

การจำลองความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติ  
ความยืดหยุ่นยังผลของหินใน 2 และ 3 มิติ  
นายเคน อีเกตะ

ธรณีวิทยา  
2558

วันที่ส่ง

...../...../.....

วันที่อนุมัติ

...../...../.....

ลงชื่อ.....

(อาจารย์ ดร. วรรณทร คณิตปัญญาเจริญ)

อาจารย์ที่ปรึกษาโครงการงานวิทยาศาสตร์

การจำลองความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติความยืดหยุ่นยังผลของหินใน 2 และ 3 มิติ

นายเคน อีเกดะ

โครงการวิทยาศาสตร์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาธรณีวิทยา คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2558

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# Modelling of Relation between 2D and 3D Rock Effective Elastic Properties

Ken Ikeda

A Report Submitted in Partial Fulfilment of the Requirements for the  
Bachelor Degree of Science Program in Department of Geology,  
Faculty of Science, Chulalongkorn University Academic Year 2015  
Copyright of Chulalongkorn University

เคน อิกเคะ : การจำลองความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติความยืดหยุ่นยังผลของหินใน 2 และ 3 มิติ. (MODELLING OF RELATION BETWEEN ROCK 2D AND 3D EFFECTIVE ELASTIC PROPERTIES) อ.ที่ปรึกษาโครงการงานวิทยาศาสตร์หลัก : อาจารย์ ดร. วรยุทธ คณิตปัญญา เจริญ. อาจารย์ที่ปรึกษาร่วมในโครงการ : Professor Gerald Mavko, 34 หน้า

ในทางทฤษฎีนั้นสมบัติความยืดหยุ่นยังผลของหินสามารถคำนวณหาได้จากการนำแผ่นหินรูปแบบ 2 มิติมาจำลองให้อยู่ในรูปทรงหิน 3 มิติ แต่การสร้างแบบจำลองประเภทนี้ทำขึ้นได้ยากเนื่องจากต้องใช้สมการทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนมาอธิบายสมบัติความยืดหยุ่นยังผลของหินแต่ละชนิด ดังนั้นงานวิจัยฉบับนี้มุ่งเน้นทำการศึกษาหาสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของความยืดหยุ่นยังผลในรูปแบบ 2 มิติและ 3 มิติโดยใช้วิธีการคำนวณเชิงทฤษฎีและการคำนวณเชิงตัวเลขของแบบจำลองพีไนย์ ระหว่างตัวอย่างแผ่นหิน (2 มิติ) และ ตัวอย่างหินทรงลูกบาศก์ (3 มิติ) องค์ประกอบของหินที่ใช้ในการคำนวณมี 2 ส่วน คือ ส่วนที่เป็นรูพรุนเป็นทรงกลมที่มีน้ำ และส่วนที่เป็นแร่ควอตซ์ ผลการคำนวณเชิงทฤษฎีด้วยการใช้ทฤษฎีดิฟเฟอเรนเชียลเอฟเฟกทีฟมีเดียใน 2 มิติ และ 3 มิติ แสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องกับขอบเขตของฮาร์ซิง-สตริกแมน ซึ่งช่วยชี้วัดค่าน่าเชื่อถือของผลการคำนวณ นอกจากนี้ผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่าค่ามอดุลัสของแรงบีบอัดยังผลและค่ามอดุลัสของแรงเฉือนยังผลใน 3 มิติ ( $K_{3D}$  และ  $G_{3D}$  ตามลำดับ) จะมากกว่าค่ามอดุลัสของแรงบีบอัดยังผลและค่ามอดุลัสของแรงเฉือนยังผลใน 2 มิติเสมอ ( $K_{2D}$  และ  $G_{2D}$  ตามลำดับ) เนื่องจากรอยตัดวงกลมในตัวอย่าง 2 มิติ ประพจน์ตัวคล้ายทรงกระบอกยาวอนันต์ใน 3 มิติ ซึ่งมีค่ามอดุลัสของแรงบีบอัดยังผลและค่ามอดุลัสของแรงเฉือนยังผลน้อยกว่าทรงกลม ผลลัพธ์จากการจำลองทั้งหมดสามารถนำไปสร้างความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างรากที่สองของค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกของค่ามอดุลัสของแรงบีบอัดยังผลใน 2 และ 3 มิติ ( $K_{2D}$ ,  $K_{3D}$ ) กับ ความพรุนของหิน และ ค่ามอดุลัสของแรงเฉือนยังผลใน 2 และ 3 มิติ ( $G_{2D}$ ,  $G_{3D}$ ) กับ ความพรุนของหิน พบว่ามีค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ ( $r^2$ ) เท่ากับ 0.9995 และ 0.9926 ตามลำดับ การศึกษานี้จึงสรุปได้ว่าค่ามอดุลัสยังผลใน 3 มิติสามารถประมาณได้จากข้อมูล 2 มิติที่ทราบสมบัติความยืดหยุ่นของเนื้อหินและรูพรุน และสมการความสัมพันธ์เชิงเส้นที่ได้สามารถนำไปพัฒนาหาสมบัติความยืดหยุ่นของหินชนิดอื่นๆต่อไป

ภาควิชา ..... ธรณีวิทยา ..... ลายมือชื่อนิสิต .....

สาขาวิชา ..... ธรณีวิทยา ..... ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก .....

ปีการศึกษา ..... 2558 .....

# # 5532703723 : MAJOR GEOLOGY

KEYWORDS : Rock physics / Effective elastic properties / Bulk Modulus / Shear Modulus

KEN IKEDA: MODELLING OF RELATION BETWEEN 2D AND 3D EFFECTIVE ELASTIC

PROPERTIES. ADVISOR : PROFESSOR WARUNTORN KINITPANYACHAROEN, Ph. D.

CO-ADVISOR : PROFESSOR GERALD MAVKO, 34 pp.

Effective elastic properties for two-dimensional (2D) slices can be derived more easily than for three-dimensional (3D) rock samples and require fewer computational resources. This study investigates the relation between the effective elastic properties of 2D slices and a 3D cube by comparing the theoretical model to a numerical model, Finney pack. For simplicity, we consider a homogenous isotropic spherical model composed of water inclusions in quartz host rock. The 2D and 3D effective properties calculated from the theoretical approach, particularly the differential effective media (DEM) fall within the Hashin-Shtrikman bounds upper and lower bounds. The 3D effective moduli from the modelled samples ( $K_{3D}, G_{3D}$ ) are greater than the 2D effective modulus ( $K_{2D}, G_{2D}$ ) due to the geometry difference between 2D and 3D model. In this case, the 2D circular shapes behave like an infinitely long cylindrical tube under plane strain condition. In Finney model, a linear trend between the square root of harmonic averages of  $K_{3D}, K_{2D}$  and  $G_{3D}, G_{2D}$  and with porosity can be used to explain the relation between 2D and 3D effective bulk and shear modulus. Since the coefficient of determinations (i.e. r-square) are nearly 100%, 0.9995 for  $K_{3D}, K_{2D}$  and 0.9926 for  $G_{3D}, G_{2D}$ , we can derive the equation that links  $K_{3D}$  and  $G_{3D}$  from  $K_{2D}$  and  $G_{2D}$  (i.e. the elastic properties of matrix and pore space).

Department : .....Geology..... Student's Signature.....

Field of Study : .....Geology..... Advisor's Signature.....

Academic Year : 2015.....

## กิตติกรรมประกาศ

ข้าพเจ้าขอขอบคุณอาจารย์ ดร. วรวิทย์ คณิตปัญญาเจริญ Professor Dr. Gerald Mavko<sup>1</sup> และ Sabrina Aliveya<sup>1</sup> สำหรับคำปรึกษาและข้อคิดเห็นสำหรับงานวิจัยฉบับนี้เป็นอย่างดีเสมอมา ห้องวิจัย Stanford Rock Physics and Borehole Geophysics สำหรับคอมพิวเตอร์และซอฟต์แวร์ในการประมวลผล (Simpleware ScanIP, COMSOL Multiphysics) นอกจากนี้ขอขอบคุณคณะผู้จัดโครงการ SURGE (Summer Undergraduate Research in Geoscience and Engineering) ณ มหาวิทยาลัยแสตนฟอร์ด มลรัฐแคลิฟอร์เนีย ประเทศสหรัฐอเมริกา สำหรับโอกาสและประสบการณ์การทำงานวิจัยในช่วงปิดภาคฤดูร้อน

---

<sup>1</sup> Stanford University

## สารบัญ

เรื่อง	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญตาราง	ฉ
สารบัญภาพ	ช
<b>บทที่ 1 บทนำ</b>	<b>1</b>
1.1 ที่มาและความสำคัญ	1
1.2 จุดประสงค์	1
1.3 ผลที่คาดว่าจะได้รับ	2
<b>บทที่ 2 คำนิยาม</b>	<b>3</b>
2.1 สมบัติความยืดหยุ่น (Elastic properties)	3
2.2 ความเค้นและความเครียด (Stress and Strain)	3
2.3 เทนเซอร์ความเค้นของโคชี (Cauchy stress tensor)	5
2.4 เทนเซอร์ความเครียด (Strain tensor)	6
2.5 กฎของฮุกสำหรับวัสดุที่เป็นไอโซทรอปิกเชิงเส้น (Hook's law for linear isotropic material)	7
2.6 การประมาณค่าด้วยทฤษฎีผล (Effective medium approximations)	7
2.7 ทฤษฎีดิฟเฟอเรนเชียลเอฟเฟกทีฟมีเดีย (Differential Effective Medium (DEM))	8
2.8 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element methods; FEM)	9
2.9 แบบจำลองฟินนีย์ (Finney pack)	13
2.10 ขอบเขตของฮาร์ชิน-สตรีก์แมน (Hashin-Shtrikman bounds)	14
<b>บทที่ 3 วิธีการทดลอง และการคำนวณ</b>	<b>16</b>
<b>บทที่ 4 ผลการศึกษา</b>	<b>18</b>
4.1 ผลการคำนวณด้วยแบบจำลองฟินนีย์	18
4.2 ผลการคำนวณด้วยทฤษฎีดิฟเฟอเรนเชียลเอฟเฟกทีฟมีเดีย	27



## สารบัญ (ต่อ)

เรื่อง	หน้า
<b>บทที่ 5 วิเคราะห์ผลการทดลอง</b>	28
5.1 ความสัมพันธ์ระหว่างผลการคำนวณด้วยแบบจำลองพินนีย์และทฤษฎี ดิฟเฟอเรนเชียลเอฟเฟคทีฟมีเดีย	28
5.2 การหาสมการแสดงความสัมพันธ์	29
5.3 ความคลาดเคลื่อนจากการวัดผล	30
<b>บทที่ 6 สรุปผลการศึกษา</b>	32
<b>บรรณานุกรม</b>	33

สารบัญตาราง

ตาราง	หน้า
ตาราง 4.1 ผลการคำนวณข้อมูลของตัวอย่างหมายเลข 1	20
ตาราง 4.2 ผลการคำนวณข้อมูลของตัวอย่างหมายเลข 2	21
ตาราง 4.3 ผลการคำนวณข้อมูลของตัวอย่างหมายเลข 3	22
ตาราง 4.4 ผลการคำนวณข้อมูลของตัวอย่างหมายเลข 4	23
ตาราง 4.5 ผลการคำนวณข้อมูลของตัวอย่างหมายเลข 5	24
ตาราง 4.6 ผลการคำนวณข้อมูลของตัวอย่างหมายเลข 6	25
ตาราง 4.7 ผลการคำนวณข้อมูลของตัวอย่างหมายเลข 7	26
ตาราง 5.1 ข้อมูลสรุปจากการคำนวณด้วยวิธีระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์จากโปรแกรม COMSOL Multiphysics	28

## สารบัญภาพ

รูป	หน้า
รูป 1.1 ตัวอย่างผลการใช้การถ่ายภาพรังสีด้วยส่วนตัดคอมพิวเตอร์กับหิน	2
รูป 2.1 ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของแท่งไม้ยาว $l$ เมื่อโดนแรงบีบอัด	3
รูป 2.2 ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของวัตถุจากความเค้นใน 3 มิติ	4
รูป 2.3 เทนเซอร์ความเค้นของโคซีของพื้นที่เล็ก ๆ ขนาด $\Delta A$ (Sanpaz, 2016)	5
รูป 2.4 ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ต่างๆของทรงกลมที่เปลี่ยนรูปเป็นทรงรี	6
รูป 2.5 แบบจำลองลักษณะการทำงานของทฤษฎีดิฟเฟอเรนเชียลเอฟเฟคทีฟมีเดีย	8
รูป 2.6 การแก้ปัญหาสมการความร้อนของวัตถุ 2 มิติด้วยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (ดัดแปลงจาก เสฏฐวรรธ, 2556)	10
รูป 2.7 ลักษณะการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาสมการความร้อน	11
รูป 2.8 ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (ดัดแปลงจาก เสฏฐวรรธ, 2556)	12
รูป 2.9 การเปรียบเทียบผลการคำนวณคำตอบของสมการความร้อนทั้ง 2 แบบ (ดัดแปลงจาก เสฏฐวรรธ, 2556)	12
รูป 2.10 ตัวอย่างการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของหินด้วยโปรแกรม Simpleware ScanIP	13
รูป 2.11 ส่วนหนึ่งของแบบจำลองพินินีจากการจำลองโดยใช้โปรแกรม MATLAB	13
รูป 2.14 กราฟอย่างง่ายแสดงของเขตของฮาร์ซิง-สตริกแมนสำหรับวัตถุผสมที่ประกอบด้วยวัตถุ 2 ชนิด (Mavko <i>et al.</i> , 2009)	14
รูป 2.14 ลักษณะการคำนวณขอบเขตของฮาร์ซิง-สตริกแมน (Mavko <i>et al.</i> , 2009)	15
รูป 3.1 แผนภาพการทำงานโดยสรุป	16
รูป 3.2 ลักษณะแบบจำลองที่ได้จากโปรแกรม MATLAB	2
รูป 4.1 ผลการคำนวณมอดูลัสของแรงบีบอัดของแบบจำลองพินินีจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยโปรแกรม COMSOL Multiphysics	3
รูป 4.2 ผลการคำนวณมอดูลัสของแรงเฉือนของแบบจำลองพินินีจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยโปรแกรม COMSOL Multiphysics	4
รูป 4.3 ผลการคำนวณค่ามอดูลัสของแรงบีบอัดด้วยทฤษฎีดิฟเฟอเรนเชียลเอฟเฟคทีฟมีเดีย	5
รูป 4.4 ผลการคำนวณค่ามอดูลัสของแรงเฉือนยังผลด้วยทฤษฎีดิฟเฟอเรนเชียลเอฟเฟคทีฟมีเดีย	6
รูป 5.1 กราฟเปรียบเทียบผลการทดลองจากวิธีคำนวณทั้ง 2 แบบ	8

สารบัญภาพ (ต่อ)

รูป	หน้า
รูป 5.2 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\sqrt{\frac{K_{2D}K_{3D}}{K_{2D} + K_{3D}}}$ (ซ้าย) และ $\sqrt{\frac{G_{2D}G_{3D}}{G_{2D} + G_{3D}}}$ (ขวา) ตามแกนตั้งกับความพรุน ( $\phi$ )	29
รูป 5.3 ลักษณะการเปลี่ยนรูปของวัตถุในอุดมคติที่ใช้ในการคำนวณค่ามอดุลัสของแรงบีบอัดและมอดุลัสของแรงเฉือน	30
รูป 5.4 ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของวัตถุภายใต้ความเค้นที่เท่ากันทุกด้านจากโปรแกรม COMSOL Multiphysics	31
รูป 5.5 ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของวัตถุภายใต้ความเค้นเฉือนจากโปรแกรม COMSOL Multiphysics	32

## บทที่ 1

### บทนำ

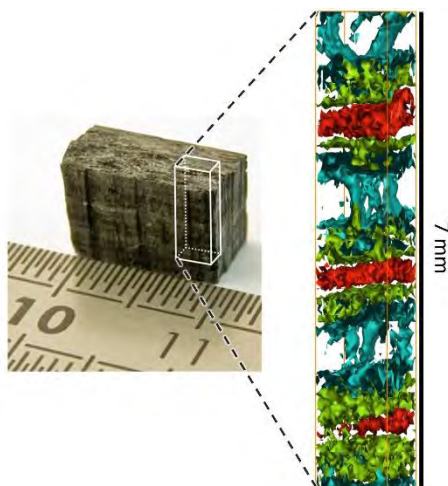
สมบัติความยืดหยุ่น (elastic properties) เป็นสมบัติของของแข็งที่สามารถเปลี่ยนรูป (deformation) เมื่อโดนความเค้น (stress) มากกระทำกับวัตถุ (Mavko *et al.*, 2009) สมบัติความยืดหยุ่นของวัสดุสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการคำนวณได้หลายอย่าง เช่น ความเร็วของคลื่นไหวสะเทือน และ ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของหิน อันมีประโยชน์อย่างกว้างขวางในทางธรณีวิทยาและธรณีฟิสิกส์โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการสำรวจหาแหล่งทรัพยากรธรรมชาติ

#### 1.1 ที่มาและความสำคัญ

ในการศึกษาทางธรณีฟิสิกส์ สมบัติความยืดหยุ่นของหินถือเป็นตัวแปรสำคัญที่จำเป็นในการคำนวณความเร็วของคลื่นไหวสะเทือน เราสามารถวัดความเร็วของคลื่นไหวสะเทือนในชั้นหินได้หลายวิธี วิธีหนึ่งที่นิยมในการศึกษาความเร็วของคลื่นไหวสะเทือนในระดับจุลภาค (microscale) คือ การใช้การถ่ายภาพรังสีด้วยส่วนตัดคอมพิวเตอร์ (Computed Tomography; CT-scan) ซึ่งทำการตรวจสอบโครงสร้างภายในของชั้นหินในระดับจุลภาคแบบ 3 มิติ แล้วนำมาคำนวณสมบัติความยืดหยุ่นโดยใช้โปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ ทั้งนี้การใช้การถ่ายภาพรังสีด้วยส่วนตัดคอมพิวเตอร์ มีข้อเสียในแง่ของทรัพยากรทางคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณและเวลาในการประมวลผล เช่น สำหรับหินที่มีปริมาตร 100 ลูกบาศก์ฟุตจะต้องใช้หน่วยความจำชั่วคราว (RAM) ประมาณ 60 – 90 กิกะไบต์และเวลาการประมวลผลด้วยโปรแกรม COMSOL Multiphysics ประมาณ 2 – 3 ชั่วโมง ในขณะที่ตัวอย่างภาพตัดขวาง 2 มิติ 1 แผ่น ใช้หน่วยความจำชั่วคราวไม่ถึง 100 เมกะไบต์ และ เวลาการประมวลผลไม่ถึง 10 วินาที ซึ่งคอมพิวเตอร์ทั่วไปสามารถทำได้ นอกจากนี้การศึกษาโดยใช้การถ่ายภาพรังสีด้วยส่วนตัดคอมพิวเตอร์ ยังมีต้นทุนที่สูงกว่าการใช้ภาพตัดขวาง 2 มิติอย่างมาก การหาสมการเพื่อเชื่อมความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติความยืดหยุ่นยังผลใน 2 มิติและ 3 มิติจึงมีประโยชน์ในการลดปริมาณทรัพยากรที่ใช้ในการคำนวณและต้นทุนในการศึกษาได้

การศึกษาคือความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติความยืดหยุ่นยังผลโดย Meille และ Garboczi (2001) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ของสมบัติความยืดหยุ่นใน 2 มิติ และ 3 มิติ ของวัตถุที่มีรูพรุนเป็นทรงรียาว (elongated object) พบค่าที่แตกต่างกันระหว่างมอดูลัสของยัง (Young's modulus) ของตัวอย่างใน 2 มิติ และ 3 มิติอย่างชัดเจน และให้ความเห็นว่าการสร้างแบบจำลองทาง 3 มิติขึ้นมาใหม่จะมีประโยชน์มากกว่าเนื่องจากคณะผู้ทดลองไม่สามารถหาความสัมพันธ์เชิงปริมาณของมอดูลัสของยังใน 2 มิติ และ 3 มิติ

ในทางธรณีธรณีวิทยา ภาพตัดขวาง 2 มิติของหินหาได้จากการศึกษาแผ่นหินบาง (thin section) ซึ่งเป็นวิธีในการศึกษาโครงสร้างของหินในระดับจุลภาค และสามารถทำได้ง่าย สะดวก และรวดเร็ว อีกทั้งยังมีต้นทุนที่ต่ำกว่าวิธีการใช้การถ่ายภาพรังสีด้วยสไลด์คอมพิวเตอร์ โดยหากเราสามารถคำนวณสมบัติความยืดหยุ่นของหินผ่านแผ่นหินบาง ซึ่งเป็นตัวอย่างใน 2 มิติ จะเป็นการลดเวลาในการคำนวณและทรัพยากรทางคอมพิวเตอร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ



รูป 1.1 ตัวอย่างผลการใช้การถ่ายภาพรังสีด้วยสไลด์คอมพิวเตอร์กับหิน (Huorati *et al.*, 2011)

### 1.2 จุดประสงค์

- เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติความยืดหยุ่นยังผลใน 2 มิติ และ 3 มิติของหิน
- เพื่อสร้างสมการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของสมบัติความยืดหยุ่นยังผลของหินใน 2 มิติ และ

3 มิติ

### 1.3 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

- สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติความยืดหยุ่นยังผลใน 2 และ 3 มิติ
- ประสบการณ์การเขียนภาษาคอมพิวเตอร์เพื่อสร้างแบบจำลองในการทำโครงการวิจัย

## บทที่ 2

### คำนิยาม

#### 2.1 สมบัติความยืดหยุ่น (Elastic properties)

หมายถึง การอธิบายพฤติกรรมของวัสดุเมื่อเกิดการเปลี่ยนรูปร่างจากแรงภายนอกที่กระทำต่อวัสดุ สมบัติดังกล่าวขึ้นกับธรรมชาติของวัสดุและลักษณะการเปลี่ยนรูปร่างของวัสดุเป็นหลัก (Mavko *et al.*, 2009)

#### 2.2 ความเค้นและความเครียด (Stress and Strain)

ความเค้น (Stress,  $\sigma$ ) ถูกนิยามโดย อัตราส่วนระหว่างแรง ( $F$ ) ที่กระทำบนผิววัตถุ ต่อพื้นที่ผิวของวัตถุขนาดเล็กๆ ( $A$ ) (สมการ 2.1)

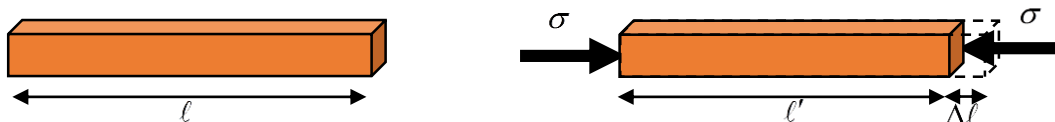
$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.1)$$

ในขณะที่ความเครียด (Strain,  $\varepsilon$ ) ถูกนิยามโดย ลักษณะการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุ การคำนวณความเครียดจะแตกต่างกันไปตามวัตถุประสงค์

เมื่อวัสดุได้รับความเค้นย่อมเกิดความเครียดขึ้นส่งผลให้เกิดการเปลี่ยนรูปร่าง เช่น การบีบอัดใน 1 มิติของวัตถุ เราสมมติแท่งไม้ยาว  $l$  ถูกความเค้นบีบอัด (Compressive stress) ขนาด  $\sigma_{xx}$  ทำให้วัตถุเกิดการเปลี่ยนลักษณะโดยมีขนาดสั้นลงจนเหลือความยาว  $l'$  (รูป 2.1)

ในการเปลี่ยนแปลงของวัตถุในลักษณะหดสั้นลงใน 1 มิติ เรานิยามการเปลี่ยนแปลง หรือความเครียดของวัตถุในรูปแบบนี้ว่า ความเครียดเชิงเส้น (Tensile strain;  $\varepsilon_{xx}$ ) คำนวณได้จาก อัตราส่วนระหว่างความยาวที่เปลี่ยนไปกับความยาวตั้งต้นของวัสดุ (สมการ 2.2)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.2)$$



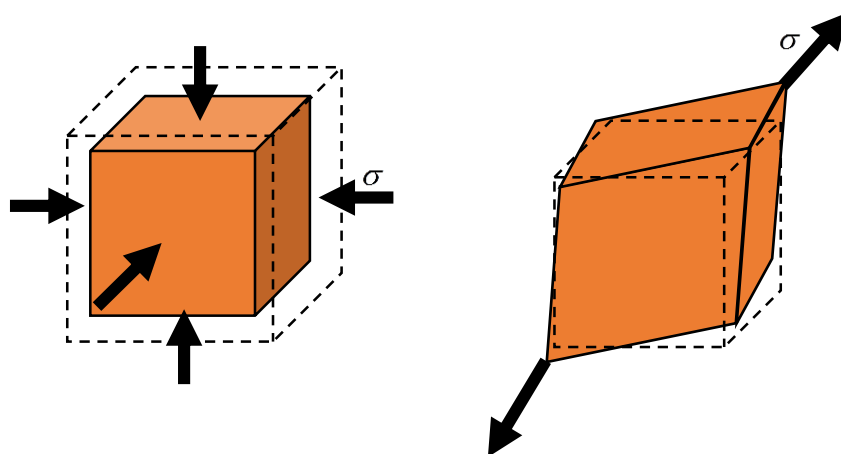
รูป 2.1 ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของแท่งไม้ยาว  $l$  เมื่อโดนแรงบีบอัด (ความเค้น) ขนาด  $\sigma$  ทำให้มีความยาวสั้นลง  $\Delta l$  โดยมีความยาวใหม่เป็น  $l'$

ทั้งนี้หากใช้ความเค้นที่มีขนาดมากขึ้นกระทำลงไปบนแท่งไม้เดิม แน่ใจว่าค่า  $\varepsilon_{xx}$  จะมากขึ้นและจากการทดลองของฮุก (Hooke's law) (Mavko *et al.*, 2009) สำหรับวัสดุที่มีสมบัติความยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดใน 1 มิติ แสดงได้ดังสมการ 2.3

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad (2.3)$$

เมื่อ  $E$  เป็นค่าคงที่ที่เรียกว่า โมดูลัสของยัง (Young's modulus) ซึ่งค่า  $E$  นั้นขึ้นอยู่กับธรรมชาติของวัตถุ โดยทั่วไปวัตถุที่อ่อนนุ่ม (เปลี่ยนรูปร่างได้ง่าย เช่น ฟองน้ำ) จะมีค่า  $E$  ต่ำ ส่วนวัตถุที่มีความแข็ง เช่น เหล็ก จะมีค่า  $E$  สูง

ลักษณะการเปลี่ยนรูปแบบของวัตถุไม่จำเป็นต้องเกิดการบีบอัดหรือดึงออกเพียงอย่างเดียว ค่าของโมดูลัสตัวแรกที่ยกตัวอย่างในหัวข้อ 2.1 คือ โมดูลัสของยังซึ่งเป็นปริมาณที่บอกอัตราความเปลี่ยนแปลงของวัตถุใน 1 มิติ ในขณะที่การเปลี่ยนรูปร่างใน 2 และ 3 มิติ เรานิยามโมดูลัสของแรงบีบอัด (Bulk modulus) และ โมดูลัสของแรงเฉือน (Shear modulus) ให้เป็นตัวแปรที่บอกความทนทานภายใต้ความเค้นบีบอัด 2 และ 3 มิติ และ ความเค้นเฉือน (Shear stress) ดังรูป 2.2 ทั้งนี้ นิยามของการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวที่ชัดเจนจะถูกนิยามในหัวข้อ 2.4



**รูป 2.2** ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของวัตถุจากความเค้นใน 3 มิติ ลูกศรสีดำแสดงทิศทางของความเค้นที่กระทำต่อวัตถุสมมุติ

(ซ้าย) วัตถุถูกความเค้นที่เท่ากันทั้ง 3 ด้าน โมดูลัสที่อธิบายการบีบอัดในลักษณะนี้ คือ โมดูลัสของแรงบีบอัด

(ขวา) วัตถุถูกความเค้นเฉือน โมดูลัสที่อธิบายการบีบอัดในลักษณะนี้ คือ โมดูลัสของแรงเฉือน

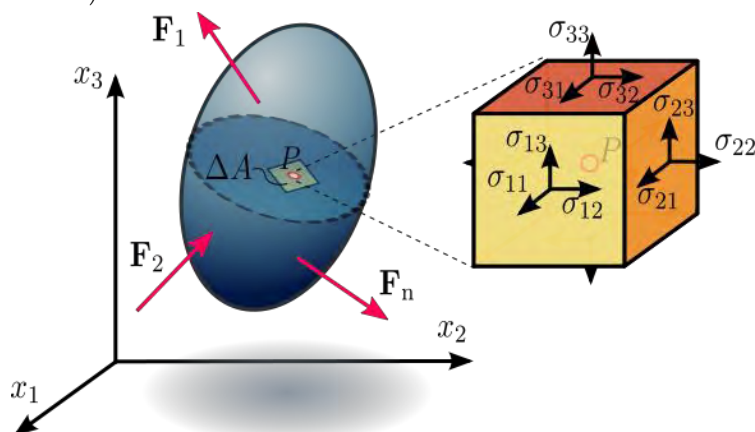


### 2.3 เทนเซอร์ความเค้นของโคชี (Cauchy stress tensor)

เป็นระเบียบวิธีการเขียนความเค้นที่กระทำต่อวัตถุในตำแหน่งต่าง ๆ ด้วยเทนเซอร์ (tensor) ขนาด  $3 \times 3$  (Bower, 2012) สมาชิกในแต่ละตัวของเทนเซอร์เขียนแทนด้วย  $\sigma_{ij}$  หมายถึง ความเค้นที่กระทำบนด้านที่  $i$  ของวัตถุในทิศทางที่  $j$  เช่น

$\sigma_{11}$  หมายถึง ความเค้นที่กระทำที่ผิววัตถุด้านที่ 1 ( $x_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{i}$ ) โดยมีทิศของความเค้นชี้ไปที่แกนด้านที่ 1 ( $x_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{i}$ )

$\sigma_{23}$  หมายถึง ความเค้นที่กระทำที่ผิววัตถุด้านที่ 2 ( $x_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{j}$ ) โดยมีทิศของความเค้นชี้ไปที่แกนด้านที่ 3 ( $x_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{k}$ )



รูป 2.3 เทนเซอร์ความเค้นของโคชีของพื้นที่เล็ก ๆ ขนาด  $\Delta A$  บนวัตถุชิ้นหนึ่ง (Sanpaz, 2016)

โดยทั่วไปเราอาจแทน  $x_1, x_2$  และ  $x_3$  ด้วยสัญลักษณ์  $x, y$  และ  $z$  รวมถึงตัวห้อย  $ij$  จะแทนเลข 1, 2 และ 3 ด้วย  $x, y$  และ  $z$  เช่น  $\sigma_{13} = \sigma_{xz}$  ทำให้เราสามารถเขียนสมาชิกของเทนเซอร์แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังสมการ 2.4

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

ทั้งนี้สมาชิกที่อยู่นอกเส้นทแยงมุม (off-diagonal) มักใช้สัญลักษณ์  $\tau$

เทนเซอร์ความเค้นของโคชีของวัตถุที่โดนแรงบีบอัดทั้งสามด้านในรูป 2.2 สามารถเขียนได้ตามสมการ 2.5 เครื่องหมายลบในสมการแสดงทิศทางตรงข้าม เช่น  $-\sigma$  ในตำแหน่ง  $\sigma_{xx}$  หมายถึงความเค้นที่กระทำบนผิววัตถุด้าน  $x$  ในทิศทาง  $-x$  กล่าวอีกนัยหนึ่งคือแรงบีบอัดนั่นเอง

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{compress}} = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

ในขณะที่ความเค้นเฉือนสามารถแสดงดังสมการ 2.6

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{shear}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & \tau \\ -\tau & 0 & \tau \\ -\tau & -\tau & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

## 2.4 เทนเซอร์ความเครียด (Strain tensor)

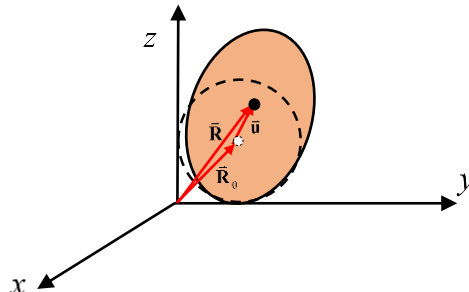
เทนเซอร์ที่ใช้ในการบอกลักษณะการเปลี่ยนแปลงของวัตถุ มีขนาด  $3 \times 3$  เช่นเดียวกับ เทนเซอร์ความเค้น สมาชิกในแต่ละตัวของเทนเซอร์เขียนแทนด้วย  $\varepsilon_{ij}$  สำหรับวัตถุที่มีสมบัติความยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น สมาชิกแต่ละตัวในเทนเซอร์ความเครียดเขียนแทนได้ด้วยสมการ 2.7 (Bower, 2012)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.7)$$

เมื่อ  $u$  แทนองค์ประกอบตามแกนใดแกนหนึ่งของเวกเตอร์กระจัด  $\bar{\mathbf{u}}$  (displacement vector) ซึ่ง ถูกนิยามจากสมการ 2.8

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}_0 \quad (2.8)$$

เมื่อ  $\bar{\mathbf{R}}_0$  แทนเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดใด ๆ บนวัตถุตอนแรก และ  $\bar{\mathbf{R}}$  แทนเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดใด ๆ บนวัตถุหลังจากเปลี่ยนรูปร่างแล้ว ลักษณะของเวกเตอร์ดังกล่าวแสดงได้ดังรูป 2.4



รูป 2.4 ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ต่างๆของทรงกลมที่เปลี่ยนรูปเป็นทรงรี เวกเตอร์  $\bar{\mathbf{R}}_0, \bar{\mathbf{R}}$  ชี้ไปที่ ศูนย์กลางของทรงรีก่อนและหลังการเปลี่ยนแปลงตามลำดับ

หากทำการเขียนสมาชิกในเทนเซอร์ความเครียดแบบแจกแจงสมาชิกสามารถเขียนดังสมการ 2.9

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

## 2.5 กฎของฮุกสำหรับวัสดุที่เป็นไอโซทรอปิกเชิงเส้น (Hook's law for linear isotropic material)

สำหรับวัสดุที่เป็นไอโซทรอปิก (isotropic) และ มีความยืดหยุ่นเป็นเชิงเส้น (linear elasticity) สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น ( $\sigma$ ) และความเครียด ( $\epsilon$ ) ดังสมการ 2.10 (Timoshenko and Goodier, 1934)

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{\alpha\alpha} + 2G \epsilon_{ij} \quad (2.10)$$

เมื่อ  $\sigma_{ij}$  คือ สมาชิกตัวที่  $i$  และ  $j$  ในเทนเซอร์ความเค้น

$\lambda$  คือ ค่าคงตัวของลามี่ (Lame constant)

$\delta_{ij}$  คือ โครเนกเกอร์เดลตาฟังก์ชัน (Kronecker delta) นิยามจาก  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases}$

$\epsilon_{\alpha\alpha}$  คือ ความเครียดเชิงปริมาตร นิยามจาก  $\epsilon_{\alpha\alpha} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$

$G$  คือ โมดูลัสของแรงเฉือน

$\epsilon_{ij}$  คือ สมาชิกตัวที่  $i$  และ  $j$  ในเทนเซอร์ความเครียด

ด้วยสมการนี้เราสามารถนิยามโมดูลัสของแรงบีบอัด (Bulk modulus;  $K$ ) ได้อย่างรัดกุม คือ อัตราส่วนระหว่างความดันสถิต (Hydrostatic stress) ต่อ ความเครียดเชิงปริมาตร (Volumetric strain) ดังสมการ 2.11

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{\alpha\alpha} = K \epsilon_{\alpha\alpha} \quad (2.11)$$

ในทำนองเดียวกันเรานิยามโมดูลัสของแรงเฉือน (Shear modulus;  $G$ ) คือ อัตราส่วนระหว่างความเค้นเฉือนต่อความเครียดเฉือนดังสมการ 2.12

$$\sigma_{ij} = 2G \epsilon_{ij} \quad (2.12)$$

## 2.6 การประมาณค่าด้วยทฤษฎียังผล (Effective medium approximations)

หมายถึง ทฤษฎีการประมาณค่าทางฟิสิกส์และคณิตศาสตร์ให้กับวัสดุที่ไม่เอกพันธ์ (inhomogeneous; i.e. composite materials) ในระดับมหภาค (macroscopic scale) เนื่องจากการคำนวณโดยตรงไม่สามารถทำได้หรือใช้เวลานานเกินไป ในงานวิจัยนี้จะพิจารณาค่าความยืดหยุ่นยังผล (Effective elastic properties) ของหินซึ่งเป็นที่นิยมเนื่องจากการกระจายตัวของรูพรุนในหิน ทำให้หินเป็นวัสดุไม่เอกพันธ์ (Mavko *et al.*, 2009) การประมาณสมบัติต่างๆของแร่และรูพรุนด้วยค่าเฉลี่ยจะทำการคำนวณได้ง่ายกว่า โมเดลทางคณิตศาสตร์ที่คำนวณสมบัติความยืดหยุ่นของแร่ด้วยทฤษฎียังผลหลายโมเดลจึงได้รับความนิยม เช่น ขอบเขตของฮาร์ชิน-สตรีก์แมน (Hashin-Shtrikman bounds)<sup>2</sup>

<sup>2</sup> อ่านเพิ่มเติมที่หัวข้อ 2.10

## 2.7 ทฤษฎีดิฟเฟอเรนเชียลเอฟเฟกทีฟมีเดีย (Differential Effective Medium (DEM))

ทฤษฎีนี้เป็นการประมาณค่าสมบัติความยืดหยุ่นยังผลของวัสดุที่มีความพรุน (porosity;  $\phi$ ) โดยคำนวณได้จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ 2.13 (Norris, 1985)

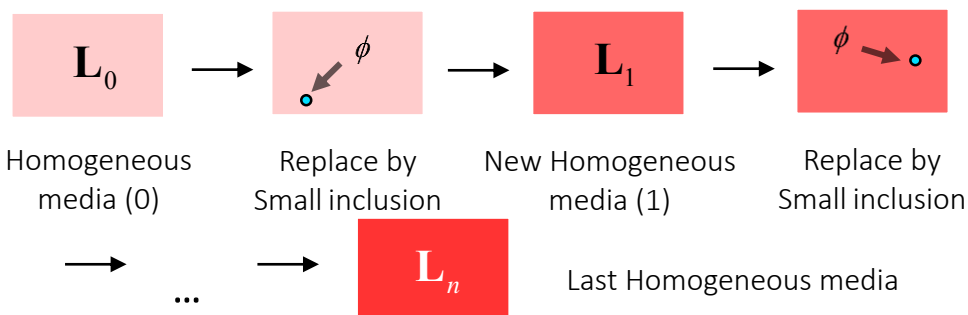
$$\frac{d\mathbf{L}}{d\phi} = \frac{1}{1-\phi}(\mathbf{L}_1 - \mathbf{L})\bar{\mathbf{T}}_1 \quad (2.13)$$

เมื่อ  $\mathbf{L}$  คือ เทนเซอร์ความยืดหยุ่น (Elastic modulus tensor)

$\bar{\mathbf{T}}$  คือ เทนเซอร์ของวู (Wu's tensor)

ลักษณะกระบวนการทำงานของสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวสามารถอธิบายได้ดังนี้ (รูป 2.5)

- 1.) สมมุติวัสดุที่มีความเป็นเอกพันธ์ (homogeneous media) มีขนาดอนันต์และมีเทนเซอร์ความยืดหยุ่น  $\mathbf{L}_0$
  - 2.) สร้างรูพรุนขนาดจำกัด (finite) ลงในวัสดุในข้อ 1
  - 3.) กำหนดเทนเซอร์ความยืดหยุ่นของวัสดุในข้อ 2 (สมมุติมีค่า  $\mathbf{L}_1$ ) จากนั้นสมมุติว่าวัสดุดังกล่าวเป็นวัสดุที่เป็นเอกพันธ์อีกครั้ง (เป็นเนื้อเดียวกันเสมือนว่าไม่มีรูพรุน)
  - 4.) ทำซ้ำข้อ 2 – 3 จนกระทั่งได้วัสดุขั้นสุดท้ายที่มีความพรุนเท่ากับที่เรากำหนด
- ทั้งนี้ข้อเสียของทฤษฎีนี้ คือ เราไม่สามารถบังคับตำแหน่งของรูพรุนที่เกิดขึ้นในวัสดุได้และเมื่อใช้ทฤษฎีนี้กับวัสดุที่มีความพรุนสูงจะเกิดการซ้อนทับของรูพรุนอันใหม่กับอันเดิมที่มีอยู่ ทำให้รูปร่างของรูพรุนเปลี่ยนไป



รูป 2.5 แบบจำลองลักษณะการทำงานของทฤษฎีดิฟเฟอเรนเชียลเอฟเฟกทีฟมีเดีย

ในงานวิจัยนี้เราใช้วัสดุที่มีทรงกลมเป็นรูพรุนมีค่ามอดุลัสแรงบีบอัดและมอดุลัสแรงเฉือนเป็น  $K_i$  และ  $G_i$  ตามลำดับ ส่วนเนื้อหินมีค่ามอดุลัสแรงบีบอัดและมอดุลัสแรงเฉือนเป็น  $K_m$  และ  $G_m$  ตามลำดับและเป็นไอโซโทรปิก (isotropic) เราสามารถดรูปรูปสมการอนุพันธ์ดังกล่าวลงเหลือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ 2.14 (Berryman, 1992)

$$(1-\phi)\frac{d}{d\phi}[K^*(\phi)]=(K_i-K^*)P^{*(i)} \quad (2.14)$$

$$(1-\phi)\frac{d}{d\phi}[G^*(\phi)]=(G_i-G^*)Q^{*(i)}$$

เมื่อ  $K^*(\phi)$  และ  $G^*(\phi)$  เป็นมอดูลัสแรงบีบอัดและมอดูลัสแรงเฉือนของวัสดุผสมที่ค่าความพรุนใด ๆ (โดยเงื่อนไขขอบแล้ว  $K^*(0)=K_m$  และ  $G^*(0)=G_m$ ) ในกรณีของรูพรุนทรงกลม 3 มิติ ค่าคงตัว  $P^{*(i)}$ ,  $Q^{*(i)}$  คือ

$$P^{*(i)}=\frac{K_m+\frac{4}{3}G_m}{K_i+\frac{4}{3}G_m}, Q^{*(i)}=\frac{G_m+\zeta_m}{G_i+\zeta_m}; \zeta_m=\frac{G_m(9K_m+8G_m)}{6(K_m+2G_m)}$$

และ ในกรณีของรูพรุนวงกลม 2 มิติ ค่าคงตัว  $P^{*(i)}$ ,  $Q^{*(i)}$  คือ

$$P^{*(i)}=\frac{K_m+G_m}{K_i+G_m}, Q^{*(i)}=\frac{2(K_m+G_m)G_m}{K_mG_m+(K_m+2G_m)G_i}$$

(Thorpe and Sen, 1985)

## 2.8 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element methods; FEM)

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นวิธีการช่วยในหาประมาณค่าเชิงตัวเลขของของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) ได้ยากมากหรือเป็นไปได้เลย ด้วยการใช้เทคนิคคณิตศาสตร์ในการแปลงระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไปเป็นสมการพีชคณิตซึ่งสามารถแก้สมการได้เร็วกว่า

เราจะตัวอย่างการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อใช้ในการแก้สมการความร้อน (เสถียรธรรม, 2556) พิจารณาแผ่นโลหะนำความร้อนกว้าง  $l$  ยาว  $w$  วางตัวอยู่ในระบบพิกัดฉากดังรูป 2.6 เริ่มแรกแผ่นความร้อนมีอุณหภูมิ 0 ทั่วทั้งแผ่น ต่อมานำแหล่งความร้อนที่มีอุณหภูมิเป็นไปตามฟังก์ชัน  $T(x,w)=f(x)$  ประกอบที่ด้านบนของแผ่นโลหะ ปัญหานี้ต้องการทราบอุณหภูมิของแผ่นโลหะนี้ที่ตำแหน่งใด ๆ หลังจากเวลาผ่านไปช่วงหนึ่ง

วิธีหาคำตอบทางตรงคือการแก้สมการ 2.15 ด้วยวิธีแยกตัวแปร (separate variable) โดยสมมุติให้  $T(x,y)=X(x)Y(y)$  แล้วแทนค่าลงไปในสมการ 2.15 เพื่อเปลี่ยนสมการให้อยู่ในรูปสมการ 2.16

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.15)$$

$$X''Y + XY'' = 0 \quad (2.16)$$

ย้ายข้างสมการ 2.16 และให้  $-\lambda^2$  เป็นผลเฉลยของสมการดังกล่าวได้ว่า

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\lambda^2 \quad (2.17)$$

ด้วยระบบการแก้สมการนี้ สมการ 2.15 จะลดรูปเหลือ

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \tag{2.18}$$

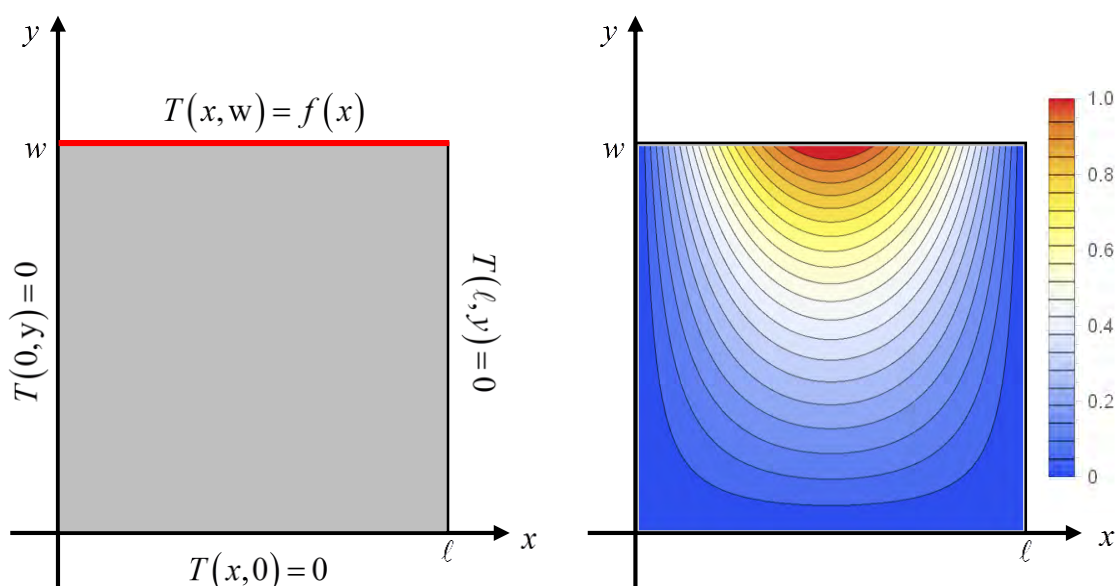
เราสามารถแก้สมการต่อไปประกอบกับเงื่อนไขขอบ เราได้ผลเฉลยเป็น

$$T(x, y) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi w}{\ell}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \tag{2.19}$$

ซึ่งเป็นสมการที่ซับซ้อนและใช้เวลาในการหาผลเฉลยนาน

ในกรณีพิเศษ  $T(x, y) = T_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$  ผลเฉลยจะลดรูปเหลือ  $T(x, y) = \frac{\sin \pi x \sinh \pi y}{\sinh \pi}$

ลักษณะของอุณหภูมิของวัตถุที่ตำแหน่งใดๆ แสดงได้ดังรูป 2.6

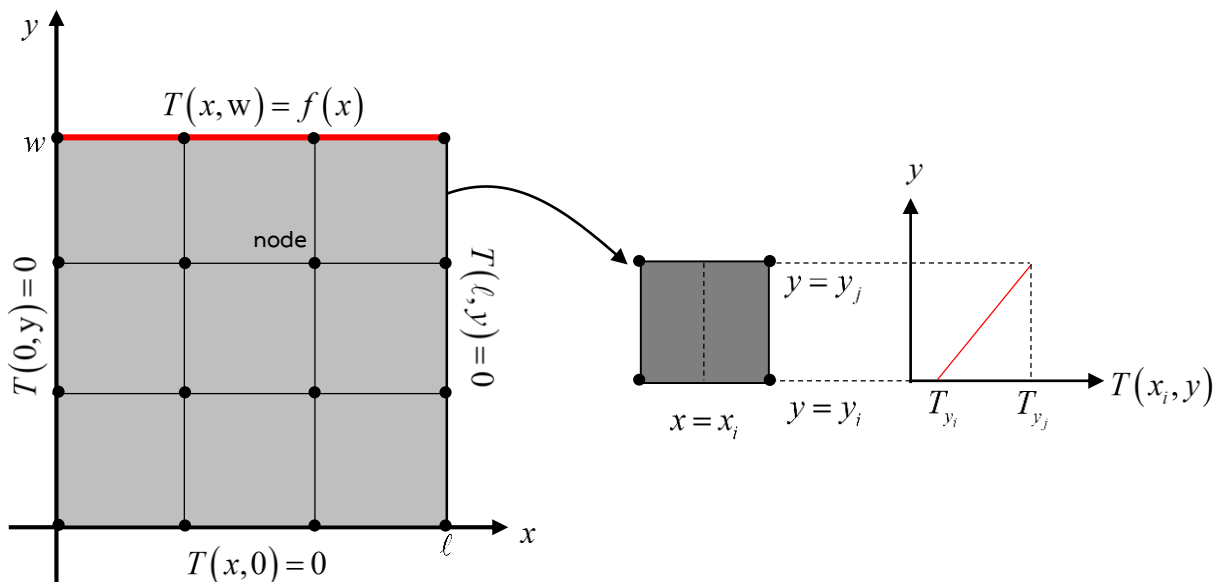


**รูป 2.6** การแก้ปัญหาสมการความร้อนของวัตถุ 2 มิติด้วยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (ซ้าย)

ลักษณะของปัญหาและเงื่อนไขขอบ (ขวา) ผลเฉลยจากการแก้สมการด้วยวิธีตรงภายใต้เงื่อนไข

$T(x, y) = T_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$  สีแดงแทนจุดที่มีอุณหภูมิสูงและสีฟ้าแทนจุดที่มีอุณหภูมิต่ำ (ตัดแปลงจาก เสฏฐวรรธ, 2556)

ในขณะที่การคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะใช้การแบ่งวัตถุออกเป็น ส่วน ๆ ด้วยจุดแบ่ง (node) ซึ่งขึ้นกับลักษณะที่ผู้ต้องการกำหนด จากนั้นจึงกำหนดผลแบ่งกันให้กับแต่ละชิ้นส่วน (element) ลักษณะการคำนวณโดยใช้ผลแบ่งกันแบบเชิงเส้นกับปัญหาสมการความร้อนสามารถแสดงได้ดังรูป 2.7



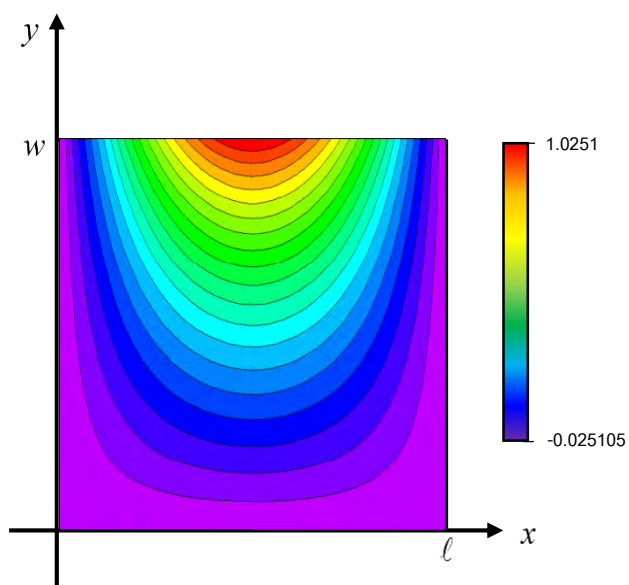
**รูป 2.7** ลักษณะการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาสมการความร้อนด้วยการแบ่งแบบเชิงเส้น (ซ้าย) ลักษณะการแบ่งวัตถุออกเป็นส่วนย่อย (ขวา) ลักษณะการประมาณค่าอุณหภูมิให้ลดลงแบบเชิงเส้น

เราจะสมมุติว่าอุณหภูมิของแต่ละส่วนย่อยมีการลดลงแบบเชิงเส้น เมื่อพิจารณาส่วนย่อยในรูปที่เลือกออกมาที่ตำแหน่ง  $x_i$  ถ้าขอบบนของส่วนย่อยมีอุณหภูมิ  $T_{y_j}$  และขอบล่างมีอุณหภูมิ  $T_{y_i}$  เราสามารถแสดงอุณหภูมิที่ตำแหน่ง  $y$  ใดๆได้โดยสมการ 2.20

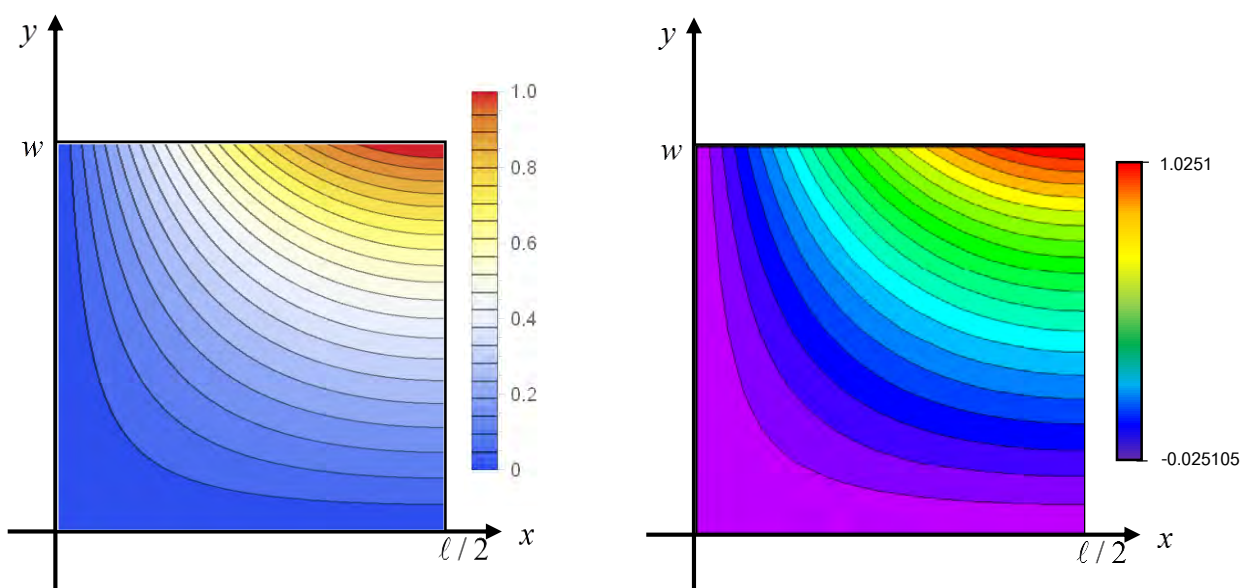
$$T(x_i, y) = \frac{1}{y_j - y_i}(y - y_i)T_{y_j} - \frac{1}{y_j - y_i}(y - y_j)T_{y_i} \tag{2.20}$$

สังเกตว่าแต่ละส่วนย่อยจะมีสมการเป็นของตัวเอง ท้ายที่สุดเราจะได้ระบบสมการเชิงเส้นจำนวนมากซึ่งสามารถแก้ได้โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทั่วไปและง่ายกว่าการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยมาก ผลการคำนวณด้วยวิธีนี้แสดงได้ดังรูป 2.8 สังเกตว่าผลการคำนวณทั้ง 2 วิธีให้ผลใกล้เคียงกันมาก (รูป 2.9)

โดยสรุปแล้วเราเห็นว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอน 2 ขั้น คือ การแบ่งวัตถุออกเป็นส่วนย่อย และการสร้างสมการพีชคณิตหลาย ๆ สมการเพื่อแก้สมการ สำหรับการคำนวณค่ามอดูลัสด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เราใช้โปรแกรม Simpleware ScanIP ในการแบ่งวัตถุออกเป็นส่วนย่อย (รูป 2.10) และโปรแกรม COMSOL Multiphysics ในการแก้สมการ

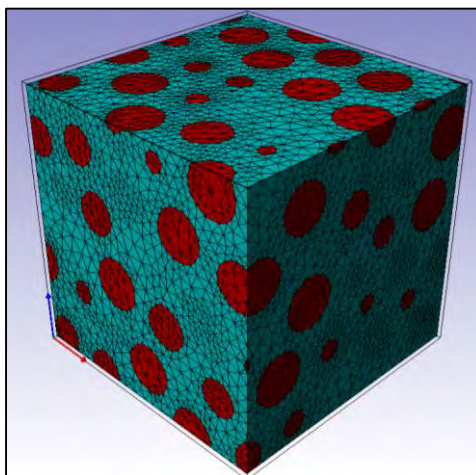


รูป 2.8 ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สีแดงแทนส่วนที่มีอุณหภูมิสูงและสีม่วงแทนส่วนที่มีอุณหภูมิต่ำ (ดัดแปลงจาก เสฏฐวรรธ, 2556)



รูป 2.9 การเปรียบเทียบผลการคำนวณคำตอบของสมการความร้อนทั้ง 2 แบบ (ซ้าย) การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (ขวา) การคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (ดัดแปลงจาก เสฏฐวรรธ, 2556)

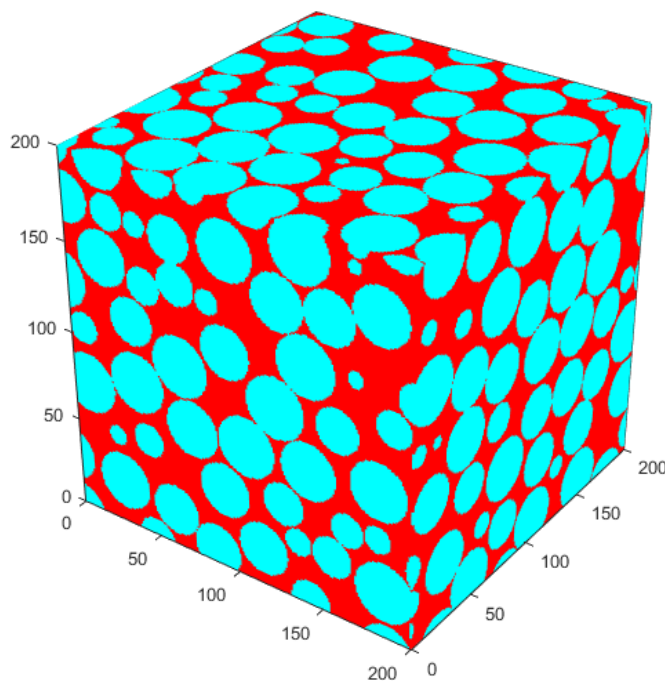




รูป 2.10 ตัวอย่างการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการสร้างผลแบ่งกันและขึ้นส่วนให้กับหิน ตัวอย่างด้วยโปรแกรม Simpleware ScanIP (สีแดงในรูปคือรูพรุนและสีฟ้าคือเนื้อหิน)

## 2.9 แบบจำลองฟินนีย์ (Finney pack)

การศึกษาการของ Finney (1970) โดยทำการทดลองการจัดเรียงตัวของทรงกลมขนาดเท่ากันที่ถูกบรรจุอยู่ในกล่องใบหนึ่ง ผลการศึกษาดังกล่าวได้ทำการบันทึกตำแหน่งของจุดศูนย์กลางทรงกลมทั้งหมดไว้ งานวิจัยชิ้นนี้จะใช้โปรแกรม MATLAB เพื่อจำลองแบบจำลองฟินนีย์ขึ้นมา



รูป 2.11 ส่วนหนึ่งของแบบจำลองฟินนีย์จากการจำลองโดยใช้โปรแกรม MATLAB (สีฟ้าคือทรงกลมขนาดเท่ากันและสีแดงคือช่องว่าง)

## 2.10 ขอบเขตของฮาร์ชิน-สตรีก์แมน (Hashin-Shtrikman bounds)

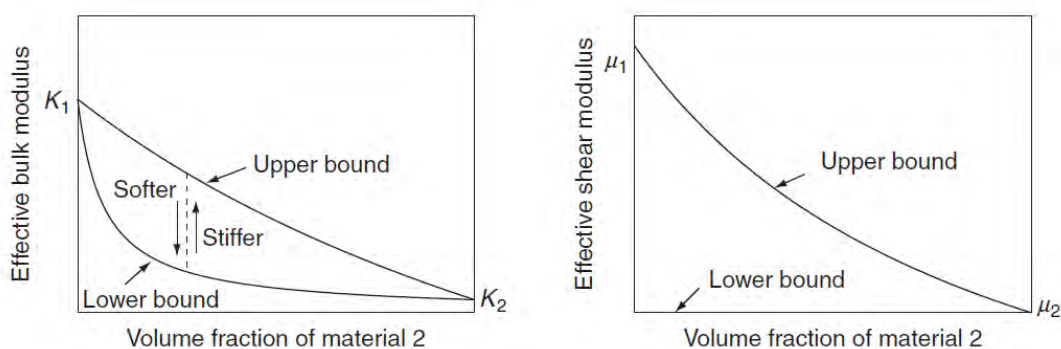
เป็นเส้นขอบเขตค่ามอดุลัสที่เป็นไปได้ของวัสดุที่เกิดจากการรวมกันของวัสดุ 2 ชนิด ด้วยการใช้สมการเทอร์โมไดนามิก ฮาร์ชินและสตรีก์แมนสามารถแสดงขอบเขตสูงสุดที่เกิดจากการผสมวัสดุที่มีค่ามอดุลัสแรงบีบอัด 2 ชนิด ( $K_1, K_2$ ) มอดุลัสแรงเฉือน ( $\mu_1, \mu_2$ ) ได้ตามสมการ 2.21 (Hashin and Shtrikman, 1962)

$$K^{HS+} = K_1 + \frac{f_2}{(K_2 - K_1)^{-1} + f_1 \left( K_1 + \frac{4}{3} \mu_1 \right)^{-1}}$$

$$\mu^{HS+} = \mu_1 + \frac{f_2}{(\mu_2 - \mu_1)^{-1} + 2f_1 \frac{K_1 + 2\mu_1}{5\mu_1 \left( K_1 + \frac{4}{3} \mu_1 \right)}}$$
(2.21)

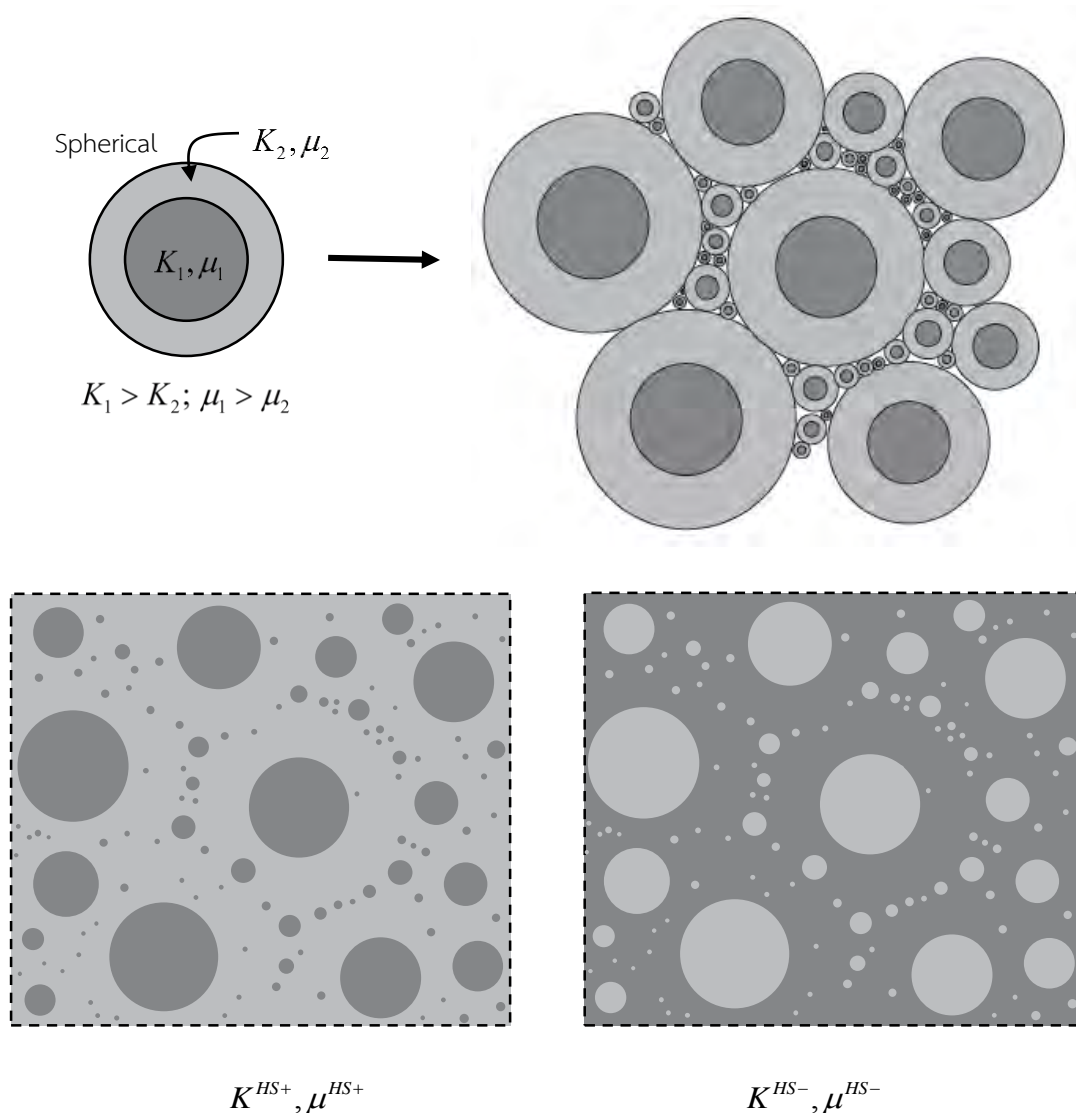
เมื่อ  $f_1, f_2$  แทนสัดส่วนเชิงปริมาตรของวัสดุชนิดที่ 1 และ 2 ตามลำดับ ( $f_1 + f_2 = 1$ )

สำหรับขอบเขตต่ำสุดหาได้จากสมการ 2.21 โดยการสลับที่เลข 1 และ 2 ทั้งนี้เราสมมุติว่า  $K_1 > K_2$  และ  $\mu_1 > \mu_2$  กราฟของสมการ 2.21 สามารถแสดงได้ดังรูป 2.14



รูป 2.14 กราฟอย่างง่ายแสดงของเขตของฮาร์ชิน-สตรีก์แมนสำหรับวัสดุผสมที่ประกอบด้วยวัสดุ 2 ชนิด (ซ้าย) มอดุลัสแรงบีบอัด (ขวา) มอดุลัสแรงเฉือน (Mavko *et al.*, 2009)

การคำนวณของฮาร์ชินและสตรีก์แมนมาจากการสมมุติวัสดุที่มีขนาดอนันต์ที่เกิดจากทรงกลมสี่เหลี่ยมที่หุ้มด้วยทรงกลมสี่เหลี่ยม (รูป 2.14) โดยสี่เหลี่ยมมีความแข็งมากกว่าสี่เหลี่ยม แล้วทำการแทรกทรงกลมดังกล่าวที่มีขนาดต่าง ๆ กันจนกระทั่งได้วัสดุที่มีเนื้อต่อเนื่องกัน เพราะว่าทรงกลมเป็นรูปร่างที่มีความแข็งมากที่สุด (Mavko *et al.*, 2009) เมื่อเทียบกับรูปทรงอื่น วัสดุที่ได้จะมีค่ามอดุลัสสูงสุดเท่าที่เป็นไปได้ (นั่นคือขอบเขตบนของฮาร์ชิน-สตรีก์แมน) สำหรับขอบเขตล่างคำนวณได้จากการสลับวัสดุสี่เหลี่ยมให้เปลี่ยนเป็นวัสดุสี่เหลี่ยม (รูป 2.14)



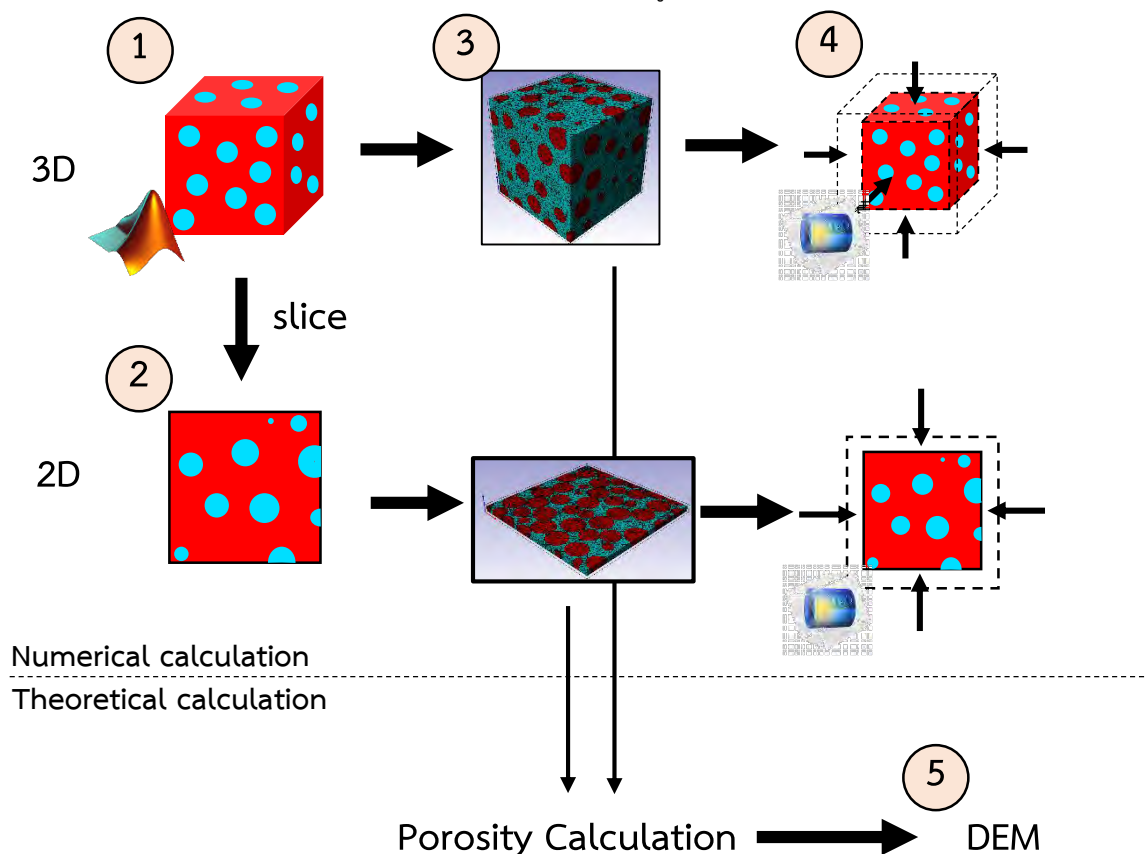
**รูป 2.14** ลักษณะการคำนวณขอบเขตของฮาร์ซิง-สตริกแมน (บน) ลักษณะการจัดเรียงของทรงกลม (Mavko *et al.*, 2009)

(ล่าง) ลักษณะเนื้อหินเมื่อทำการเพิ่มทรงกลมจนมีจำนวนอนันต์ทำให้ส่วนสีอ่อนเสมือนเชื่อมหากัน เนื้อหินรูปด้านซ้ายมือจะเป็นเนื้อหินที่ให้ค่ามอดุลัสของแรงบีบอัดและมอดุลัสของแรงเฉือนสูงที่สุดที่เป็นไปได้ แต่หากเราทำการสลับชนิดของวัสดุ (ขวา) จะเป็นเนื้อหินที่ให้ค่ามอดุลัสของแรงบีบอัดและมอดุลัสของแรงเฉือนต่ำที่สุดที่เป็นไปได้ นั่นคือเป็นขอบเขตล่างฮาร์ซิง-สตริกแมน (วัสดุสีเข้มจะมีความแข็งแรงมากกว่าวัสดุสีอ่อน)

### บทที่ 3

#### วิธีการทดลอง และ การคำนวณ

ในบทนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนการทำงานอย่างละเอียด รวมถึงสมการ ค่าคงที่และเงื่อนไขขอบที่ใช้ในการคำนวณ ลำดับการทำงานอย่างง่ายสามารถแสดงได้ดังรูป 3.1



รูป 3.1 แผนภาพการทำงานโดยสรุป

1. ทำการสร้างแบบจำลองขนาด  $100 \times 100 \times 100$  พิกเซล ด้วยโปรแกรม MATLAB
2. ตัดแบบจำลองให้เป็นแผ่นในระนาบ  $xy/yz/zx$  ด้วยโปรแกรม MATLAB จำนวน 22 - 33 แผ่นให้มีระยะห่างเท่ากัน (11 แผ่นในแต่ละระนาบ)
3. เปลี่ยนแบบจำลองให้เป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดล ด้วยโปรแกรม Simpleware ScanIP โดยตั้งค่าความละเอียด (coarseness) ของโมเดล 3 มิติที่ -50 และ โมเดล 2 มิติที่ -25 พร้อมหาค่าความพรุนของหิน
4. คำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดลที่ได้มาผ่านโปรแกรม COMSOL Multiphysics ใช้เนื้อวัสดุที่มีความยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น และเงื่อนไขนิ่ง (stationary) เงื่อนไขขอบดังนี้ของกรณีต่างๆเป็นดังนี้

## 4.1 การคำนวณมอดุลัสแรงบีบอัด

$$3 \text{ มิติ} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 \end{pmatrix} \mu\text{m}$$

$$2 \text{ มิติ} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} -1.0 & 0 \\ 0 & -1.0 \end{pmatrix} \mu\text{m}$$

## 4.2 การคำนวณมอดุลัสแรงบีบเฉือน

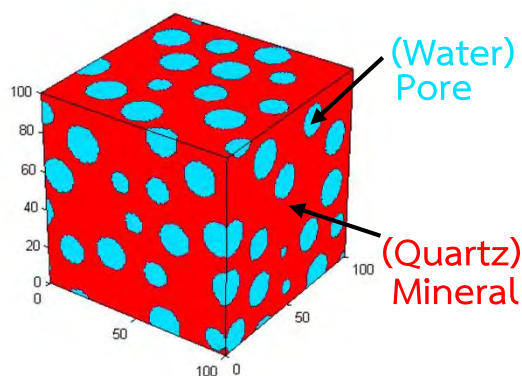
$$3 \text{ มิติ} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1.0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1.0 \\ 0 & -1.0 & 0 \end{pmatrix} \mu\text{m}$$

$$2 \text{ มิติ} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1.0 \\ -1.0 & 0 \end{pmatrix} \mu\text{m}$$

ทั้งนี้โปรแกรมจำคำนวณค่ามอดุลัสแรงบีบอัดและมอดุลัสแรงเฉือนเป็นแบบยังผลโดยใช้กฎของฮุกในการคำนวณ (สมการ 1.10) และในกรณี 2 มิติจะได้ค่าของแต่ละแผ่นไม่เท่ากัน เราจะใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นตัวแทนของข้อมูล 2 มิติ

5. ใช้ค่าความพรุนที่ได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดลแทนลงในทฤษฎีดิฟเฟอเรนเชียลเอฟเฟกต์ที่พหุคูณ เพื่อหาค่ามอดุลัสแรงบีบอัดยังผลและมอดุลัสแรงเฉือนยังผล

6. ทำซ้ำข้อ 1 – 5 โดยเปลี่ยนแบบจำลองให้มีความพรุนแตกต่างกัน ด้วยการเพิ่มหรือลดรัศมีของทรงกลมที่เป็นรูพรุน



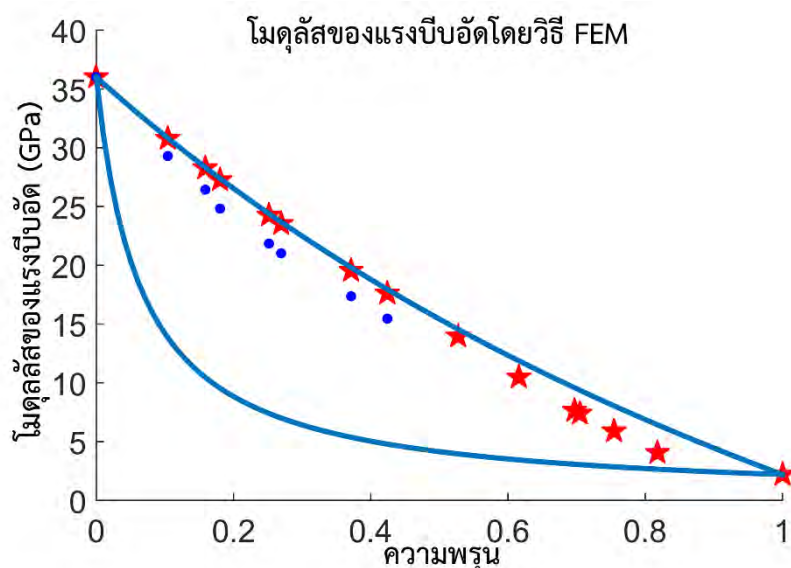
รูป 3.2 ลักษณะแบบจำลองที่ได้จากโปรแกรม MATLAB สีฟ้าในรูปแทนรูพรุน (น้ำ) และ สีแดงแทนเนื้อหิน (แร่ควอตซ์)

## บทที่ 4 ผลการศึกษา

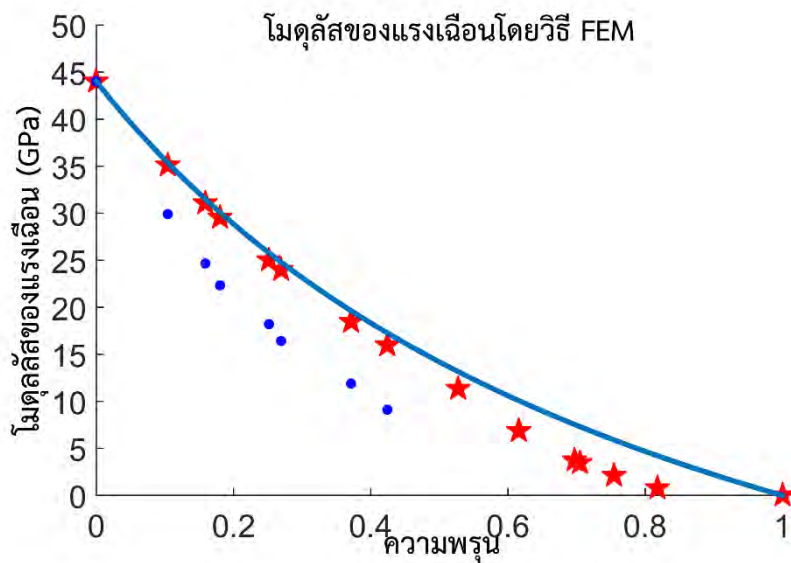
ในบทนี้จะแสดงข้อมูลที่ได้จากการเก็บข้อมูลจากโปรแกรม COMSOL Multiphysics ซึ่งเป็นระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (numerical calculation) ในรูปแบบ 2 มิติและ 3 มิติ รวมถึงผลที่ได้จากการคำนวณด้วยทฤษฎีดิฟเฟอเรนเชียลเฟคทีฟมีเดีย (theoretical calculation) จากผลการคำนวณทั้ง 2 วิธีพบว่าสอดคล้องกับขอบเขตของฮาร์ซิง-สตริกเกอร์แมน (ผลที่ได้มีความน่าเชื่อถือ)

### 4.1 ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยโปรแกรม COMSOL Multiphysics ค่าความยืดหยุ่นยังผลของแบบจำลองพินินีย์สามารถแสดงแสดงได้ดังรูป 4.1 และ 4.2 (ค่ามาจากตาราง 4.1 – 4.7)



**รูป 4.1** ค่ามอดูลัสของแรงบีบอัดของแบบจำลองพินินีย์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยโปรแกรม COMSOL Multiphysics สัญลักษณ์ดาวสีแดงแทนผลที่ได้จากการคำนวณแบบจำลองใน 3 มิติและจุดน้ำเงินแสดงผลที่ได้จากการคำนวณค่ามอดูลัสของสภาพตัดขวาง 2 มิติที่ตัดออกมาจากแบบจำลอง 3 ค่าที่ใช้เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิต (เส้นสีน้ำเงินอ่อนในรูปแทนขอบเขตของฮาร์ซิง-สตริกเกอร์แมน)



**รูป 4.2** ค่ามอดูลัสของแรงเฉือนของแบบจำลองฟินิย์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยโปรแกรม COMSOL Multiphysics สัญลักษณ์ดาวสีแดงแทนผลที่ได้จากการคำนวณแบบจำลองใน 3 มิติและจุดน้ำเงินแสดงผลที่ได้จากการคำนวณค่ามอดูลัสของภาพตัดขวาง 2 มิติที่ตัดออกมาจากแบบจำลอง 3 ค่าที่ใช้เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิต (เส้นสีน้ำเงินอ่อนในรูปแทนขอบเขตของฮาร์ซิง-สตริกเกอร์แมน)

ตาราง 4.1 ผลการคำนวณข้อมูลของตัวอย่างหมายเลข 1

ตัวอย่าง 1  $\phi = 0.10407$

	$K_{3D}$ (GPa)	$K_{2D}$ (GPa)*	$G_{3D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)*
DEM	30.65	34.96	34.96	27.01
FEM	30.78	29.30	35.11	29.89

ข้อมูลการคำนวณของแผ่น 2 มิติจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ตำแหน่ง	ระนาบ xy			ระนาบ yz			ระนาบ xz		
	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)
1	n.a.	n.a.	n.a.	0.09275	29.76	30.75	0.0889	30.12	31.81
10	n.a.	n.a.	n.a.	0.1171	28.52	28.83	0.1111	28.81	29.47
20	n.a.	n.a.	n.a.	0.08122	30.41	31.22	0.0856	30.45	32.13
30	n.a.	n.a.	n.a.	0.1170	28.52	28.42	0.1295	27.78	26.99
40	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.0782	30.75	33.00
50	n.a.	n.a.	n.a.	0.1227	28.16	27.17	0.1351	27.60	27.01
60	n.a.	n.a.	n.a.	0.1102	29.00	28.62	0.0429	33.10	37.33
70	n.a.	n.a.	n.a.	0.1223	28.22	27.94	0.1753	25.44	23.81
80	n.a.	n.a.	n.a.	0.1035	29.46	30.50	0.0465	32.80	37.07
90	n.a.	n.a.	n.a.	0.07268	31.02	31.91	0.1491	26.81	24.21
100	n.a.	n.a.	n.a.	0.1260	28.14	27.98	0.08071	30.48	31.55



## ตาราง 4.2 ผลการคำนวณข้อมูลของตัวอย่างหมายเลข 2

ตัวอย่าง 2  $\phi = 0.15854$

	$K_{3D}$ (GPa)	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{3D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)
DEM	27.97	27.30	30.72	20.49
FEM	30.78	26.43	31.09	24.68

ข้อมูลการคำนวณของแผ่น 2 มิติจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ตำแหน่ง	ระนาบ xy			ระนาบ yz			ระนาบ xz		
	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)
1	0.1746	26.15	22.98	n.a.	n.a.	n.a.	0.1841	24.90	22.85
10	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.1389	26.95	25.61
20	0.1795	25.17	23.72	n.a.	n.a.	n.a.	0.1767	25.06	22.37
30	0.1293	27.57	26.36	n.a.	n.a.	n.a.	0.1397	27.13	25.24
40	0.1901	24.55	20.74	n.a.	n.a.	n.a.	0.1425	26.80	24.78
50	0.1260	28.04	26.94	n.a.	n.a.	n.a.	0.1559	26.44	23.90
60	0.1396	27.11	26.24	n.a.	n.a.	n.a.	0.1337	27.55	26.71
70	0.1433	27.13	25.16	n.a.	n.a.	n.a.	0.1483	26.94	26.37
80	0.1895	24.71	21.67	n.a.	n.a.	n.a.	0.0868	30.16	30.27
90	0.1455	26.64	26.10	n.a.	n.a.	n.a.	0.1880	24.85	22.44
100	0.1775	24.79	23.10	n.a.	n.a.	n.a.	0.1841	24.90	22.85

### ตาราง 4.3 ผลการคำนวณข้อมูลของตัวอย่างหมายเลข 3

ตัวอย่าง 3  $\phi = 0.18056$

	$K_{3D}$ (GPa)	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{3D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)
DEM	26.86	26.12	29.00	18.12
COMSOL	27.27	24.83	29.54	22.34

ข้อมูลการคำนวณของแผ่น 2 มิติจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ตำแหน่ง	ระนาบ xy			ระนาบ yz			ระนาบ xz		
	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)
1	0.2208	23.16	19.41	n.a.	n.a.	n.a.	0.1578	26.09	23.60
10	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.2373	22.25	18.74
20	0.2240	22.88	20.19	n.a.	n.a.	n.a.	0.1908	24.19	21.52
30	0.1296	27.56	26.38	n.a.	n.a.	n.a.	0.1797	25.76	28.72
40	0.2411	22.05	16.82	n.a.	n.a.	n.a.	0.1807	24.78	21.43
50	0.1319	27.75	26.62	n.a.	n.a.	n.a.	0.1803	24.58	21.26
60	0.1924	24.10	21.96	n.a.	n.a.	n.a.	0.1913	24.42	20.52
70	0.1518	26.67	24.39	n.a.	n.a.	n.a.	0.1687	25.42	23.49
80	0.2437	22.02	17.49	n.a.	n.a.	n.a.	0.1866	24.96	23.41
90	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.1269	27.76	25.81
100	0.2290	22.39	19.16	n.a.	n.a.	n.a.	0.2382	22.33	18.53

#### ตาราง 4.4 ผลการคำนวณข้อมูลของตัวอย่างหมายเลข 4

ตัวอย่าง 4  $\phi = 0.25126$

	$K_{3D}$ (GPa)	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{3D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)
DEM	23.55	22.69	24.11	12.18
FEM	24.24	21.85	25.01	18.21

ข้อมูลการคำนวณของแผ่น 2 มิติจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ตำแหน่ง	ระนาบ xy			ระนาบ yz			ระนาบ xz		
	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)
1	0.3331	18.11	12.68	n.a.	n.a.	n.a.	0.2541	21.35	16.18
10	0.2516	21.27	15.42	n.a.	n.a.	n.a.	0.3601	16.78	11.39
20	0.3360	17.87	12.80	n.a.	n.a.	n.a.	0.2427	21.71	17.68
30	0.1998	23.48	20.21	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.
40	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.2327	22.07	17.16
50	0.2178	23.24	19.09	n.a.	n.a.	n.a.	0.3273	17.81	10.66
60	0.3117	18.73	14.47	n.a.	n.a.	n.a.	0.2258	22.67	17.58
70	0.2600	21.24	16.50	n.a.	n.a.	n.a.	0.3033	19.04	13.36
80	0.3644	16.85	10.46	n.a.	n.a.	n.a.	0.2385	22.43	19.54
90	0.2424	21.80	18.82	n.a.	n.a.	n.a.	0.2833	19.95	13.63
100	0.3597	16.83	11.27	n.a.	n.a.	n.a.	0.2844	20.22	15.26

ตาราง 4.5 ผลการคำนวณข้อมูลของตัวอย่างหมายเลข 5

ตัวอย่าง 5  $\phi = 0.26919$

	$K_{3D}$ (GPa)	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{3D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)
DEM	22.72	22.18	22.93	10.93
FEM	23.52	21.02	15.96	9.405

ข้อมูลการคำนวณของแผ่น 2 มิติจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ตำแหน่ง	ระนาบ xy			ระนาบ yz			ระนาบ xz		
	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)
1	0.2298	22.65	18.81	0.2665	20.88	15.37	0.2656	20.77	15.51
10	0.2594	21.03	15.15	0.3104	18.19	14.11	0.2900	19.91	15.41
20	0.2869	19.93	15.87	0.2560	21.07	16.93	0.2571	21.24	16.41
30	0.2101	22.90	19.18	0.3043	18.39	13.41	0.3097	18.54	13.36
40	0.3053	19.11	12.45	0.2418	21.53	16.34	0.2236	22.77	19.49
50	0.2299	22.54	18.14	0.2836	19.67	13.46	0.3221	18.02	12.66
60	0.2062	23.44	20.92	0.2386	22.02	16.55	0.1607	25.97	23.51
70	0.2704	20.74	15.72	0.2645	20.76	16.12	0.1651	25.46	22.42
80	0.2542	21.51	16.74	0.2501	21.88	18.84	0.3652	17.07	11.21
90	0.2469	21.57	18.49	0.2333	22.13	16.85	0.3282	18.12	11.19
100	0.2425	21.67	17.96	0.3023	19.36	14.24	0.2145	22.83	18.84

ตาราง 4.6 ผลการคำนวณข้อมูลของตัวอย่างหมายเลข 6

ตัวอย่าง 6  $\phi = 0.37116$

	$K_{3D}$ (GPa)	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{3D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)
DEM	18.24	17.35	16.84	5.605
FEM	19.55	17.35	18.49	11.87

ข้อมูลการคำนวณของแผ่น 2 มิติจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ตำแหน่ง	ระนาบ xy			ระนาบ yz			ระนาบ xz		
	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)
1	0.3591	16.68	9.407	n.a.	n.a.	n.a.	0.3046	19.20	12.93
10	0.3935	15.40	9.700	n.a.	n.a.	n.a.	0.3400	17.60	12.35
20	0.3027	18.64	13.31	n.a.	n.a.	n.a.	0.3563	16.75	11.27
30	0.3369	17.67	10.93	n.a.	n.a.	n.a.	0.3408	16.99	11.41
40	0.2667	20.60	1.550	n.a.	n.a.	n.a.	0.3471	17.02	10.23
50	0.3698	16.45	11.20	n.a.	n.a.	n.a.	0.3169	18.26	18.26
60	0.3840	16.09	9.640	n.a.	n.a.	n.a.	0.3248	17.84	10.70
70	0.4187	14.57	7.722	n.a.	n.a.	n.a.	0.3489	17.14	10.53
80	0.3488	17.30	12.21	n.a.	n.a.	n.a.	0.3562	17.33	12.73
90	0.3443	17.42	11.89	n.a.	n.a.	n.a.	0.2777	20.22	13.93
100	0.3591	16.68	9.407	n.a.	n.a.	n.a.	0.4026	14.09	8.490

ตาราง 4.7 ผลการคำนวณข้อมูลของตัวอย่างหมายเลข 7

ตัวอย่าง 7  $\phi = 0.42388$

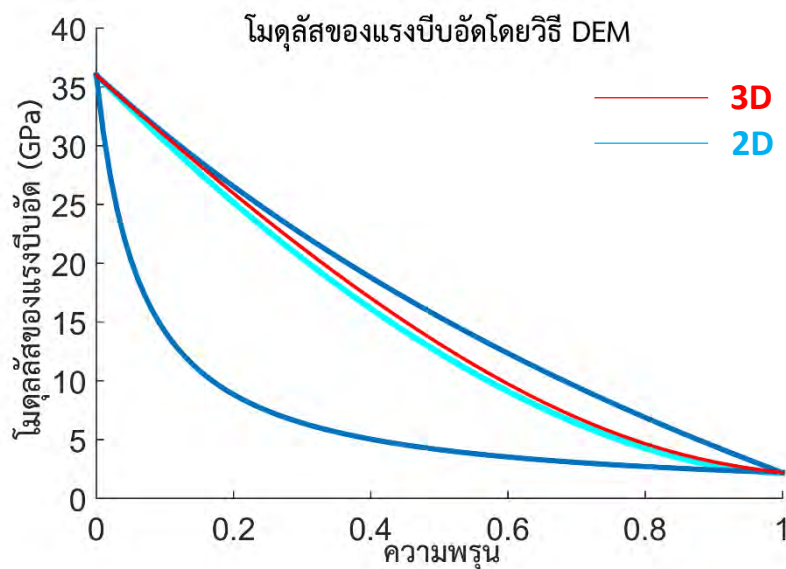
	$K_{3D}$ (GPa)	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{3D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)
DEM	16.10	15.24	14.13	3.819
FEM	17.62	15.46	15.96	9.134

ข้อมูลการคำนวณของแผ่น 2 มิติจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

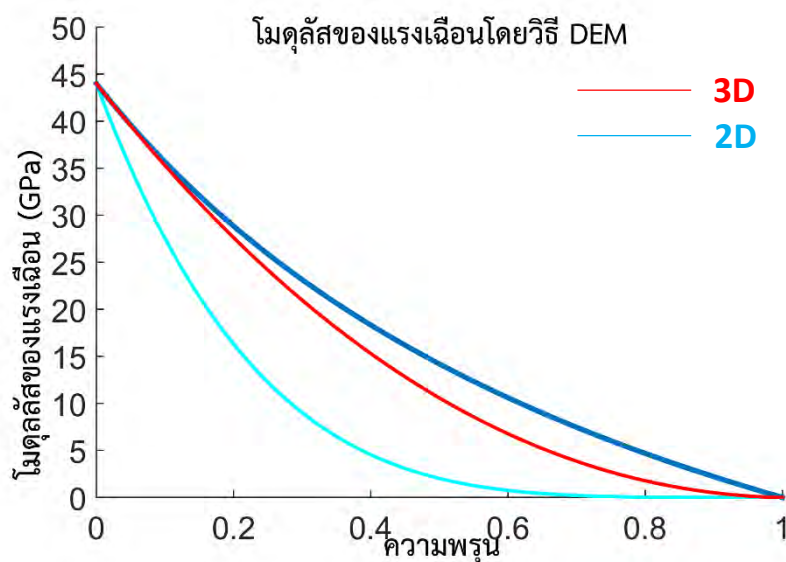
ตำแหน่ง	ระนาบ xy			ระนาบ yz			ระนาบ xz		
	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\phi$	$K_{2D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)
1	0.4360	13.72	7.385	n.a.	n.a.	n.a.	0.3523	17.20	10.39
10	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.4308	14.15	8.036
20	0.4496	13.25	7.289	n.a.	n.a.	n.a.	0.3735	16.03	10.20
30	0.3644	16.08	9.963	n.a.	n.a.	n.a.	0.4785	11.78	5.300
40	0.3897	15.44	8.096	n.a.	n.a.	n.a.	0.4003	15.01	7.756
50	0.3079	18.62	13.09	n.a.	n.a.	n.a.	0.3592	16.51	9.477
60	0.4168	14.71	9.063	n.a.	n.a.	n.a.	0.3804	15.59	7.870
70	0.3621	17.00	10.88	n.a.	n.a.	n.a.	0.3262	17.96	11.89
80	0.4619	13.04	6.083	n.a.	n.a.	n.a.	0.4158	15.07	9.765
90	0.3974	15.43	9.531	n.a.	n.a.	n.a.	0.3261	18.27	11.35
100	0.3940	15.52	9.395	n.a.	n.a.	n.a.	0.4478	13.28	6.667

#### 4.2 ผลการคำนวณด้วยทฤษฎีฟิสิกส์เฟอเรนเซียลเอฟเฟคทีฟมีเดีย

การคำนวณด้วยทฤษฎีดังกล่าวเป็นการแก้สมการอนุพันธ์และได้คำตอบเฉพาะออกมาเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแสดงดังรูป 4.3



รูป 4.3 ผลการคำนวณค่ามอดูลัสของแรงบีบอัดด้วยทฤษฎีฟิสิกส์เฟอเรนเซียลเอฟเฟคทีฟมีเดีย เส้นสีแดงแสดงผลการคำนวณแบบ 3 มิติ และ เส้นสีฟ้าแทนผลการคำนวณแบบ 2 มิติ (เส้นสีน้ำเงินอ่อนในรูปแทนขอบเขตของฮาร์ซิง-สตริกเกอร์แมน)



รูป 4.4 ผลการคำนวณค่ามอดูลัสของแรงเฉือนยังผลด้วยทฤษฎีฟิสิกส์เฟอเรนเซียลเอฟเฟคทีฟมีเดีย เส้นสีแดงแสดงผลการคำนวณแบบ 3 มิติ และ เส้นสีฟ้าแทนผลการคำนวณแบบ 2 มิติ (เส้นสีน้ำเงินอ่อนในรูปแทนขอบเขตของฮาร์ซิง-สตริกเกอร์แมน)

## บทที่ 5 วิเคราะห์ผลการทดลอง

### 5.1 ความสัมพันธ์ระหว่างผลการคำนวณด้วยแบบจำลองพินนีย์และทฤษฎีดิฟเฟอเรนเชียลเอฟ-เพคทีฟมีเดีย

จากการเปรียบเทียบผลการทดลองทั้ง 2 แบบลงในแกนกราฟเดียวกัน เราได้ข้อสรุป คือ

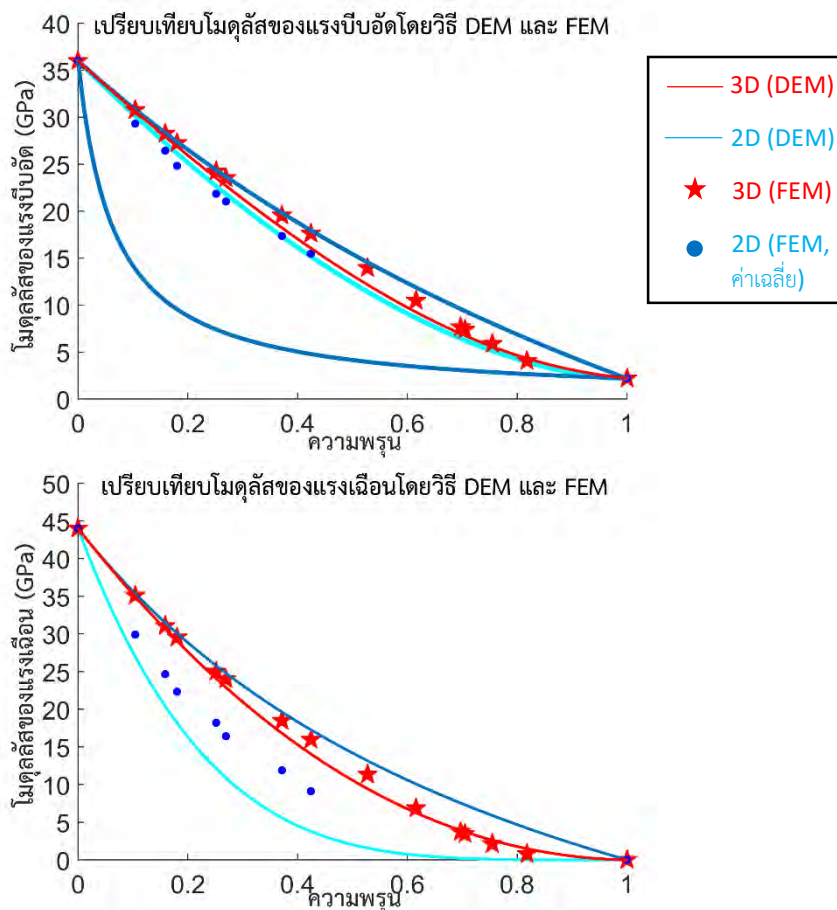
1. ที่ความพรุน  $\phi = 0$  และ  $\phi = 1$  ค่าความยืดหยุ่นยังผลของ 2 มิติ และ 3 มิติ มีค่าเท่ากัน นั่นคือ

$$\begin{aligned} K_{2D}(0) = K_{3D}(0) = 36 \text{ GPa} \quad G_{2D}(0) = G_{3D}(0) = 44 \text{ GPa} \\ K_{2D}(1) = K_{3D}(1) = 2.2 \text{ GPa} \quad G_{2D}(1) = G_{3D}(1) \approx 0 \text{ GPa} \end{aligned} \tag{5.1}$$

2. ทุกค่าความพรุน ค่าความยืดหยุ่นยังผลใน 3 มิติ มากกว่าหรือเท่ากับ 2 มิติเสมอกล่าวคือ

$$K_{3D}(\phi) \geq K_{2D}(\phi) \quad G_{3D}(\phi) \geq G_{2D}(\phi) \tag{5.2}$$

3. รูปแบบของการลดลงมีลักษณะคล้ายเคียงกัน



รูป 5.1 กราฟเปรียบเทียบผลการทดลองจากวิธีคำนวณทั้ง 2 แบบ (บน) ผลการคำนวณโมดูลัสของแรงบีบอัด (ล่าง) ผลการคำนวณโมดูลัสของแรงเฉือน (เส้นสีน้ำเงินอ่อนในรูปแทนขอบเขตของฮาร์ซิง-สตริกเกอร์แมน)



## 5.2 การหาสมการแสดงความสัมพันธ์

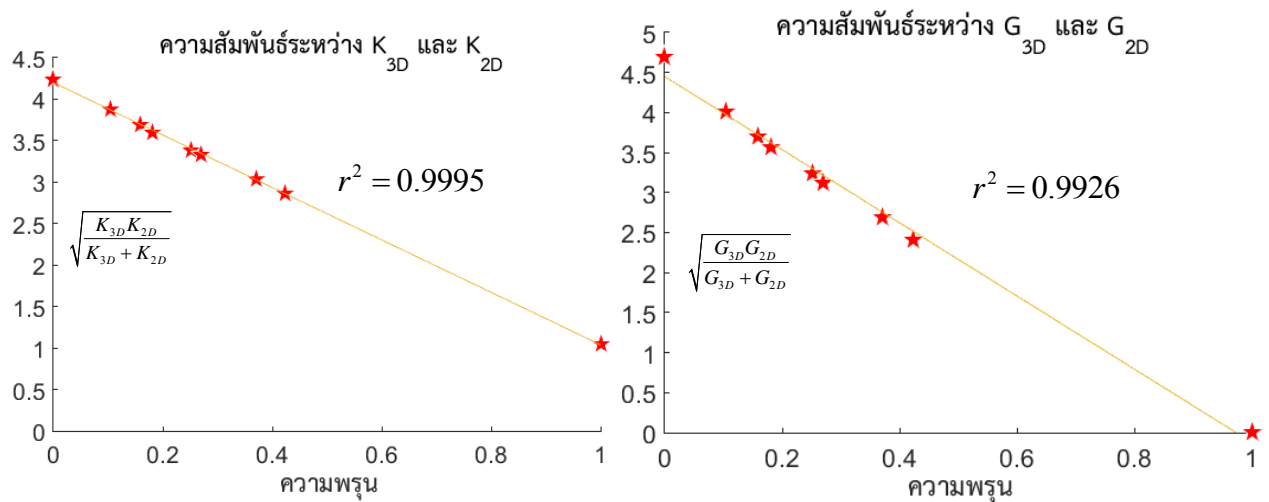
พิจารณาข้อมูลจากการประมวลผลดังตาราง 5.1 หากทำการเขียนกราฟระหว่าง

$$\sqrt{\frac{K_{2D}K_{3D}}{K_{2D}+K_{3D}}} \text{ และ } \sqrt{\frac{G_{2D}G_{3D}}{G_{2D}+G_{3D}}}$$

กับความพรุน  $\phi$  พบว่าได้กราฟเส้นตรงที่มีค่าสัมประสิทธิ์การ

ตาราง 5.1 ข้อมูลสรุปจากการคำนวณด้วยวิธีระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์จากโปรแกรม COMSOL Multiphysics

Data	$\phi$	$K_{3D}$ (GPa)	$K_{2D}$ (GPa)	$\sqrt{\frac{K_{2D}K_{3D}}{K_{2D}+K_{3D}}}$	$G_{3D}$ (GPa)	$G_{2D}$ (GPa)	$\sqrt{\frac{G_{2D}G_{3D}}{G_{2D}+G_{3D}}}$
BC	0.0000	36.00	36.00	4.243	44.00	44.00	4.690
1	0.1041	30.78	29.30	3.874	35.11	29.89	4.018
2	0.1586	28.26	26.43	3.696	31.09	24.68	3.709
3	0.1806	27.27	24.83	3.605	29.54	22.34	3.567
4	0.2513	24.24	21.85	3.390	25.01	18.21	3.246
5	0.2692	23.52	21.02	3.332	24.00	16.41	3.122
6	0.3712	19.55	17.35	3.032	18.49	11.87	2.689
7	0.4239	17.62	15.46	2.869	15.96	9.134	2.410
BC	1.000	2.200	2.200	1.049	1.0000E-09	1.0000E-09	0.000



รูป 5.2 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $\sqrt{\frac{K_{2D}K_{3D}}{K_{2D}+K_{3D}}}$  (ซ้าย) และ  $\sqrt{\frac{G_{2D}G_{3D}}{G_{2D}+G_{3D}}}$  (ขวา) ตามแกนตั้งกับความพรุน ( $\phi$ ) ตามแกนนอน กราฟทั้ง 2 กราฟแสดงลักษณะการแปรผันแบบเชิงเส้นของปริมาณทั้ง 2

หากใช้สมมุติฐานว่าตัวแปรทั้ง 2 แปรผันโดยตรงแบบเชิงเส้นจริง ประกอบกับเงื่อนไขของสมการ 5.1 เราสามารถสร้างสมการเส้นตรงแสดงความสัมพันธ์ได้ดังสมการ 5.3

$$\sqrt{\frac{K_{3D}K_{2D}}{K_{3D} + K_{2D}}} = \left( \sqrt{\frac{K_p}{2}} - \sqrt{\frac{K_m}{2}} \right) \phi + \sqrt{\frac{K_m}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{G_{3D}G_{2D}}{G_{3D} + G_{2D}}} = \left( \sqrt{\frac{G_p}{2}} - \sqrt{\frac{G_m}{2}} \right) \phi + \sqrt{\frac{G_m}{2}}$$
(5.3)

เมื่อ  $K_m$  และ  $G_m$  แทนมอดุลัสแรงบีบอัดและแรงเฉือนของเนื้อหิน (ในแบบจำลองคือแร่ควอตซ์) และ  $K_p$  และ  $G_p$  แทนมอดุลัสแรงบีบอัดและแรงเฉือนของรูพรุน (ในแบบจำลองคือน้ำ)

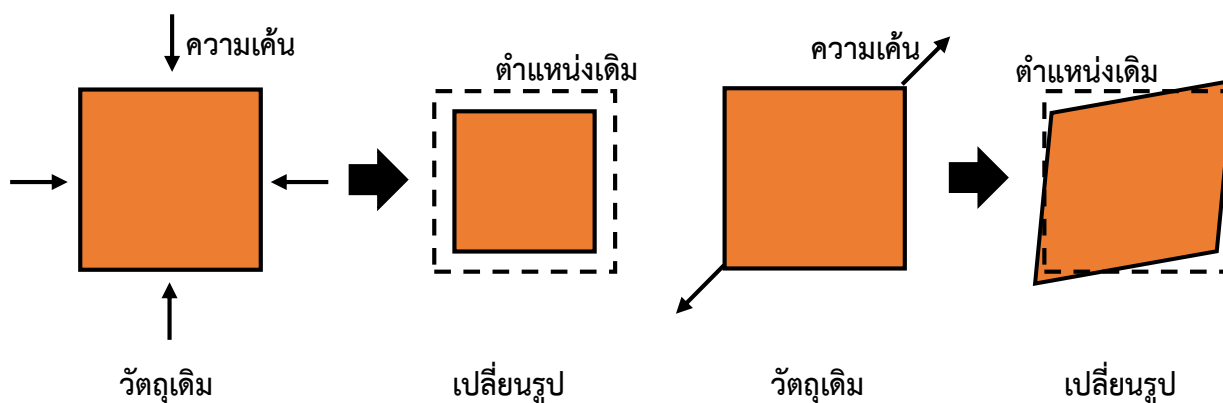
จากสมการ 5.3 หากทำการจัดรูปสมการจะพบว่าปริมาณฝั่งซ้ายมือคือค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกของมอดุลัสความยืดหยุ่นเชิงปริมาตรและมอดุลัสความยืดหยุ่นเฉือนนั่นเอง

### 5.3 ความคลาดเคลื่อนจากการวัดผล

ความคลาดเคลื่อนที่มีความเกี่ยวข้องกับการศึกษานี้ ประกอบด้วย ผลที่ขอบของวัตถุ (boundary effect) และ ขนาดของตัวอย่างที่ใช้ในการคำนวณ

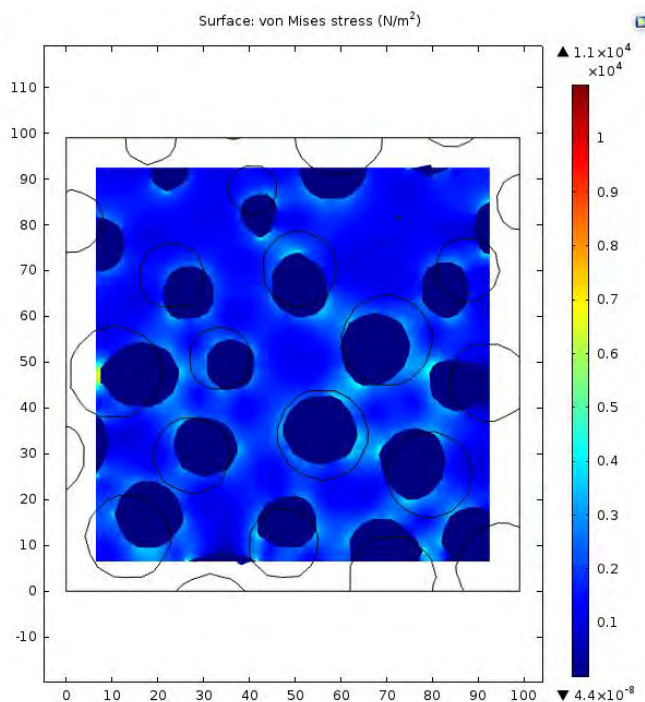
#### 5.3.1 ผลที่ขอบของวัตถุ

ในอุดมคติการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุสำหรับการวัดค่ามอดุลัสเชิงปริมาตรจะมีการหดสั้นลง (ความเครียด) เท่ากันทุกมิติ และสำหรับมอดุลัสของแรงเฉือนจะมีการเปลี่ยนใน 2 หรือ 3 แกนอย่างเท่าๆกัน เหมือนดังเทนเซอร์ความเฉือนที่ได้กำหนดไว้ในบทที่ 3 ลักษณะการเปลี่ยนรูปร่างของวัสดุใน 2 มิติแบบอุดมคติแสดงได้ดังรูป 5.3

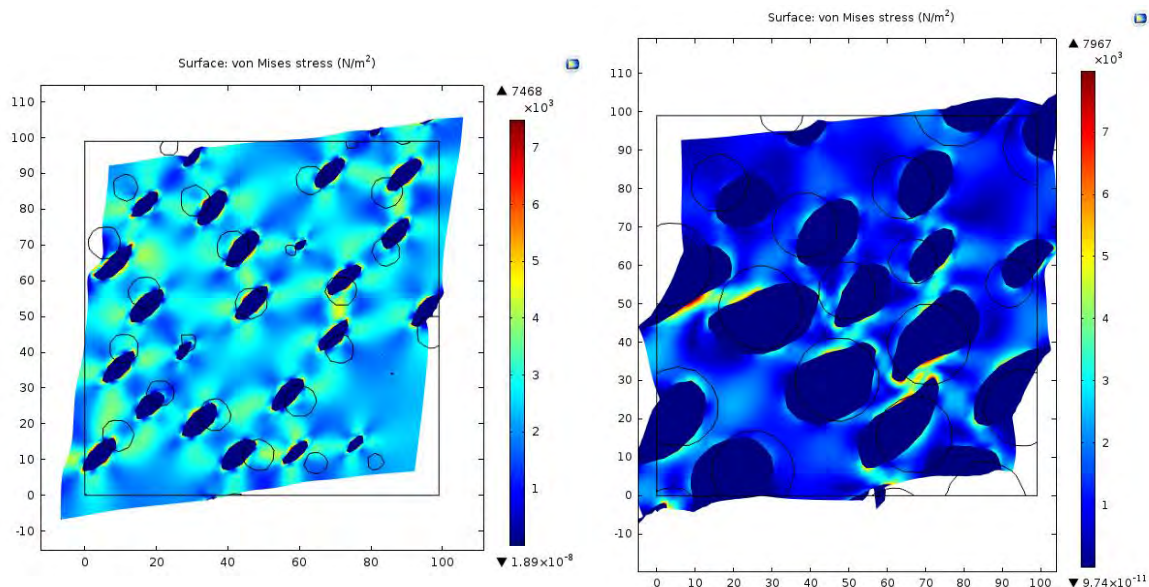


รูป 5.3 ลักษณะการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุในอุดมคติที่ใช้ในการคำนวณค่ามอดุลัสของแรงบีบอัดและมอดุลัสของแรงเฉือน

จากผลการทดลองด้วยโปรแกรม COMSOL Multiphysics การเปลี่ยนแปลงภายใต้ความเค้นที่เท่ากันทุกด้านแสดงลักษณะที่มีความใกล้เคียงกับลักษณะการเปลี่ยนรูปแบบในอุดมคติ (รูป 5.4) ในทางกลับกันการเปลี่ยนแปลงภายใต้ความเค้นเฉือนมีขอบของวัตถุหลังการเปลี่ยนแปลงผิดไปจากเดิมมากและความผิดปกตินี้มากขึ้นตามความพรุนของวัตถุที่มากขึ้นเนื่องจากมอดูลัสความเค้นของน้ำมีค่าต่ำมากจึงทำให้เกิดปัญหาการเปลี่ยนรูปร่างอย่างชัดเจน โดยเฉพาะที่ขอบของวัตถุ (รูป 5.5) ทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจลดต่ำลง



**รูป 5.4** ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของวัตถุภายใต้ความเค้นที่เท่ากันทุกด้านจากโปรแกรม COMSOL Multiphysics แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงใกล้เคียงกับอุดมคติ โทนสีในรูปแสดงความเค้นที่เกิดจากการให้ความเครียดของวัตถุที่ตำแหน่งต่างๆ (von Mises stress) โดยสีแดงแสดงจุดที่มีความเค้นมาก และ สีน้ำเงินเข้มแสดงจุดที่มีความเค้นน้อย



**รูป 5.5** ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของวัตถุภายใต้ความเค้นเฉือนจากโปรแกรม COMSOL Multiphysics วัตถุที่มีความพรุนน้อย (ซ้าย) จะแสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงใกล้เคียงกับอุดมคติ ในขณะที่วัตถุที่มีความพรุนมาก (ขวา) จะมีการเปลี่ยนแปลงที่แตกต่างจากอุดมคติมาก ทำให้ผลการคำนวณคลาดเคลื่อน โทนสีในรูปแสดงความเค้นที่เกิดจากการให้ความเครียดของวัตถุที่ตำแหน่งต่างๆ (Von Mises stress) โดยสีแดงแสดงจุดที่มีความเค้นมาก และ สีน้ำเงินเข้มแสดงจุดที่มีความเค้นน้อย

### 5.3.2 ขนาดของตัวอย่าง

การใช้การประมาณค่าด้วยทฤษฎียังผลเป็นการอนุมานสำหรับวัตถุที่มีขนาดอนันต์และมีการกระจายตัวของรูพรุนอย่างสม่ำเสมอทั่วทั้งวัสดุ เนื่องจากตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองไม่ได้มีขนาดใหญ่เป็นอนันต์ ค่าสมบัติความยืดหยุ่นยังผลที่คำนวณได้จึงคลาดเคลื่อนและไม่เท่ากับค่าที่คำนวณได้จากทฤษฎีดิฟเฟอเรนเชียลเอฟเฟกต์ที่มีเดีย

## บทที่ 6

### สรุปผลการศึกษา

เราพบผลการคำนวณค่ามอดูลัสที่เป็นไปในทางเดียวกันทั้งจากการคำนวณด้วยทฤษฎี ดิฟเฟอเรนเชียลเอเลเฟคทีฟที่มีเดีย และ จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (โปรแกรม COMSOL Multiphysics) กล่าวคือ ค่ามอดูลัสของวัตถุลดลงตามรูพรุนที่เพิ่มขึ้นและค่ามอดูลัสใน 3 มิติจะมากกว่าหรือเท่ากับค่ามอดูลัสใน 2 มิติ ทั้งนี้ค่าดังกล่าวมีความแตกต่างกันเนื่องจากขนาดของ ตัวอย่างของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ไม่ได้มีขนาดเป็นอนันต์ แต่ทฤษฎีดิฟเฟอเรนเชียลเอเลเฟคทีฟที่มีเดียพิจารณาขนาดตัวอย่างที่เป็นอนันต์

ความสัมพันธ์ระหว่างค่ามอดูลัสใน 2 และ 3 มิติ สามารถแสดงได้จากลักษณะการแปรผัน แบบเชิงเส้นระหว่าง  $\sqrt{\frac{K_{2D}K_{3D}}{K_{2D} + K_{3D}}}$  และ  $\sqrt{\frac{G_{2D}G_{3D}}{G_{2D} + G_{3D}}}$  กับความพรุนของหินด้วยสัมประสิทธิ์การตัดสินใจสูงถึง 0.999 เราจึงสามารถสร้างสมการเชิงเส้นเพื่อเชื่อมโยงระหว่างปริมาณ  $K_{2D}$  กับ  $K_{3D}$  และ  $G_{2D}$  กับ  $G_{3D}$  ได้ ทั้งนี้สัมประสิทธิ์การตัดสินใจของความสัมพันธ์ระหว่าง  $\sqrt{\frac{G_{2D}G_{3D}}{G_{2D} + G_{3D}}}$  กับ ความพรุนที่ต่ำกว่า  $\sqrt{\frac{K_{2D}K_{3D}}{K_{2D} + K_{3D}}}$  กับความพรุนเล็กน้อยเกิดจากผลที่ขอบ

โดยสรุปแล้วการประมาณค่าของมอดูลัสใน 3 มิติของหินที่มีลักษณะคล้ายโมเดลในงานวิจัยนี้ สามารถกระทำได้โดย การทำแผ่นหินบางแล้วบันทึกภาพเพื่อนำไปประมวลผลด้วยโปรแกรม คอมพิวเตอร์ เช่น Simpleware ScanIP จากนั้นคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ผ่าน โปรแกรม COMSOL Multiphysics เพื่อให้ได้ค่า  $K_{2D}, G_{2D}$  แล้วแทนค่าลงในสมการ 5.3 เพื่อแก้ สมการหาค่า  $K_{3D}$  และ  $G_{3D}$

งานวิจัยนี้ยังคงต้องการการศึกษาเพิ่มเติมในอีกหลายด้าน เช่น การเปลี่ยนรูปร่างและขนาด ของรูพรุน และ การขยายขนาดของตัวอย่างให้ใหญ่ขึ้นเพื่อลดปัญหาความคลาดเคลื่อนอันมาจากผลที่ ขอบของวัตถุ

## บรรณานุกรม

### ภาษาไทย

เสถียรธรรมสาร สุจริตภวัตสกุล. การประยุกต์ใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในงานทางวิศวกรรมด้านเทคโนโลยีการผลิตทางอุตสาหกรรมยานยนต์. 2556. สืบค้นจาก: [http://eng.sut.ac.th/me/box/2\\_55/436304/](http://eng.sut.ac.th/me/box/2_55/436304/)

### ภาษาอังกฤษ

Andrew, Norris. N. A differential scheme for the effective moduli of composites. Mechanic of Materials. 1985. 1-16.

Berryman, J. Single-scattering approximations for coefficients in Biot's equations of poroelasticity. The Journal of the Acoustical Society of America. 1992. 551-571.

Bower, A. F. EN2201 Continuum Mechanics. [Online]. 2012. Available from: <http://www.brown.edu/Departments/Engineering/Courses/En221/>

Finney, John. L. Random packing and the structure of simple liquids I: The geometry of random close packing. The Royal Society. 1970. 479-493.

Hashin, Z., and Shtrikman, S. A variational approach to the theory of effective magnetic permeability of multiphase materials. Journal of Applied Physics., 1962. 3125-3131.

Huorati, S., Pylkkänen, T., Verben, R., Monaco, G., and Pylkkänen, K. Direct tomography with chemical-bond contrast. Nature Materials Nat Mater. 2011. 489-493.

Mavko, G., Mukerji, T., and Dvorkin, J. The rock physics handbook: tools for seismic analysis of porous media. Cambridge, UK: Cambridge University Press. 2009.

Meille, S., and Garboczi E.J. Linear elastic properties of 2D and 3D models of porous materials made from elongated objects. Modelling and simulation in materials science and engineering. 2001.

Sanpaz. Mohr's circle. [Online]. 2016. Available from: [https://en.wikipedia.org/wiki/Mohr%27s\\_circle](https://en.wikipedia.org/wiki/Mohr%27s_circle)

Staerdaal, J. W. Finite Element Method Introduction, 1D heat conduction. [Online]. [n.d.] Available from: [http://www.wind.civil.aau.dk/lecture/7sem\\_finite\\_element/lecture\\_notes/](http://www.wind.civil.aau.dk/lecture/7sem_finite_element/lecture_notes/)

Timoshenko, S., and Goodier, J. Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill. 1934.

Thorpe, M.F., and Sen, P.N. Elastic moduli of two-dimensional composite continua with elliptical inclusion. Journal of the acoustical society of the America. 1985. 77.