาซของ (5.14) ในช่วง  $t \in [t_r, t_{r+1}]$  สำหรับ  $r \in \mathbb{N}$  เป็น

$$(sI - G)\mathcal{Z}_{t_r}(s) = Z(t_r) \quad (5.18)$$

ใช้ (5.17) ร่วมกับ (5.18) เมื่อ  $s = \frac{\alpha_i}{t_s}$  โดย  $t_s = t_{r+1} - t_r$  จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดต่อไปนี้

$$Z(t_{r+1}) = \frac{2}{t_s} \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} \text{Re} \left( K_i \mathcal{Z}_{t_r}\left(\frac{\alpha_i}{t_s}\right) \right) \quad (5.19)$$

$$\mathcal{Z}_{t_r}\left(\frac{\alpha_i}{t_s}\right) = \left( \frac{\alpha_i}{t_s} I - G \right)^{-1} Z(t_r) \quad (5.20)$$

เมื่อ  $N$  เป็นจำนวนคู่ และ  $\text{Re}(z)$  คือส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน  $z$   
 ผลเฉลยที่หาได้จะมีความผิดพลาดตัดปลายเฉพาะที่เป็น

$$I_{MN}(Z, t) - Z(t) = \mathcal{O}(t^{-(N-M)}), \quad t \rightarrow \infty$$

$$I_{MN}(Z, t) - Z(t) = \mathcal{O}(t^{M+N+1}), \quad t \rightarrow 0^+$$

และมีเสถียรภาพแบบ A ก็ต่อเมื่อ  $N - 2 \leq M \leq N - 1$  สำหรับทุกช่วงก้าว  $t_s > 0$  ใดๆ ในที่นี้เลือก  $M = 3, N = 4$  และ  $t_s = 0.05 s$

### 5.2.2 การจำลองแบบผลตอบสนองของคานเรย์ลีปลายยึดทั้งสองด้าน

จาก (2.5)–(2.6) และเงื่อนไขขอบแบบปลายยึดที่  $x = 1$  จะได้สมการคือ

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) + u(x, t) + \int_0^x \sinh(x-y)u(y, t)dy \quad (5.21)$$

$$w(1, t) = \int_0^1 \sinh(1-y)u(y, t)dy = 0 \quad (5.22)$$

$$w_x(1, t) = \int_0^1 \cosh(1-y)u(y, t)dy = 0 \quad (5.23)$$

และมีเงื่อนไขเริ่มต้น

$$w(x, 0) = x^2(1-x)^2 \quad (5.24)$$

$$w_t(x, 0) = 0 \quad (5.25)$$

ทำให้ (5.21)–(5.23) เป็นวิฤตในตัวแปรตำแหน่ง โดยกำหนดให้  $u^i = u(ih, t)$  และใช้การประมาณ

$$u_{xx}^i = \frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

ร่วมกับการประมาณการหาปริพันธ์โดยใช้หลักเกณฑ์เชิงสี่เหลี่ยมคางหมู (trapezoidal rule) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u_{tt}^i &= \frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}}{h^2} + u^i + \frac{h}{2} \sum_{l=1}^i [u^l \sinh(h(i-l)) + u^{l-1} \sinh(h(i-l+1))] \\ 0 &= h^2 u_{tt}^i - u^{i+1} + (2-h^2)u^i - u^{i-1} \\ &\quad - \frac{h^3}{2} \sum_{l=1}^i [u^l \sinh(h(i-l)) + u^{l-1} \sinh(h(i-l+1))] \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$0 = \sum_{i=1}^N [u^i \sinh(1 - ih) + u^{i-1} \sinh(1 + h - ih)]$$

$$u^0 = -\frac{2}{\sinh 1} \sum_{i=1}^{N-1} u^i \sinh(1 - ih) \quad (5.27)$$

$$0 = \sum_{i=1}^N [u^i \cosh(1 - ih) + u^{i-1} \cosh(1 + h - ih)]$$

$$u^N = -u^0 \cosh 1 - 2 \sum_{i=1}^{N-1} u^i \cosh(1 - ih)$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{N-1} u^i [\cosh(1 - ih) + \coth 1 \sinh(1 - ih)] \quad (5.28)$$

เมื่อ  $N = \frac{1}{h}$

ใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมูกับ (2.5) จะได้ว่า

$$w^i = \frac{h}{2} \sum_{l=1}^i [u^l \sinh(h(i-l)) + u^{l-1} \sinh(h(i-l+1))] \quad (5.29)$$

ให้  $z = [u^1 \ u^2 \ u^3 \ \dots \ u^{N-1}]^T$  จะได้ว่าสมการ (5.26)–(5.28) สามารถเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ (5.11) ได้ โดยที่

$$A = h^2 I_{N-1} \quad (5.30)$$

$$B = 0 \quad (5.31)$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 \quad (5.32)$$

เมื่อ

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2-h^2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2-h^2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-h^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2-h^2 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

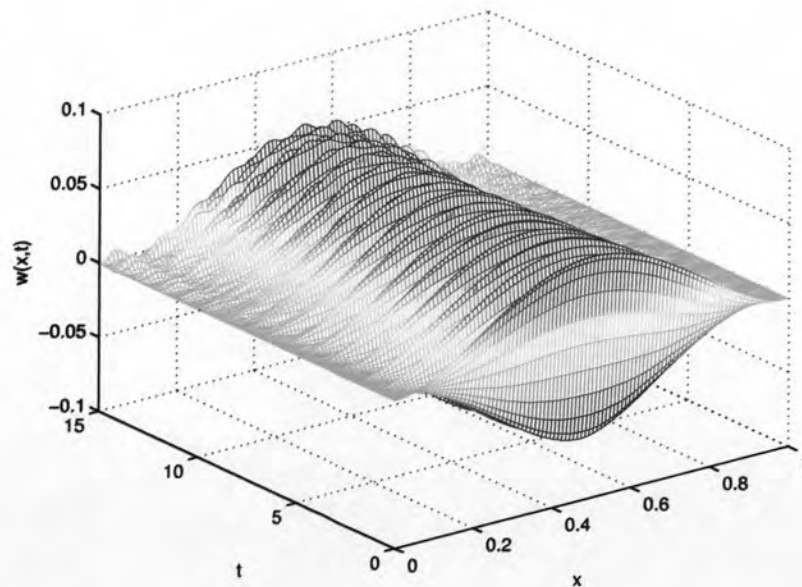
$$C_2 = -h^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sinh h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sinh 2h & \sinh h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \sinh(N-2)h & \sinh(N-3)h & \sinh(N-4)h & \dots & \sinh h & 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$C_3 = \frac{2}{\sinh 1} \begin{bmatrix} \sinh(N-1)h & \sinh(N-2)h & \dots & \sinh 2h & \sinh h \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$C_4 = 2 \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cosh(N-1)h + \coth 1 \sinh(N-1)h & \dots & \cosh 2h + \coth 1 \sinh 2h & \cosh h + \coth 1 \sinh h \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

$$C_5 = \frac{h^3}{\sinh 1} \begin{bmatrix} \sinh(h) \sinh((N-1)h) & \sinh(h) \sinh((N-2)h) & \dots & \sinh(h) \sinh(h) \\ \sinh(2h) \sinh((N-1)h) & \sinh(2h) \sinh((N-2)h) & \dots & \sinh(2h) \sinh(h) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sinh((N-1)h) \sinh((N-1)h) & \sinh((N-1)h) \sinh((N-2)h) & \dots & \sinh((N-1)h) \sinh(h) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

เมื่อหาผลเฉลยโดยวิธีการเวียนเกิด  $I_{MN}$  ของซาเกียน และใช้ (5.29) จะได้ผลตอบสนองของการกระจัดตามขวาง  $w(x, t)$  ของคานดัดที่แสดงรูปที่ 5.3 ซึ่งจะเห็นว่าผลตอบสนองมีการแกว่ง



รูปที่ 5.3: การกระจัดตามขวาง  $w(x, t)$  ของคานเรย์ลีปลายยึดทั้งสองด้าน

### 5.2.3 การจำลองแบบผลตอบสนองของระบบวงวนปิดเมื่อใช้การป้อนกลับสถานะ

จาก (2.5)–(2.6), (3.8) และ (3.10) จะได้สมการคือ

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) + u(x, t) + \int_0^x \sinh(x-y)u(y, t)dy \quad (5.38)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (5.39)$$

$$u_x(1, t) = k(1, 1)u(1, t) - cu_t(1, t) + \int_0^1 k_x(1, y)u(y, t)dy + c \int_0^1 k(1, y)u_t(y, t)dy \quad (5.40)$$

และมีเงื่อนไขเริ่มต้น (5.24)–(5.25)

เมื่อทำ (5.38)–(5.40) ให้เป็นวิฤตในตัวแปรตำแหน่ง จะได้ว่า

$$0 = h^2 u_{tt}^i - u^{i+1} + (2 - h^2)u^i - u^{i-1} - \frac{h^3}{2} \sum_{l=1}^i [u^l \sinh(h(i-l)) + u^{l-1} \sinh(h(i-l+1))] \quad (5.41)$$

$$u^0 = 0 \quad (5.42)$$

$$\frac{u^N - u^{N-1}}{h} = k^N u^N - cu_t^N + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N [u^i k_x^i + u^{i-1} k_x^{i-1}] + \frac{ch}{2} \sum_{i=1}^N [u_t^i k^i + u_t^{i-1} k^{i-1}]$$

$$0 = \left( ch - \frac{ch^2 k^N}{2} \right) u_t^N + (1 - hk^N)u^N - u^{N-1} - \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^N [u^i k_x^i + u^{i-1} k_x^{i-1}] - ch^2 \sum_{i=1}^{N-1} u_t^i k^i \quad (5.43)$$

เมื่อ  $k^i = k(1, ih)$  และ  $k_x^i = k_x(1, ih)$

ให้  $z = [u^1 \ u^2 \ u^3 \ \dots \ u^N]^T$  จะได้ว่าสมการ (5.41)–(5.43) สามารถเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ (5.11) ได้ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} h^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -ch^2 k^1 & -ch^2 k^2 & \dots & -ch^2 k^{N-1} & ch - 0.5ch^2 k^N \end{bmatrix} \quad (5.45)$$



$$C = C_1 + C_2 + C_3 \quad (5.46)$$

เมื่อ

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2-h^2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-h^2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-h^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2-h^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$C_2 = -h^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sinh h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sinh 2h & \sinh h & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sinh(N-2)h & \sinh(N-3)h & \sinh(N-4)h & \dots & \sinh h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -h^2 k_x^1 & -h^2 k_x^2 & \dots & -h^2 k_x^{N-2} & -h^2 k_x^{N-1} - 1 & -0.5h^2 k_x^N - hk^N + 1 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

สังเกตว่าเมทริกซ์  $A$  ใน (5.44) เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix) ดังนั้นในการจำลองแบบด้วยคอมพิวเตอร์เราจะให้สมาชิกตัวสุดท้ายในแนวทแยงมุมหลักของ  $A$  เป็นค่า  $\epsilon$  น้อยๆ ในที่นี้ใช้  $\epsilon = 10^{-15}$

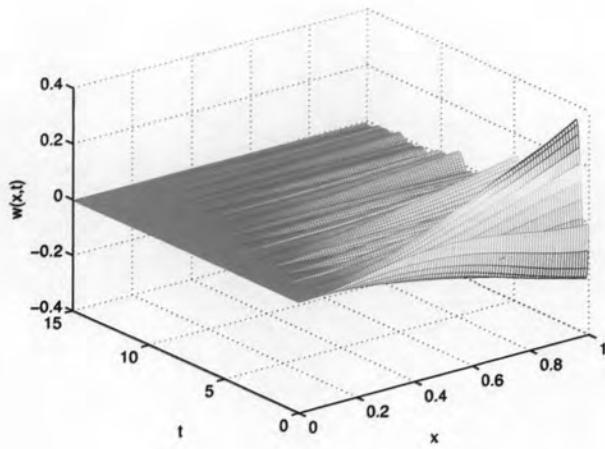
เมื่อหาผลเฉลยโดยวิธีการเวียนเกิด  $I_{MN}$  ของซาเกียน และใช้ (5.29) จะได้ผลตอบสนองของการกระจัดตามขวาง  $w(x, t)$  ของคานดัดที่แสดงรูปที่ 5.4

จากรูปที่ 5.4 จะเห็นว่าการปรับพารามิเตอร์  $c$  ให้มีค่ามากขึ้น จะทำให้ผลตอบสนองมีส่วนพุ่งเกิน (overshoot) มากขึ้น และการปรับพารามิเตอร์  $c$  ให้มีค่าเข้าใกล้ 1 จะทำให้ผลตอบสนองเข้าสู่สภาวะอยู่ตัวได้รวดเร็วขึ้น ดังตาราง 5.1

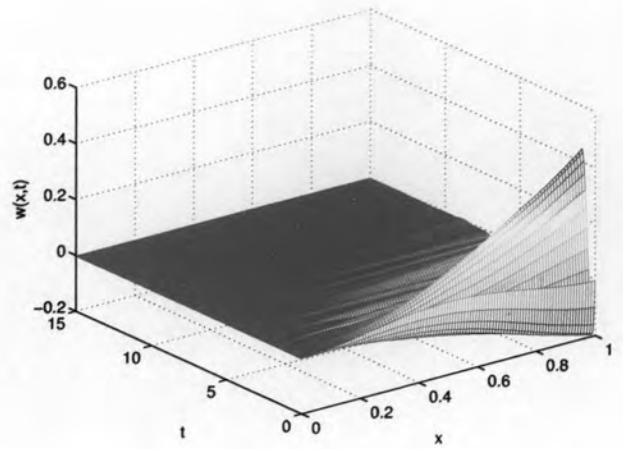
ตารางที่ 5.1: ตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า  $\max_{x,t} |w(x, t)|$ ,  $T_s$  และ  $c$

$c$	0.25	0.5	0.75	1	2	3
$\max_{x,t}  w(x, t) $	0.3536	0.4509	0.5216	0.5816	0.7238	0.8026
$T_s$	16.90	8.95	5.20	2.10	9.30	15.20

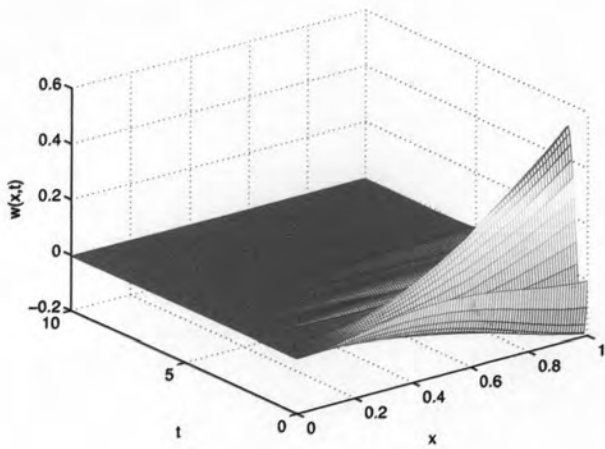
เมื่อกำหนดให้เวลาในการเข้าสู่สภาวะอยู่ตัว ( $T_s$ ) คือเวลาที่  $\max_{x,t} |w(x, t)|$  ลดลงจนไม่เกิน 0.005



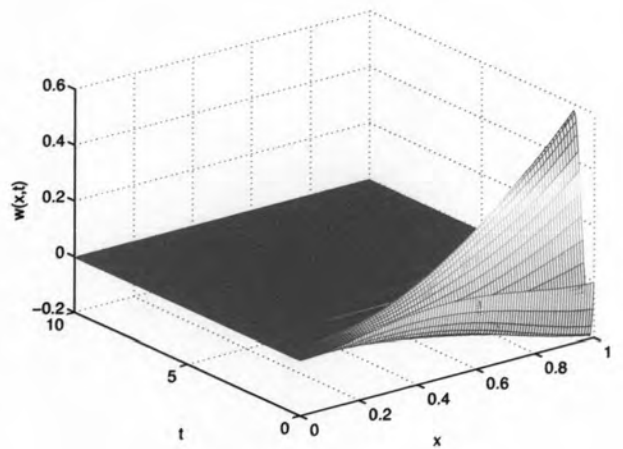
(a)



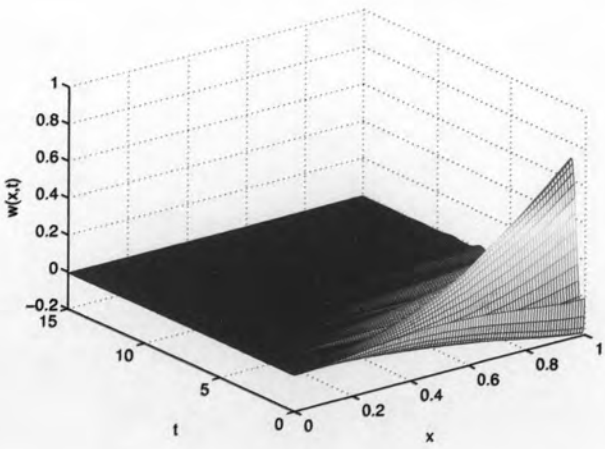
(b)



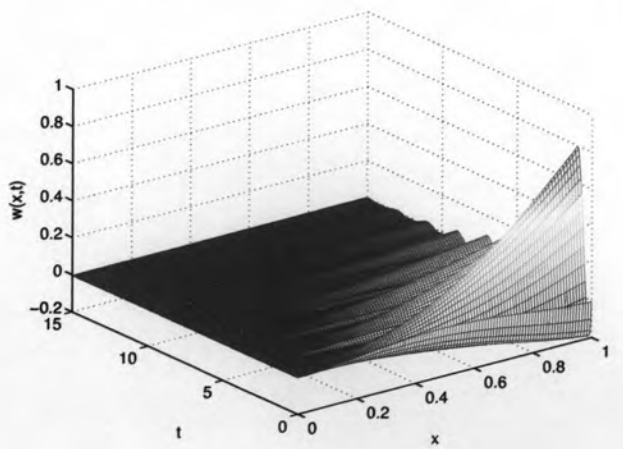
(c)



(d)



(e)



(f)

รูปที่ 5.4: การกระจัดตามขวาง  $w(x,t)$  ของคานเรย์ลีเมื่อใช้ตัวควบคุมป้อนกลับสถานะ (3.8) และ (3.11) เมื่อ (a)  $c = 0.25$  (b)  $c = 0.5$  (c)  $c = 0.75$  (d)  $c = 1$  (e)  $c = 2$  (f)  $c = 3$

#### 5.2.4 การจำลองแบบผลตอบสนองของระบบวงนปิดเมื่อใช้การป้อนกลับสัญญาณออก

จาก (3.19)–(3.27) จะได้สมการคือ

$$\begin{aligned}\hat{u}_{tt}(x, t) &= \hat{u}_{xx}(x, t) + \hat{u}(x, t) + \int_0^x \sinh(x-y)\hat{u}(y, t)dy \\ &\quad + (p_y(x, 0) - p(0, 0)p(x, 0))\hat{u}(0, t) - p(x, 0)\hat{u}_x(0, t)\end{aligned}\quad (5.50)$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{tt}(x, t) &= \tilde{u}_{xx}(x, t) + \tilde{u}(x, t) + \int_0^x \sinh(x-y)\tilde{u}(y, t)dy \\ &\quad - (p_y(x, 0) - p(0, 0)p(x, 0))\tilde{u}(0, t) + p(x, 0)\tilde{u}_x(0, t)\end{aligned}\quad (5.51)$$

$$\hat{u}(0, t) = -\tilde{u}(0, t) + \frac{1}{\sinh 1} \int_0^1 \cosh(1-y)\tilde{u}(y, t)dy \quad (5.52)$$

$$\hat{u}_x(1, t) = k(1, 1)\hat{u}(1, t) - c\hat{u}_t(1, t) + \int_0^1 k_x(1, y)\hat{u}(y, t)dy + c \int_0^1 k(1, y)\hat{u}_t(y, t)dy \quad (5.53)$$

$$\tilde{u}_x(0, t) = -(p(0, 0) - c_1)\tilde{u}(0, t) + c_0\tilde{u}_t(0, t) \quad (5.54)$$

$$\tilde{u}_x(1, t) = 0 \quad (5.55)$$

และมีเงื่อนไขเริ่มต้น (5.24)–(5.25) และ

$$\hat{u}(x, 0) = \frac{u(x, 0)}{2} \quad (5.56)$$

$$\hat{u}_t(x, 0) = 0 \quad (5.57)$$

เมื่อทำ (5.50)–(5.55) ให้เป็นนัยิต โดยกำหนดให้  $p^i = p(ih, 0)$ ,  $p_y^i = p_y(ih, 0)$  และ  $q^i = p_y^i - p^0 p^i$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned}0 &= h^2 \hat{u}_{tt}^i - \hat{u}^{i+1} + (2 - h^2)\hat{u}^i - \hat{u}^{i-1} \\ &\quad - \frac{h^3}{2} \sum_{l=1}^i [\hat{u}^l \sinh(h(i-l)) + \hat{u}^{l-1} \sinh(h(i-l+1))] - h^2 q^i \hat{u}^0 + h p^i (\hat{u}^1 - \hat{u}^0)\end{aligned}\quad (5.58)$$

$$\begin{aligned}0 &= h^2 \tilde{u}_{tt}^i - \tilde{u}^{i+1} + (2 - h^2)\tilde{u}^i - \tilde{u}^{i-1} \\ &\quad - \frac{h^3}{2} \sum_{l=1}^i [\tilde{u}^l \sinh(h(i-l)) + \tilde{u}^{l-1} \sinh(h(i-l+1))] + h^2 q^i \tilde{u}^0 - h p^i (\tilde{u}^1 - \tilde{u}^0)\end{aligned}\quad (5.59)$$

$$\hat{u}^0 = -\tilde{u}^0 + \frac{h}{2 \sinh 1} \sum_{i=1}^N [\hat{u}^i \cosh(1-ih) + \tilde{u}^{i-1} \cosh(1-(i-1)h)] \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned}0 &= \left( ch - \frac{ch^2 k^N}{2} \right) \hat{u}_t^N + (1 - hk^N)\hat{u}^N - \hat{u}^{N-1} \\ &\quad - \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^N [\hat{u}^i k_x^i + \hat{u}^{i-1} k_x^{i-1}] - ch^2 \sum_{i=1}^{N-1} \hat{u}_t^i k^i\end{aligned}\quad (5.61)$$

$$0 = \tilde{u}^1 - (c_1 h + 1)\tilde{u}^0 - c_0 h \tilde{u}_t^0 \quad (5.62)$$

$$\tilde{u}^N = \tilde{u}^{N-1} \quad (5.63)$$

ให้  $z = [\hat{u}^1 \ \hat{u}^2 \ \dots \ \hat{u}^N \ \hat{u}^0 \ \hat{u}^1 \ \dots \ \hat{u}^{N-1}]^T$  จะได้ว่าสมการ (5.58)–(5.63) สามารถเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ (5.11) ได้ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \\ C_{23} & C_{24} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{31} & C_{32} \\ C_{33} & C_{34} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

เมื่อ

$A_1$  คือเมทริกซ์  $A$  ใน (5.44)

$B_1$  คือเมทริกซ์  $B$  ใน (5.45)

$C_{11}$  คือเมทริกซ์  $C_1$  ใน (5.47)

$C_{21}$  คือเมทริกซ์  $C_2$  ใน (5.48)

$C_{31}$  คือเมทริกซ์  $C_3$  ใน (5.49)

$$A_2 = A_3 = B_2 = B_3 = C_{13} = C_{22} = C_{23} = C_{33} = 0 \quad (5.67)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h^2 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} -c_0 h & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} -h^2 q^1 - hp^1 & hp^1 & 0 & \dots & 0 \\ -h^2 q^2 - hp^2 & hp^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -h^2 q^{N-1} - hp^{N-1} & hp^{N-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

$$C_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-h^2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-h^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2-h^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1-h^2 \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

$$C_{24} = -\frac{h^3}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sinh h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sinh 2h & 2 \sinh h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sinh 3h & 2 \sinh 2h & 2 \sinh h & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \sinh(N-1)h & 2 \sinh(N-2)h & 2 \sinh(N-3)h & \dots & 2 \sinh h & 0 \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

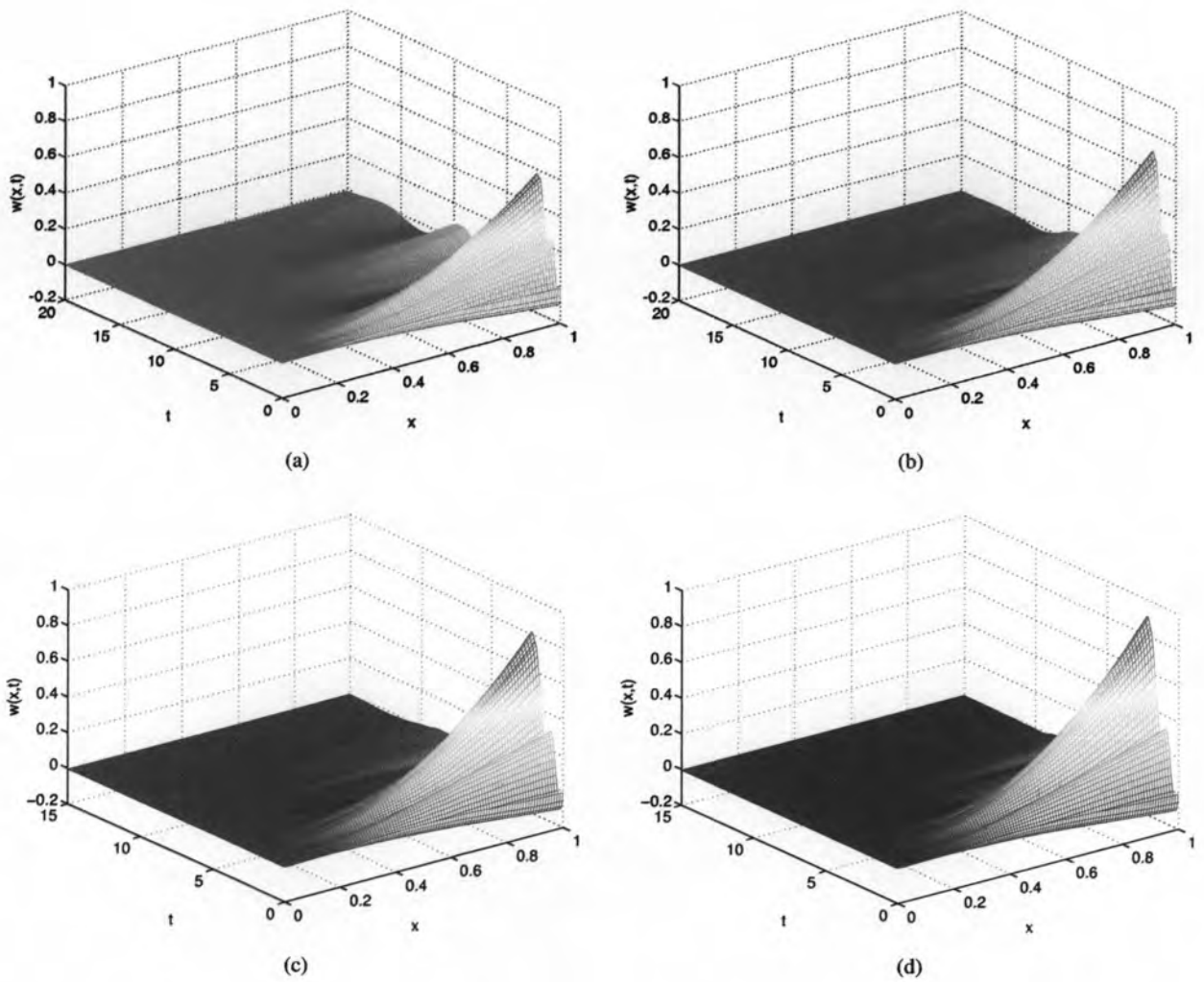
$$C_{32} = \begin{bmatrix} \left( -1 - 0.5h^3 \sinh h \right) P \\ \left( -0.5h^3 \sinh 2h \right) P \\ \left( -0.5h^3 \sinh 3h \right) P \\ \vdots \\ \left( -0.5h^3 \sinh(N-1)h \right) P \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

$$C_{34} = \begin{bmatrix} -c_1 h - 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ h^2 q^1 + h p^1 & -h p^1 & 0 & \dots & 0 \\ h^2 q^2 + h p^2 & -h p^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h^2 q^{N-1} + h p^{N-1} & -h p^{N-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

โดยที่

$$P = \frac{1}{\sinh 1} \begin{bmatrix} 0.5h \cosh Nh - \sinh Nh \\ h \cosh(N-1)h \\ h \cosh(N-2)h \\ \dots \\ h \cosh 2h \\ h(0.5 + \cosh h) \end{bmatrix}^T \quad (5.75)$$

เมื่อหาผลเฉลยโดยวิธีการเวียนเกิด  $I_{MN}$  ของซาทาเกียน และใช้  $u^i = \hat{u}^i + \tilde{u}^i$  ร่วมกับ (5.29) จะได้ผลตอบสนองของการกระจัดตามขวาง  $w(x, t)$  ของคานาดังที่แสดงรูปที่ 5.5 และ 5.6

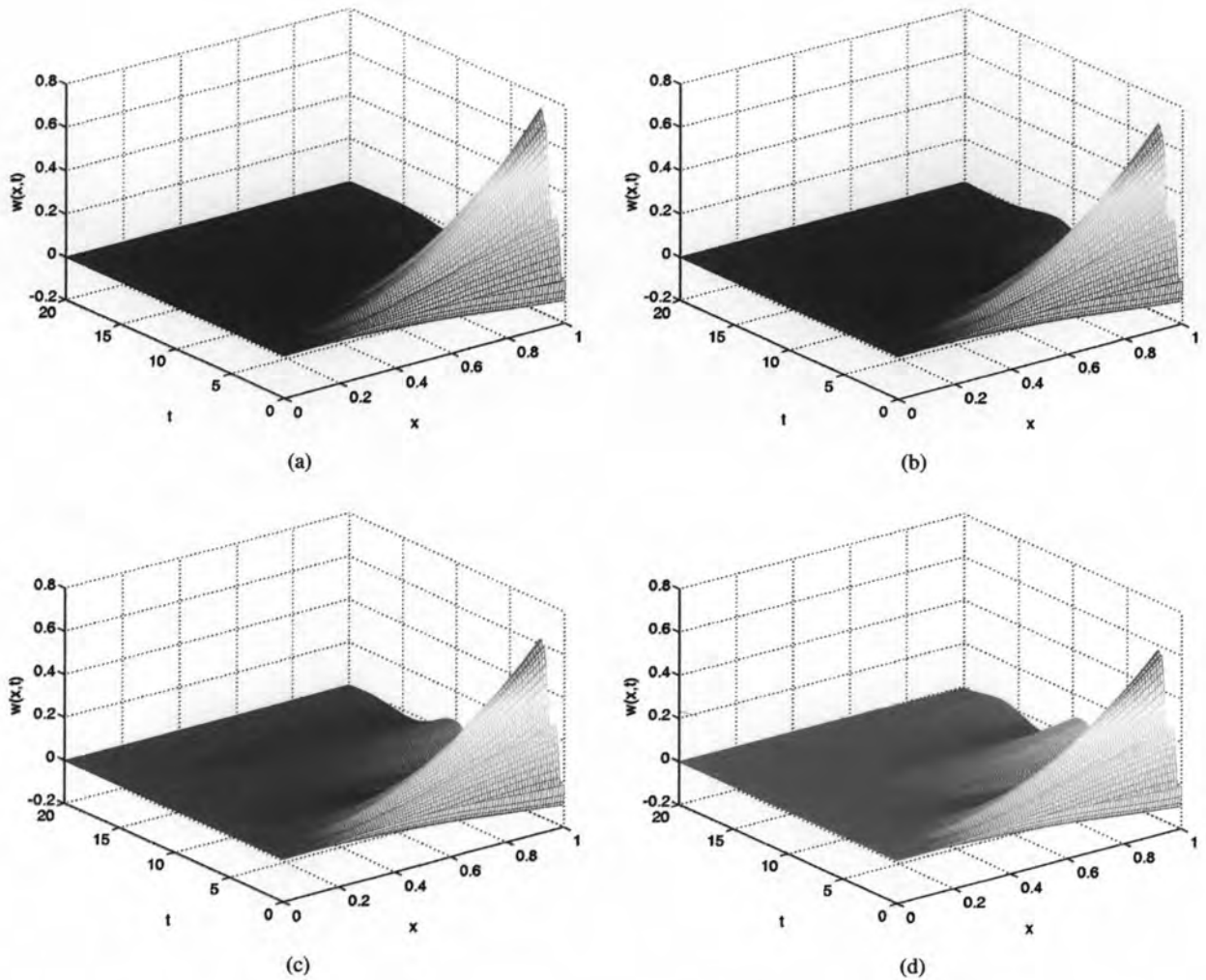


รูปที่ 5.5: การกระจัดตามขวาง  $w(x,t)$  ของคานาเรย์ลีเมื่อใช้ตัวควบคุมป้อนกลับสัญญาณออก (3.19) และ (3.20) เมื่อ  $c = 0.5$ ,  $c_1 = 0.9$  และ (a)  $c_0 = 0.75$  (b)  $c_0 = 1$  (c)  $c_0 = 1.25$  (d)  $c_0 = 1.5$

จากรูปที่ 5.5 จะเห็นว่าการปรับพารามิเตอร์  $c_0$  ให้มีค่ามากขึ้น จะทำให้ผลตอบสนองมีส่วนพุงเกินมากขึ้น แต่ก็ทำให้ผลตอบสนองเข้าสู่สภาวะอยู่ตัวได้รวดเร็วขึ้น ดังตาราง 5.2

ตารางที่ 5.2: ตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า  $\max_{x,t} |w(x,t)|$ ,  $T_s$  และ  $c_0$  เมื่อ  $c = 0.5$  และ  $c_1 = 0.9$

$c_0$	0.75	1	1.25	1.5
$\max_{x,t}  w(x,t) $	0.5774	0.7101	0.8211	0.9152
$T_s$	21.45	16.95	13.30	9.75



รูปที่ 5.6: การกระจัดตามขวาง  $w(x,t)$  ของคานาเรย์ลีเมื่อใช้ตัวควบคุมป้อนกลับสัญญาณออก (3.19) และ (3.20) เมื่อ  $c = 0.5$ ,  $c_0 = 0.75$  และ (a)  $c_1 = 0.3$  (b)  $c_1 = 0.5$  (c)  $c_1 = 0.7$  (d)  $c_1 = 0.9$

จากรูปที่ 5.6 จะเห็นว่าการปรับพารามิเตอร์  $c_1$  ให้มีค่ามากขึ้น จะทำให้ผลตอบสนองมีส่วนพุงเกินน้อยลง แต่ก็ทำให้ผลตอบสนองเข้าสู่สภาวะอยู่ตัวได้ช้าลง ดังตาราง 5.3

ตารางที่ 5.3: ตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า  $\max_{x,t} |w(x,t)|$ ,  $T_s$  และ  $c_1$  เมื่อ  $c = 0.5$  และ  $c_0 = 0.75$

$c_1$	0.3	0.5	0.7	0.9
$\max_{x,t}  w(x,t) $	0.7363	0.6748	0.6227	0.5774
$T_s$	13.45	17.75	19.50	21.45



### 5.3 สรุป

ในบทนี้ได้ใช้การประมาณสี่เหลี่ยมในการแสดงกราฟของเคอร์เนลอัตราขยายการป้อนกลับ และใช้วิธีการเวียนเกิด  $I_{MN}$  ของซาเกียนสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในการจำลองแบบผลตอบสนองทั้งในกรณีระบบวงวนเปิด ระบบวงวนปิดที่ใช้การป้อนกลับสถานะ และระบบวงวนปิดที่ใช้การป้อนกลับสัญญาณออก นอกจากนี้ยังได้พิจารณาผลของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่มีต่อผลตอบสนองภาวะชั่วคราว (transient response) ของระบบวงวนปิดซึ่งพบว่า การปรับพารามิเตอร์  $c$  ให้มีค่ามากขึ้น จะทำให้ผลตอบสนองมีส่วนพุ่งเกินมากขึ้น และการปรับพารามิเตอร์  $c$  ให้มีค่าเข้าใกล้ 1 จะทำให้ผลตอบสนองเข้าสู่สภาวะอยู่ตัวได้รวดเร็วขึ้น การปรับพารามิเตอร์  $c_0$  ให้มีค่ามากขึ้น จะทำให้ผลตอบสนองมีส่วนพุ่งเกินมากขึ้น แต่ก็ทำให้ผลตอบสนองเข้าสู่สภาวะอยู่ตัวได้รวดเร็วขึ้น และการปรับพารามิเตอร์  $c_1$  ให้มีค่ามากขึ้น จะทำให้ผลตอบสนองมีส่วนพุ่งเกินน้อยลง แต่ก็ทำให้ผลตอบสนองเข้าสู่สภาวะอยู่ตัวได้ช้าลง