บทที่ 3

การออกแบบควบคุมและตัวสังเกต

3.1 การออกแบบตัวควบคุม

ในหัวข้อนี้จะใช้วิธีการแปลงก้าวถอยหลังในการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะที่ปลาย $x = 1$ เนื่องจากแบบจำลองดั้งเดิมของระบบอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสี่ในตัวแปรตำแหน่ง ดังนั้นจึงต้องมีเงื่อนไขขอบทั้งหมดสี่เงื่อนไข แสดงว่าจะต้องใช้สัญญาณควบคุมทั้งสิ้นสองตัว ซึ่งในที่นี้จะควบคุมความชันของเส้นกึ่งกลางคาน $(w_x(1,t))$ และแรงเฉือน $(w_{xxx}(1,t))$ โดยจะหาการแปลงก้าวถอยหลังซึ่งแปลงระบบ (2.6)–(2.7) ไปสู่ระบบที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

พิจารณาการแปลงปริพันธ์ก้าวถอยหลัง

$$v(x,t) = u(x,t) - \int_0^x k(x,y)u(y,t)dy \tag{3.1}$$

สมมติว่าการแปลง (3.1) ได้แปลง (2.6)–(2.7) ไปสู่ระบบเป้าหมายซึ่งมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง (ดูการพิสูจน์ได้ในบทที่ 4)

$$v_{tt}(x,t) = \frac{1}{\rho I}v_{xx}(x,t) \tag{3.2}$$

$$v(0,t) = 0 \tag{3.3}$$

$$v_x(1,t) = -cv_t(1,t) \tag{3.4}$$

โดยที่ $c > 0$

เมื่อแทน $x = 0$ ใน (3.1) จะได้ว่า

$$v(0,t) = u(0,t) \tag{3.5}$$

จาก (2.3) และ (2.5) จะได้ว่า

$$w_x(x,t) = \frac{1}{\rho\sqrt{AI}}\Big(\rho I w_{xx}(0,t) - u(0,t)\Big)\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}x + \frac{1}{\rho I}\int_0^x \cosh\left(\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y)\right)u(y,t)dy \tag{3.6}$$

แทน $x = 1$ ใน (3.6) และจัดรูปใหม่ จะได้

$$u(0,t) = \frac{-\rho\sqrt{AI}}{\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}}\left[w_x(1,t) - \left(\sqrt{\frac{I}{A}}\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}\right)w_{xx}(0,t) - \frac{1}{\rho I}\int_0^1 \cosh\left(\sqrt{\frac{A}{I}}(1-y)\right)u(y,t)dy\right] \tag{3.7}$$

ซึ่งจาก (3.3) และ (3.5) ทำให้เราได้ตัวควบคุมป้อนกลับสถานะตัวแรกคือ

$$w_x(1,t) = \left(\sqrt{\frac{I}{A}}\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}\right)w_{xx}(0,t) + \frac{1}{\rho I}\int_0^1 \cosh\left(\sqrt{\frac{A}{I}}(1-y)\right)u(y,t)dy \tag{3.8}$$

ต่อไปจะออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะตัวที่สองดังนี้ เมื่อหาอนุพันธ์ (3.1) เทียบตัวแปรตำแหน่ง จะได้

$$v_x(x,t) = u_x(x,t) - k(x,x)u(x,t) - \int_0^x k_x(x,y)u(y,t)dy \tag{3.9}$$

แทน $x = 1$ ใน (3.9) และจัดรูปใหม่ จะได้

$$\begin{aligned} u_x(1,t) &= v_x(1,t) + k(1,1)u(1,t) + \int_0^1 k_x(1,y)u(y,t)dy \\ &= -cv_t(1,t) + k(1,1)u(1,t) + \int_0^1 k_x(1,y)u(y,t)dy \\ &= -c\Big(u_t(1,t) - \int_0^1 k(1,y)u_t(y,t)dy\Big) + k(1,1)u(1,t) + \int_0^1 k_x(1,y)u(y,t)dy \\ &= k(1,1)u(1,t) - cu_t(1,t) + \int_0^1 k_x(1,y)u(y,t)dy + c\int_0^1 k(1,y)u_t(y,t)dy \end{aligned} \tag{3.10}$$

จาก (2.3) และ (3.8) ทำให้เราได้ตัวควบคุมป้อนกลับสถานะตัวที่สองคือ

$$\begin{aligned} w_{xxx}(1,t) &= \frac{A}{I}w_x(1,t) + \frac{k(1,1)}{\rho I}u(1,t) - \frac{c}{\rho I}u_t(1,t) + \frac{1}{\rho I}\int_0^1 k_x(1,y)u(y,t)dy \\ &\quad + \frac{c}{\rho I}\int_0^1 k(1,y)u_t(y,t)dy \\ &= \left(\sqrt{\frac{A}{I}}\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}\right)w_{xx}(0,t) + \frac{k(1,1)}{\rho I}u(1,t) - \frac{c}{\rho I}u_t(1,t) \\ &\quad + \frac{1}{\rho I}\int_0^1 \left(k_x(1,y) + \frac{A}{I}\cosh\sqrt{\frac{A}{I}}(1-y)\right)u(y,t)dy + \frac{c}{\rho I}\int_0^1 k(1,y)u_t(y,t)dy \end{aligned} \tag{3.11}$$

ต่อไปจะหาเคอร์เนล $k(x,y)$ ของการแปลง (3.1) ดังนี้ จาก (3.1) จะได้ว่า

$$v_x(x,t) = u_x(x,t) - k(x,x)u(x,t) - \int_0^x k_x(x,y)u(y,t)dy \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} v_{xx}(x,t) &= u_{xx}(x,t) - 2k_x(x,x)u(x,t) - k_y(x,x)u(x,t) - k(x,x)u_x(x,t) \\ &\quad - \int_0^x k_{xx}(x,y)u(y,t)dy \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$
\begin{aligned}
v_{tt}(x,t) &= u_{tt}(x,t) - \int_0^x k(x,y)u_{tt}(y,t)dy \\
&= u_{tt}(x,t) - \int_0^x k(x,y)\left\{\frac{1}{\rho I}u_{yy}(y,t) + \frac{A}{\rho I^2}u(y,t) + \frac{A^{3/2}}{\rho I^{5/2}}\int_0^y \sinh\left(\sqrt{\frac{A}{I}}(y-\xi)\right)u(\xi,t)d\xi\right\}dy \\
&= u_{tt}(x,t) - \frac{1}{\rho I}\left(k(x,x)u_x(x,t) - k(x,0)u_x(0,t) - \int_0^x k_y(x,y)u_y(y,t)dy\right) \\
&\quad -\frac{A}{\rho I^2}\int_0^x \left\{k(x,y) + \sqrt{\frac{A}{I}}\int_y^x k(x,\xi)\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(\xi-y)d\xi\right\}u(y,t)dy \\
&= u_{tt}(x,t) - \frac{1}{\rho I}\Bigg(k(x,x)u_x(x,t) - k(x,0)u_x(0,t) - k_y(x,x)u(x,t) + k_y(x,0)u(0,t) \\
&\quad + \int_0^x k_{yy}(x,y)u(y,t)dy\Bigg) - \frac{A}{\rho I^2}\int_0^x \left\{k(x,y) + \sqrt{\frac{A}{I}}\int_y^x k(x,\xi)\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(\xi-y)d\xi\right\}u(y,t)dy \\
&= u_{tt}(x,t) - \frac{1}{\rho I}\left(k(x,x)u_x(x,t) - k(x,0)u_x(0,t) - k_y(x,x)u(x,t) + k_y(x,0)u(0,t)\right) \\
&\quad -\frac{1}{\rho I}\int_0^x \left\{k_{yy}(x,y) + \frac{A}{I}k(x,y) + (\frac{A}{I})^{3/2}\int_y^x k(x,\xi)\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(\xi-y)d\xi\right\}u(y,t)dy \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

แทน (3.13)–(3.14) ลงใน (3.2) และใช้ (2.6) จากนั้นจัดรูปให้ข้างหนึ่งของสมการเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^x \Bigg\{k_{xx}(x,y) - k_{yy}(x,y) - \frac{A}{I}k(x,y) + (\frac{A}{I})^{3/2}\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y) \\
&\quad -(\frac{A}{I})^{3/2}\int_y^x k(x,\xi)\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(\xi-y)d\xi\Bigg\}u(y,t)dy + \left(\frac{A}{I} + 2\frac{d}{dx}k(x,x)\right)u(x,t) \\
&\quad +k(x,0)u_x(0,t) \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $\frac{d}{dx}k(x,x) = k_x(x,x) + k_y(x,x)$

เนื่องจาก (3.15) จะต้องเป็นจริงสำหรับฟังก์ชัน $u(x,t)$ ทุกฟังก์ชัน ดังนั้นสัมประสิทธิ์ข้างหน้าพจน์ต่าง ๆ ของ $u(.)$ จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ทำให้เราได้ว่าเคอร์เนล $k(x,y)$ ต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
k_{xx}(x,y) &= k_{yy}(x,y) + \frac{A}{I}k(x,y) - (\frac{A}{I})^{3/2}\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y) \\
&\quad +(\frac{A}{I})^{3/2}\int_y^x k(x,\xi)\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(\xi-y)d\xi \qquad (3.16) \\
k(x,x) &= -\frac{A}{2I}x \qquad (3.17) \\
k(x,0) &= 0 \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

สำหรับความตั้งไว้ดี (well-posedness) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3.16)–(3.18) และความผกผันได้ของการแปลง (3.1) ได้มีการพิสูจน์ไว้แล้วใน [14] และจะพบว่าการแปลงผกผันของ (3.1) อยู่ในรูป

$$u(x,t) = v(x,t) + \int_0^x l(x,y)v(y,t)dy$$

โดยที่ $l(x,y)$ เป็นเคอร์เนลของการแปลงผกผัน ซึ่งเป็นฟังก์ชันมีขอบเขต (bounded function)

เนื่องจากระบบ (3.2)–(3.4) มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง ดังนั้นจะมีค่า $M_1 > 0$ และ $\omega < 0$ ที่ทำให้

$$|v(x,t)| \le M_1 e^{\omega t}$$

สำหรับค่า $t > 0$ และค่า $x \in [0,1]$ ทุกค่า ดังนั้น

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &= \left| v(x,t) + \int_0^x l(x,y)v(y,t)dy \right| \\
&\le |v(x,t)| + \left| \int_0^x l(x,y)v(y,t)dy \right| \\
&\le |v(x,t)| + \int_0^x |l(x,y)||v(y,t)|dy \\
&\le \left(1 + \int_0^1 |l(x,y)|dy\right) M_1 e^{\omega t} \\
&\le \left(1 + \max_{x,y\in[0,1]} |l(x,y)|\right) M_1 e^{\omega t} \\
&= M_2 e^{\omega t}
\end{aligned}$$

โดยที่ $M_2 = \left(1 + \max_{x,y\in[0,1]} |l(x,y)|\right) M_1 > 0$ นั่นคือ ระบบวงวนปิด (2.6)–(2.7) มีเสถียรภาพแบบเลขชี้-กำลัง

จาก (2.5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|w(x,t)| &= \frac{1}{\rho\sqrt{AI}} \left| \int_0^x \sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y)u(y,t)dy \right| \\
&\le \frac{1}{\rho\sqrt{AI}} \int_0^x |\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y)||u(y,t)|dy \\
&\le \left(\frac{1}{\rho\sqrt{AI}} \int_0^x |\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y)|dy\right) M_2 e^{\omega t} \\
&\le \left(\frac{1}{\rho\sqrt{AI}} \sinh\sqrt{\frac{A}{I}}\right) M_2 e^{\omega t} \\
&= M_3 e^{\omega t}
\end{aligned}$$

โดยที่ $M_3 = \left(\frac{1}{\rho\sqrt{AI}} \sinh\sqrt{\frac{A}{I}}\right) M_2 > 0$ นั่นคือ ระบบวงวนปิด (2.1)–(2.2) มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

เราได้แสดงให้เห็นว่าการใช้ตัวควบคุม (3.8) และ (3.11) ทำให้ระบบ (2.1)–(2.2) มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง แต่ทว่าในการใช้ตัวควบคุม (3.8) และ (3.11) โดยตรง จะต้องมีการวัดสัญญาณ $u(x,t)$ และ $u_t(x,t)$ ตลอดทั้งคาน ซึ่งยุ่งยากมากในทางปฏิบัติ ดังนั้นในหัวข้อต่อไปเราจะออกแบบตัวสังเกต ซึ่งจะทำให้การวัดสัญญาณดังกล่าวไม่มีความจำเป็น

3.2 การออกแบบตัวสังเกต

ในหัวข้อนี้จะใช้วิธีการแปลงก้าวถอยหลังในการออกแบบตัวสังเกต เพื่อประมาณตัวแปรสถานะ $u(x,t)$ โดยจะใช้การวัดสัญญาณที่ปลาย $x = 0$ เท่านั้น ดังนั้นเราจะใช้การควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณออก (output feedback) แทนการป้อนกลับสถานะ ซึ่งทำให้ตัวควบคุม (3.8)–(3.11) อยู่ในรูปของ

$$w_x(1,t) = \Big(\sqrt{\frac{I}{A}}\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}\Big)w_{xx}(0,t) + \frac{1}{\rho I}\int_0^1 \cosh\Big(\sqrt{\frac{A}{I}}(1-y)\Big)\hat{u}(y,t)dy \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} w_{xxx}(1,t) &= \Big(\sqrt{\frac{A}{I}}\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}\Big)w_{xx}(0,t) + \frac{k(1,1)}{\rho I}\hat{u}(1,t) - \frac{c}{\rho I}\hat{u}_t(1,t) \\ &\quad + \frac{1}{\rho I}\int_0^1 \Big(k_x(1,y) + \frac{A}{I}\cosh\sqrt{\frac{A}{I}}(1-y)\Big)\hat{u}(y,t)dy + \frac{c}{\rho I}\int_0^1 k(1,y)\hat{u}_t(y,t)dy \end{aligned} \tag{3.20}$$

โดยที่ $\hat{u}(x,t)$ คือสถานะที่ประมาณได้จากตัวสังเกต ซึ่งจะออกแบบต่อไป

เราออกแบบตัวสังเกต ดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{u}_{tt}(x,t) &= \frac{1}{\rho I}\hat{u}_{xx}(x,t) + \frac{A}{\rho I^2}\hat{u}(x,t) + \frac{A^{3/2}}{\rho I^{5/2}}\int_0^x \sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y)\hat{u}(y,t)dy \\ &\quad - \frac{1}{\rho I}\Big(p(x,0)p(0,0) - p_y(x,0)\Big)\Big(\rho I w_{xx}(0,t) - \hat{u}(0,t)\Big) \\ &\quad - \frac{1}{\rho I}p(x,0)\Big(\rho I w_{xxx}(0,t) - \hat{u}_x(0,t)\Big) \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} \hat{u}(0,t) &= \rho I w_{xx}(0,t) + \frac{1}{p(0,0) - c_1}\Big(\rho I w_{xxx}(0,t) - \hat{u}_x(0,t)\Big) \\ &\quad - \frac{c_0}{\rho(0,0) - c_1}\Big(\rho I w_{xxt}(0,t) - \hat{u}_t(0,t)\Big) \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\hat{u}_x(1,t) = u_x(1,t) \tag{3.23}$$

โดยที่ $c_0 > 0$ และ $0 < c_1 < 1$ จะเห็นว่าตัวสังเกตดังกล่าวต้องใช้การวัดสัญญาณที่ปลาย $x = 0$ เท่านั้น โดยในที่นี้เป็นการวัดแรงเฉือน $w_{xxx}(0,t)$ โมเมนต์ $w_{xx}(0,t)$ และอนุพันธ์ของโมเมนต์ $w_{xxt}(0,t)$

สำหรับสัญญาณ $u_x(1,t)$ ใน (3.23) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} u_x(1,t) &= \rho I w_{xxx}(x,t) - \rho A w_x(x,t) \\ &= k(1,1)\hat{u}(1,t) - c\hat{u}_t(1,t) + \int_0^1 k_x(1,y)\hat{u}(y,t)dy + c\int_0^1 k(1,y)\hat{u}_t(y,t)dy \end{aligned} \quad (3.24)$$

นิยาม ความผิดพลาดของตัวสังเกตคือ

$$\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - \hat{u}(x,t)$$

เมื่อลบ (3.21)–(3.23) ออกจาก (2.6)–(2.7) จะได้สมการของความผิดพลาดของตัวสังเกตดังนี้

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt}(x,t) &= \frac{1}{\rho I}\tilde{u}_{xx}(x,t) + \frac{A}{\rho I^2}\tilde{u}(x,t) + \frac{A^{3/2}}{\rho I^{5/2}}\int_0^x \sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y)\tilde{u}(y,t)dy \\ &\quad + \frac{1}{\rho I}\Big(p(x,0)p(0,0) - p_y(x,0)\Big)\tilde{u}(0,t) + \frac{1}{\rho I}p(x,0)\tilde{u}_x(0,t) && (3.25) \\ \tilde{u}_x(0,t) &= -(p(0,0) - c_1)\tilde{u}(0,t) + c_0\tilde{u}_t(0,t) && (3.26) \\ \tilde{u}_x(1,t) &= 0 && (3.27) \end{aligned}$$

พิจารณาการแปลงปริพันธ์ก้าวถอยหลัง

$$\tilde{u}(x,t) = \tilde{v}(x,t) - \int_0^x p(x,y)\tilde{v}(y,t)dy \quad (3.28)$$

ซึ่งจะแปลง (3.25)–(3.27) ไปสู่ระบบเป้าหมาย

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{tt}(x,t) &= \frac{1}{\rho I}\tilde{v}_{xx}(x,t) && (3.29) \\ \tilde{v}_x(0,t) &= c_0\tilde{v}_t(0,t) + c_1\tilde{v}(0,t) && (3.30) \\ \tilde{v}_x(1,t) &= 0 && (3.31) \end{aligned}$$

ซึ่งมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง (ดูการพิสูจน์ได้ในบทที่ 4)

เราจะหาเคอร์เนล $p(x,y)$ ของการแปลง (3.28) ดังนี้ เมื่อหาอนุพันธ์เทียบตัวแปรตำแหน่งในสมการ (3.28) จะได้

$$\tilde{u}_x(x,t) = \tilde{v}_x(x,t) - p(x,x)\tilde{v}(x,t) - \int_0^x p_x(x,y)\tilde{v}(y,t)dy \quad (3.32)$$

แทน $x = 1$ ใน (3.32) และใช้ (3.27), (3.31) จะได้

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x(1,t) &= \tilde{v}_x(1,t) - p(1,1)\tilde{v}(1,t) - \int_0^1 p_x(1,y)\tilde{v}(y,t)dy \\ 0 &= p(1,1)\tilde{v}(1,t) + \int_0^1 p_x(1,y)\tilde{v}(y,t)dy && (3.33) \end{aligned}$$

เนื่องจาก (3.33) จะต้องเป็นจริงสำหรับฟังก์ชัน $\tilde{v}(x,t)$ ทุกฟังก์ชัน ดังนั้นสัมประสิทธิ์ข้างหน้าพจน์ต่าง ๆ ของ $\tilde{v}(.)$ จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ทำให้

$$p(1,1) = 0 \tag{3.34}$$

$$p_x(1,y) = 0 \tag{3.35}$$

และจาก (3.28) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{xx}(x,t) &= \tilde{v}_{xx}(x,t) - 2p_x(x,x)\tilde{v}(x,t) - p_y(x,x)\tilde{v}(x,t) - p(x,x)\tilde{v}_x(x,t) \\
&\quad - \int_0^x p_{xx}(x,y)\tilde{v}(y,t)dy && (3.36) \\
\tilde{u}_{tt}(x,t) &= \tilde{v}_{tt}(x,t) - \int_0^x p(x,y)\tilde{v}_{tt}(y,t)dy \\
&= \tilde{v}_{tt}(x,t) - \int_0^x p(x,y)\left\{\frac{1}{\rho I}\tilde{v}_{yy}(y,t)\right\}dy \\
&= \tilde{v}_{tt}(x,t) - \frac{1}{\rho I}\Big(p(x,x)\tilde{v}_x(x,t) - p(x,0)\tilde{v}_x(0,t)\Big) + \frac{1}{\rho I}\int_0^x p_y(x,y)\tilde{v}_y(y,t)dy \\
&= \tilde{v}_{tt}(x,t) - \frac{1}{\rho I}\Big(p(x,x)\tilde{v}_x(x,t) - p(x,0)\tilde{v}_x(0,t) - p_y(x,x)\tilde{v}(x,t) \\
&\quad + p_y(x,0)\tilde{v}(0,t)\Big) - \frac{1}{\rho I}\int_0^x p_{yy}(x,y)\tilde{v}(y,t)dy && (3.37) \\
\int_0^x \sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y)\tilde{u}(y,t)dy &= \int_0^x \sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y)\left\{\tilde{v}(y,t) - \int_0^y p(y,\xi)\tilde{v}(\xi,t)d\xi\right\}dy \\
&= \int_0^x \left\{\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y) - \int_y^x p(\xi,y)\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-\xi)d\xi\right\}\tilde{v}(y,t)dy && (3.38) \\
\tilde{u}(0,t) &= \tilde{v}(0,t) && (3.39) \\
\tilde{u}_x(0,t) &= \tilde{v}_x(0,t) - p(0,0)\tilde{v}(0,t) && (3.40)
\end{aligned}$$

แทน (3.36)–(3.40) ลงใน (3.25) และใช้ (3.29) จากนั้นจัดรูปให้ข้างหนึ่งของสมการเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^x \left\{p_{xx}(x,y) - p_{yy}(x,y) + \frac{A}{I}p(x,y) - (\frac{A}{I})^{3/2}\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y)\right. \\
&\quad \left. + (\frac{A}{I})^{3/2}\int_y^x p(\xi,y)\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-\xi)d\xi\right\}\tilde{v}(y,t) + \left(2\frac{d}{dx}p(x,x) - \frac{A}{I}\right)\tilde{v}(x,t) && (3.41)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก (3.41) จะต้องเป็นจริงสำหรับฟังก์ชัน $\bar{v}(x,t)$ ทุกฟังก์ชัน ดังนั้นสัมประสิทธิ์ข้างหน้าพจน์ต่าง ๆ ของ $\bar{v}(.)$ จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ และเมื่อพิจารณาร่วมกับเงื่อนไข (3.34)–(3.35) ทำให้เราได้ว่าเคอร์เนล $p(x,y)$ ต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยต่อไปนี้

$$\begin{aligned} p_{yy}(x,y) &= p_{xx}(x,y) + \frac{A}{I}p(x,y) - (\frac{A}{I})^{3/2}\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y) \\ &\quad +(\frac{A}{I})^{3/2}\int_y^x p(\xi,y)\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-\xi)d\xi && (3.42) \\ p(x,x) &= \frac{A}{2I}(x-1) && (3.43) \\ p_x(1,y) &= 0 && (3.44) \end{aligned}$$

เมื่อเปลี่ยนตัวแปรให้ $p(x,y) = \bar{p}(\bar{x},\bar{y})$ โดย $\bar{x} = 1-y$ และ $\bar{y} = 1-x$ จะได้ว่า (3.42)–(3.44) ถูกแปลงไปเป็น

$$\begin{aligned} \bar{p}_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{x},\bar{y}) &= \bar{p}_{\bar{y}\bar{y}}(\bar{x},\bar{y}) + \frac{A}{I}\bar{p}(\bar{x},\bar{y}) - (\frac{A}{I})^{3/2}\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(\bar{x}-\bar{y}) \\ &\quad +(\frac{A}{I})^{3/2}\int_{\bar{y}}^{\bar{x}} p(\bar{x},\xi)\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(\xi-\bar{y})d\xi && (3.45) \\ \bar{p}(\bar{x},\bar{x}) &= -\frac{A}{2I}\bar{x} && (3.46) \\ p_{\bar{y}}(\bar{x},0) &= 0 && (3.47) \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (3.45)–(3.47) ตั้งไว้ดี จากความผกผันได้ของการแปลง (3.28) จะได้ว่าระบบ (3.25)–(3.27) มีพฤติกรรมเช่นเดียวกับ (3.29)–(3.31) ซึ่งมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

ต่อไปจะแสดงว่าระบบ (2.1)–(2.2) เมื่อใช้ตัวควบคุม (3.19)–(3.20) มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

ทฤษฎีบท 3.1 การแปลงปริพันธ์ก้าวถอยหลัง

$$\hat{v}(x,t) = \hat{u}(x,t) - \int_0^x k(x,\xi)\hat{u}(\xi,t)d\xi \tag{3.48}$$

แปลงระบบ (3.21)–(3.23) เมื่อใช้ตัวควบคุม (3.19)–(3.20) ไปสู่ระบบที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

$$\begin{aligned} \hat{v}_{tt}(x,t) &= \frac{1}{\rho I}\hat{v}_{xx}(x,t) - \frac{1}{\rho I}\left[p(x,0) - \int_0^x k(x,\xi)p(\xi,0)d\xi\right]\tilde{u}_x(0,t) \\ &\quad -\frac{1}{\rho I}\left[\Big(p(x,0)p(0,0) - p_y(x,0)\Big) - \int_0^x k(x,\xi)\Big(p(\xi,0)p(0,0) - p_y(\xi,0)\Big)d\xi\right]\tilde{u}(0,t) && (3.49) \\ \hat{v}_x(0,t) &= -\tilde{u}(0,t) + \frac{1}{\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}}\int_0^1\sqrt{\frac{A}{I}}\cosh\Big(\sqrt{\frac{A}{I}}(1-y)\Big)\tilde{u}(y,t)dy && (3.50) \\ \hat{v}_x(1,t) &= -c\hat{v}_t(1,t) && (3.51) \end{aligned}$$

พิสูจน์ จาก (3.48) จะได้ว่า

$$\hat{v}_{xx}(x,t) = \hat{u}_{xx}(x,t) - k_x(x,x)\hat{u}(x,t) - \frac{d}{dx}k(x,x)\hat{u}(x,t) - k(x,x)\hat{u}_x(x,t) - \int_0^x k_{xx}(x,\xi)\hat{u}(\xi,t)d\xi \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned}
\hat{v}_{tt}(x,t) &= \hat{u}_{tt}(x,t) - \int_0^x k(x,\xi)\hat{u}_{tt}(\xi,t)d\xi \\
&= \hat{u}_{tt}(x,t) - \int_0^x k(x,\xi)\Bigg\{\frac{1}{\rho I}\hat{u}_{\xi\xi}(\xi,t) + \frac{A}{\rho I^2}\hat{u}(\xi,t) + \frac{A^{3/2}}{\rho I^{5/2}}\int_0^\xi \sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta,t)d\eta \\
&\quad -\frac{1}{\rho I}\Big(p(\xi,0)p(0,0) - p_y(\xi,0)\Big)\Big(\rho I w_{xx}(0,t) - \hat{u}(0,t)\Big) - \frac{1}{\rho I}p(\xi,0)\Big(\rho I w_{xxx}(0,t) - \hat{u}_x(0,t)\Big)\Bigg\}d\xi \\
&= \hat{u}_{tt}(x,t) - \frac{1}{\rho I}\Big(k(x,x)\hat{u}_x(x,t) - k(x,0)\hat{u}_x(0,t) - k_\xi(x,x)\hat{u}(x,t) + k_\xi(x,0)\hat{u}(0,t)\Big) \\
&\quad -\frac{1}{\rho I}\int_0^x \Bigg\{k_{\xi\xi}(x,\xi) + \frac{A}{I}k(x,\xi) + (\frac{A}{I})^{3/2}\int_\xi^x k(x,\eta)\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(\eta-\xi)d\eta\Bigg\}u(\xi,t)d\xi \\
&\quad +\frac{1}{\rho I}\hat{u}(0,t)\int_0^x k(x,\xi)\big(p(\xi,0)p(0,0) - p_y(\xi,0)\big)d\xi + \frac{1}{\rho I}\hat{u}_x(0,t)\int_0^x k(x,\xi)p(\xi,0)d\xi \quad (3.53)
\end{aligned}$$

จาก (3.52)–(3.53) และ (3.16)–(3.18) จะได้

$$\begin{aligned}
\hat{v}_{tt}(x,t) &= \frac{1}{\rho I}\hat{v}_{xx}(x,t) + \frac{1}{\rho I}\int_0^x \Bigg\{k_{xx}(x,\xi) - k_{\xi\xi}(x,\xi) - \frac{A}{I}k(x,\xi) + (\frac{A}{I})^{3/2}\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(x-\xi) \\
&\quad -(\frac{A}{I})^{3/2}\int_\xi^x k(x,\eta)\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}(\eta-\xi)d\eta\Bigg\}u(\xi,t)d\xi + \frac{1}{\rho I}\Big(\frac{A}{I} + 2\frac{d}{dx}k(x,x)\Big)u(x,t) \\
&\quad +\frac{1}{\rho I}k(x,0)\hat{u}_x(0,t) - \frac{1}{\rho I}\Big[p(x,0) - \int_0^x k(x,\xi)p(\xi,0)d\xi\Big]\tilde{u}_x(0,t) \\
&\quad -\frac{1}{\rho I}\Big[\Big(p(x,0)p(0,0) - p_y(x,0)\Big) - \int_0^x k(x,\xi)\Big(p(\xi,0)p(0,0) - p_y(\xi,0)\Big)d\xi\Big]\tilde{u}(0,t) \\
&= \frac{1}{\rho I}\hat{v}_{xx}(x,t) - \frac{1}{\rho I}\Big[p(x,0) - \int_0^x k(x,\xi)p(\xi,0)d\xi\Big]\tilde{u}_x(0,t) \\
&\quad -\frac{1}{\rho I}\Big[\Big(p(x,0)p(0,0) - p_y(x,0)\Big) - \int_0^x k(x,\xi)\Big(p(\xi,0)p(0,0) - p_y(\xi,0)\Big)d\xi\Big]\tilde{u}(0,t)
\end{aligned}$$

เมื่อแทน $x = 0$ **ใน** (3.48) จะได้ว่า

$$\hat{v}(0,t) = \hat{u}(0,t) \quad (3.54)$$

แทน (3.19) ใน (3.7) จะได้

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= \frac{-\rho\sqrt{AI}}{\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}}\left[\frac{1}{\rho I}\int_0^1 \cosh\left(\sqrt{\frac{A}{I}}(1-y)\right)(\hat{u}(y,t)-u(y,t))dy\right] \\
&= \frac{1}{\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}}\int_0^1 \sqrt{\frac{A}{I}}\cosh\left(\sqrt{\frac{A}{I}}(1-y)\right)\tilde{u}(y,t)dy \\
\hat{u}(0,t) &= -\tilde{u}(0,t)+\frac{1}{\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}}\int_0^1 \sqrt{\frac{A}{I}}\cosh\left(\sqrt{\frac{A}{I}}(1-y)\right)\tilde{u}(y,t)dy
\end{aligned}
$$

จาก (3.54) จะได้

$$
\hat{v}(0,t) = -\tilde{u}(0,t)+\frac{1}{\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}}\int_0^1 \sqrt{\frac{A}{I}}\cosh\left(\sqrt{\frac{A}{I}}(1-y)\right)\tilde{u}(y,t)dy
$$

เมื่อหาอนุพันธ์ (3.48) เทียบตัวแปรตำแหน่ง และใช้ (3.23)–(3.24) จะได้

$$
\begin{aligned}
\hat{v}_x(1,t) &= \hat{u}_x(1,t)-k(1,1)\hat{u}(1,t)-\int_0^1 k_x(1,\xi)\hat{u}(\xi,t)d\xi \\
&= \Big(k(1,1)\hat{u}(1,t)-c\hat{u}_t(1,t)+\int_0^1 k_x(1,\xi)\hat{u}(\xi,t)d\xi+c\int_0^1 k(1,\xi)\hat{u}_t(\xi,t)d\xi\Big) \\
&\quad -k(1,1)\hat{u}(1,t)-\int_0^1 k_x(1,\xi)\hat{u}(\xi,t)d\xi \\
&= -c\Big(\hat{u}_t(1,t)-\int_0^1 k(1,\xi)\hat{u}_t(\xi,t)d\xi\Big) \\
&= -c\hat{v}_t(1,t)
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก (3.49)–(3.51) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้น ซึ่งมีส่วนเอกพันธ์ (homogeneous part) ลู่เข้าสู่ศูนย์แบบเลขชี้กำลัง และส่วนไม่เอกพันธ์ (คือ $\tilde{u}$) ลู่เข้าสู่ศูนย์แบบเลขชี้กำลัง ดังนั้นระบบ (3.49)–(3.51) จึงมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง □

จากทฤษฎีบท 3.1 และความผกผันได้ของการแปลง (3.48) จะได้ว่า $\hat{u}(x,t)$ มีพฤติกรรมเช่นเดียวกับ $\hat{v}(x,t)$ ซึ่งลู่เข้าสู่ศูนย์แบบเลขชี้กำลัง ดังนั้น $u(x,t)=\hat{u}(x,t)+\tilde{u}(x,t)$ จึงลู่เข้าสู่ศูนย์แบบเลขชี้กำลัง และจาก (2.5) จะได้ว่า $w(x,t)$ ลู่เข้าสู่ศูนย์แบบเลขชี้กำลัง

3.3 สรุป

ในบทนี้ได้ออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสถานะที่ขอบเพื่อควบคุมความชันของเส้นกึ่งกลางคานและแรงเฉือนที่ปลาย $x=1$ ของคาน และตัวสังเกตซึ่งใช้การวัดโมเมนต์ อนุพันธ์ของโมเมนต์ และแรงเฉือนที่

ปลาย $x = 0$ ของคาน หลักการในการออกแบบคือใช้การแปลงปริพันธ์ก้าวถอยหลังแปลงแบบจำลองที่ถูกแปลงของคานเรย์ลีและสมการของความผิดพลาดของตัวสังเกตไปสู่ระบบเป้าหมายที่มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง ซึ่งจากความตั้งไว้ดีของสมการเคอร์เนลและความผกผันได้ของการแปลงจะทำให้ระบบดั้งเดิมมีพฤติกรรมเช่นเดียวกับระบบเป้าหมาย คือมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง นอกจากนี้ได้แสดงว่าระบบวงวนปิดที่ใช้การป้อนกลับสัญญาณออกมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง