บทที่ 3

ขั้นตอนวิธีการแปลงจำนวนซ้ำซ้อนไปเป็นรูปแบบส่วนเติมเต็ม

ในงานวิจัยที่นำเสนอขั้นตอนวิธีการแปลงชุดตัวเลขจากจำนวนซ้ำซ้อนไปเป็นจำนวนที่อยู่ในรูปแบบส่วนเติมเต็มนั้น [7-11] ขั้นตอนวิธีการแปลงชุดตัวเลขของงานวิจัยดังกล่าวจะมีลักษณะการทำงานเป็นแบบลำดับ ทำการแปลงตัวเลขทีละหลัก ซึ่งจะใช้เวลาในการแปลงเป็นเชิงเส้น (linear time) เทียบกับขนาดหรือจำนวนบิตของจำนวนนั้น อีกทั้งขั้นตอนวิธีการแปลงจำกัดอยู่แค่ระบบจำนวนที่ใช้เลขฐานสอง ในงานวิจัยนี้เสนอขั้นตอนวิธีในรูปทั่วไป (generic algorithm) เพื่อเพิ่มความสามารถในการแปลงชุดตัวเลขจากระบบจำนวนซ้ำซ้อนบนเลขฐานจำนวนเต็มใดๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับสองไปสู่ระบบจำนวนที่อยู่ในรูปแบบของส่วนเติมเต็มซึ่งสามารถแสดงค่าเชิงตัวเลขที่เป็นลบได้โดยไม่ต้องใช้ตัวเลขที่มีเครื่องหมายกำกับอยู่ ในงานวิจัยนี้ได้นำแนวคิด ออนเดอะฟลาย มาช่วยในการแปลงชุดตัวเลข โดยแนวคิดนี้ได้เสนอแนวทางในการสร้างฟังก์ชันประกอบ ซึ่งเกิดจากการรวมกันของฟังก์ชันย่อยๆ ที่ทำงานไปในทิศทางเดียวกัน แนวคิดในการการแปลงชุดตัวเลขจากระบบจำนวนซ้ำซ้อนโดยนำ ออนเดอะฟลาย มาปรับปรุงขั้นตอนวิธีของการแปลงชุดตัวเลขนั้น สามารถแบ่งการพิจารณาได้เป็น 3 ส่วนหลักๆ คือ การพิจารณาตัวทดที่จะเกิดขึ้นจากข้อมูลตัวเลขนำเข้า การประกอบกันของตัวทดที่เกิดขึ้นกับข้อมูลนำเข้าเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ และ การพิจารณาตัวเลขที่แสดงเครื่องหมายของจำนวนอันเป็นสิ่งสำคัญของระบบจำนวนที่อยู่ในรูปแบบของส่วนเติมเต็ม

3.1 การพิจารณาการเกิดขึ้นของตัวทด

จากที่กล่าวมาแล้วว่า การแปลงชุดตัวเลข คือ การดำเนินการบวก นั่นเอง จึงทำให้ในการแปลงชุดตัวเลขย่อมมีตัวทดเกิดขึ้นอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ ในการคำนวณหาตัวทดงานวิจัยนี้ได้นำสถาปัตยกรรมออนเดอะฟลายมาประยุกต์ใช้ เพื่อลดเวลาในการคำนวณหาตัวทดที่จะเกิดขึ้นในการแปลงชุดตัวเลข โดยการคำนวณนี้ไม่ใช่การคำนวณหาตัวทดทีละตำแหน่งเหมือนในขั้นตอนวิธีที่ถูกเสนอในงานวิจัยอื่นๆ [8-11] แต่หากเป็นการประกอบกันของฟังก์ชันหาตัวทดแต่ละตำแหน่ง โดยฟังก์ชันประกอบดังกล่าวมีการทำงานแบบมีลำดับจากหลักที่มีนัยสำคัญต่ำสุดไปยังหลักที่มีนัยสำคัญสูงสุด กล่าวคือ ในส่วนนี้ต้องพิจารณาสร้างฟังก์ชันกำหนดค่าตัวทด F_x (carry defined function)

$$F_{x_k x_{k-1} \cdots x_i}(c_{i-1}) \quad = \quad F_{x_k}(F_{x_{k-1}}(\cdots F_{x_i}(c_{i-1})\cdots))$$

โดยฟังก์ชัน F_x เป็นฟังก์ชันกำหนดค่าตัวทด c_i ที่ส่งออกไป เมื่อมีตัวทด c_{i-1} เข้ามา ซึ่งการกำหนดตัวทดที่ถูกส่งออกไปนี้จะพิจารณาผ่านข้อมูลนำเข้า x_i เพื่อดูว่าเมื่อข้อมูลนำเข้านี้รวมกับตัวทดที่ถูกส่งมาแล้วจะส่งตัวทดอะไรออกไป โดยที่ฟังก์ชัน F_x สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันประกอบได้ ดังนี้

$$F_{x_k x_{k-1} \cdots x_i}(c_{i-1}) \quad = \quad F_{x_k} \circ F_{x_{k-1}} \circ \cdots \circ F_{x_i}$$

กำหนดให้ $X = (x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_2 x_1 x_0)_\beta$ เป็นจำนวนที่แสดงได้ด้วยเลขฐาน $\beta \geq 2$ โดยที่ x_i อยู่ในชุดตัวเลข $D = \{-a, ..., a\}$ และ $\beta / 2 \leq a \leq \beta - 1$ จากฟังก์ชันประกอบ F_x สามารถเขียนสมการกำหนดค่าตัวทด c_i ได้ด้านล่างนี้

$$c_i \quad = \quad \lceil (c_{i-1} - \beta x_i)/(\beta^2 + c_{i-1}) \rceil \times (\beta - 1) \tag{3.1}$$

โดยที่ ตัวทดเริ่มต้น $c_{i-1} = 0$

บทตั้งที่ 3.1 *กำหนดให้* $X = (x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_2 x_1 x_0)_\beta$ *เป็นจำนวนที่แสดงได้ด้วยเลขฐาน* $\beta \geq 2$ *โดยที่* x_i *อยู่ในชุดตัวเลข* $D = \{-a, ..., a\}$ *และ* $\beta / 2 \leq a \leq \beta - 1$ *ตัวทด* c_i *ที่ได้จากสมการกำหนดค่าตัวทดต้องมีค่าเท่ากับ* 0 *หรือ* $\beta - 1$

พิสูจน์ จากสมการที่ 3.1 ในการกำหนดค่าตัวทด c_i

$$c_i \quad = \quad \lceil (c_{i-1} - \beta x_i)/(\beta^2 + c_{i-1}) \rceil \times (\beta - 1)$$

โดยที่ $x_i \in \{0, \pm 1, ..., \pm(\beta - 1)\}$ และ $\forall i \in \mathbb{Z}$

จะได้ว่า

$$x_i \quad < \quad \beta$$

คูณด้วย β ทั้งสองข้างของอสมการ

$$x_i \beta \quad < \quad \beta^2$$

เนื่องจาก x_i มีค่าตั้งแต่ $-(\beta - 1)$ ถึง $\beta - 1$ ทำให้สามารถสรุปได้ว่า $-(\beta x_i)$ หรือ βx_i ก็จะมีค่าน้อยกว่า β^2 เสมอ ด้วยเหตุผลดังกล่าวสามารถเขียนอสมการให้อยู่ในรูปใหม่ได้ดังนี้

$$-(x_i\beta) \quad < \quad \beta^2$$

ทำการบวกด้วย c_{i-1} ทั้งสองข้างอสมการ

$$-(x_i\beta)+c_{i-1} \quad < \quad \beta^2+c_{i-1}$$

จากนั้นจะได้ว่า

$$-1 \ < \ (c_{i-1}-x_i\beta)/(c_{i-1}+\beta^2) \ < \ 1$$

โดยที่ $x_i \in \mathbb{Z}$

และเนื่องจาก $\lceil (c_{i-1}-\beta x_i)/(\beta^2+c_{i-1}) \rceil$ จะมีค่าเท่ากับ 0 หรือ 1 ทำให้สามารถสรุปได้ว่า $\lceil (c_{i-1}-\beta x_i)/(\beta^2+c_{i-1}) \rceil \times(\beta-1)$ จะมีค่าเท่ากับ 0 หรือ $\beta-1$ เท่านั้น

3.2 การประกอบกันของตัวทดและข้อมูลนำเข้า

ในขณะที่ทำการคำนวณหาค่าตัวทดที่เกิดขึ้น กระบวนการคำนวณหาผลลัพธ์ของการแปลงชุดตัวเลขสามารถกระทำได้โดยการประกอบกันของตัวทดที่เกิดขึ้นจริงและข้อมูลนำเข้า ซึ่งกระบวนการคำนวณนี้ไม่จำเป็นต้องทำงานเป็นแบบลำดับในทิศทางจากหลักที่มีนัยสำคัญต่ำสุดไปหลักที่มีนัยสำคัญสูงสุดเหมือนดังเช่นการพิจารณาหาค่าตัวทด หากแต่สามารถทำการคำนวณแบบขนานไปพร้อมๆ กันในทุกตำแหน่งระหว่างข้อมูลนำเข้าและตัวทด ในขั้นตอนนี้จำเป็นต้องทำต่อจากการพิจารณาการเกิดขึ้นของตัวทด นั่นคือ ในส่วนนี้ต้องพิจารณาสร้างฟังก์ชันจับคู่ตัวเลข (digit-mapping function) H_i เพื่อคำนวณผลลัพธ์โดย

กำหนดให้ $Y=(y_{n+1}y_ny_{n-1}\cdots y_2y_1y_0)_\beta$ เป็นจำนวนที่แสดงได้ด้วยเลขฐาน $\beta\geq 2$ และ Y เป็นคำตอบของการแปลงจำนวน X โดยฟังก์ชัน H_i เป็นฟังก์ชันคำนวณค่าคำตอบ y_i เมื่อมีตัวทดนำเข้า c_{i-1} และข้อมูลนำเข้า x_i สามารถเขียนอธิบายความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$y_i \quad = \quad H_i(x_i, c_{i-1})$$

โดยฟังก์ชัน H_i เป็นฟังก์ชันคำนวณค่าของคำตอบในตำแหน่งที่ i

จากนั้นสามารถเขียน ฟังก์ชันคำนวณค่าคำตอบ H_i ให้อยู่ในรูปของสมการได้ด้านล่างนี้

$$y_i \quad = \quad (x_i+c_{i-1})-(\beta\times\lfloor (x_i+c_{i-1})/\beta \rfloor) \tag{3.2}$$

โดยที่สมการ 3.2 ที่ใช้คำนวณค่าคำตอบ y_i นี้ใช้ทำการคำนวณหาผลลัพธ์ที่ต้องการตั้งแต่ตำแหน่งที่มีนัยสำคัญต่ำที่สุดจนถึงตำแหน่งที่ n เนื่องจาก ณ ตำแหน่งที่ $n+1$ จะเป็นตำแหน่งที่แสดงว่าจำนวนนั้นเป็นบวกหรือลบ จึงต้องมีขั้นตอนวิธีการพิจารณาค่าคำตอบตำแหน่ง $n+1$ โดยจะยกไปกล่าวไว้ในหัวข้อต่อไป

บทตั้งที่ 3.2 *กำหนดให้* $X=(x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_2 x_1 x_0)_\beta$ *เป็นจำนวนที่แสดงได้ด้วยเลขฐาน* $\beta \geq 2$ *โดยที่* x_i *อยู่ในชุดตัวเลขแบบสมมาตร* $D=\{-a,...,a\}$ และ $\beta/2 \leq a \leq \beta-1$ *กำหนดให้ค่าตัวทด* c_i *ถูกคำนวณด้วยสมการที่ 3.1 โดยมีค่าตัวทดเริ่มต้น* $c_{-1}=0$ และ *ค่าคำตอบ* y_i *ถูกคำนวณโดยสมการหาค่าคำตอบ*

$$y_i \;=\; (x_i+c_{i-1})-(\beta \times \lfloor (x_i+c_{i-1})/\beta \rfloor)$$

y_i ต้องอยู่ในชุดตัวเลข $E=\{0,...,\beta-1\}$

พิสูจน์ ในการพิสูจน์นี้จะแบ่งการพิจารณาออกเป็นสองกรณี กรณีแรกจะพิจารณาเมื่อตัวทดนำเข้ามีค่าเท่ากับ 0 และ อีกกรณีจะพิจารณาเมื่อตัวทดนำเข้ามีค่าเท่ากับ $\beta-1$

กรณีที่ 1 ตัวทดนำเข้า $c_{i-1}=0$

จากสมการที่ 3.2

$$y_i \;=\; (x_i+c_{i-1})-(\beta \times \lfloor (x_i+c_{i-1})/\beta \rfloor)$$

ตัวทดนำเข้า $c_{i-1}=0$ จะได้

$$y_i \;=\; x_i-(\beta \times \lfloor x_i/\beta \rfloor)$$

ในกรณีนี้แบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสองกรณีย่อย คือ กรณีที่ $0 \leq x_i \leq \beta-1$ และ กรณีที่ $-(\beta-1) \leq x_i \leq -1$

กรณีที่ 1.1 ในกรณีที่ข้อมูลนำเข้า $0 \leq x_i \leq \beta-1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y_i &= x_i-(\beta \times 0) \\ &= x_i \end{aligned}$$

เนื่องจาก $x_i \in \{0,...,\beta-1\}$ จะได้ว่า $y_i \in \{0,...,\beta-1\}$ เช่นกัน

กรณีที่ 1.2 ในกรณีที่ข้อมูลนำเข้า $-(\beta-1) \le x_i \le -1$ จะได้ว่า

$$y_i = x_i - (\beta \times (-1))$$

$$= x_i + \beta$$

เนื่องจาก $x_i \in \{-(\beta-1),...,-1\}$ จะได้ว่า $y_i \in \{1,...,\beta-1\}$

จากทั้งสองกรณีย่อย สามารถสรุปได้ว่า $y_i \in \{0,...,\beta-1\}$

กรณีที่ 2 ตัวทดนำเข้า $c_{i-1} = \beta - 1$

จากสมการที่ 3.2 และ ตัวทดนำเข้า $c_{i-1} = \beta - 1$ จะได้

$$y_i = (x_i + (\beta-1)) - (\beta \times \lfloor (x_i + (\beta-1))/\beta \rfloor)$$

ในกรณีนี้แบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสามกรณีย่อย คือ กรณีแรก $x_i = 0$ กรณีที่สอง $1 \le x_i \le \beta-1$ และ กรณีที่สาม $-(\beta-1) \le x_i \le -1$

กรณีที่ 2.1 ในกรณีที่ข้อมูลนำเข้า $x_i = 0$ จะได้ว่า

$$y_i = (0 + (\beta-1)) - (\beta \times \lfloor (0 + (\beta-1))/\beta \rfloor)$$

$$= (\beta-1) - (\beta \times 0)$$

$$= \beta - 1$$

เนื่องจาก $x_i \in \{0,...,\beta-1\}$ จะได้ว่า $y_i \in \{0,...,\beta-1\}$ เช่นกัน

กรณีที่ 2.2 ในกรณีที่ข้อมูลนำเข้า $1 \le x_i \le \beta-1$ จะได้ว่า

$$y_i = (x_i + \beta - 1) - (\beta \times 1)$$

$$= x_i + \beta - 1 - \beta$$

$$= x_i - 1$$

เนื่องจาก $x_i \in \{1,...,\beta-1\}$ จะได้ว่า $y_i \in \{0,...,\beta-2\}$

กรณีที่ 2.3 ในกรณีที่ข้อมูลนำเข้า $-(\beta-1) \le x_i \le -1$ จะได้ว่า

$$y_i \quad = \quad (x_i + (\beta-1)) - (\beta \times 0)$$

$$\quad = \quad x_i + (\beta-1)$$

เนื่องจาก $x_i \in \{-(\beta-1),...,-1\}$ จะได้ว่า $y_i \in \{0,...,\beta-1\}$

ดังนั้นจากการพิสูจน์ทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า $y_i \in \{0,...,\beta-1\}$ ■

3.3 การพิจารณาเครื่องหมายของคำตอบ

หลังจากที่ทำการคำนวณค่าตัวทดที่เกิดขึ้นได้แล้ว เราสามารถทำการหาตัวเลขที่เป็นตัวแสดงเครื่องหมายของคำตอบได้จากค่าตัวทดที่ตำแหน่ง n หรือ c_n ว่าเท่ากับ 0 หรือ $\beta-1$ กำหนดให้ S_{n+1} เป็นตัวเลขที่แสดงเครื่องหมายกำกับของคำตอบ $Y = (y_n y_{n-1} y_{n-2} \cdots y_2 y_1 y_0)_\beta$ การพิจารณาเครื่องหมายกำกับของคำตอบสามารถแสดงได้ดังนี้

$$S_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad c_n = 0 \\ 1 & \qquad\qquad c_n = \beta-1 \end{cases} \tag{3.3}$$

จากสมการที่ 3.3 ในกรณีที่คำตอบเป็นจำนวนบวกหรือศูนย์ ตัวทดในตำแหน่งที่มีนัยสำคัญสูงสุดจะมีค่าเป็น 0 ทำให้ S_{n+1} เป็น 0 กล่าวคือ ตัวเลขที่แสดงเครื่องหมายกำกับของจำนวนที่ถูกแสดงอยู่ในรูปของส่วนเติมเต็มมีค่าเท่ากับ 0 ในทางกลับกันถ้าคำตอบเป็นจำนวนลบ ตัวทดในตำแหน่งที่มีนัยสำคัญสูงสุดจะมีค่าเป็น $\beta-1$ ซึ่งทำให้ S_{n+1} เป็น 1 นั่นคือตัวเลขหน้าสุดในการแสดงจำนวนลบในรูปแบบส่วนเติมเต็มจะมีค่าเท่ากับ 1

3.4 การพิสูจน์ค่าเชิงตัวเลขของข้อมูลนำเข้าว่ามีค่าเท่ากับค่าเชิงตัวเลขของข้อมูลส่งออก

ก่อนการพิสูจน์ สามารถเขียนอธิบายลักษณะการเกิดขึ้นของตัวทดส่งออก c_i และค่าคำตอบที่เกิดขึ้น y_i หลังจากที่มีการคำนวณระหว่างข้อมูลนำเข้า x_i และตัวทดนำเข้า c_{i-1} โดยใช้สมการที่ 3.1 และ 3.2 ตามลำดับ ในการแปลงจำนวน X จากชุดตัวเลข $D = \{-a,...,a\}$ โดยที่ $\beta/2 \le a \le \beta-1$ ไปยังจำนวน Y ในชุดตัวเลข $E = \{0,...,a\}$ โดยที่ $0 \le a \le \beta-1$ และจากการคำนวณโดยสมการที่ 3.1 และ 3.2 ตามลำดับ สามารถสรุปได้ดังนี้

1) ในกรณีที่ตัวทดนำเข้า $c_{i-1}=0$ และ ข้อมูลนำเข้า x_i ซึ่ง $0 \le x_i \le \beta-1$ จะได้ ค่าคำตอบ $x_i = y_i$ โดย ค่าตัวทดส่งออก $c_i = 0$

2) ในกรณีที่ตัวทดนำเข้า $c_{i-1}=0$ และ ข้อมูลนำเข้า x_i ซึ่ง $-(\beta-1) \le x_i \le -1$ จะได้ ค่าคำตอบ $x_i = y_i - \beta$ โดย ค่าตัวทดส่งออก $c_i = \beta-1$

3) ในกรณีที่ตัวทดนำเข้า $c_{i-1}=\beta-1$ และ ข้อมูลนำเข้า x_i ซึ่ง $-(\beta-1) \le x_i \le 0$ จะได้ ค่าคำตอบ $x_i = y_i - \beta + 1$ โดย ค่าตัวทดส่งออก $c_i = \beta-1$

4) ในกรณีที่ตัวทดนำเข้า $c_{i-1}=\beta-1$ และ ข้อมูลนำเข้า x_i ซึ่ง $1 \le x_i \le \beta-1$ จะได้ ค่าคำตอบ $x_i = y_i + 1$ โดย ค่าตัวทดส่งออก $c_i = 0$

และต่อจากนี้จะเป็นการแสดงให้เห็นว่าหลังจากการแปลงชุดตัวเลขโดยใช้สมการที่ 3.1 และ 3.2 ดังกล่าว ค่าเชิงตัวเลขของข้อมูลนำเข้า X มีค่าเท่ากับค่าเชิงตัวเลขของข้อมูลส่งออก หรือ ผลลัพธ์ Y นั่นเอง

ทฤษฎีบทที่ 3.1 *กำหนดให้* $X=(x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_2 x_1 x_0)_\beta$ *เป็นจำนวนที่แสดงได้ด้วยเลขฐาน* $\beta \ge 2$ *โดยที่* x_i *อยู่ในชุดตัวเลขแบบสมมาตร* $D=\{-a,...,a\}$ *และ* $\beta/2 \le a \le \beta-1$ *กำหนดให้* $Y=(y_{n+1} y_n y_{n-1} \cdots y_2 y_1 y_0)_\beta$ *เป็นจำนวนที่แสดงได้ด้วยเลขฐาน* $\beta \ge 2$ *โดยที่* y_i *อยู่ในชุดตัวเลขแบบสมมาตร* $E=\{0,...,a\}$ *และ* $0 \le a \le \beta-1$ *การแปลงจากจำนวน* X *ไปยังจำนวน* Y *สามารถกระทำได้โดยสมการหาค่าตัวทด* c_i *และ สมการหาค่าคำตอบ* y_i *โดยที่* $\|X\|=\|Y\|$

พิสูจน์ ในการพิสูจน์นี้จะต้องทำการแสดงให้เห็นว่า ค่าเชิงตัวเลขของข้อมูลนำเข้าตรงกับข้อมูลส่งออก หรือ $\|X\|=\|Y\|$ โดยใช้การอุปมัยเชิงคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ กล่าวคือ

ต้องแสดงว่า

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \beta^i = -S_{n+1}\beta^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} y_i \beta^i \tag{3.4}$$

โดยที่ ค่าตัวทดเริ่มต้น $c_{-1}=0$ และ

$$S_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad c_n = 0 \\ 1 & \phantom{\text{ก็ต่อเมื่อ}} \quad c_n = \beta-1 \end{cases}$$

กำหนดให้ $P(n)$ เป็นประพจน์ที่แสดงว่า สมการ 3.4 เป็นจริง สำหรับทุกๆ ค่าของ n ที่มากกว่าเท่ากับ 0

ขั้นพื้นฐาน $P(0)$ เป็นจริง

จากสมการที่ 3.4 และ $n = 0$ จะได้ว่า

$$\sum_{i=0}^{0} x_0 \beta^0 = -S_{0+1}\beta^{0+1} + \sum_{i=0}^{0} y_0 \beta^0$$

$$x_0 \beta^0 = -S_1 \beta^1 + y_0 \beta^0$$

$$x_0 = -S_1 \beta^1 + y_0$$

ในกรณีที่ $x_0 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ และ ตัวทดเริ่มต้น $c_{-1} = 0$ จะได้ว่า $y_0 = x_0$ ทำให้

$$x_0 = -S_1 \beta^1 + x_0$$

เนื่องจาก $c_0 = 0$ และ $S_1 = 0$

$$x_0 = x_0$$

ในกรณีที่ $x_0 \in \mathbb{Z}^-$ และ ตัวทดเริ่มต้น $c_{-1} = 0$ จะได้ว่า $y_0 = x_0$ และ ตัวทดส่งออก $c_0 = 0$ จะได้ว่า

$$x_0 = -S_1 \beta^1 + x_0 + \beta$$

เนื่องจาก $c_0 = 0$ และ $S_1 = 1$

$$x_0 = -\beta + x_0 + \beta$$

$$= x_0$$

จากทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า $P(0)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง โดยที่ $n = k$ และ $k \geq 0$ ในขั้นอุปนัยนี้จะต้องแสดงให้เห็นว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วยเช่นกัน กล่าวคือ ต้องแสดงว่า

$$\sum_{i=0}^{k+1} x_i \beta^i = x_{k+1}\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} x_i \beta^i \qquad (3.5)$$

นำสมการที่ 3.4 มาแทนในสมการที่ 3.5 ได้ว่า

$$\sum_{i=0}^{k+1} x_i\beta^i = x_{k+1}\beta^{k+1} - S_{k+1}\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} y_i\beta^i \qquad (3.6)$$

ก่อนที่จะดำเนินการขั้นอุปนัยด้วยข้อสมมติฐานข้างต้น การพิสูจน์จำเป็นต้องแบ่งออกเป็นสองกรณี คือ กรณีที่ $S_{k+1} = 0$ และ กรณีที่ $S_{k+1} = 1$ โดยแสดงถึงค่าเชิงตัวเลขของ X ที่เป็นจำนวนบวก และ จำนวนลบ ตามลำดับ

กรณีที่ 1 เมื่อ $S_{k+1} = 0$ และ ตัวทดนำเข้า $c_k = 0$ เราสามารถแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสองกรณีย่อยได้ คือ กรณีที่ข้อมูลนำเข้า $x_{k+1} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ และ กรณีที่ ข้อมูลนำเข้า $x_{k+1} \in \mathbb{Z}^-$

กรณีที่ 1.1 เมื่อ $x_{k+1} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ จะได้ว่า $x_{k+1} = y_{k+1}$ และ $c_{k+1} = 0$ ด้วยเนื่องจาก $c_{k+1} = 0$ ทำให้เราได้ $S_{k+2} = 0$

จากสมการที่ 3.6 และ $S_{k+1} = 0$ จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} x_i\beta^i &= x_{k+1}\beta^{k+1} - (0)\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} y_i\beta^i \\
&= x_{k+1}\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} y_i\beta^i \\
&= y_{k+1}\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} y_i\beta^i \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} y_i\beta^i
\end{aligned}$$

ด้วยเหตุนี้ จะได้ว่า $\sum_{i=0}^{k+1} x_i\beta^i = -S_{k+2}\beta^{k+2} + \sum_{i=0}^{k+1} y_i\beta^i$

กรณีที่ 1.2 เมื่อ $x_{k+1} \in \mathbb{Z}^-$ จะได้ว่า $x_{k+1} = y_{k+1} - \beta$ และ $c_{k+1} = \beta - 1$ ด้วยเนื่องจาก $c_{k+1} = \beta - 1$ ทำให้เราได้ $S_{k+2} = 1$

จากสมการที่ 3.6 และ $S_{k+1} = 0$ จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} x_i\beta^i &= x_{k+1}\beta^{k+1} - (0)\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} y_i\beta^i \\
&= (y_{k+1} - \beta)\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} y_i\beta^i
\end{aligned}$$

$$= \quad y_{k+1}\beta^{k+1} - \beta^{k+2} + \sum_{i=0}^{k} y_i\beta^i$$

$$= \quad -\beta^{k+2} + \sum_{i=0}^{k+1} y_i\beta^i$$

ด้วยเหตุนี้ จะได้ว่า $\sum_{i=0}^{k+1} x_i\beta^i = -S_{k+2}\beta^{k+2} + \sum_{i=0}^{k+1} y_i\beta^i$

กรณีที่ 2 เมื่อ $S_{k+1} = 1$ และ ตัวทดนำเข้า $c_k = \beta - 1$ เราสามารถแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสองกรณีย่อยได้ คือ กรณีที่ข้อมูลนำเข้า $x_{k+1} \in \mathbb{Z}^+$ และ กรณีที่ ข้อมูลนำเข้า $x_{k+1} \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

กรณีที่ 2.1 เมื่อ $x_{k+1} \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า $x_{k+1} = y_{k+1} + 1$ และ $c_{k+1} = 0$ ด้วยเนื่องจาก $c_{k+1} = 0$ ทำให้เราได้ $S_{k+2} = 0$

จากสมการที่ 3.6 และ $S_{k+1} = 1$ จะได้

$$\sum_{i=0}^{k+1} x_i\beta^i \quad = \quad x_{k+1}\beta^{k+1} - (1)\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} y_i\beta^i$$

$$= \quad (x_{k+1} - 1)\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} y_i\beta^i$$

$$= \quad y_{k+1}\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} y_i\beta^i$$

$$= \quad \sum_{i=0}^{k+1} y_i\beta^i$$

ด้วยเหตุนี้ จะได้ว่า $\sum_{i=0}^{k+1} x_i\beta^i = -S_{k+2}\beta^{k+2} + \sum_{i=0}^{k+1} y_i\beta^i$

กรณีที่ 2.2 เมื่อ $x_{k+1} \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ จะได้ว่า $x_{k+1} = y_{k+1} - \beta + 1$ และ $c_{k+1} = \beta - 1$ ด้วยเนื่องจาก $c_{k+1} = \beta - 1$ ทำให้เราได้ $S_{k+2} = 1$

จากสมการที่ 3.6 และ $S_{k+1} = 1$ จะได้

$$\sum_{i=0}^{k+1} x_i\beta^i \quad = \quad x_{k+1}\beta^{k+1} - (1)\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} y_i\beta^i$$

$$= \quad (x_{k+1} - 1)\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} y_i\beta^i$$

$$= \quad (x_{k+1} - 1 + \beta - \beta)\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} y_i \beta^i$$

$$= \quad -\beta^{k+2} + (x_{k+1} + \beta - 1)\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} y_i \beta^i$$

$$= \quad -\beta^{k+2} + y_{k+1}\beta^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} y_i \beta^i$$

$$= \quad -\beta^{k+2} + \sum_{i=0}^{k+1} y_i r^i$$

ด้วยเหตุนี้ จะได้ว่า $\sum_{i=0}^{k+1} x_i \beta^i = -S_{k+2}\beta^{k+2} + \sum_{i=0}^{k+1} y_i \beta^i$

จากการพิสูจน์ในทุกกรณี สามารถสรุปได้ว่า $\|X\| = \|Y\|$

หลังจากที่ผู้วิจัยได้แสดงบทพิสูจน์ความถูกต้องของขั้นตอนวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้แล้ว เพื่อเพิ่มความเข้าใจให้มากขึ้น ในบทต่อไปจะเป็นการแสดงตัวอย่างของการแปลงชุดตัวเลขจากระบบจำนวนซ้ำซ้อนไปอยู่ในรูปแบบของส่วนเติมเต็ม ทั้งในลักษณะที่ค่าเชิงตัวเลขเป็นจำนวนบวกและจำนวนลบ