บทที่ 4

การพิสูจน์เสถียรภาพ

4.1 การพิสูจน์เสถียรภาพ

ในหัวข้อนี้จะพิสูจน์เสถียรภาพของระบบเป้าหมาย (3.2)–(3.4) และ (3.29)–(3.31) โดยใช้การขยายผลจากวิธีการของเลียปูนอฟ [21] และอาศัยบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 4.1

$$|w(x_1,t) - w(x_2,t)| \leq \|w_x\| \qquad \forall x_1, x_2 \in [0,1]$$

เมื่อ $\|w\|$ คือนอร์มสองของ $w(x,t)$ เมื่อคิดเทียบกับตัวแปร x

พิสูจน์ เนื่องจาก $w(x_1,t) - w(x_2,t) = \int_{x_2}^{x_1} w_x(x,t)dx$
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|w(x_1,t) - w(x_2,t)| &= \left|\int_{x_2}^{x_1} w_x(x,t)dx\right| \\
&\leq \left|\int_{x_2}^{x_1} |w_x(x,t)|dx\right| \\
&\leq \int_0^1 |w_x(x,t)|dx \\
&\leq \sqrt{\int_0^1 w_x^2(x,t)dx} \\
&= \|w_x\|
\end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 4.2 ระบบต่อไปนี้มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

$$\begin{aligned}
w_{tt}(x,t) &= \epsilon w_{xx}(x,t) \\
w(0,t) &= 0 \\
w_x(1,t) &= -cw_t(1,t)
\end{aligned}$$

เมื่อ $\epsilon, c > 0$

พิสูจน์ กำหนดฟังก์ชันเลียปูนอฟ

$$V(t) = E_1(t) + E_2(t)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \frac{1}{2}\left(\|w_t\|^2 + \epsilon\|w_x\|^2\right) \\ E_2(t) &= 2\beta\int_0^1 xw_t(x,t)w_x(x,t)dx \qquad (\beta > 0) \end{aligned}$$

และกำหนดให้

$$E(t) = \|w_t\|^2 + \|w_x\|^2$$

ซึ่งจากอสมการ $x^2 + y^2 \geq 2xy$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\min(1,\epsilon)\mathrm{E(t)} &\leq E_1(t) \leq \frac{1}{2}\max(1,\epsilon)\mathrm{E(t)} \\ -\beta E(t) &\leq E_2(t) \leq \beta E(t) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lambda_1 E(t) \leq V(t) \leq \lambda_2 E(t)$$

โดยที่ $\lambda_1 = \frac{1}{2}\min(1,\epsilon) - \beta$ และ $\lambda_2 = \frac{1}{2}\max(1,\epsilon) + \beta$

เนื่องจาก $V(t) \geq 0$ เราจึงเลือก $\beta < \frac{1}{2}\min(1,\epsilon)$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \dot{E}_1(t) &= \int_0^1 \left(w_t(x,t)w_{tt}(x,t) + \epsilon w_x(x,t)w_{xt}(x,t)\right)dx \\ &= \epsilon\left(\int_0^1 \left(w_t(x,t)w_{xx}(x,t) + w_x(x,t)w_{xt}(x,t)\right)dx\right) \\ &= \epsilon\left(w_t(1,t)w_x(1,t) - w_t(0,t)w_x(0,t)\right) \\ &= -\epsilon c w_t^2(1,t) \\ \dot{E}_2(t) &= 2\beta\int_0^1 \left(xw_t(x,t)w_{xt}(x,t) + xw_{tt}(x,t)w_x(x,t)\right)dx \\ &= 2\beta\int_0^1 \left(xw_t(x,t)w_{xt}(x,t) + \epsilon xw_x(x,t)w_{xx}(x,t)\right)dx \\ &= \beta\left(w_t^2(1,t) - \|w_t\|^2\right) + \beta\epsilon\left(w_x^2(1,t) - \|w_x\|^2\right) \\ &= -\beta\|w_t\|^2 - \beta\epsilon\|w_x\|^2 + (\beta + \beta\epsilon c^2)w_t^2(1,t) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\dot{V}(t) = -\beta\|w_t\|^2 - \beta\epsilon\|w_x\|^2 - (\epsilon c - \beta - \beta\epsilon c^2)w_t^2(1,t)$$

เพื่อให้สัมประสิทธิ์ข้างหน้าพจน์ $w_t^2(1,t)$ มีค่าน้อยกว่าศูนย์ เราจึงเลือก $\beta < \min\left(\frac{1}{2}\min(1,\epsilon), \frac{\epsilon c}{\epsilon c^2+1}\right)$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq -\beta\|w_t\|^2 - \beta\epsilon\|w_x\|^2 \\
&\leq -\min(\beta,\beta\epsilon)\mathrm{E(t)} \\
&\leq -\lambda_3 V(t)
\end{aligned}$$

โดยที่ $\lambda_3 = \dfrac{\min(\beta,\beta\epsilon)}{\lambda_2} > 0$ ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$V(t) \leq V(0)e^{-\lambda_3 t}$$

เมื่อแทนค่า $x_2 = 0$ ในบทตั้ง 4.1 จะได้ว่า

$$|w(x,t)| \leq \|w_x\| \leq \sqrt{E(t)} \leq \sqrt{\frac{V(t)}{\lambda_1}} \leq Me^{\omega t}$$

โดยที่ $M = \sqrt{\dfrac{V(0)}{\lambda_1}} > 0$ และ $\omega = -\dfrac{\lambda_3}{2} < 0$ นั่นคือ ระบบมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง □

ทฤษฎีบท 4.3 ระบบต่อไปนี้มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

$$\begin{aligned}
w_{tt}(x,t) &= \epsilon w_{xx}(x,t) \\
w_x(0,t) &= 0 \\
w_x(1,t) &= -c_0 w_t(1,t) - c_1 w(1,t)
\end{aligned}$$

โดยที่ $\epsilon, c_0 > 0$ และ $0 < c_1 < 1$ (สังเกตว่าระบบนี้จะสมมูลกับระบบ (3.29)–(3.31) เมื่อเปลี่ยนตัวแปร $\bar{x} = 1 - x$)

พิสูจน์ กำหนดฟังก์ชันเลียปูนอฟ

$$V(t) = E_1(t) + E_2(t) + E_3(t)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
E_1(t) &= \frac{1}{2}\left(\|w_t\|^2 + \epsilon\|w_x\|^2 + \alpha w^2(1,t)\right) && (\alpha > 0) \\
E_2(t) &= 2\beta\int_0^1 x w_t(x,t) w_x(x,t)dx && (\beta > 0) \\
E_3(t) &= \mu\beta\int_0^1 w_t(x,t) w(x,t)dx && (\mu > 0)
\end{aligned}$$

และกำหนดให้

$$E(t) = \|w_t\|^2 + \|w_x\|^2 + w^2(1,t)$$

ซึ่งจากอสมการ $x^2 + y^2 \geq 2xy$ และ $\||x| - |y|\| \leq |x - y|$ ร่วมกับบทตั้ง 4.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{min}(1,\epsilon,\alpha)\mathrm{E(t)} &\leq E_1(t) \leq \frac{1}{2}\mathrm{max}(1,\epsilon,\alpha)\mathrm{E(t)} \\
-\beta E(t) &\leq E_2(t) \leq \beta E(t) \\
-\mu\beta E(t) &\leq E_3(t) \leq \mu\beta E(t)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lambda_1 E(t) \leq V(t) \leq \lambda_2 E(t)$$

โดยที่ $\lambda_1 = \frac{1}{2}\mathrm{min}(1,\epsilon,\alpha) - \beta - \mu\beta$ และ $\lambda_2 = \frac{1}{2}\mathrm{max}(1,\epsilon,\alpha) + \beta + \mu\beta$

เนื่องจาก $V(t) \geq 0$ เราจึงเลือก $\beta < \dfrac{\mathrm{min}(1,\epsilon,\alpha)}{2\mu + 2}$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\dot{E}_1(t) &= \epsilon\big(w_t(1,t)w_x(1,t) - w_t(0,t)w_x(0,t)\big) + \alpha w_t(1,t)w(1,t) \\
&= -\epsilon c_0 w_t^2(1,t) - (\epsilon c_1 - \alpha)w_t(1,t)w(1,t) \\
\dot{E}_2(t) &= \beta\big(w_t^2(1,t) - \|w_t\|^2\big) + \beta\epsilon\big(w_x^2(1,t) - \|w_x\|^2\big) \\
&= -\beta\|w_t\|^2 - \beta\epsilon\|w_x\|^2 + (\beta + \beta\epsilon c_0^2)w_t^2(1,t) + \beta\epsilon c_1^2 w^2(1,t) + 2\beta\epsilon c_0 c_1 w_t(1,t)w(1,t) \\
\dot{E}_3(t) &= \mu\beta\int_0^1 \big(w_{tt}(x,t)w(x,t) + w_t^2(x,t)\big)dx \\
&= \mu\beta\int_0^1 \big(\epsilon w_{xx}(x,t)w(x,t) + w_t^2(x,t)\big)dx \\
&= \mu\beta\epsilon\big(w(1,t)w_x(1,t) - w(0,t)w_x(0,t)\big) - \mu\beta\epsilon\|w_x\|^2 + \mu\beta\|w_t\|^2 \\
&= \mu\beta\epsilon w(1,t)\big(-c_0 w_t(1,t) - c_1 w(1,t)\big) - \mu\beta\epsilon\|w_x\|^2 + \mu\beta\|w_t\|^2 \\
&= \mu\beta\|w_t\|^2 - \mu\beta\epsilon\|w_x\|^2 - \mu\beta\epsilon c_1 w^2(1,t) - \mu\beta\epsilon c_0 w_t(1,t)w(1,t)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\dot{V}(t) = -K_1|w_x\|^2 - K_2\|w_t\|^2 - K_3 w_t^2(1,t) - K_4 w^2(1,t) - K_5 w_t(1,t)w(1,t)$$

โดยที่

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \beta\epsilon(1+\mu) > 0 \\
K_2 &= \beta(1-\mu) \\
K_3 &= \epsilon c_0 - \beta\epsilon c_0^2 - \beta \\
K_4 &= \beta\epsilon c_1(\mu - c_1) \\
K_5 &= \mu\beta\epsilon c_0 + \epsilon c_1 - 2\beta\epsilon c_0 c_1 - \alpha
\end{aligned}
$$

พบว่า ถ้าเลือก

$$
\begin{aligned}
c_1 &< \mu < \min(1, 2c_1) \\
\beta &< \min\left(\frac{\min(1,\epsilon,\alpha)}{2\mu+2}, \frac{\epsilon c_0}{\epsilon c_0^2+1}, \frac{c_1}{c_0(2c_1-\mu)}\right) \\
\alpha &= \mu\beta\epsilon c_0 + \epsilon c_1 - 2\beta\epsilon c_0 c_1 > 0
\end{aligned}
$$

จะทำให้ $K_2, K_3, K_4 > 0$ และ $K_5 = 0$ ซึ่งจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq -K_1|w_x\|^2 - K_2\|w_t\|^2 - K_3 w_t^2(1,t) \\
&\leq -\min(\mathrm{K_1, K_2, K_3})\mathrm{E(t)} \\
&\leq -\lambda_3 V(t)
\end{aligned}
$$

โดยที่ $\lambda_3 = \dfrac{\min(\mathrm{K_1,K_2,K_3})}{\lambda_2} > 0$ ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$
V(t) \leq V(0)e^{-\lambda_3 t}
$$

จากอสมการ $||x| - |y|| \leq |x-y|$ และบทตั้ง 4.1 จะได้ว่า

$$
|w(x,t)| \leq \|w_x\| + |w(1,t)| \leq \sqrt{2(\|w_x\|^2 + w^2(1,t))} \leq \sqrt{2E(t)} \leq \sqrt{\frac{2V(t)}{\lambda_1}} \leq Me^{\omega t}
$$

โดยที่ $M = \sqrt{\dfrac{2V(0)}{\lambda_1}} > 0$ และ $\omega = -\dfrac{\lambda_3}{2} < 0$ นั่นคือ ระบบมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง □

4.2 สรุป

ในบทนี้ได้ใช้การขยายผลจากวิธีการของเลียปูนอฟร่วมกับบทตั้ง 4.1 พิสูจน์ว่าระบบเป้าหมาย (3.2)–(3.4) และ (3.29)–(3.31) มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง