บทที่ 2

วรรณคดีที่เกี่ยวข้อง

การเสนอวรรณคดีที่เกี่ยวข้องกับการเปรียบเทียบพหุคูณสำหรับการวิจัยครั้งนี้ จะเสนอตามลำดับดังต่อไปนี้

1. หน่วยมโนทัศน์ของอัตราความคลาดเคลื่อน
2. การแจกแจงที่เกี่ยวข้องกับวิธีเปรียบเทียบพหุคูณ
3. การทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยแบบ 2 กลุ่ม
4. วิธีเปรียบเทียบพหุคูณ
5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. หน่วยมโนทัศน์ของอัตราความคลาดเคลื่อน (Conceptual Unit for Error Rate)

ในการทดสอบสมมติฐาน ผู้วิจัยอาจตัดสินใจถูกต้องหรือผิดพลาดได้ ถ้าตัดสินใจผิดพลาดก็คือเกิดความคลาดเคลื่อนประเภทใดประเภทหนึ่งใน 2 ประเภท คือความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เมื่อตัดสินใจปฏิเสธสมมติฐานสูญที่ถูกต้อง และความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 2 เมื่อตัดสินใจยอมรับสมมติฐานสูญที่ผิด กระบวนการทดสอบสมมติฐานในทางพฤติกรรมศาสตร์มักจะสร้างขึ้นเพื่อป้องกันความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 มากกว่าความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 2 (Kirk 1968: 82) โดยผู้วิจัยกำหนดโอกาสการเสี่ยงต่อการเกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เท่ากับ α ซึ่งงานวิจัยทางพฤติกรรมศาสตร์มักจะนิยมระบุ α ไว้เท่ากับ .05 หรือ .01

ในการทดลองที่มี 2 ระดับ หรือทดสอบสมมติฐานที่มีการเปรียบเทียบเพียง 1 ครั้ง สามารถทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยด้วยสถิติทดสอบที ซึ่งโอกาสการเกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 จะถูกพิจารณาที่ระดับนัยสำคัญที่ทดสอบหรืออัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุ (α) แต่กรณีการทดสอบการเปรียบเทียบ (Contrast) ที่มีมากกว่าหนึ่งการเปรียบเทียบ อัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 จะเพิ่มขึ้นตามจำนวนการเปรียบเทียบ กล่าวคือ ถ้าการทดลองมี k ระดับ มีจำนวนการเปรียบเทียบแบบอิสระ (Orthogonal Contrasts) จำนวน m การ

เปรียบเทียบ และทดสอบแต่ละการเปรียบเทียบที่ระดับนัยสำคัญ α โอกาสที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 อย่างน้อยหนึ่งการเปรียบเทียบ เท่ากับ $1-(1-\alpha)^m$ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

ถ้ากำหนดการเปรียบเทียบที่เป็นอิสระทั้งหมดมี m การเปรียบเทียบ และทดสอบการเปรียบเทียบแต่ละครั้งที่ระดับนัยสำคัญ α ดังนั้นโอกาสที่จะยอมรับสมมติฐานสูญที่ถูกต้องในการทดสอบแต่ละครั้งเท่ากับ $(1 - \alpha)$ ตามกฎของเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันจะได้ว่าโอกาสที่ยอมรับสมมติฐานสูญที่ถูกต้องทั้ง m ครั้ง (m การเปรียบเทียบ) เท่ากับผลคูณของโอกาสที่ยอมรับสมมติฐานสูญที่ถูกต้องในการทดสอบแต่ละครั้ง นั่นคือ ถ้าให้ P แทน โอกาสที่ยอมรับสมมติฐานสูญที่ถูกต้องทั้ง m ครั้ง จะได้สมการคือ

$$P = (1-\alpha)_1(1-\alpha)_2 \ldots\ldots (1-\alpha)_m$$

$$P = (1-\alpha)^m$$

ถ้าให้ P´ แทนโอกาสที่ไม่ยอมรับสมมติฐานสูญที่ถูกต้องทั้ง m ครั้ง หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง P´ ก็คือ โอกาสที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 อย่างน้อย 1 ครั้งในการทดสอบจำนวน m ครั้ง ดังนั้น

$$P' = 1 - P$$

$$P' = 1 - (1-\alpha)^m$$

นั่นคือ โอกาสที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 อย่างน้อยหนึ่งครั้งในการทดสอบ m ครั้งเท่ากับ $1-(1-\alpha)^m$ เมื่อ m คือ จำนวนการทดสอบหรือจำนวนการเปรียบเทียบ

สำหรับกรณีที่การเปรียบเทียบไม่เป็นอิสระต่อกันนั้น การคำนวนค่า P´จะยุ่งยากมาก แต่อย่างไรก็ตาม Harter (1957) และ Pearson และ Hartley (1942, 1943) ก็ได้แสดงให้เห็นว่าค่า P´ จะเพิ่มขึ้นเมื่อมีการทดสอบมากขึ้นหรือการเปรียบเทียบเพิ่มจำนวนขึ้น โดย $P' \leq 1-(1-\alpha)^m$ (Kirk 1982; 102)

เมื่อจำนวนการเปรียบเทียบมีมากขึ้นค่า P´ ก็จะเพิ่มมากขึ้นด้วย ดังการทดสอบการเปรียบเทียบที่ระดับนัยสำคัญ .05 โดยจำนวนการเปรียบเทียบเป็น 3, 6 และ 10 จะได้ P´ เท่ากับ .14, .26 และ .40 ตามลำดับ

ดังนั้น เมื่อการเปรียบเทียบมีจำนวนมากกว่าหนึ่งการเปรียบเทียบ การแปลความหมายของโอกาสการเกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 จากระดับนัยสำคัญจึงเป็นสิ่งที่สับสน เนื่องจากระดับนัยสำคัญหรืออัตราความคลาดเคลื่อนสามารถนิยามได้แตกต่างกันหลายแบบ จึงต้องกำหนดหน่วยมโนทัศน์ที่เกี่ยวกับอัตราความคลาดเคลื่อนแต่ละแบบโดยเฉพาะ ซึ่งกำหนดดังนี้

1. อัตราความคลาดเคลื่อนต่อการเปรียบเทียบ (Error rate per contrast) แทนด้วย α_{pc} หมายถึง โอกาสที่การเปรียบเทียบหนึ่งในจำนวนการเปรียบเทียบทั้งหมด จะมีนัยสำคัญผิด คำนวนได้จากสูตร

อัตราความคลาดเคลื่อนต่อการเปรียบเทียบ (α_{pc})

$$= \frac{\text{จำนวนการเปรียบเทียบที่มีนัยสำคัญผิด}}{\text{จำนวนการเปรียบเทียบทั้งหมด}}$$

2. อัตราความคลาดเคลื่อนต่อการทดลอง (Error rate per experiment) แทนด้วย α_{PE} หมายถึงค่าเฉลี่ยของจำนวนการเปรียบเทียบที่ผิดพลาดจากการทดลองทั้งหมด คำนวนได้จากสูตร

อัตราความคลาดเคลื่อนต่อการทดลอง (α_{PE})

$$= \frac{\text{จำนวนการเปรียบเทียบที่มีนัยสำคัญผิด}}{\text{จำนวนการทดลองทั้งหมด}}$$

3. อัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลอง (Error rate per experimentwise) แทนด้วย α_{EW} หมายถึงโอกาสที่การเปรียบเทียบอย่างน้อย 1 การเปรียบเทียบจะมีนัยสำคัญผิดในการทดลองทั้งหมด คำนวนได้จากสูตร

อัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลอง (α_{EW})

$$= \frac{\text{จำนวนการทดลองที่มีการเปรียบเทียบอย่างน้อย 1 การเปรียบเทียบที่มีนัยสำคัญผิด}}{\text{จำนวนการทดลองทั้งหมด}}$$

เมื่อเปรียบเทียบ α_{PE} กับ α_{EW} ค่า α_{EW} จะน้อยกว่า α_{PE} และค่า α_{PE} เป็นค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดในการทดลอง ในขณะที่ α_{EW} เป็นค่าความน่าจะเป็นที่การเปรียบเทียบอย่างน้อย 1 การเปรียบเทียบจะมีนัยสำคัญผิด ซึ่งถือว่า การทดสอบที่ผิดพลาดเพียงหนึ่งการเปรียบเทียบร้ายแรงพอ ๆ กับการทดสอบที่ผิดพลาดทั้งหมด

ในการทดลองที่มีการเปรียบเทียบทั้งที่เป็นอิสระและไม่เป็นอิสระต่อกันจำนวน m การเปรียบเทียบสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง α_{EW} และ α_{pc} ดังนี้

$$\alpha_{EW} \leq 1 - (1 - \alpha_{pc})^{m}$$

4. อัตราความคลาดเคลื่อนต่อครอบครัว และชุดครอบครัว (Error rate per family and familywise)

ในการทดลองที่มีตัวแปรอิสระหรือตัวแปรทดลอง 1 ตัว และหลายระดับการทดลอง (k > 2) จะใช้อัตราความคลาดเคลื่อนต่อการทดลอง หรืออัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองเป็นหน่วยมโนทัศน์ สำหรับการทดลองที่มีตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว และหลายระดับการทดลอง (k > 2) นั้น จะใช้หน่วยมโนทัศน์ของอัตราความคลาดเคลื่อนเป็นครอบครัว หรือชุดครอบครัว กล่าวคือ กำหนดว่าครอบครัวหนึ่ง ๆ นั้นประกอบไปด้วยการเปรียบเทียบที่ผู้วิจัยสนใจทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรอิสระหรือทรีทเมนต์ และปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ เช่น การทดลองแบบแฟคทอเรียลที่มีตัวแปรอิสระ 2 ตัว คือ A และ B กำหนดได้ 3 ครอบครัวคือ ครอบครัวที่ 1 เป็นชุดการเปรียบเทียบที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร A ครอบครัวที่ 2 เป็นการเปรียบเทียบที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร B และครอบครัวที่ 3 เป็นการเปรียบเทียบที่เกี่ยวข้องกับปฏิสัมพันธ์ AB เป็นต้น สำหรับอัตราความคลาดเคลื่อนต่อครอบครัว และอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดครอบครัว ในแต่ละการทดลองกำหนดดังนี้

อัตราความคลาดเคลื่อนต่อครอบครัว (α_{PE})

$$= \frac{\text{จำนวนการเปรียบเทียบที่มีนัยสำคัญผิด}}{\text{จำนวนของครอบครัวทั้งหมด}}$$

อัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดครอบครัว (α_{FW})

$$= \frac{\text{จำนวนครอบครัวที่มีการเปรียบเทียบอย่างน้อย 1 การเปรียบเทียบที่มีนัยสำคัญผิด}}{\text{จำนวนของครอบครัวทั้งหมด}}$$

ในการทดสอบนัยสำคัญการเปรียบเทียบพหุคูณนั้น อันดับแรกผู้ทดลองควรจะกำหนดหน่วยมโนทัศน์ของอัตราความคลาดเคลื่อนที่เหมาะสม จากนั้นจึงเลือกใช้สถิติทดสอบหรือวิธีเปรียบเทียบพหุคูณที่สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนในหน่วยมโนทัศน์ที่กำหนดนั้น (Steel 1961 : 327-328) สำหรับการกำหนดหน่วยมโนทัศน์ของอัตราความคลาดเคลื่อนแต่ละแบบนั้น Kirk (1982 : 102-105) กล่าวว่ามันเป็นการยากที่จะกำหนดลงไปเฉพาะหน่วยอัตราความคลาดเคลื่อนแบบใดแบบหนึ่ง ขึ้นอยู่กับว่าผู้ทดลองสนใจการเปรียบเทียบลักษณะใดบ้างในการทดลองนั้น ถ้าสนใจการเปรียบเทียบแบบอิสระภายแรก (priori orthogonal contrasts) มักจะนิยมใช้การเปรียบเทียบเป็นหน่วยมโนทัศน์หรือแปลความหมายของระดับนัยสำคัญด้วยอัตราความคลาดเคลื่อนต่อการเปรียบเทียบ ทั้งนี้เนื่องจากการเปรียบเทียบแบบอิสระภายแรกนั้นเสมือนกับว่าเป็นการแบ่งข้อมูลมาทดสอบแต่ละส่วนโดยไม่ซ้ำซ้อนกัน ซึ่งข้อสนเทศ (information) ที่ได้แต่ละส่วนก็จะเป็นอิสระต่อกันด้วย และถ้าสนใจการเปรียบเทียบทั้งที่เป็นอิสระและไม่เป็นอิสระต่อกัน ซึ่งอาจทดสอบได้ทั้งภายแรกหรือภายหลังจะนิยมใช้การทดลองเป็นหน่วยมโนทัศน์หรือแปลความหมายของระดับนัยสำคัญด้วยอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลอง ทั้งนี้เนื่องจากการเปรียบเทียบที่ไม่เป็นอิสระต่อกันนั้นเป็นข้อมูลที่ซ้ำซ้อนกัน (redundant) ผลการทดสอบการเปรียบเทียบหนึ่งจะไม่เป็นอิสระจากการเปรียบเทียบอื่น ๆ ในชุดนั้น

โดยทั่วไปงานวิจัยจะสนใจการเปรียบเทียบที่ไม่เป็นอิสระต่อกันมากกว่าการเปรียบเทียบที่เป็นอิสระต่อกันทั้งหมด ดังนั้นสถิติทดสอบหรือวิธีเปรียบเทียบพหุคูณที่ใช้กันจะเป็นวิธีที่สร้างขึ้นเพื่อควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลอง (Ryan 1959 cited by Davis 1969: 441)

2. <u>การแจกแจงที่เกี่ยวข้องกับวิธีเปรียบเทียบพหุคูณ</u>

เนื่องจากการแจกแจงค่าสถิติไคสแควร์ของมาร์ซูโล ประมาณด้วยการแจกแจงไคสแควร์ และค่าสถิติทีของสถิติบอนเฟอโรนีที และวิธีของทัมฮานน์มีการแจกแจงแบบที ในส่วนนี้จะเสนอการแจกแจงไคสแควร์และการแจกแจงที ตามลำดับ

2.1 การแจกแจงไคสแควร์ (Chi-Square Distribution)

ER. Helmert นักฟิสิกส์ชาวเยอรมันเป็นผู้พบคนแรกในปี ค.ศ. 1876 ต่อมา Karl Pearson นักสถิติชาวอังกฤษเป็นผู้พัฒนาขึ้นในปี ค.ศ. 1900 ที่มาของการแจกแจงไคสแควร์เกี่ยวข้องกับการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน กล่าวคือ ถ้าสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่มีลักษณะการแจกแจงแบบปกติ มีมัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 โดยสุ่มมาครั้งละ 1 แต่ละครั้งยกกำลังสอง จะได้ว่าการแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างเป็นการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีชั้นความเป็นอิสระ (degrees of freedom) เท่ากับ 1 นั่นคือ ถ้าให้ Z_1, Z_2, $Z_3, \ldots, Z_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน มีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 0 ความแปรปรวนเท่ากับ 1 แล้วจะได้การแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 1 คือ

$$\chi_1^2 = Z^2$$

จากวิธีการเช่นเดียวกับข้างต้นถ้าสุ่มตัวอย่างมา 2 ครั้ง และตัวอย่างที่สุ่มมาแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน จะได้การแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 2 คือ

$$\chi_2^2 = Z_1^2 + Z_2^2$$

โดยวิธีการทำนองเดียวกัน ถ้าสุ่มตัวอย่างมา n ครั้ง ซึ่งเป็นอิสระต่อกันจะได้ผลรวมของ Z^2 มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ n คือ

$$\chi_n^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2$$

อาจกำหนดรูปทั่วไปของการแจกแจงแบบไคสแควร์ เมื่อกลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่แจกแจงแบบปกติมีมัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 โดยกำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันดังนั้น

$$\chi_n^2 = \left[\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right]^2 + \left[\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right]^2 + \ldots + \left[\frac{x_n - \mu}{\sigma}\right]^2$$

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right]^2$$

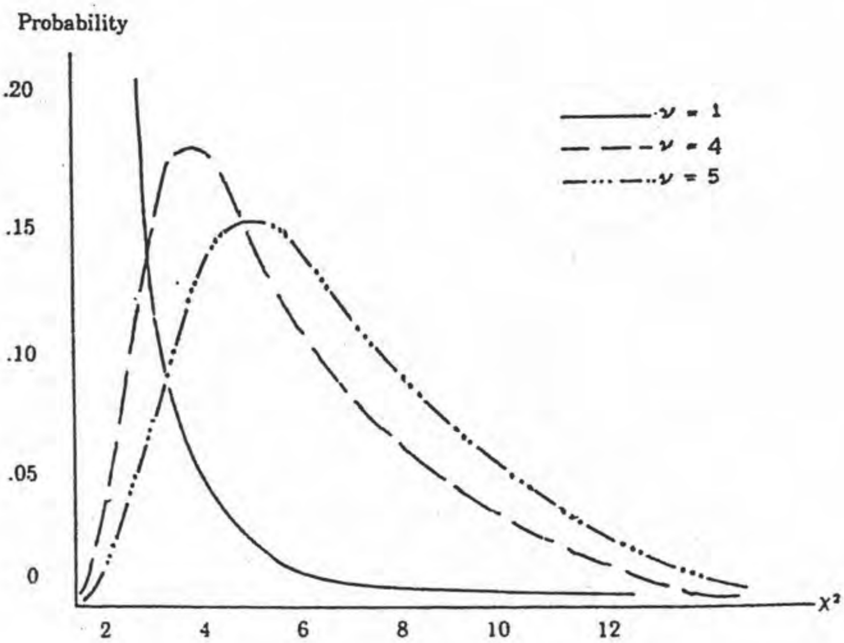
2.1.1 <u>ฟังก์ชันการแจกแจงของไคสแควร์</u>

การแจกแจงแบบไคสแควร์ เป็นรูปแบบหนึ่งของการแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) ฟังก์ชันการแจกแจงของไคสแควร์สามารถกำหนดในรูปของฟังก์ชันแกมม่าดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/z}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \circ x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} , \quad X > 0$$

เมื่อ Γ คือฟังก์ชันแกมม่า

จากฟังก์ชันข้างต้น เราเรียกว่าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่ชั้นความเป็นอิสระ (degrees of freedom) เท่ากับ n แทนด้วยสัญลักษณ์ χ^2_n ถ้าพิจารณาค่าของฟังก์ชันจะพบว่า ค่าของฟังก์ชั่นขึ้นอยู่กับค่า n หรือขนาดชั้นความเป็นอิสระ ดังนั้นการแจกแจงไคสแควร์จะแต่กต่างกัน เมื่อขนาดชั้นความเป็นอิสระแตกต่างกัน



แผนภาพที่ 1 เปรียบเทียบการแจกแจงไคสแควร์ที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 1, 4 และ 5

2.1.2 คุณสมบัติของไคสแควร์

1. การแจกแจงของไคสแควร์ความทฤษฎีเป็นการแจกแจงที่ต่อเนื่อง
2. ความโค้งจะเริ่มจาก 0 ถึง ∞
3. ค่าออร์ดิเนตสูงสุด จะอยู่ที่ $\chi^2 = n-1$ โดยที่ n คือชั้นความเป็นอิสระ
4. ลักษณะของส่วนโค้งจะเบ้ไปทางขวามือ
5. มีลักษณะเป็นส่วนโค้งของ Pearson ชนิดที่ 3 (Pearson Type III curve)
6. สำหรับการแจกแจงของไคสแควร์เมื่อชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ n จะมีลักษณะดังนี้
   6.1 ค่าเฉลี่ยเท่ากับ n และความแปรปรวนเท่ากับ 2n
   6.2 ฐานนิยม (mode) เท่ากับ n-2 เมื่อ n > 2
   6.3 ค่าความเบ้ (Skewness) เท่ากับ $\sqrt{8/n}$
   6.4 เมื่อ n มีค่ามากขึ้นการแจกแจงไคสแควร์จะเข้าใกล้การแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ n และความแปรปรวนเท่ากับ 2n

2.1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงไคสแควร์กับการแจกแจงเอฟ

การแจกแจงเอฟเกี่ยวข้องกับการแจกแจงไคสแควร์ เนื่องจากการแจกแจงเอฟได้จากสัดส่วนของไคสแควร์ 2 ค่าที่เป็นอิสระต่อกัน โดยที่แต่ละค่าของไคสแควร์นั้นจะถูกหารด้วยขนาดของชั้นความเป็นอิสระ นั่นคือ ถ้าให้ U_1 และ U_2 เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยขนาดชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ n_1 และ n_2 ตามลำดับ ดังนั้นเราจะได้ว่า Fn_1, n_2 มีการแจกแจงแบบเอฟที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ n_1 และ n_2 โดยที่ Fn_1, n_2 กำหนดดังนี้

$$Fn_1, n_2 = \frac{U_1/n_1}{U_2/n_2}$$

เมื่อให้ n_2 เพิ่มมากขึ้นไม่จำกัดจะได้ $\lim_{n_2 \to \infty} U_2/n_2 = 1$ ซึ่งแสดงได้โดยพิจารณาจากค่า $E(U_2/n_2)$ และ $Var(U_2/n_2)$

พิจารณา

$$E(U_2/n_2) = \frac{1}{n_2}.E(U_2)$$

$$= \frac{1}{n_2}.n_2$$

$$E(U_2/n_2) = 1$$

$$Var(U_2/n_2) = \frac{1}{n_2^2}.\ Var(U_2)$$

$$= \frac{1}{n_2^2}.\ 2n_2$$

$$= \frac{2}{n_2}$$

ดังนั้นเมื่อ n_2 มากขึ้นแล้ว $Var(U_2/n_2)$ จะเข้าใกล้ 0 และ U_2/n_2 จะเข้าใกล้ 1 นั่นคือ

$$F\ n_1,\ n_2 = \frac{U_1/n_1}{U_2/n_2}$$

$$F\ n_1,\ \infty = \frac{U_1/n_1}{1}$$

$$= U_1/n_1$$

$$= \frac{\chi^2_{n_1}}{n_1}$$

นั่นคือเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่แล้ว $\chi^2_{n_1} \approx n_1\ F\ n_1,\ \infty$ เช่น $\chi^2_{15}(.95)= 25.0$

ในขณะที่ $15\ F\ 15,\ \infty\ \ (.95) = 15(1.67) \approx 25.0$

2.2 <u>การแจกแจงที</u> (t-distribution)

W.S. Gosset เป็นผู้ค้นพบการแจกแจงที (Student's t-distribution) ในปี ค.ศ. 1908 โดยใช้นามปากกาว่า 'Student' ที่มาของการแจกแจงที เกี่ยวข้องกับการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานและไคสแควร์ กล่าวคือ ถ้าสุ่มตัวอย่างมาครั้งละหนึ่ง จำนวน 2 ครั้ง และตัวอย่างที่สุ่มมาแต่ละครั้ง เป็นอิสระต่อกัน โดยตัวอย่างที่สุ่มในครั้งแรก มาจากประชากรที่แจกแจงแบบปกติ มีมัชฌิม เลขคณิต เท่ากับ 0 และความแปรปรวน เท่ากับ 1 และตัวอย่างที่สุ่ม

ในครั้งหลัง มาจากประชากรที่แจกแจงแบบไคสแควร์ ที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 1 หลังจากนั้นหาค่าที (t) ซึ่งได้จากอัตราส่วนระหว่างตัวอย่างที่สุ่มมาในครั้งแรกกับรากที่สองของผลหารระหว่างตัวอย่างที่สุ่มมาในครั้งหลังและขนาดชั้นความเป็นอิสระจะได้ว่า การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างที่กำหนดด้วยค่าที (t) มีการแจกแจงแบบที ที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 1 นั่นคือ ถ้าให้ Z เป็นตัวแปรสุ่มสำหรับการแจกแจงแบบปกติ มีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 และให้ U_1 เป็นตัวแปรสุ่มสำหรับการแจกแจงไคสแควร์ ที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 1 แล้วจะได้การแจกแจงทีที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 1 คือ

$$t_1 = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U_1}{1}}}$$

จากวิธีการเช่นเดียวกับข้างต้น ถ้าตัวอย่างที่สุ่มในครั้งหลังมาจากประชากรที่แจกแจงแบบไคสแควร์ที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 2 และให้ U_2 เป็นตัวแปรสุ่มสำหรับการแจกแจงไคสแควร์ ที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 2 จะได้การแจกแจงที ที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 2 คือ

$$t_2 = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U_2}{2}}}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าตัวอย่างที่สุ่มในครั้งหลังมาจากประชากรที่แจกแจงแบบไคสแควร์ที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ n และให้ U_n เป็นตัวแปรสุ่มสำหรับการแจกแจงไคสแควร์ที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ n จะได้การแจกแจงที ที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ n คือ

$$t_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U_n}{n}}}$$

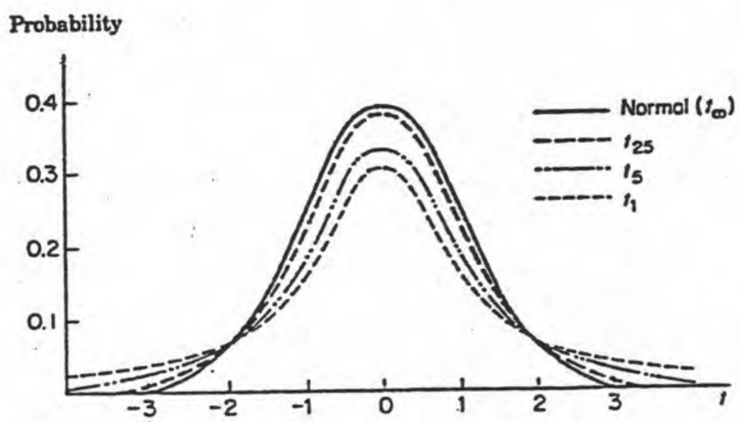
2.2.1 ฟังก์ชันการแจกแจงที

การแจกแจงแบบที ที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับn มีฟังก์ชันอธิบายการแจกแจงดังนี้

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) . \sqrt{n\pi}} . \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} , \; -\infty < t < \infty$$

เมื่อ t เป็นตัวแปรสุ่ม และ Γ คือ ฟังก์ชันแกมมา

จากฟังก์ชันการแจกแจงที จะพบว่าค่าของฟังก์ชันขึ้นอยู่กับค่า n หรือชั้นความเป็นอิสระ ดังนั้นโค้งการแจกแจงแบบที จะแตกต่างกันเมื่อชั้นความเป็นอิสระแตกต่างกัน และถ้า n มีค่ามากขึ้น การแจกแจงทีจะเข้าใกล้การแจกแจงปกติ



แผนภาพที่ 2 เปรียบเทียบการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานกับการแจกแจงที เมื่อชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 1, 5 และ 25

2.2.2 <u>คุณสมบัติการแจกแจงที</u>

1. มีลักษณะสมมาตร

2. ค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และฐานนิยมมีค่าเท่ากับ 0

3. ความแปรปรวนเท่ากับ $n/(n-2)$ เมื่อ n คือชั้นความเป็นอิสระ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจะมีค่ามากกว่า 1 เล็กน้อย และเมื่อ n มีค่ามากความแปรปรวนจะเข้าใกล้ 1

4. ถ้า n มีค่ามากขึ้นการแจกแจงจะเข้าใกล้การแจกแจงแบบปกติ

5. $\alpha t_n = (1-\alpha) t_n$

3. การทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยแบบ 2 กลุ่ม

3.1 การทดสอบที (t-test)

W.S. Gosset เป็นผู้สร้างสถิติทดสอบนี้ขึ้นมาเมื่อ ค.ศ. 1908 พร้อมกับการค้นพบการแจกแจงที และ R.A. Fisher เป็นผู้เน้นบทบาทของสถิติทดสอบนี้

3.1.1 ข้อตกลงเบื้องต้น (Marascuilo 1971: 323)

1. กลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่แจกแจงแบบปกติ

2. กลุ่มตัวอย่างทั้งสองเป็นอิสระต่อกัน (ในกรณีของ independent)

3. ไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากรแต่ละกลุ่ม

4. ความแปรปรวนของประชากรแต่ละกลุ่มเท่ากัน

3.1.2 การคำนวณค่าทดสอบ

ถ้าให้ $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ และ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรสองกลุ่มซึ่งมีลักษณะการแจกแจงแบบปกติ จะคำนวณค่าทีได้จากสูตร

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}{(n_1+n_2-2)} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

โดยที่ $\Sigma x^2 = \Sigma (X - \bar{X})^2$

$\Sigma y^2 = \Sigma (Y - \bar{Y})^2$

ค่าสถิติทีจะมีการแจกแจงแบบที ด้วยขนาดชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ n_1+n_2-2

3.2 เทคนิคของ Welch (Welch's technique)

Welch (1938: 350-362) ได้แสดงให้เห็นว่าการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร 2 กลุ่ม ด้วยสถิติทดสอบที (t-test) ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ตามที่กำหนด เมื่อความแปรปรวนของประชากรแตกต่างกัน Welch จึงได้เสนอวิธีการทดสอบแทนการทดสอบที

3.2.1 ข้อตกลงเบื้องต้น (Marascuilo 1971: 323)

1. กลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่แจกแจงแบบปกติ

2. กลุ่มตัวอย่างทั้งสอง เป็นอิสระต่อกัน

3. ไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากรแต่ละกลุ่ม

3.2.2 การคำนวณค่าทดสอบ

ถ้าให้ $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ และ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรสองกลุ่มซึ่งมีลักษณะการแจกแจงแบบปกติ คำนวณค่า t' ได้จากสูตร

$$t' = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n_1(n_1-1)} + \frac{\Sigma y^2}{n_2(n_2-1)}}}$$

โดยที่ $\Sigma x^2 = \Sigma(X - \bar{X})^2$

$\Sigma y^2 = \Sigma(Y - \bar{Y})^2$

การแจกแจงของค่าสถิติ t' จะประมาณได้ด้วยการแจกแจงทีที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ ν' ซึ่งกำหนดดังนี้

$$\nu' = \frac{\left(\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_x^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_y^4}{n_2^2(n_2-1)}}$$

4. วิธีเปรียบเทียบพหุคูณ

4.1 สถิติบอนเฟอโรนีที

ผู้ริเริ่มวิธีการทดสอบนี้ไม่ทราบแน่ชัด แต่ในปี ค.ศ. 1961 Olive Jean Dunn ได้ตรวจสอบคุณสมบัติวิธีการทดสอบนี้ พร้อมกับได้สร้างตารางสำหรับใช้ในการทดสอบวิธีนี้โดยเฉพาะ ผลงานของ Dunn ทำให้วิธีการทดสอบนี้เป็นที่รู้จักกันแพร่หลาย ต่อมานักสถิติบางคน

เรียกการทดสอบนี้ว่า วิธีของดันน์ (Kirk 1982: 106) หรือวิธีบอนเฟอโรนี-ดันน์ (Stavig 1981: 40) หรือวิธีดันน์-บอนเฟอโรนี (Marascuilo and McSweeney 1971: 29)

สถิติบอนเฟอโรนีที เป็นวิธีเปรียบเทียบพหุคูณที่ใช้การทดสอบทีหลาย ๆ ครั้ง (multiple t-test) และใช้อสมการบอนเฟอโรนี (Bonferroni Inequality) ในการควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลอง (experimentwise error rate) ที่เพิ่มขึ้นตามจำนวนครั้งหรือจำนวนการทดสอบนั้น ไม่ให้มากกว่าอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุหรือระดับนัยสำคัญที่ทดสอบ (α) ซึ่งวิธีของอสมการบอนเฟอโรนีนั้น จะใช้วิธีแบ่งระดับนัยสำคัญที่ทดสอบให้กับการทดสอบแต่ละครั้ง อาจแบ่งเท่ากันหรือแตกต่างกันก็ได้ และเมื่อรวมระดับนัยสำคัญที่ใช้ในการทดสอบแต่ละครั้งจะได้เท่ากับระดับนัยสำคัญที่ระบุ (α) ในขณะเดียวกันอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองก็จะไม่มากกว่าอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุด้วย

4.1.1 <u>อสมการบอนเฟอโรนี</u> (Bonferroni Inequality)

อสมการบอนเฟอโรนี กำหนดว่า สำหรับเหตุการณ์จำนวน m เหตุการณ์ใด ๆ มีเหตุการณ์อย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นด้วยโอกาส น้อยกว่าหรือเท่ากับ ผลรวมของโอกาสที่เหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์จะเกิดขึ้น โดยที่เหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์ไม่จำเป็นต้องเป็นอิสระต่อกัน ซึ่งแสดงได้ด้วยอสมการดังนี้

$$P(E_1 \text{ or } E_2 \text{ or } \ldots \; E_m) \leq P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_m)$$

เมื่อ $E_1, E_2, \ldots, E_m$ คือเหตุการณ์ที่ 1, 2, ... , m ตามลำดับ

สำหรับในการทดสอบนัยสำคัญของการเปรียบเทียบพหุคูณที่มีจำนวนการเปรียบเทียบ (Contrast) m การเปรียบเทียบจะใช้อสมการบอนเฟอโรนี โดยให้แต่ละการเปรียบเทียบแทนด้วย $E_1, E_2, \ldots, E_m$ ตามลำดับ ให้โอกาสที่เกิดขึ้นจริงของ $E_1, E_2, \ldots, E_m$ เท่ากับ $P_1, P_2, \ldots, P_m$ ตามลำดับ และถ้าทดสอบนัยสำคัญของ $E_1, E_2, \ldots, E_m$ ที่ระดับ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ตามลำดับ เราจะได้ว่า ภายใต้สมมติฐานศูนย์ E_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) จะเกิดขึ้นเมื่อ $P_j \leq \alpha_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) นั่นคือ เราแทนอสมการบอนเฟอโรนีดังนี้

$$P(P_1 \le \alpha_1 \text{ or } P_2 \le \alpha_2 \text{ or} \ldots P_m \le \alpha_m) \le P(P_1 \le \alpha_1) + P(P_2 \le \alpha_2) + \ldots + P(P_m \le \alpha_m)$$

$$P(P_j \text{อย่างน้อยหนึ่งค่า} \le \alpha_j) \le P(P_1 \le \alpha_1) + P(P_2 \le \alpha_2) + \ldots + P(P_m \le \alpha_m)$$

ภายใต้สมมติฐานสูญค่า P_j จะมีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มมีค่าระหว่าง 0 และ 1 และจะได้ $P(P_j \le \alpha_j) = \alpha_j$ ดังนั้น

$$P(P_j \text{ อย่างน้อยหนึ่งค่า} \le \alpha_j) \le \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$$

พิจารณา $P(P_j$ อย่างน้อยหนึ่งค่า $\le \alpha_j)$ ก็คือ อัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลอง หรือแทนด้วย α_{EW} ดังนั้นอสมการคือ

$$\alpha_{EW} \le \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$$

$$\alpha_{EW} \le \sum_{j=1}^{m} \alpha_j$$

นั่นคือ อสมการกำหนดว่า สำหรับการเปรียบเทียบที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่เป็นอิสระต่อกัน อัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองจะน้อยกว่าหรือเท่ากับ ผลรวมของอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุในแต่ละการเปรียบเทียบ

4.1.2 <u>การควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองด้วยอสมการบอนเฟอโรนี</u>

จากอสมการบอนเฟอโรนี

$$\alpha_{EW} \le \sum_{j=1}^{m} \alpha_j$$

ถ้ากำหนดอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุในการทดสอบการเปรียบเทียบทั้งหมดที่ระดับ α และต้องการให้ $\alpha_{EW} \le \alpha$ ดังนั้นจะกำหนดเกณฑ์การแบ่งอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุ (α) ให้แต่ละการเปรียบเทียบตามอสมการของบอนเฟอโรนี นั่นคือกำหนดให้

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \alpha$$

ถ้ากำหนดให้ทุกการเปรียบเทียบถูกทดสอบที่ระดับนัยสำคัญเท่ากันคือ α_0 ดังนั้น

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_0 = \alpha$$

$$m.\alpha_0 = \alpha$$

$$\alpha_0 = \alpha/m$$

นั่นคือ กรณีที่แบ่งอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุให้เท่ากันทุกการเปรียบเทียบ แต่ละการเปรียบเทียบจะถูกทดสอบที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ $\frac{\alpha}{m}$

เมื่อกำหนดให้แต่ละการเปรียบเทียบถูกทดสอบที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ α/m นั้น สามารถแสดงให้เห็นว่าอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองจะน้อยกว่าหรือเท่ากับอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุ (α) ดังนี้

จากความสัมพันธ์ระหว่าง α_{EW} กับ α_0 สำหรับการเปรียบเทียบที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่เป็นอิสระต่อกันกำหนดดังนี้

$$\alpha_{EW} \leq 1 - (1 - \alpha_0)^m$$

แทนค่า $\alpha_o = \alpha/m$;

$$\alpha_{EW} \leq 1 - (1 - \alpha/m)^m$$

พิจารณา $1-(1 - \alpha/m)^m = 1- \left[1-m\left(\frac{\alpha}{m}\right) + \binom{m}{2}\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - \dots -\left(\frac{\alpha}{m}\right)^m\right]$

สำหรับค่า α มักจะเป็นค่าน้อย ๆ เช่น .10, .05 หรือ .01 ดังนั้น $\left(\frac{\alpha}{m}\right)^j$ เมื่อ $j > 1$ มีค่าเข้าใกล้ 0

เพราะฉะนั้น $1-(1-\alpha/m)^m = 1 - \left[1 - m\left(\frac{\alpha}{m}\right)\right]$

$$= 1 - (1 - \alpha)$$

$$= \alpha$$

ดังนั้น $\alpha_{EW} \leq \alpha$

นั่นคือ เมื่อกำหนดอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุในการทดสอบการเปรียบเทียบจำนวน m การเปรียบเทียบที่ระดับ α และแบ่งอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุให้ทุกการเปรียบเทียบเท่ากัน ตามเกณฑ์กำหนดในอสมการบอนเฟอโรนี คือ แต่ละการเปรียบเทียบถูกทดสอบที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ α/m แล้วจะทำให้อัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองไม่มากกว่าอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุ

4.1.3 ช่วงความเชื่อมั่นของสถิติบอนเฟอโรนีที

เนื่องจากสถิติบอนเฟอโรนีที กำหนดการควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองด้วยอสมการบอนเฟอโรนี คือ ใช้วิธีการแบ่งระดับนัยสำคัญที่ทดสอบหรืออัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุให้แต่ละการเปรียบเทียบ ถ้าจำนวนการเปรียบเทียบมีมากระดับนัยสำคัญที่ทดสอบแต่ละการเปรียบเทียบจะน้อย ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นของสถิติบอนเฟอโรนีจึงขึ้นอยู่กับจำนวนการเปรียบเทียบ ถ้าการเปรียบเทียบมีมากช่วงความเชื่อมั่นจะกว้างขึ้น ถ้าจำนวนการเปรียบเทียบมีน้อยช่วงความเชื่อมั่นจะแคบ และอำนาจการทดสอบจะสูง สถิติบอนเฟอโรนีที จึงเหมาะที่จะใช้สำหรับการเปรียบเทียบภายแรก ซึ่งสนใจการเปรียบเทียบจำนวนน้อย สำหรับช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ $1 - \alpha$ เมื่อกำหนดการแบ่งระดับนัยสำคัญเท่ากันทุกการเปรียบเทียบกำหนดดังนี้

$$\hat{\Psi}_i \pm t_{\alpha/2m,\, N-K} \sqrt{MSW \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{C_{ij}^2}{n_j} \right)}$$

(Morrison 1976 : 33)

$\hat{\Psi}_i$ = การเปรียบเทียบที่ i

N = ค่าสังเกตทั้งหมดของกลุ่มตัวอย่าง

K = จำนวนกลุ่มตัวอย่าง

m = จำนวนการเปรียบเทียบ

$t_{\alpha/2m,\, N-K}$ = ค่าที่อ่านจากตารางบอนเฟอโรนีที

MSW = ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

C_{ij} = น้ำหนักของมัชฌิมเลขคณิตกลุ่มที่ j ในการเปรียบเทียบที่ i

n_j = จำนวนค่าสังเกตในกลุ่มตัวอย่างที่ j

4.1.4 <u>ข้อตกลงเบื้องต้น</u> (Kirk 1982 : 96)

1. กลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่แจกแจงแบบปกติหรือกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่
2. กลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มเป็นอิสระต่อกัน
3. ความแปรปรวนของประชากรแต่ละกลุ่มเท่ากัน
4. การแจกแจงค่าสถิติทดสอบอยู่บนพื้นฐานของสมมติฐานที่เป็นจริง (true null hypothesis)

4.1.5 <u>การคำนวณเพื่อใช้สำหรับการเปรียบเทียบรายคู่</u>

หลังจากคำนวณหาความแตกต่างของค่าเฉลี่ยรายคู่ แล้วนำความแตกต่างของค่าเฉลี่ยรายคู่ไปเปรียบเทียบกับค่าวิกฤต สำหรับค่าวิกฤตเมื่อจำนวนการเปรียบเทียบรายคู่มี m คู่ และแบ่งระดับนัยสำคัญเท่ากันทุกการเปรียบเทียบ คำนวณได้ดังนี้

$$B = t_{\alpha/2m,\ N-K} \cdot \sqrt{MSW\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{C_{ij}^2}{n_j}\right)}$$

ผลต่างของค่าเฉลี่ยรายคู่แต่ละคู่จะมีนัยสำคัญก็ต่อเมื่อ ผลต่างค่าเฉลี่ยรายคู่นั้นมีค่ามากกว่า B

4.1.6 <u>ตารางของสถิติบอนเฟอโรนีที</u>

ก่อนจะมีการสร้างตารางเฉพาะของสถิติบอนเฟอโรนีที จะใช้ตารางการแจกแจงที ในกรณีที่ α มีขนาดเล็กมาก ๆ ซึ่งไม่มีในตาราง นักสถิติเสนอแนะให้ใช้วิธีประมาณค่าสูตรของ Preiser (1943) ซึ่งกำหนดดังนี้ (Scheffé 1959 : 80)

$$t_{\alpha}, \nu = Z_{\alpha} + \frac{1}{4\nu}[Z_{\alpha}^3 + Z_{\alpha}]$$

เมื่อ Z_{α} เป็นค่าที่ได้จากตารางการแจกแจงแบบปกติ N(0, 1)

ปี ค.ศ. 1961 Dunn ได้สร้างตารางขึ้นเฉพาะของสถิติบอนเฟอโรนีที เมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญเท่ากันทุกการเปรียบเทียบตารางของ Dunn กำหนด α = .05 และ .01 เมื่อจำนวนการเปรียบเทียบเท่ากับ 2(1) 10(5)50, 100, 250

ปี ค.ศ. 1965 Dunn และ Massey ได้สร้างตารางขยายจากของ Dunn (1961) โดยเพิ่มจำนวนระดับนัยสำคัญที่ทดสอบให้มีมากขึ้นคือ .01, .025, .05, .10 และ .50

ปี ค.ศ. 1973 Dayton และ Schafer ได้สร้างตารางทั้งกรณีที่กำหนดให้ทุกการเปรียบเทียบมีนัยสำคัญเท่ากัน และแตกต่างกัน โดยกำหนด α เท่ากับ .05 และ .01 กำหนดค่าวิกฤตตามจำนวนการเปรียบเทียบและชั้นความเป็นอิสระ

ปี ค.ศ. 1977 Bailey (1977 : 469-478) เสนอแนะว่าตารางที่สร้างขึ้นมาก่อนทั้งหมดนั้น กำหนดค่าที (t) เป็นทศนิยมเพียง 2 ตำแหน่งทำให้ค่าทีที่ประมาณได้นั้นคลาดเคลื่อนมาก Bailey ได้สร้างตารางขึ้นใหม่ในระดับ α = .05 และ .01 โดยค่าทีกำหนดตามจำนวนการเปรียบเทียบและค่าชั้นความเป็นอิสระ ค่าทีจากตารางนี้กำหนดทศนิยม 4 ตำแหน่ง

4.2 <u>ไคสแควร์ของมาร์ชูโล</u> (Marascuilo's χ^2)

L.A. Marascuilo เป็นผู้เสนอขึ้นในปี ค.ศ. 1966 โดยให้ชื่อว่า การเปรียบเทียบพหุคูณกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ (Large Sample Multiple Comparisons) พื้นฐานการสร้างวิธีนี้อาศัยความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงเอฟและไคสแควร์ คือ เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่หรือค่าชั้นความเป็นอิสระตัวที่ 2 ในการแจกแจงเอฟมีค่ามากแล้ว $n_1 F_{n_1, \infty}$ จะมีค่าใกล้เคียงกับ $\chi^2_{n_1}$ Marascuilo ได้นำความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ ไปสร้างวิธีเปรียบเทียบพหุคูณ โดยใช้แนวคิดเดียวกับทฤษฎีของ Scheffé และใช้การแจกแจงไคสแควร์ ที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ K-1 (K หมายถึงจำนวนกลุ่มตัวอย่าง) แทนการแจกแจงเอฟในวิธีของ Scheffé

ไคสแควร์ของมาร์ชูโล เป็นวิธีที่ใช้สำหรับการเปรียบเทียบภายหลังใช้ได้กับการเปรียบเทียบที่เป็นรายคู่ และไม่เป็นรายคู่ ทั้งกรณีกลุ่มตัวอย่างเท่ากันและแตกต่างกัน

4.2.1 <u>ช่วงความเชื่อมั่นไคสแควร์ของมาร์ชูโล</u>

วิธีนี้กำหนดช่วงความเชื่อมั่นสำหรับการเปรียบเทียบที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ระดับความเชื่อมั่น 1-α กำหนดช่วงความเชื่อมั่นดังนี้

$$\hat{\Psi}_i \pm \sqrt{\chi^2_{K-1,\ (1-\alpha)}} \cdot \sqrt{\Sigma\, C^2_{ij}\left(\frac{S^2_j}{n_j}\right)}$$

$\hat{\Psi}_i$ = การเปรียบเทียบที่ i

K = จำนวนกลุ่มตัวอย่าง

$\chi^2_{K-1,(1-\alpha)}$ = ค่าที่อ่านจากตารางไคสแควร์

C_{ij} = น้ำหนักของมัชฌิมเลขคณิตกลุ่มที่ j ในการเปรียบเทียบที่ i

S^2_j = ความแปรปรวนของค่าสังเกตในกลุ่มที่ j

n_j = จำนวนค่าสังเกตในกลุ่มตัวอย่างที่ j

4.2.2 ข้อตกลงเบื้องต้น

1. ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติหรือกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่
2. กลุ่มตัวอย่างได้รับการสุ่มจากประชากร
3. กลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มเป็นอิสระต่อกัน

4.2.3 การคำนวณสำหรับการเปรียบเทียบรายคู่

หลังจากหาค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยรายคู่ แล้วนำค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยรายคู่แต่ละคู่ ไปเปรียบเทียบกับค่าวิกฤต ซึ่งคำนวณดังนี้

$$M = \sqrt{\chi^2_{K-1,(1-\alpha)}} \cdot \sqrt{\frac{S^2_1}{n_1} + \frac{S^2_2}{n_2}}$$

ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยรายคู่จะมีนัยสำคัญเมื่อค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยรายคู่นั้นมากกว่า M

4.2.4 ตารางสำหรับไคสแควร์ของมาร์ชูโล

ตารางที่ใช้สำหรับวิธีการเปรียบเทียบพหุคูณนี้ ใช้ตารางไคสแควร์ซึ่งปรากฏในหนังสือสถิติมาตรฐานทุกเล่ม

4.3 วิธีของทัมฮานน์

เป็นวิธีเปรียบเทียบพหุคูณที่ใช้ในการเปรียบเทียบภายหลังสำหรับการเปรียบเทียบรายคู่ทั้งหมด A.C Tamhane เป็นผู้พัฒนาขึ้นในปี ค.ศ. 1977 พื้นฐานการสร้างวิธีทดสอบนี้คล้ายคลึงกับสถิติบอนเฟอโรนีที คือใช้วิธีทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยแบบ 2 กลุ่ม ในลักษณะเดียวกันกับการทดสอบที หลาย ๆ ครั้ง และใช้วิธีแบ่งอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุ ให้กับการทดสอบแต่ละครั้ง เพื่อควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองไม่ให้มากกว่าอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุ สำหรับวิธีของทัมฮานน์นี้จะใช้การทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยรายคู่ด้วยเทคนิคของ Welch (1938) เพื่อให้ใช้ได้เมื่อความแปรปรวนของประชากรแตกต่างกัน และใช้อสมการผลคูณของ Šidák (Šidák's multiplicative inequality) เป็นเกณฑ์กำหนดในการแบ่งอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุให้แต่ละการเปรียบเทียบ เพื่อควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองไม่ให้มากกว่าอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุ

ในปี ค.ศ. 1979 Tamhane ได้ปรับปรุงวิธีการคิดคำนวณค่าชั้นความเป็นอิสระให้ง่ายขึ้น โดยเปลี่ยนจากการใช้ขนาดชั้นความเป็นอิสระในเทคนิคของ Welch คือ

$$\nu' = \frac{\left(\frac{S_i^2}{n_i} + \frac{S_j^2}{n_j}\right)^2}{\frac{S_i^4}{n_i^2(n_i-1)} + \frac{S_j^4}{n_j^2(n_j-1)}}$$

เป็น $\nu' = n_i+n_j-2$ ในบางกรณี ทั้งนี้เนื่องจากกรณีความแปรปรวนของประชากรหรือขนาดกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มแตกต่างกันไม่มาก ค่าชั้นความเป็นอิสระจะเข้าใกล้ n_i+n_j-2 สำหรับกรณีที่จะใช้ $\nu' = n_i+n_j-2$ นั้น ทัมฮานน์ได้กำหนดขึ้นตามเกณฑ์ของ Ury และ Wiggins (1971 : 182) กล่าวคือจะใช้ $\nu' = n_i+n_j-2$ เมื่อข้อมูลเป็นไปตามเงื่อนไขอย่างน้อย 1 ข้อ ใน 4 ข้อ นอกเหนือจากนี้จะใช้ชั้นความเป็นอิสระที่กำหนดในเทคนิคของ Welch ซึ่งเงื่อนไข 4 ข้อ กำหนดดังนี้

1. $9/10 \le n_i/n_j \le 10/9$
2. $9/10 \le (S_i^2/n_i)/(S_j^2/n_j) \le 10/9$
3. $4/5 \le n_i/n_j \le 5/4$ และ $1/2 \le (S_i^2/n_i)/(S_j^2/n_j) \le 2$
4. $2/3 \le n_i/n_j \le 3/2$ และ $3/4 \le (S_i^2/n_i)/(S_j^2/n_j) \le 4/3$

4.3.1 อสมการผลคูณของ Šidák

Šidák ได้เสนออสมการผลคูณพร้อมทั้งการพิสูจน์ในกรณีทั่วไปในปี ค.ศ. 1967 (Šidák 1967: 626-633) อสมการผลคูณของ Šidák กำหนดว่าถ้า $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ เป็นเวคเตอร์เชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร มีเวคเตอร์ของค่าเฉลี่ย (mean vector) เป็นศูนย์ และ $R = \{\rho_{ij}\}$ เป็นเมตริกซ์สหสัมพันธ์ใด ๆ ถ้า S^2 เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงแบบ χ_{ν}^2/ν_j สำหรับจำนวนบวก $a_1, \ldots, a_m$ ใด ๆ แล้วจะได้

$$P\left(\frac{|Y_1|}{S} \le a_1, \ldots, \frac{|Y_m|}{S} \le a_m\right) \ge \prod_{i=1}^{m} P\left(\frac{|Y_i|}{S} \le a_i\right)$$

การประยุกต์ใช้สำหรับวิธีเปรียบเทียบพหุคูณของทัมฮานน์ซึ่งใช้การแจกแจงทีนั้น พิจารณาค่า $P(\frac{|Y_i|}{S} \le a_i)$ ก็คือการทดสอบที (t-test) แต่ละครั้งนั่นเอง ดังนั้นอาจแทน $\frac{|Y_i|}{S}$ ด้วย $|t_i|$ อสมการคือ

$$P(|t_1| \le a_1, \ldots, |t_m| \le a_m) \ge \prod_{i=1}^{m} P(|t_i| \le a_i)$$

สำหรับการเปรียบเทียบพหุคูณที่มีจำนวน m การเปรียบเทียบซึ่งเป็นอิสระต่อกันหรือไม่เป็นอิสระต่อกัน และทดสอบแต่ละการเปรียบเทียบที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ จะได้ว่า $P(|t_i| \le a_i) = 1 - \alpha_i$ ดังนั้นอสมการคือ

$$P(|t_i| \le a_1, \ldots, |t_m| \le a_m) \ge \prod_{i=1}^{m} (1 - \alpha_i)$$

พิจารณา $P(|t_1| \le a_1, \ldots, |t_m| \le a_m)$ ก็คือโอกาสที่จะไม่เกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ในการทดสอบ m การเปรียบเทียบหรือแทนด้วย $1 - \alpha_{EW}$ เมื่อ α_{EW} คืออัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลอง ดังนั้นอสมการคือ

$$1 - \alpha_{EW} \ge \prod_{i=1}^{m} (1 - \alpha_i)$$

นั่นคือ อสมการกำหนดว่าในการเปรียบเทียบพหุคูณจำนวน m การเปรียบเทียบที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่เป็นอิสระต่อกัน โอกาสที่จะไม่เกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ในการทดสอบการเปรียบเทียบทั้ง m การเปรียบเทียบ จะมากกว่าหรือเท่ากับผลคูณของโอกาสที่จะไม่เกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ในการทดสอบการเปรียบเทียบแต่ละครั้ง

4.3.2 <u>การควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองด้วยอสมการผลคูณของ Šidák</u>

จากอสมการผลคูณของ Šidák

$$1 - \alpha_{EW} \geq \prod_{i=1}^{m} (1 - \alpha_i)$$

หรือ

$$\alpha_{EW} \leq 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - \alpha_i)$$

ถ้ากำหนดอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุในการทดสอบการเปรียบเทียบทั้งหมดที่ระดับ α และต้องการให้ $\alpha_{EW} \leq \alpha$ ดังนั้นจะกำหนดเกณฑ์การแบ่งอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุ (α) ให้แต่ละการเปรียบเทียบตามอสมการของ Šidák นั่นคือกำหนดให้

$$1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - \alpha_i) = \alpha$$

ถ้ากำหนดให้ทุกการเปรียบเทียบถูกทดสอบที่ระดับนัยสำคัญเท่ากันคือ α_o ดังนั้น

$$1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - \alpha_o) = \alpha$$

$$\begin{aligned}
1 - (1 - \alpha_o)^m &= \alpha \\
(1 - \alpha_o)^m &= 1 - \alpha \\
1 - \alpha_o &= (1 - \alpha)^{\frac{1}{m}} \\
\alpha_o &= 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{m}}
\end{aligned}$$

นั่นคือ กรณีที่แบ่งอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุให้เท่ากันทุกการเปรียบเปรียบเทียบ แต่ละการเปรียบเทียบจะถูกทดสอบที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ $1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{m}}$

เมื่อกำหนดให้แต่ละการเปรียบเทียบถูกทดสอบที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ $1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{m}}$ นั้น สามารถแสดงให้เห็นว่าอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองจะน้อยกว่าหรือเท่ากับอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุ (α) ดังนี้

จากความสัมพันธ์ระหว่าง α_{EW} กับ α_0 สำหรับการเปรียบเทียบที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่เป็นอิสระต่อกันกำหนดดังนี้

$$\alpha_{EW} \leq 1 - (1 - \alpha_0)^m$$

แทนค่า $\alpha_0 = 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{m}}$

ดังนั้น
$$\alpha_{EW} \leq 1 - [1 - (1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{m}})]^m$$

$$\alpha_{EW} \leq 1 - [1 - 1 + (1 - \alpha)^{\frac{1}{m}}]^m$$

$$\alpha_{EW} \leq 1 - [(1 - \alpha)^{\frac{1}{m}}]^m$$

$$\alpha_{EW} \leq 1 - [(1 - \alpha)^{\frac{1}{m} \cdot m}]$$

$$\alpha_{EW} \leq 1 - [1 - \alpha]$$

$$\alpha_{EW} \leq \alpha$$

นั่นคือ เมื่อกำหนดอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุในการทดสอบการเปรียบเทียบจำนวน m การเปรียบเทียบที่ระดับ α และแบ่งอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุให้ทุกการเปรียบเทียบเท่ากันตามเกณฑ์กำหนดในอสมการผลคูณของ Šidák คือ แต่ละการเปรียบเทียบถูกทดสอบที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ $1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{m}}$ แล้ว จะทำให้อัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองไม่มากกว่าอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุ

4.3.3 <u>ช่วงความเชื่อมั่นวิธีของทัมฮานน์</u>

เมื่อทุกการเปรียบเทียบถูกทดสอบที่ระดับนัยสำคัญเท่ากัน ช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ $1 - \alpha$ กำหนดดังนี้

$$\hat{\Psi} \pm t\,DS_{\alpha/2}, C, \nu' \sqrt{\frac{s_i^2}{n_i} + \frac{s_j^2}{n_j}}$$

(Kirk 1982: 121)

$\hat{\Psi}$ = ผลต่างของค่าเฉลี่ยกลุ่มตัวอย่างกลุ่มที่ i กับกลุ่มที่ j

s_i^2 = ความแปรปรวนของค่าสังเกตในกลุ่มตัวอย่างที่ i

s_j^2 = ความแปรปรวนของค่าสังเกตในกลุ่มตัวอย่างที่ j

n_i = จำนวนค่าสังเกตของกลุ่มตัวอย่างกลุ่มที่ i

n_j = จำนวนค่าสังเกตของกลุ่มตัวอย่าง กลุ่มที่ j

ν' = ชั้นความเป็นอิสระ ซึ่งมี 2 กรณี

<u>กรณีที่ 1</u> $\nu' = n_i + n_j - 2$

(จะใช้ค่า ν' เมื่อเงื่อนไขอย่างน้อยหนึ่งข้อเป็นจริงคือ)

1) $9/10 \le n_i/n_j \le 10/9$
2) $9/10 \le (s_i^2/n_i)/(s_j^2/n_j) \le 10/9$
3) $4/5 \le n_i/n_j \le 5/4$ และ $1/2 \le (s_i^2/n_i)/(s_j^2/n_j) \le 2$
4) $2/3 \le n_i/n_j \le 3/2$ และ $3/4 \le (s_i^2/n_i)/(s_j^2/n_j) \le 4/3$

<u>กรณีที่ 2</u>

$$\nu' = \frac{\left(\frac{s_i^2}{n_1} + \frac{s_j^2}{n_j}\right)^2}{\frac{s_i^4}{n_i^2(n_i-1)} + \frac{s_j^4}{n_j^2(n_j-1)}}$$

(จะใช้เมื่อไม่ตรงตามเงื่อนไขในกรณีที่ 1)

C = จำนวนการเปรียบเทียบทั้งหมด

$t_{DS_{\alpha/2}}, C, \nu'$ = ค่าที่อ่านจากตารางที ที่ใช้อสมการผลคูณของ Šidák

4.3.4 <u>ข้อตกลงเบื้องต้น</u>

1. กลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่แจกแจงแบบปกติหรือกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่
2. กลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มเป็นอิสระต่อกัน
3. ไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากรแต่ละกลุ่ม
4. การแจกแจงของค่าสถิติทดสอบอยู่บนพื้นฐานของสมมติฐานสูญที่เป็นจริง

4.3.5 <u>การคำนวณที่ใช้สำหรับการเปรียบเทียบรายคู่</u>

หลังจากหาค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยแบบรายคู่ แล้วนำค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยรายคู่แต่ละคู่ไปเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตซึ่งคำนวณดังนี้

$$T = t_{DS_{\alpha/2}}, C, \nu' \sqrt{\frac{s_i^2}{n_i} + \frac{s_j^2}{n_j}}$$

การเปรียบเทียบรายคู่แต่ละคู่จะมีนัยสำคัญเมื่อค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยรายคู่แต่ละคู่ มีค่ามากกว่า T

4.3.6 <u>ตารางที่ใช้ในการเปรียบเทียบพหุคูณวิธีของทัมฮานน์</u>

ตารางที่ใช้กับวิธีของทัมฮานน์นั้น พัฒนาขึ้นโดย Games (1977 : 531-534) ซึ่งเป็นตารางที่แสดงค่าที (t) ที่ใช้อสมการผลคูณของ Šidák เมื่อแบ่งอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุให้เท่ากันทุกการเปรียบเทียบ คือ $\alpha_i = 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{m}}$ ตารางนี้จะแสดงค่าที ตามขนาดของชั้นความเป็นอิสระ 2(1)30, 40, 60 และ 120 และจำนวนการเปรียบเทียบ 2 - 50 การเปรียบเทียบ

5. <u>งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง</u>

Dunn (1961: 52-64) และ Perlmutter และ Myers (1973: 181-184) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นของสถิติบอนเฟอโรนีที วิธีของเชเฟ และวิธีของทูกี้ พบว่า เมื่อจำนวนกลุ่มตัวอย่างมีมาก และมีจำนวนการเปรียบเทียบน้อย สถิติบอนเฟอโรนีที จะให้ช่วงความเชื่อมั่นแคบกว่าวิธีของเชเฟและวิธีของทูกี้ ในทางตรงข้ามถ้าจำนวนกลุ่มตัวอย่างมีน้อยและมีจำนวนการเปรียบเทียบมากหรือสนใจการเปรียบเทียบที่เป็นไปได้ทั้งหมด สถิติบอนเฟอโรนีที จะมีช่วงความเชื่อมั่นกว้างกว่าวิธีของเชเฟและวิธีของทูกี้

Keselman (1974: 130-131) ใช้เทคนิคมอนติคาร์ไล ศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติบอนเฟอโรนีที และวิธีของเชเฟ เมื่อกลุ่มตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่แจกแจงแบบปกติ และความแปรปรวนของประชากรเท่ากันทุกกลุ่ม โดยศึกษาเฉพาะการเปรียบเทียบรายคู่ในกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก ขนาดกลาง และขนาดใหญ่ เมื่อกลุ่มตัวอย่างมี 4 กลุ่ม พบว่า สถิติบอนเฟอโรนีทีมีอำนาจการทดสอบสูงกว่าวิธีของเชเฟ

Ury และ Wiggins (1971: 174-181) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นของวิธีเปรียบเทียบพหุคูณ 2 วิธีคือ สถิติบอนเฟอโรนีที และไคสแควร์ของมาร์ชูไล เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ และทำการเปรียบเทียบเฉพาะรายคู่ พบว่า สถิติบอนเฟอโรนีที มีช่วงความเชื่อมั่นแคบกว่าไคสแควร์ของมาร์ชูไล ทั้งกรณีที่กำหนดระดับนัยสำคัญเป็น .05 และ .01

Howell และ Games (1974: 72-81) ใช้เทคนิคมอนติคาร์ไล ศึกษาเปรียบเทียบอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ทางทฤษฎีกับอัตราความคลาดเคลื่อนจากผลการทดลองของการทดสอบทีพหุคูณ (multiple t test) ที่กำหนดวิธีประมาณค่าความแปรปรวนแตกต่างกัน 3 แบบคือ แบบที่หนึ่งใช้เหมือนกับ การทดสอบที แบบที่สองใช้ mean square within groups (MSW) แบบที่สามใช้เทคนิคของ Welch โดยศึกษาการเปรียบเทียบแบบรายคู่ เมื่อกลุ่มตัวอย่างมี 4 กลุ่ม ขนาดกลุ่มตัวอย่างเท่ากันทุกกลุ่มคือขนาด 5 ภายใต้ลักษณะการแจกแจงของประชากรแบบปกติ และความแปรปรวนของประชากรแตกต่างกันได้ผลสรุปว่า วิธีที่ประมาณค่าความแปรปรวนโดยเทคนิคของ Welch แกร่งมากที่สุด และวิธีที่ประมาณค่าความแปรปรวนโดยใช้ MSW แกร่งน้อยที่สุด

Tamhane (1979: 471-480) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองของวิธีเปรียบเทียบพหุคูณ 7 วิธี คือ วิธีของ Dalal วิธีของ Spjøtvoll วิธีของ Hochberg วิธีของ Tamhane วิธีของ Games และ Howell วิธีของ Brown และ Forsythe และวิธีของ Spjøtvoll และ Stoline โดยศึกษาเฉพาะการเปรียบเทียบรายคู่ เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก และความแปรปรวนของประชากรแตกต่างกัน พบว่า วิธีเปรียบเทียบพหุคูณที่สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองได้ใกล้เคียงกับอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุ คือวิธีของ Tamhane และวิธีของ Games และ Howell และ Tamhane กล่าวว่า วิธีของ Tamhane นั้นอัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองไม่มากกว่าอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุทุกกรณีการทดลองในขณะที่วิธีของ Games และ Howell นั้น มีบางกรณีที่อัตราความคลาดเคลื่อนต่อชุดการทดลองสูงกว่าอัตราความคลาดเคลื่อนที่ระบุมากเกินไป

Games, Keselman และ Rogan (1981: 594-598) ได้สรุปถึงความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของวิธีเปรียบเทียบพหุคูณจากผลการวิจัยของ Games และ Howell (1976), Howell และGames (1974), Keselman, Games และ Rogan (1979), Keselman และ Rogan (1978) Ramseyer และ Tcheng (1973), Tamhane (1979) โดยจำแนกวิธีเปรียบเทียบพหุคูณจากงานวิจัยเหล่านี้เป็น 2 แบบ คือ

1. แบบที่ใช้ MSW (mean square within groups) เป็นตัวประมาณค่าความแปรปรวนของการเปรียบเทียบ (contrast) มี 6 วิธี คือ วิธีของ Scheffé, วิธีของ Spjøtvoll และ Stoline (1973), วิธีของ Gabriel (1978) วิธีของ Dunn-Bonferroni, วิธีของ Hochberg (1974) และวิธีของ Tukey และ Kramer (1956)

2. แบบที่ใช้การประมาณค่าความแปรปรวนของการเปรียบเทียบด้วยวิธีของ Behrens-Fisher (เป็นวิธีที่ Welch (1938) นำมาใช้สำหรับการทดสอบแบบ 2 กลุ่ม) มี 5 วิธี คือ วิธีของ Brown และ Forsythe (1974) วิธีของ Ury และ Wiggins (1971), วิธีของ Tamhane (1977), วิธีของ Dunnett (1980b) และวิธีของ Games และ Howell (1976)

ซึ่งผลสรุปความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของวิธีเปรียบเทียบพหุคูณทั้ง 2 แบบนี้ Games, Keselman และ Rogan กล่าวไว้ว่า วิธีเปรียบเทียบพหุคูณแบบที่หนึ่งแม้ว่าจะมีบางวิธีสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้เมื่อความแปรปรวนของประชากรเท่ากัน แต่วิธีเปรียบเทียบพหุคูณเหล่านี้จะไม่แกร่งต่อการฝ่าฝืนข้อตกลงเบื้องต้นด้านความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวน สำหรับงานวิจัยที่ต้องใช้วิธีเปรียบเทียบพหุคูณ เมื่อความแปรปรวนของประชากรแตกต่างกัน ควรเลือกใช้วิธีเปรียบเทียบพหุคูณแบบที่สอง ซึ่งสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ดีกว่าการเปรียบเทียบพหุคูณแบบที่หนึ่ง