บทที่ 2

สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาอุณหภูมิของโครงสร้างหล่อเย็นด้วยการพาความร้อนสามารถประดิษฐ์ได้จากสมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) ซึ่งมีความหมายให้เข้าใจได้ง่าย ๆ ว่า พลังงานนั้นไม่มีการสูญหายไป สำหรับการศึกษาวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะทำการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนในของแข็งแบบสองมิติและการถ่ายเทความร้อนในของไหลแบบหนึ่งมิติไปพร้อม ๆ กัน โดยอุณหภูมิของไหลจะถูกสมมุติให้มีการเปลี่ยนแปลงตามแนวความยาวของท่อเท่านั้น ดังนั้นสมการเชิงอนุรักษ์พลังงานจึงประกอบด้วย สมการเชิงอนุรักษ์พลังงานในของแข็งและสมการเชิงอนุรักษ์พลังงานในของไหล

2.1 สมการอนุรักษ์พลังงาน

จากกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิคส์ซึ่งกล่าวไว้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจะเท่ากับปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวลบวกกับอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนมวลก้อนนั้น [14]

	อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวล	=	ปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวล	+	อัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆบนก้อนมวลนั้น
หรือ	A	=	B	+	C (2.1)

โดย A, B และ C แทนความหมายต่างๆดังแสดงในสมการข้างบนนี้

พจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลอันประกอบด้วย พลังงานภายใน (internal energy) ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนไหวของโมเลกุลภายในของไหลนั้นและพลังงานจลน์ (kinetic energy) ซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากของไหลนั้นเกิดการไหล หาก e แทนพลังงานภายในและ $V^2/2$ คือพลังงานจลน์ที่ก้อนมวลนั้นไหลด้วยความเร็ว V ดังนั้นพลังงานรวม (total energy) คือ $e+V^2/2$ ซึ่งมีหน่วยต่อหนึ่งหน่วยมวล เนื่องจากปริมาณหน่วยมวลทั้งหมดของก้อนมวลนี้คือ $\rho dxdy$ ดังนั้นพจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในก้อนมวลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหลนี้คือ

$$\mathrm{A} = \rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) dxdy \tag{2.2}$$

โดย ρ คือความหนาแน่น (density) และ t คือเวลา (time)

ทำการคูณกระจายพจน์ทางขวาของสมการ (2.2)

$$\mathrm{A} = \rho \frac{De}{Dt} dxdy + \frac{1}{2}\rho \frac{DV^2}{Dt} dxdy \tag{2.3}$$

หากสมมุติให้ความเร็วมีค่าที่ไม่ขึ้นกับเวลา สมการ (2.3) จึงกลายเป็น

$$\mathrm{A} = \rho \frac{De}{Dt} dxdy \tag{2.4}$$

และเนื่องจากค่าพลังงานภายใน e อาจสมมุติให้แปรผันตามไปกับค่าอุณหภูมิ T ได้ดังนี้

$$e = cT \tag{2.5}$$

โดย c แทนความร้อนจำเพาะของของไหลที่ปริมาตรคงตัว (specific heat at constant volume) และหากกำหนดให้ความร้อนจำเพาะนี้มีค่าคงที่แล้ว

$$\mathrm{A} = \rho c \frac{DT}{Dt} dxdy \tag{2.6}$$

ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของอนุพันธ์ธรรมดาได้ดังนี้

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.7}$$

สมการ (2.6) เมื่อเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของอนุพันธ์ธรรมดาจะได้

$$\mathrm{A} = \rho c\left[\frac{\partial T}{\partial t} + \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right] dxdy \tag{2.8}$$

สำหรับพจน์ B ซึ่งแทนปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวลนั้นประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกคือปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นเองบนปริมาตรของก้อนมวลคือ

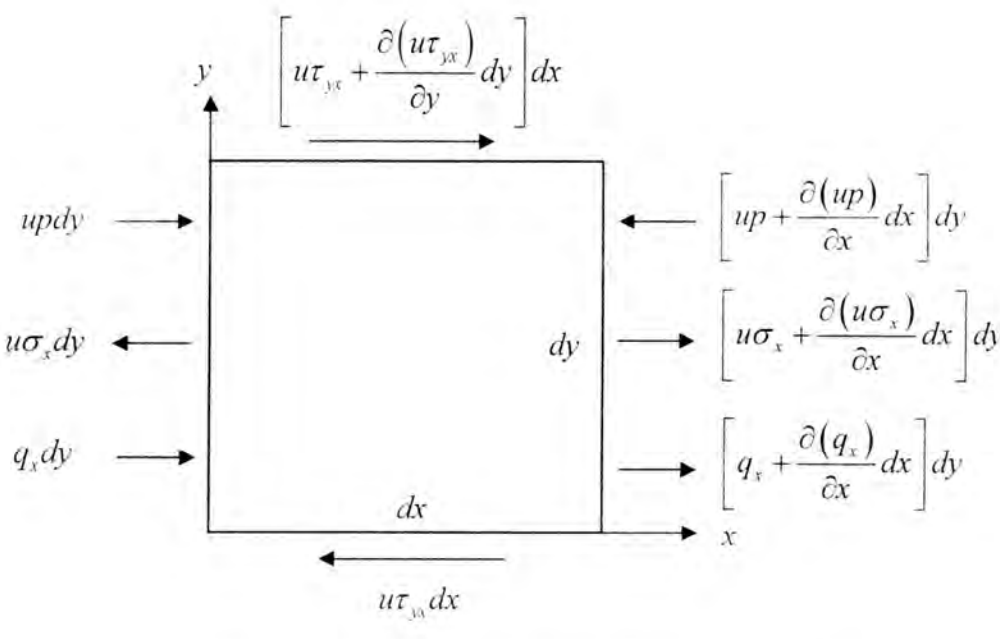
$$Q(dxdy)$$

และจากรูปที่ 2.1 ปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในทิศแกน x ผ่านขอบ dy ทั้งด้านซ้ายและด้านขวาของก้อนมวลคือ

$$\left[q_x - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)\right]dy = -\frac{\partial q_x}{\partial x}dxdy \tag{2.9}$$

ในทำนองเดียวกัน ปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในทิศแกน dx ผ่านขอบ dx ทั้งด้านล่างและด้านบนของก้อนมวลคือ

$$\left[q_y - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}dy\right)\right]dx = -\frac{\partial q_y}{\partial y}dxdy \tag{2.10}$$



รูปที่ 2.1 งานที่เกิดขึ้นและปริมาณฟลักซ์ในทิศทางแกน x ที่ไหลผ่านก้อนมวล ซึ่งเคลื่อนที่ไปกับของไหล

ดังนั้นปริมาณฟลักซ์ความร้อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นบนก้อนมวลนี้คือ

$$\mathrm{B} = \left[Q - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y}\right]dxdy \tag{2.11}$$

แต่จากกฎของฟูริเยร์ (Fourier's law) ปริมาณฟลักซ์ความร้อน q_x และ q_y นั้นแปรผันขึ้นอยู่กับความชันของอุณหภูมิ (temperature gradient) ดังนี้

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{และ} \quad q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.12}$$

โดย k แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity) ของของไหล

ดังนั้นหากกำหนดให้สัมประสิทธิ์การนำความร้อนคงที่ทำให้พจน์ B จึงกลายมาเป็น

$$\mathrm{B} = \left[Q + k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\right]dxdy \tag{2.13}$$

หากพิจารณาพจน์ C ซึ่งแทนอัตราของงานที่เกิดขึ้นจากแรงต่าง ๆ ที่มากระทำกับก้อนมวลนี้ แรงชนิดแรกคือแรงจากน้ำหนักของก้อนมวลเอง (body force) ซึ่งเมื่อคูณกับความเร็วของการไหลในทิศทางนั้น จะก่อให้เกิดอัตราของงานคือ

$$\rho\left(f_x u + f_y v\right)dxdy$$

โดย f_x คือแรงจากน้ำหนักของก้อนมวลของของไหลในทิศทาง x (body force in x-direction)
f_y คือแรงจากน้ำหนักของก้อนมวลของของไหลในทิศทาง y (body force in y-direction)
u คือความเร็วของของไหลในทิศทาง x (velocity in x-direction)
v คือความเร็วของของไหลในทิศทาง y (velocity in y-direction)

จากรูปที่ 2.1 อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความดัน p ที่กระทำบนด้าน dy ในทิศทาง x คือ

$$\left[up - \left(up + \frac{\partial(up)}{\partial x}dx\right)\right]dy = -\frac{\partial(up)}{\partial x}dxdy \tag{2.14}$$

อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความเค้นตั้งฉาก σ_x ที่กระทำบนด้าน dy ในทิศทาง x คือ

$$\left[u\sigma_x - \left(up + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x}dx\right)\right]dy - u\sigma_x dy = \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x}dxdy \tag{2.15}$$

และอัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความเค้นเฉือน τ_{yx} ที่กระทำบนด้าน dx ในทิศทาง x คือ

$$\left[u\tau_{yx} - \left(u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}dy\right)\right]dx - u\tau_{yx}dx = \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}dxdy \tag{2.16}$$

ในทำนองเดียวกัน อัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนก้อนมวลในทิศแกน y สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้เช่นเดียวกัน ก่อให้เกิดอัตราของงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ บนก้อนมวลนี้คือ

$$C=\left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x}+\frac{\partial(vp)}{\partial y}\right)+\frac{\partial\left(u\sigma_x\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(u\tau_{yx}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(v\tau_{xy}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(v\sigma_y\right)}{\partial y}\right]dxdy$$

$$+\rho\overline{f}\cdot\overline{V}dxdy \tag{2.17}$$

จากคุณสมบัติของไหลแบบนิวโทเนียน (Newtonian fluid) ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้นและความเร็วเป็น

$$\sigma_x=-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.18}$$

$$\sigma_y=-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.19}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right] \tag{2.20}$$

โดย μ คือความหนืดพลศาสตร์ (dynamic viscosity)

เมื่อไม่คิดแรงจากน้ำหนักของก้อนมวล ความดันและความเร็วของของไหลมีค่าคงที่จะได้

$$C=0 \tag{2.21}$$

ทำการแทนพจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในก้อนมวลจากสมการ (2.8) พจน์ B ซึ่งแทนปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่มวลจากสมการ (2.13) และพจน์ C ซึ่งแทนอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ บนก้อนมวลนั้นจากสมการ (2.21) ลงในสมการ (2.1) แล้วหารตลอดด้วย $dxdy$ ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุรักษ์พลังงานดังนี้

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}+\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)-k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)-Q=0 \tag{2.22}$$

หากสมการเชิงอนุรักษ์พลังงานในสมการ (2.22) ถูกพิจารณาในรูปของปัญหาการไหลแบบหนึ่งมิติตามแนวความยาวท่อและเมื่อคูณด้วยพื้นที่หน้าตัดการไหล A_f ทำให้สมการจึงกลายเป็น

$$\rho_f c_f A_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + \dot{m}_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial z} - k_f A_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} - Q_f A_f = 0 \tag{2.23}$$

โดย z คือแนวแกนตามความยาวท่อสำหรับ

$\dot{m}$ คืออัตราการไหล (mass flow rate)

ตัวห้อย f คือตัวที่ใช้แสดงแทนว่าตัวแปรที่ถูกห้อยด้วย f นั้นเป็นค่าที่ใช้ในของไหล

หากกำหนดให้การถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลกับของแข็งอยู่ในรูปของการพาความร้อน (convection heat transfer) ดังนั้นสมการเชิงอนุรักษ์พลังงานในของไหลหนึ่งมิติตามแนวความยาวท่อที่มีการการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลกับของแข็งอยู่ในรูปของการพาความร้อนคือ

$$\rho_f c_f A_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + \dot{m}_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial z} - k_f A_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} - hp\left(T_s - T_f\right) - Q_f A_f = 0 \tag{2.24}$$

โดย h คือสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (convection heat transfer coefficient)

p คือพื้นที่ผิวการพาความร้อน (convection heat transfer area)

ตัวห้อย s คือตัวที่ใช้แสดงแทนว่าตัวแปรที่ถูกห้อยด้วย s นั้นเป็นค่าที่ใช้ในของแข็ง

สมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน (2.22) สามารถนำไปใช้ในรูปของสมการเชิงอนุรักษ์พลังงานในของแข็งที่ถูกพิจารณาในรูปของปัญหาสองมิติได้ด้วยการกำหนดให้ความเร็ว u และ v เท่ากับศูนย์จึงกลายเป็น

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} - k_s \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2}\right) - Q_s = 0 \tag{2.25}$$

2.2 บทสรุป

ในบทนี้ได้อธิบายถึงขั้นตอนการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุรักษ์พลังงานในของไหลหนึ่งมิติตามแนวความยาวท่อที่มีการการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลกับของแข็งอยู่ในรูปของการพาความร้อนและสมการเชิงอนุรักษ์พลังงานในของแข็งในรูปของปัญหาสองมิติที่นำไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อน รวมไปถึงรายละเอียดของพจน์ต่าง ๆ ที่อยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ ว่ามีที่มาเช่นใดและมีความหมายทางกายภาพเป็นอย่างไร สมการเชิงอนุพันธ์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจะนำไปใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อแก้ปัญหาการวิเคราะห์อุณหภูมิของโครงสร้างหล่อเย็นด้วยการพาความร้อนภายใต้สถานะอยู่ตัวและสถานะชั่วครู่ในบทถัดไป