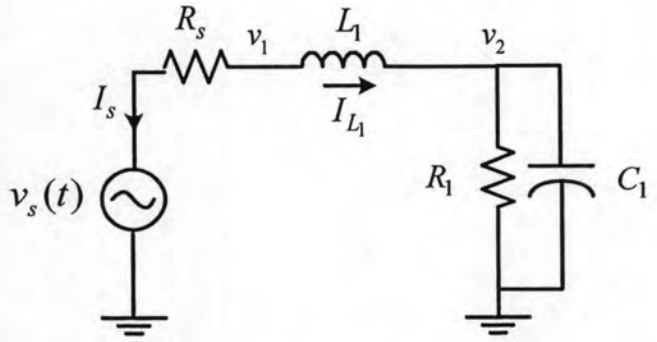
บทที่ 2

งานวิจัยก่อนหน้า

2.1 การวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงเวลาของวงจรไฟฟ้า

การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าคือการหาค่าของตัวแปรต่างๆในวงจรไฟฟ้าเช่น แรงดัน หรือ กระแส โดยอาศัยสมการคุณลักษณะทางไฟฟ้าของอุปกรณ์ต่างๆ ร่วมกับสมการความสัมพันธ์ของตัวแปรจากอุปกรณ์ที่สร้างจากหลักการพื้นฐานของวงจรไฟฟ้าเช่น Kirchhoff's Voltage Law (KVL) หรือ Kirchhoff's Current Law (KCL) ในการหาค่าตัวแปรต่างๆ ซึ่งวิธีหนึ่งที่ใช้อย่างแพร่หลายในการสร้างสมการความสัมพันธ์คือสมการโนด (Nodal Equation, NE) ที่ใช้ความสัมพันธ์ของกระแสรวมที่จุดต่างๆของวงจรตามหลัก KCL เพื่อหาค่าแรงดันที่จุดต่างๆของวงจร แต่วิธี NE มีปัญหาเมื่อใช้กับอุปกรณ์บางตัวเช่นแหล่งจ่ายแรงดันเนื่องจากมีเพียงกระแสที่เป็นตัวแปร ดังนั้นจึงมีการปรับปรุงให้ใช้ทั้งตัวแปรที่เป็นทั้งแรงดันและกระแสโดยเรียกว่าวิธี Modified Nodal Equation (MNE) [1] โดยยกตัวอย่างการเขียนสมการ MNE ของวงจรในรูปที่ 2-1 ที่ประกอบด้วยแหล่งจ่ายแรงดันแปลผันตามเวลา $v_s(t)$ ที่มีความต้านทานภายใน R_s ต่อกับวงจร RLC ดังรูปที่ 2-1

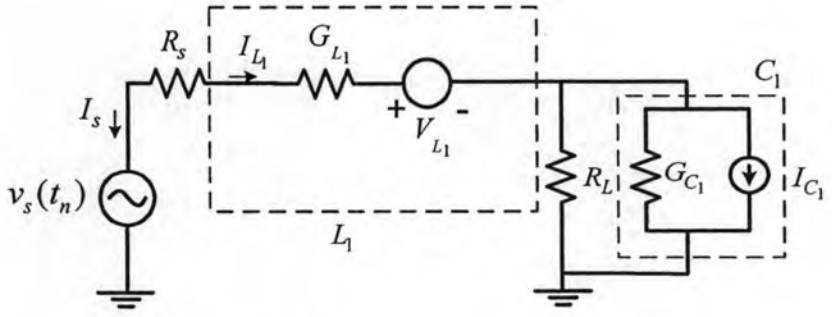


รูปที่ 2-1ตัวอย่างวงจรไฟฟ้าวงจรหนึ่ง

$$
\begin{aligned}
i_s + \frac{(v_1 - v_s)}{R_s} &= 0 \\
\frac{(v_s - v_1)}{R_s} + i_L &= 0 \\
i_L + \frac{v_2}{R_1} + C_1 \frac{dv_2}{dt} &= 0 \\
v_1 - v &= L_1 \frac{di_L}{dt}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

การใช้โปรแกรมวิเคราะห์วงจรไฟฟ้านั้นต้องใช้วิธีทางตัวเลขในการแก้สมการ ดังนั้น สมการทั้งหมดต้องเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบของสมการพีชคณิต เช่นกรณีที่เป็นสมการอนุพันธ์ต้องประมาณค่าอนุพันธ์ดังกล่าวด้วยวิธีทางตัวเลข (Differential formula) แบบต่างๆ หรือเป็นสมการไม่เป็นเชิงเส้นต้องประมาณให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นด้วยวิธีต่างๆ เช่นวิธีของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson method ,NR) [2] เป็นต้น โดยคำตอบที่ต้องการในการหาผลวิเคราะห์การทำงานเชิงเวลาของวงจรนั้นคือค่าของแรงดันและกระแส ณ จุดต่างๆในวงจรที่เวลาใดๆ ดังนั้น สมการคุณลักษณะของอุปกรณ์ต่างๆ จะถูกจัดให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้นเทียบกับเวลา เราเรียกว่าแบบจำลองทางเวลา (Time Domain Companion Model) ตัวอย่างแบบจำลองทางเวลาของวงจรในรูปที่ 2-1 แสดงเป็นวงจรสมมูลในรูปที่ 2-2 โดยที่อนุพันธ์ทางเวลาทั้งหมดถูกประมาณค่าด้วยวิธีออลเลอร์แบบกลับหลัง (Backward Euler ,BE)

$$
\begin{aligned}
& i_s + \frac{(v_1(t_n) - v_s(t_n))}{R_s} = 0 \\
& \frac{(v_s(t_n) - v_1(t_n))}{R_s} + i_{L_1}(t_n) = 0 \\
& -i_{L_1}(t_n) + \frac{v_2}{R_1} + C_1\left(\frac{v_2(t_n)}{h_n}\right) = C_1\left(\frac{v_2(t_{n-1})}{h_n}\right) \\
& \frac{v_1(t_n) - v_2(t_n)}{L_1} - \frac{i_{L_1}(t_n)}{h_n} = -\frac{i_{L_1}(t_{n-1})}{h_n}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

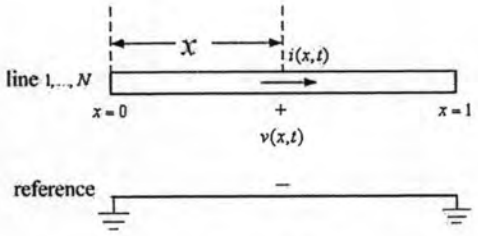


รูปที่ 2-2 แบบจำลองทางเวลาของวงจรในรูปที่ 2-1

จากที่กล่าวมาข้างต้นสายส่งที่มีคุณลักษณ์ทางไฟฟ้าเป็นสมการอนุพันธ์ย่อยของเวลาและระยะในสายนั้นต้องมีการสร้างแบบจำลองทางเวลา ซึ่งตลอดหลายปีที่ผ่านมามีผู้เสนอวิธีการสร้างแบบจำลองทางเวลาในหลากหลายวิธีดังที่จะกล่าวในส่วนต่อไป

2.2 งานวิจัยก่อนหน้า

ดังที่กล่าวมาแล้วว่าการจำลองการหาผลตอบสนองเชิงเวลาของวงจรไฟฟ้าโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นต้องสร้างแบบจำลองเชิงเวลาจากสมการคุณลักษณะของอุปกรณ์ต่างๆก่อน โดยสมการคุณลักษณะของสายส่ง N เส้นไม่ร่วมเส้นอ้างอิงที่แสดงไว้ในรูปที่ 2.1 จะถูกอธิบายโดยใช้สมการ Telegrapher ดังสมการ (2.3)



รูปที่ 2-3 สายส่ง $N+1$ เส้นรวมเส้นอ้างอิง

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\mathbf{v}(x,t)\\ \mathbf{i}(x,t)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & \mathbf{L}\\ \mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\times\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\mathbf{v}(x,t)\\ \mathbf{i}(x,t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & \mathbf{R}\\ \mathbf{G} & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\mathbf{v}(x,t)\\ \mathbf{i}(x,t)\end{bmatrix} \tag{2.3}$$

N เป็นจำนวนสายส่งเทียบกับเส้นอ้างอิง

$\mathbf{L}$ เป็นเมทริกซ์ค่าเหนี่ยวนำต่อหน่วยความยาว ของสายส่ง มีขนาด $N\times N$

$\mathbf{C}$ เป็นเมทริกซ์ค่าความเก็บประจุต่อหน่วยความยาว ของสายส่ง มีขนาด $N\times N$

$\mathbf{G}$ เป็นเมทริกซ์ค่าความนำต่อหน่วยความยาว ของสายส่ง มีขนาด $N\times N$

$\mathbf{R}$ เป็นเมทริกซ์ค่าความต้านทานต่อหน่วยความยาว ของสายส่ง มีขนาด $N\times N$

$\mathbf{v}(x,t)$ เป็นเวกเตอร์แรงดันที่จุดต่างๆในสายส่ง มีขนาด N

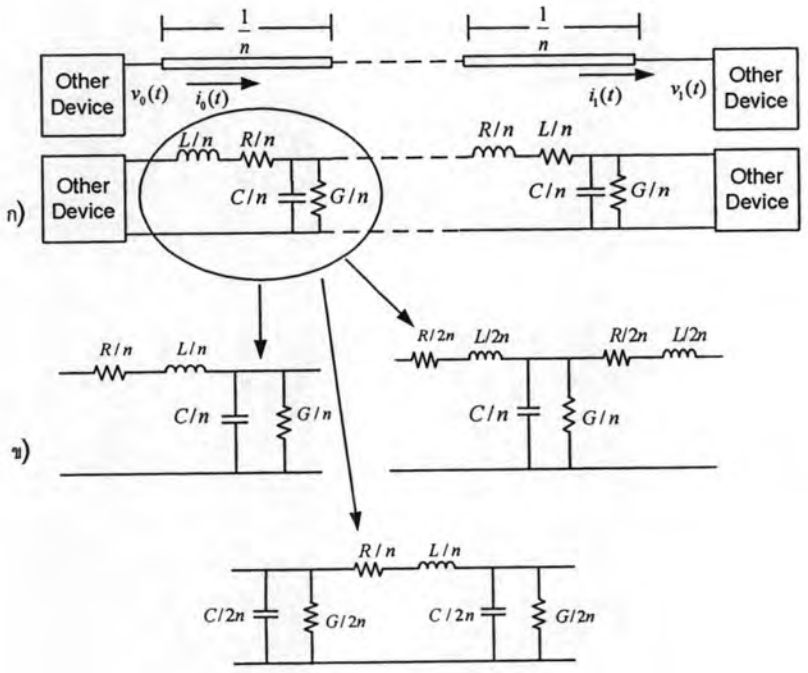
$\mathbf{i}(x,t)$ เป็นเวกเตอร์กระแสที่จุดต่างๆในสายส่ง มีขนาด N

สมการ Telegrapher อยู่ในรูปของอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลาและระยะทางในสายส่ง ซึ่งไม่สะดวกต่อการแก้สมการจุดร่วมที่เป็นสมการเชิงเส้น จึงจำเป็นต้องประมาณอนุพันธ์เชิงระยะทางในสมการ Telegrapher เพื่อให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นของระหว่างแรงดันและกระแสที่ปลายสายส่งแต่ละด้าน ณ เวลาใดๆ จากอดีตถึงปัจจุบันมีผู้ทำวิจัยทางด้านนี้หลายท่าน เราสามารถแบ่งงานวิจัยเหล่านี้เป็นกลุ่มๆได้ดังนี้

2.2.1 Lumped Segmentation

วิธี Lumped segmentation นั้นอาศัยหลักแบ่งสายส่งเป็นท่อนย่อยตามระยะทางจำนวน n ท่อน แล้วแทนท่อนย่อยแต่ละท่อนด้วยวงจรก้อน(Lumped model) ที่สร้างจากค่าพารามิเตอร์

ของสาย โดยแสดงแบบจำลองแบบ Lumped segmentation ของสายส่ง n ท่อนในรูปที่ 2-4 ซึ่งมีวงจรก้อนได้หลายรูปแบบดังแสดงไว้ในรูปที่ 2-4ข)



รูปที่ 2-4 การใช้แบบจำลองแบบ Lumped segmentation ในการวิเคราะห์สายส่ง ก) หลักการของวิธี Lumped segmentation ข) คือวงจรก้อนแบบต่างๆ

เนื่องจากวิธีนี้มีพื้นฐานมาจากการประมาณค่าอนุพันธ์ในเชิงระยะทาง ดังนั้นความแม่นยำจึงขึ้นกับความยาวของท่อนย่อย โดยความยาวของท่อนย่อยที่เหมาะสมจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข $h > \tau$ เมื่อ τ คือค่าประวิงเวลาของท่อนย่อย ซึ่งมีค่า $\tau = \sqrt{LC/n^2}$ และ h คือขนาดขั้นเวลาที่ใช้ในการจำลอง ปี 1974 Wilson [3] ได้เสนอวิธีหาจำนวนท่อนย่อยที่เหมาะสมในกรณีที่รู้ความถี่สูงสุดของสัญญาณที่ส่งผ่านสายส่ง แต่ในทางปฏิบัติก็ยังมีปัญหาในกรณีที่สัญญาณประกอบด้วยองค์ประกอบหลายความถี่เช่น สัญญาณดิจิตอล ทำให้ต้องใช้จำนวนท่อนที่สูงเพื่อความถูกต้องของการวิเคราะห์วงจร อีกทั้งลักษณะของวงจรก้อนที่นำมาแทนยังส่งผลถึงผลตอบสนองความถี่ของสายส่งทั้งเส้นด้วย ตามที่ Triezenberg [4] ได้ทำวิจัยเกี่ยวกับเรื่องนี้ไว้ในปี 1979 จากที่กล่าวมาถึงแม้แบบจำลองแบบนี้มีความสะดวกในการนำมาใช้งาน แต่ไม่สามารถทราบถึงความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากการประมาณได้ ดังนั้นในการใช้งานจริงจึงต้องใช้จำนวนท่อนย่อยที่มากเพื่อให้ผลการวิเคราะห์มีความแม่นยำ

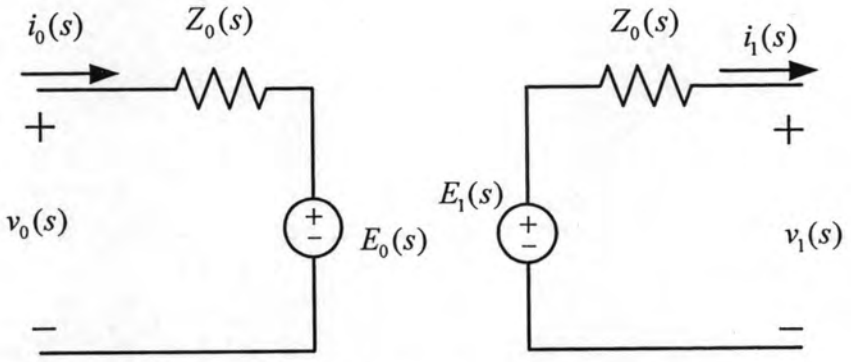
2.2.2 Method of characteristic

วิธีนี้มีพื้นฐานมาจากการจำลองเชิงความถี่ที่ปลายทั้งสองด้านของสายส่งดังรูปที่ 2-5 โดยมีสมการดังนี้

$$E_0(s) = e^{-\tau(s)}\left[V_1(s) - Z(s)I_1(s)\right] \tag{2.4}$$

$$E_1(s) = e^{-\tau(s)}\left[V_0(s) + Z(s)I_0(s)\right] \tag{2.5}$$

โดย $Z(s) = \sqrt{\dfrac{R+sL}{G+sC}}$ และ $\tau(s) = \sqrt{(R+sL)(G+sC)}$



รูปที่ 2-5 แบบจำลองที่ปลายทั้งสองด้านของสายส่งในโดเมนความถี่

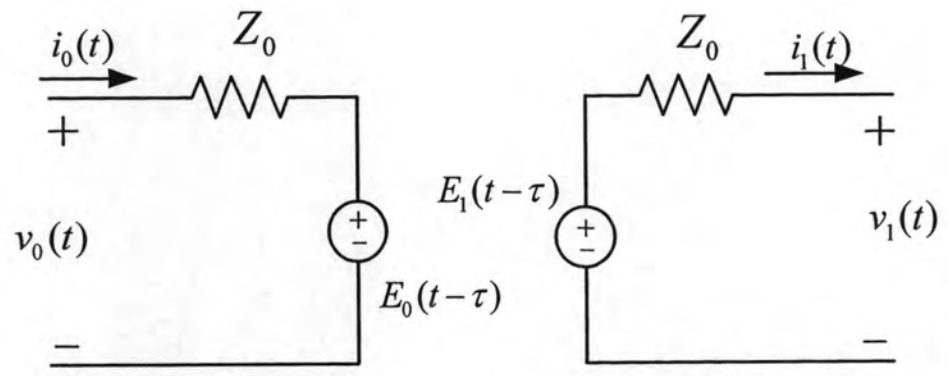
สมการทั้งสองนี้ได้จากการแก้สมการ telegrapher ในโดเมนความถี่ เพื่อแปลงกลับมาในรูปแบบจำลองเชิงเวลาในขั้นตอนต่อไป ปี 1967 Branin [5] เสนอแบบจำลองในกรณีสายส่งไม่มีความสูญเสีย (Lossless Transmission line) ดังรูปที่ 2-6 โดยแบบจำลองทางเวลาจะเป็นตามสมการ

$$E_0(t) = Z_0 J_0(t) = v_1(t) + Z_0 i_1(t) \tag{2.6}$$

$$E_1(t) = Z_0 J_1(t) = v_0(t) - Z_0 i_0(t) \tag{2.7}$$

เมื่อ $Z_0 = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$; $\tau = \sqrt{LC}$

แบบจำลองนี้มีความถูกต้อง 100 % แต่ใช้ได้กับสายส่งที่ไม่มีการสูญเสียเท่านั้น อีกทั้งขนาดของขั้นเวลา (time step) ต้องเป็นสัดส่วนที่หาร τ ได้ลงตัว เนื่องจากต้องใช้ค่าและแรงดันและกระแสที่ปลายที่เวลา $t-\tau$ ในการคำนวณ



รูปที่ 2-6 แบบจำลองทางเวลาของสายส่งที่ไม่มีการสูญเสียตามวิธีของ Branin

ปี 1974 Mayer [6] ได้ปรับปรุงแบบจำลองของ Branin ให้ใช้กับสายส่งที่มีการสูญเสีย (Lossy Transmission Line) โดยเพิ่มฟังก์ชั่นถ่วงน้ำหนัก (weight function) สองตัว ในการคำนวณค่าของแหล่งจ่ายในแบบจำลอง ณ เวลาใดๆ ตามสมการ

$$\begin{aligned} E_0(j\omega) &= A_2(j\omega)\big(v_0(j\omega)+Z_0 i_0(j\omega)\big)+A_1(j\omega)\big(v_1(j\omega)+Z_0 i_1(j\omega)\big) \\ E_1(j\omega) &= A_1(j\omega)\big(v_0(j\omega)+Z_0 i_0(j\omega)\big)+A_2(j\omega)\big(v_1(j\omega)+Z_0 i_1(j\omega)\big) \end{aligned} \tag{2.8}$$

เมื่อ $Z_0 = \lim_{\omega\to\infty}\sqrt{\dfrac{R+L(j\omega)}{G+C(j\omega)}}$ และ $A_1(j\omega)$, $A_2(j\omega)$ เป็นฟังก์ชั่นถ่วงน้ำหนักที่มีค่าเท่ากับ

$$A_1(j\omega) = \frac{1}{\cosh\ \tau(j\omega)+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{z(j\omega)}{z_0}+\dfrac{z_0}{z(j\omega)}\right]\sinh\ \tau(j\omega)} \tag{2.9}$$

$$A_2(j\omega) = \frac{A_1(j\omega)}{2}\left[\frac{z(j\omega)}{z_0}-\frac{z_0}{z(j\omega)}\right]\sinh\ \tau(j\omega) \tag{2.10}$$

เมื่อแปลงกลับมายังโดเมนเวลาจะได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} E_0(t) &= a_2(t)*\big(v_0(t)+Z_0 i_0(t)\big)+a_1(t)*\big(v_1(t)+Z_0 i_1(t)\big) \\ E_1(t) &= a_1(t)*\big(v_0(t)+Z_0 i_0(t)\big)+a_2(t)*\big(v_1(t)+Z_0 i_1(t)\big) \end{aligned} \tag{2.11}$$

โดยเครื่องหมาย * หมายถึง ตัวดำเนินการคอนโวลูชั่น(convolution) ตามนิยาม

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du \tag{2.12}$$

ในทางปฏิบัติค่าของ $a_1(t)$ และ $a_2(t)$ จะถูกคำนวณไว้ล่วงหน้าและใช้การอินทิเกรตทางตัวเลข (Numerical integration) ในการทำคอนโวลูชั่น วิธีดังกล่าวต้องใช้การคำนวณเป็นจำนวนมาก อย่างไรก็ดีแบบจำลองของ Mayer มีความแม่นยำค่อยข้างต่ำ เนื่องจากใช้การประมาณค่า Z_0 ที่ความถี่อนันต์

ในปี 1982 Marti [7] ได้ปรับปรุงวิธีของ Mayer โดยประมาณค่า $Z_0(s)$ และ $e^{\tau(s)}$ ด้วยฟังก์ชั่นตรรกยะ (Rational function) เพื่อเพิ่มความแม่นยำของแบบจำลองที่ความถี่ต่างๆ ดังสมการ

$$Z_0(s) \approx Z_0'(s) = R_0 + \frac{R_1}{1+sR_1C_1} + \frac{R_2}{1+sR_2C_2} + \ldots + \frac{R_n}{1+sR_nC_n} \tag{2.13}$$

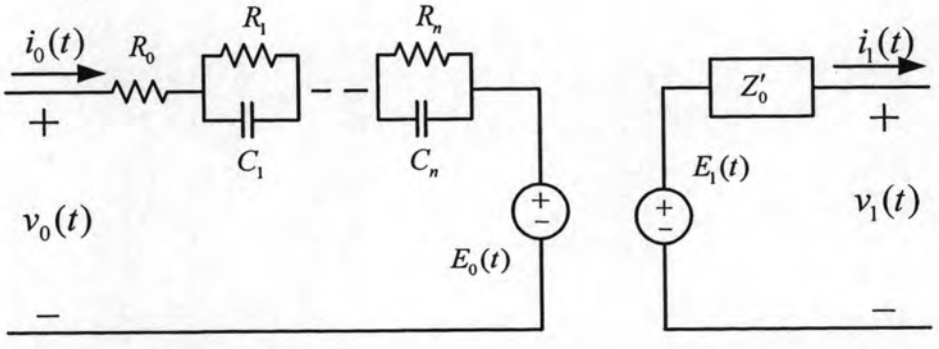
และ

$$e^{-\tau(s)} \approx A(s) = A\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_m)}; \qquad m \geq n \tag{2.14}$$

ดังนั้นสมการของแบบจำลองตามวิธีนี้จะเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E_0(t) &= a_1(t) * v_1(t) - a_2(t) * i_1(t) \\ E_1(t) &= a_1(t) * v_0(t) + a_2(t) * i_0(t) \end{aligned} \tag{2.15}$$

เมื่อ $a_1(t)$ และ $a_2(t)$ เป็นการแปลงค่าลาปลาสกลับ (Inverse Laplace) ของ $A(s)$ และ $A(s)Z_0'(s)$ ตามลำดับ เนื่องจาก $A(s)$ และ $A(s)Z_0'(s)$ เป็นฟังก์ชั่นที่ง่ายต่อการแปลงกลับลาปลาส ทำให้ไม่ต้องคำนวณค่าของ $a_1(t)$ และ $a_2(t)$ ไว้ล่วงหน้าเหมือนของ Mayer จึงสะดวกต่อการนำไปใช้งาน



รูปที่ 2-7 วงจรสมมูลของสายส่งตามวิธี Marti

ปี 1989 Chang [8] ได้เสนอให้ใช้วิธีประมาณค่า $Z_0(s)$ และ $e^{\tau(s)}$ ด้วยฟังก์ชั่นตรรกยะ (Rational function) $Z_e(s)$ และ $A_e(s)$ ตามลำดับด้วยวิธี Pade Approximation [9] และใช้การแปลงกลับฟูเรียร์แบบ Invert Fast Fourier Transform (IFFT) ช่วยในการอินทิเกรตเพื่อเพิ่มความเร็วในการคำนวณ จากนั้นให้ใช้ Waveform Relaxation เพื่อเพิ่มความแม่นยำในการวิเคราะห์การทำงานของวงจร ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1: กำหนดให้ $[0,\mathrm{T}]$ เป็นช่วงเวลาของการวิเคราะห์, k=0 และสมมุติค่าเริ่มต้นของ

$$\{\mathrm{E}_0^0(t),\mathrm{E}_1^0(t);t\in[0,\mathrm{T}]\}$$

ขั้นตอนที่ 2: วิเคราะห์วงจรสายส่งโดยใช้แบบจำลองตามรูปที่ 2-7 โดยที่ใช้ $\mathrm{E}_0^k(t)$ และ $\mathrm{E}_1^k(t)$ เพื่อหา $\{v_0^k(t),\ i_0^k(t),\ v_1^k(t),\ i_1^k(t)\ ;t\in[0,\mathrm{T}]\}$

ขั้นตอนที่ 3: นำผลที่ได้มาคำนวณ

$$\mathrm{E}_0^k(t)=\left(2v_1^k(t)-\mathrm{E}_1^{k-1}(t)\right)*a_e(t)$$

$$\mathrm{E}_1^k(t)=\left(2v_0^k(t)-\mathrm{E}_0^{k-1}(t)\right)*a_e(t)$$

เมื่อ $a_e(t)$ เป็นค่าการแปลงลาปลาซกลับของ $A_e(s)$

ขั้นตอนที่ 4: ถ้า $\mathrm{E}_0^k(t),\ \mathrm{E}_1^k(t)$ ใกล้เคียงกับ $\mathrm{E}_0^{k-1}(t),\ \mathrm{E}_1^{k-1}(t)$ แสดงว่าได้คำตอบของวงจรแล้ว แต่ถ้ายัง ให้กำหนด $k=k+1$ แล้วกลับไปทำขั้นตอนที่ 2

อย่างไรก็ดีวิธีของ Mayer,Marti และ Chang มีปัญหาเหมือนกันเรื่องความไม่มีเสถียรภาพของวงจร เนื่องจากการประมาณค่า $Z_0(s)$ และ $e^{\tau(s)}$ ด้วยฟังก์ชั่นตรรกยะอาจทำให้เกิดขั้ว (pole) ที่เป็นเลขบวก

2.2.3 Convolution และ Recursive Convolution technique

วิธีนี้ใช้การแปลงลาปลาสกับสมการ Telegrapher เป็นสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับระยะทางในลาปลาสโดเมนดังสมการ

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}v(x,s)\\ i(x,s)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & Ls+R\\ Cs+G & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}v(x,s)\\ i(x,s)\end{bmatrix} \tag{2.16}$$

สมการนี้มีผลเฉลยที่ปลายสายส่ง $x=1$ ดังสมการ

$$\begin{bmatrix}i_0(s)\\ -i_1(s)\end{bmatrix}=\frac{Y_0(s)}{e^{\tau(s)}-e^{-\tau(s)}}\begin{bmatrix}e^{\tau(s)}+e^{-\tau(s)} & -2\\ -2 & e^{\tau(s)}+e^{-\tau(s)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_0(s)\\ v_1(s)\end{bmatrix} \tag{2.17}$$

โดย $Y_0(s)=\sqrt{\frac{sC+G}{sL+R}}$; $\tau(s)=\sqrt{(sL+R)(sC+G)}$ จัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

$$Y_0(s)v_0(s)-i_0(s)=e^{-\tau(s)}(Y_0(s)v_1(s)-i_1(s)) \tag{2.18}$$

$$Y_0(s)v_1(s)+i_1(s)=e^{-\tau(s)}(Y_0(s)v_0(s)+i_0(s)) \tag{2.19}$$

แปลงกลับลาปลาซเพื่อหาคำตอบในโดเมนเวลาเป็นตามสมการ

$$h_1(t)*v_0(t)-i_0(t)=h_3(t)*v_1(t)-h_2(t)*i_1(t) \tag{2.20}$$

$$h_1(t)*v_1(t)+i_1(t)=h_3(t)*v_0(t)+h_2(t)*i_0(t) \tag{2.21}$$

โดย $h_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y_0(s)\}$; $h_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\tau(s)}\}$; $h_3(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y_0(s)e^{-\tau(s)}\}$ และ $*$ หมายถึงตัวดำเนินการคอนโวลูชั่น (convolution) ตามสมการ $f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

เนื่องจากการจำลองมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง t ดังนั้น $f(t)*g(t)=\int_{0}^{t}f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ ด้วยเหตุที่วิธีในกลุ่มนี้ใช้การคอนโวลูชั่นกับสมการ Telegrapher โดยตรง จึงต่างจากวิธีของ Mayer,Marti และ Chang ต้องสร้างแบบจำลองของสายส่งขึ้นมาก่อน เราจึงเรียกวิธีในกลุ่มนี้ว่าวิธีคอนโวลูชั่น

ปี 1991 Roychowdhury และ Pederson [10] ได้หา $h_1(t)$, $h_2(t)$ และ $h_3(t)$ โดยการแปลงกลับลาปลาซในกรณีสายส่งหนึ่งเส้นไว้ดังสมการ

$$h_1(t)=Ye^{-\beta t}\left[\beta\left(J_1(\beta t)\right)-\beta\left(J_0(\beta t)\right)+\delta(t)\right] \tag{2.22}$$

$$h_2(t)=e^{-\beta t}\left[u(t-T)\frac{\beta T}{\sqrt{t^2-T^2}}J_1\left(\beta\sqrt{t^2-T^2}\right)+\delta(t-T)\right] \tag{2.23}$$

$$h_3(t)=Ye^{-\beta t}\left[u(t-T)\beta\left\{\frac{t}{\sqrt{t^2-T^2}}J_1\left(\beta\sqrt{t^2-T^2}\right)-J_0\left(\beta\sqrt{t^2-T^2}\right)\right\}+\delta(t-T)\right] \tag{2.24}$$

เมื่อ $T=\sqrt{LC}$, $\beta=\frac{R}{2L}$ และ $Y=\sqrt{\frac{L}{C}}$ โดยที่ $J_0(\bullet)$ และ $J_1(\bullet)$ เป็นเบสเซลฟังก์ชั่น (Bessel function) อันดับที่ 0 และ 1 ตามลำดับ

การคอนโวลูชั่นนั้นจะใช้วิธีอินทริเกรตสี่เหลี่ยมคางหมู(Trapezoidal Rule) และต้องใช้ค่าแรงดันและกระแสตั้งแต่เริ่มต้นถึงปัจจุบันทำให้ใช้เวลามากในการคำนวณ ดังนั้นในปี 1992 Lin [11] ได้เสนอให้นำคอนโวลูชั่นแบบวนกลับมาใช้เพื่อลดการคำนวณ โดยใช้ผลคอนโวลูชั่นของ

หนึ่งขั้นเวลาก่อนหน้ามาคำนวณแทนการใช้ค่าแรงดันและกระแสตั้งแต่เริ่มต้น หลักการของวิธีดังกล่าวเริ่มต้นจากกรณีที่มีความสัมพันธ์ของค่าลาปลาซดังนี้

$$I(s) = Y(s)V(s) \tag{2.25}$$

โดย $Y(s)$ เป็นฟังชั่นตรรกยะตามสมการ

$$Y(s) = \sum_{j=1}^{m} \frac{k_j}{s - q_j} \tag{2.26}$$

ดังนั้น $I(s) = \sum_{j=1}^{m} I_j(s)$ โดย $I_j(s) = \frac{k_j V(s)}{s - q_j}$ เมื่อแปลงกลับค่าลาปลาซ $I(s)$ ได้ว่า

$$i(t) = \sum_{j=1}^{m} i_j(t) \tag{2.27}$$

โดย $i_j(t) = \int_0^t k_j v(\tau) e^{q_j(t-\tau)} d\tau$ เมื่อแบ่งอินทิเกรตออกเป็นสองช่วงคือ 0 ถึง $t-h$ และ $t-h$ ถึง t ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$i_j(t) = \int_{t-h}^{t} k_j v(\tau) e^{q_j(t-\tau)} d\tau + e^{q_j h} i_j(t-h) \tag{2.28}$$

เมื่อใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมูประมาณค่าอินทิเกรตในช่วง $t-h$ ถึง t ได้ผลตามสมการ

$$i_j(t) = \frac{k_j h}{2}[v(t) + e^{q_j h} v(t-h)] + e^{q_j h} i_j(t-h) \tag{2.29}$$

ดังนั้นวิธีการคอนโวลูชั่นแบบวนกลับจึงมีความแม่นยำเทียบเท่าวิธีประมาณค่าแบบสี่เหลี่ยมคางหมูและสามารถลดเวลาที่ใช้คำนวณได้ อย่างไรก็ดีเมื่อนำวิธีนี้มาใช้กับสายส่งต้องประมาณค่า $Y_0(s)$, $e^{-\lambda(s)}$ และ $Y_0(s)e^{-\lambda(s)}$ ด้วยฟังก์ชั่นตรรกยะ (Rational function) ตามวิธี Pade Approximation [9] หรือ Pade via Lancozs (PVL) [12] เพื่อให้อยู่ในรูปแบบตามสมการ (2.26) ดังนั้นความแม่นยำและเสถียรภาพของแบบจำลองจะขึ้นอยู่กลับวิธีการประมาณค่าด้วยฟังก์ชั่นตรรกยะ

2.2.4 Numerical Inverse Lasplace Transform (NILT)

Griffith และ Nakhla (1990) [13] เสนอวิธีหาค่าแรงดันและกระแส ณ เวลาใดๆ ของวงจรเชิงเส้นที่ประกอบด้วยสายส่ง โดย Griffith และ Nakhla ได้เสนอให้วิเคราะห์แรงดันและกระแส ณ จุดต่างๆ ของวงจรในลาปลาซโดเมน แล้วจึงแปลงแปลงกลับเพื่อหาคำตอบโดเมนเวลา ซึ่งต่างกับวิธีคอนโวลูชั่นที่หาผลวิเคราะห์ในโดเมนเวลาเลย ถึงแม้ทั้งสองวิธีจะเริ่มจากสมการแบบจำลองในลาปลาซโดเมนเหมือนกัน หลักการของ NILT จะใช้ได้กับวงจรที่อุปกรณ์ทั้งหมดเป็นอุปกรณ์เชิงเส้น ทำให้สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันและกระแสของอุปกรณ์ต่างๆ ได้ดังสมการ

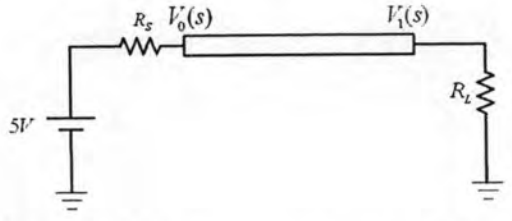
$$I(s) = Y(s)V(s) \tag{2.30}$$

ในกรณีสายส่งหนึ่งเส้นความสัมพันธ์ของแรงดันและกระแสที่ปลายสายจะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} I_0(s) \\ -I_1(s) \end{bmatrix} &= \frac{Y_0(s)}{e^{\tau(s)} - e^{-\tau(s)}} \begin{bmatrix} e^{\tau(s)} + e^{-\tau(s)} & -2 \\ -2 & e^{\tau(s)} + e^{-\tau(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0(s) \\ V_1(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.31}$$

โดย $Y_0(s) = \sqrt{\dfrac{sC+G}{sL+R}}$; $\tau(s) = \sqrt{(sL+R)(sC+G)}$ ซึ่งความสัมพันธ์ของแรงดันและกระแสในโดเมนลาปลาซของสายส่งจึงมีลักษณะเป็นเชิงเส้น

วงจรตัวอย่างในรูปที่ 2-8 เมื่อแทนลาปลาสของอุปกรณ์ทุกตัว ค่าลาปลาซของแรงดันและกระแสที่โนดต่างๆได้ เช่น $V_0(s), V_1(s), I_0(s), I_1(s)$ สามารถเขียนความสัมพันธ์ในเทอมอินพุทลาปลาซได้ตามสมการ (2.32)



รูปที่ 2-8 วงจรสำหรับแสดงการคำนวณตามวิธี NILT

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_S} & \dfrac{1}{R_S} + H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ 0 & H_{12}(s) & H_{12}(s) + \dfrac{1}{R_L} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_S(s) \\ V_0(s) \\ V_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

จากสมการ (2.32) เราสามารถหาแรงดันในโดเมนลาปลาซได้ และเพื่อให้ได้คำตอบในโดเมนของเวลาจึงใช้วิธีแปลงกลับลาปลาซตามสมการ

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} V(s)e^{st}ds \tag{2.33}$$

เนื่องจากสมการ (2.33) อยู่ในรูปอินทิเกรตซึ่งยุ่งยากในการคำนวณดังนั้นจึงเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของผลรวมตามขั้นตอนคือ

$$v(t) = \frac{1}{2\pi jt}\int_{c'-j\infty}^{c'+j\infty} V(z/t)e^{z}dz \;;\; z = st \tag{2.34}$$

ทำการประมาณค่า e^z ด้วยวิธี Pade Approximation [9]

$$e^z \approx \xi(z) = \frac{a_0 + a_1 z + ... + a_m z^m}{1 + b_1 z + ... + b_n z^n} \tag{2.35}$$

โดย a_i, b_j เมื่อ $i = 1,....,m$ และ $j = 1,....,n$ เป็นสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการประมาณค่า n, m เป็นอันดับที่ใช้ในการประมาณ เมื่อกระจายเศษส่วนย่อยของ $\xi(s)$ จะได้

$$\xi(z) = \frac{k_1}{(z-z_1)} + \frac{k_2}{(z-z_2)} + ... + \frac{k_{m+n}}{(z-z_{m+n})} \tag{2.36}$$

ดังนั้นเราจึงเขียนสมการแปลงกลับลาปลาซใหม่ได้ว่า

$$v(t) \approx \frac{1}{2\pi jt}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} V(z/t)\xi(z)dz \tag{2.37}$$

เมื่อใช้ทฤษฎีส่วนตกค้าง (Residue theorem) ช่วยการอินทิเกรต จะได้ว่า

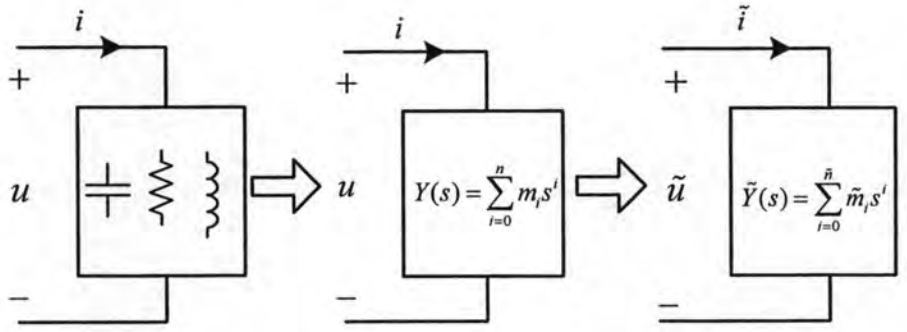
$$v(t) \approx -\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m+n} k_i V(z_i/t) \tag{2.38}$$

การที่อุปกรณ์ต่างๆในวงจรจำเป็นจะต้องมีคุณสมบัติเป็นเชิงเส้นนับเป็นข้อจำกัดสำคัญของวิธี NILT ดังนั้นในปี 1994 Manney และ Nakhla [14] จึงปรับปรุงวิธีดังกล่าวให้สามารถใช้กับวงจรที่มีอุปกรณ์ไม่เป็นเชิงเส้น โดยใช้วิธี Newton-Raphson ประมาณฟังก์ชั่นไม่เป็นเชิงเส้นให้เป็นเชิงเส้นก่อน แต่กลับทำให้เกิดข้อจำกัดใหม่ซึ่งเกิดจากวิธี Newton-Raphson ที่เป็นการ

คำนวณแบบวนซ้ำ (iteration) ทำให้ต้องแบ่งเวลาออกเป็นช่วงเล็กๆ ทำให้ศูนย์เสียข้อดีของวิธี NILT ไป

2.2.5 Model Order Reduction (MOR)

MOR เป็นวิธีประมาณความนำขาเข้า (input admittance) ของวงจร RLC แบบ N พอร์ต (port) โดยอาศัยหลักการที่ว่าเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของแรงดันและกระแสที่พอร์ตขาเข้าของวงจร RLC ด้วยฟังก์ชั่นตรรกยะได้ ดังแสดงในรูปที่ 2-9 หลักการประมาณความนำเข้าของวงจร 1 พอร์ต ด้วยวิธี MOR ที่ $\tilde{n} < n$ กำหนดให้วงจร RLC ดังกล่าวมีจำนวนอันดับ(Order) เท่ากับ n เพื่อให้ลดงานที่ใช้ในการคำนวณ จึงประมาณฟังชั่นดังกล่าวด้วยฟังก์ชั่นตรรกยะที่มีอันดับ $\tilde{n}$ ที่ลดลง กล่างคือ $\tilde{n} < n$



รูปที่ 2-9 หลักการประมาณความนำเข้าของวงจร 1 พอร์ต ด้วยวิธี MOR ที่ $\tilde{n} < n$

ความแม่นยำของการประมาณจะวัดด้วยจำนวนโมเมนต์ของความนำทั้งสองที่จับคู่เท่ากัน โมเมนต์เหล่านี้หาได้จากการกระจายอนุกรมเทเลอร์ (Taylor Series Expansion) กล่าวคือ เมื่อให้

$$Y(s)=\sum_{i=0}^{\infty} m_i s^i \quad ; \; m_i \text{ คือโมเมนต์อันดับที่ } i \text{ ของ } Y(s)$$

$$\tilde{Y}(s)=\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{m}_i s^i \quad ; \; \tilde{m}_i \text{ คือโมเมนต์อันดับที่ } i \text{ ของ } \tilde{Y}(s)$$

จะได้ว่า $\tilde{Y}(s)$ สามารถประมาณ $Y(s)$ ได้ถึงโมเมนต์อันดับที่ l เมื่อ $m_i = \tilde{m}_i \quad ; i = 0,1,...,l$

ที่ผ่านมามีผู้เสนอการประมาณตามหลักการนี้อยู่หลายวิธี ในที่นี้เราจะเสนอวิธีที่มีชื่อเสียงมาสองวิธี ได้แก่

a) วิธี Asymptotic Waveform Evaluation (AWE) ได้แก่งานวิจัยของ Tang (1992)[15] หรือ Das (1997) [16] วิธีนี้จะเขียน $\tilde{Y}(s)$ ให้อยู่ในรูป

$$\tilde{Y}(s)=\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{k_i}{s-q_i} \tag{2.39}$$

เนื่องจากมีตัวแปร k_i กับ q_i ให้เลือกค่าถึง $2\tilde{n}$ ตัว วิธีนี้จึงสามารถจับคู่โมเมนต์ระหว่าง $\tilde{Y}(s)$ กับ $Y(s)$ ได้มากถึงอันดับที่ $2\tilde{n}-1$ แต่ q_i อาจเป็นเลขเชิงซ้อนที่มีค่าจริงเป็นบวกได้ทำให้ $\tilde{Y}(s)$ ไม่มีเสถียรภาพเชิงเวลา

b) วิธี Passive Reduced-order Interconnect Macro-modeling Algorithm (PRIMA) [17] ที่นำเสนอโดย Odabasioglu ในปี 1998 วิธีนี้จะต้องหาที่มาของ $Y(s)$ ในรูปของสมการสถานะก่อน กล่าวคือ $Y(s)=i(s)/u(s)$ จะมีที่มาจากสมการ

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \text{ และ } i = \mathbf{L}^T\mathbf{x}$$

โดย $\mathbf{x}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงดันและกระแสในวงจร และ $\mathbf{C}, \mathbf{G}, \mathbf{B}, \mathbf{L}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ขนาด $N \times N$ ของวงจร ดังนั้น

$$Y(s) = \mathbf{L}^T(\mathbf{G}+s\mathbf{C})^{-1}\mathbf{B} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i s^i} \tag{2.40}$$

จากนั้นวิธีนี้จะสร้างเมทริกซ์การแปลง (Transformation Matrix) $\mathbf{X}$ ขนาด $N \times \tilde{n}$ ที่แผ่ (span) ทั่วปริภูมิไครลอฟ(Krylov space) $Kr(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}, \mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}, \tilde{n})$ แล้วนำมาสร้างสมการสถานะของวงจรประมาณ $\tilde{Y}(s)$ ดังนี้

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{C}\mathbf{X})\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = -(\mathbf{X}^T\mathbf{G}\mathbf{X})\tilde{\mathbf{x}} + (\mathbf{X}^T\mathbf{B})\tilde{u} \;\; ; \;\; \tilde{i} = (\mathbf{L}^T\mathbf{X})\tilde{\mathbf{x}} \tag{2.41}$$

ดังนั้น $\tilde{Y}(s)$ ซึ่งเท่ากับ $\tilde{i}(s)/\tilde{u}(s)$ จะจับคู่โมเมนต์กับ $Y(s)$ ได้ถึง $\tilde{n}$ ตัว แม้วิธีนี้จะจับคู่ได้น้อยกว่าวิธี AWE แต่ก็สามารถรับประกันได้ว่า $\tilde{Y}(s)$ จะเป็นวงจรเฉื่อยงาน (passive) และมีเสถียรภาพทางเวลาเสมอ

เนื่องจากวิธี MOR เป็นการประมาณค่าผลตอบสนองในโดเมนความถี่ด้วยโมเมนที่น้อยกว่า จึงส่งผลต่อความแม่นยำในแต่ละช่วงความถี่ ซึ่งมีหลายงานวิจัยที่พยายามขยายขอบเขตของช่วงความถี่ให้ครอบคลุมได้กว้างขึ้นเช่น วิธีของ Beyene [18] ที่แบ่งโพล (Pole) ออกเป็นกลุ่มย่อยๆ แล้วใช้โพลหลักของกลุ่มเป็นตัวแทน เป็นต้น

สรุปแล้วการนำวิธี MOR มาใช้กับสายส่งจะต้องประมาณค่าสายส่งด้วยวิธีแบ่งท่อน (Segmentation) เสียก่อนเพื่อให้สามารถหาโมเมนต์หรือสร้างสมการสถานะที่ต้องการ แล้วจึงลดอันดับตามขั้นตอนของแต่ละวิธีดังกล่าวข้างต้น ด้วยเหตุนี้ความแม่นยำของการประมาณจึงไม่ดีไปกว่าวิธีแบ่งท่อน เพียงแต่ลดความซับซ้อนของการคำนวณลงได้เท่านั้น