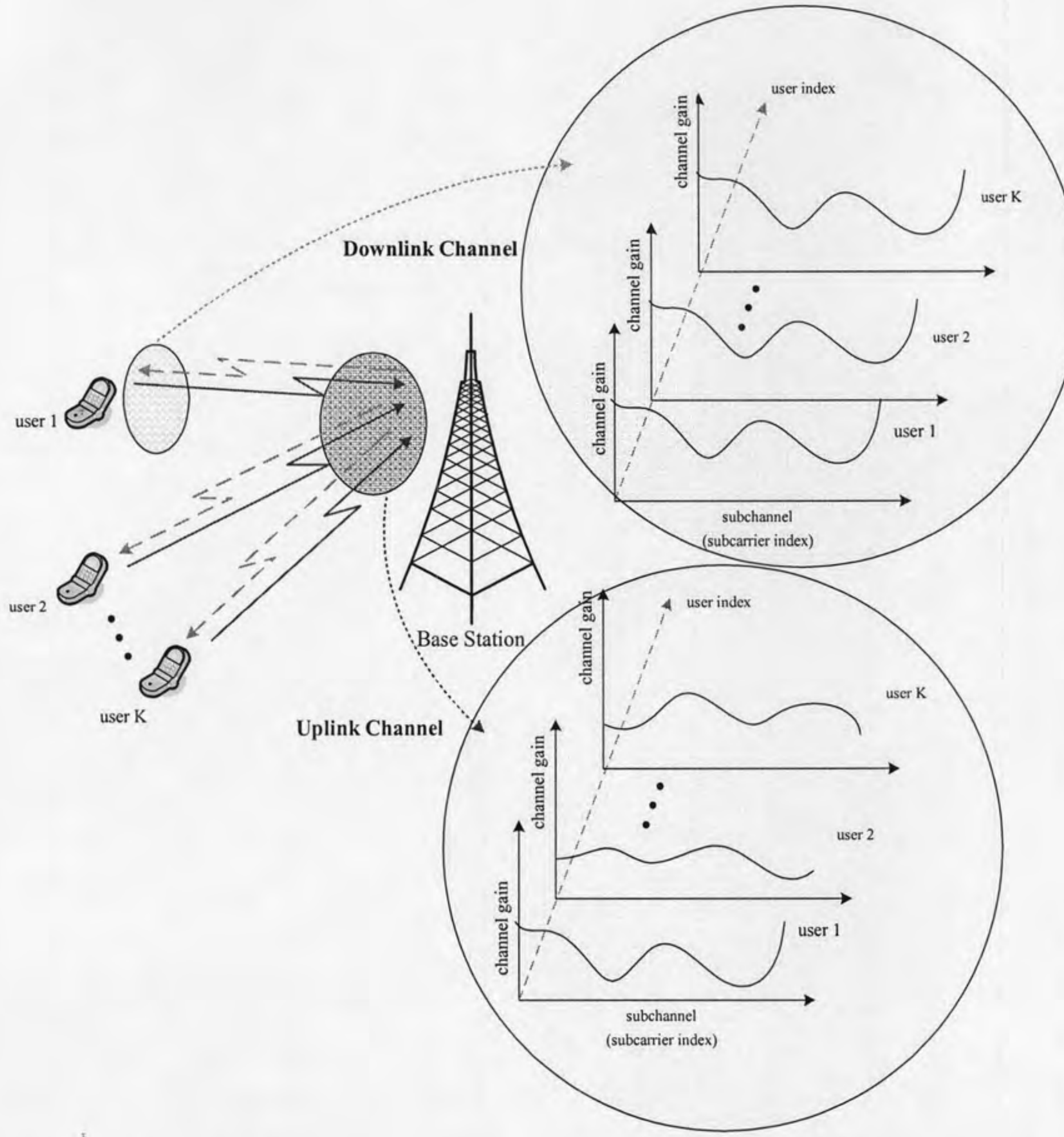
บทที่ 3

การทำให้เครื่องรับส่งเหมาะที่สุดสำหรับข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นหลายผู้ใช้ในระบบมัลติแคร์เรียร์ซีดีเอ็มเอ

จากพื้นฐานระบบมัลติแคร์เรียร์ซีดีเอ็มเอ และการหาค่าเหมาะที่สุดดังที่กล่าวมาในบทที่แล้วนั้น ในบทนี้จะกล่าวถึงการนำพื้นฐานของระบบมัลติแคร์เรียร์ซีดีเอ็มเอมาใช้ในการออกแบบระบบซึ่งมีการใช้พรีโคดเดอร์ที่เครื่องส่ง และตัวตรวจหาที่เครื่องรับ โดยพรีโคดเดอร์ที่เครื่องส่งถูกใช้เพื่อการจัดสรรกำลังงานในแต่ละคลื่นพาห์ย่อยของผู้ใช้แต่ละรายให้เหมาะสมกับสถานะช่องสัญญาน โดยตัวตรวจหาที่เครื่องรับจะมีค่าเปลี่ยนแปลงสัมพันธ์กับค่าพรีโคดเดอร์ที่ใช้ที่เครื่องส่ง เพื่อใช้บนช่องสัญญาณเฟดดิงพหุวิถีในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นซึ่งมีผู้ใช้หลายรายในระบบ จากนั้นจึงนำสมการของแบบจำลองของระบบที่ประกอบด้วยพรีโคดเดอร์และตัวตรวจหาที่ได้มาหาคำตอบโดยการประยุกต์ใช้เทคนิคการหาค่าเหมาะที่สุดเพื่อหาค่าพรีโคดเดอร์และตัวตรวจหาดังกล่าว

3.1 แนวคิดที่นำเสนอ

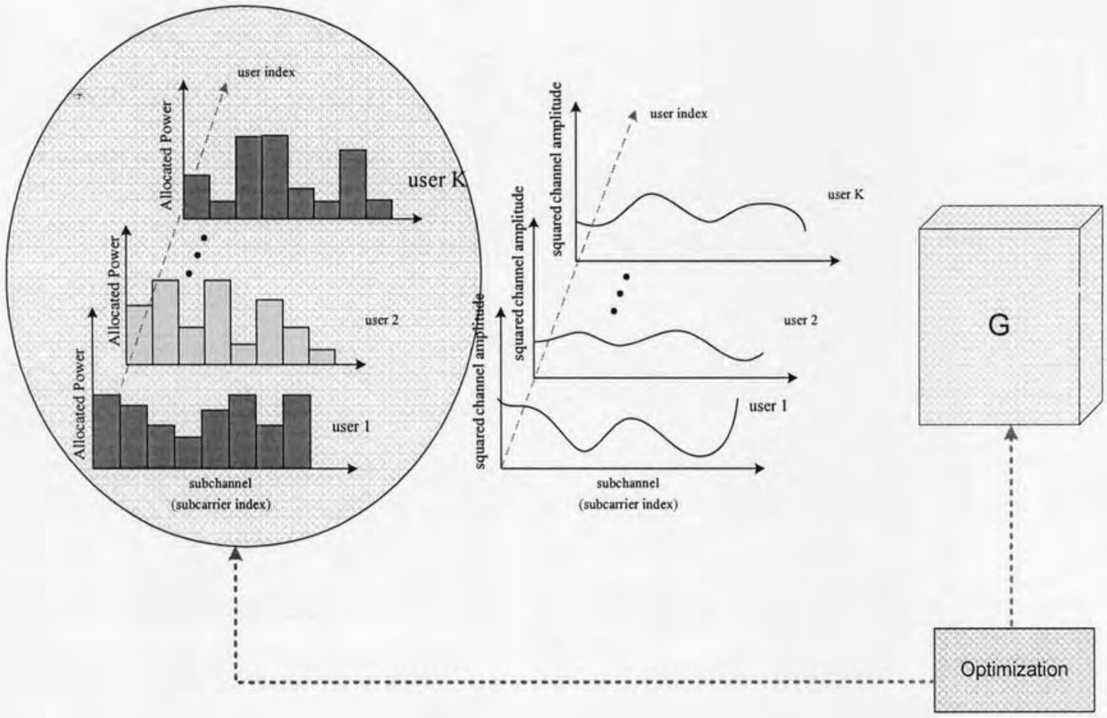
ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นนั้นแตกต่างจากในข่ายเชื่อมโยงขาลง โดยในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นนั้น สัญญาณข้อมูลของผู้ใช้แต่ละรายจากโทรศัพท์เคลื่อนที่ จะถูกส่งออกจากตำแหน่งที่แตกต่างกันไปยังสถานีฐาน โดยพิจารณาสัญญาณที่รับได้ที่สถานีฐาน ซึ่งประกอบด้วยสัญญาณของผู้ใช้แต่ละรายซึ่งถูกรบกวนด้วยค่าสัมประสิทธิ์ช่องสัญญาณที่แตกต่างกันรวมกัน แตกต่างจากกรณีในข่ายเชื่อมโยงขาลงซึ่งพิจารณาสัญญาณที่รับได้ที่เครื่องรับโทรศัพท์เคลื่อนที่ของผู้ใช้รายที่สนใจ ซึ่งสัญญาณของผู้ใช้ทุกรายที่ส่งออกจากสถานีฐานนั้นจะถูกรบกวนด้วยค่าสัมประสิทธิ์ช่องสัญญาณด้วยค่าเดียวกัน แสดงดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 สัมประสิทธิ์ช่องสัญญาณ ในข่ายเชื่อมโยงขาลง และในข่ายเชื่อมโยงขา ของระบบมัลติแคร์เรียร์ซีดีเอ็มเอ

วิธีการดั้งเดิมที่ใช้ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้น โดยการแก้ปัญหาที่เครื่องรับเพียงด้านเดียวซึ่งใช้เครื่องรับแบบที่ให้ค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดแบบผู้ใช้หลายราย โดยเครื่องรับชนิดนี้จะทำการหาค่าตัวตรวจหาที่ใช้ที่เครื่องรับเพื่อแยกสัญญาณข้อมูลของผู้ใช้แต่ละรายออกจากกันบนเกณฑ์ที่ให้ค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด โดยเครื่องรับชนิดนี้จะพิจารณาว่าค่ากำลังงานในแต่ละคลื่นพาห์ย่อยที่เครื่องส่งใช้นั้นเป็นเอกรูป อย่างไรก็ดีวิธีการนี้สัญญาณที่รับได้ที่สถานีฐานซึ่งประกอบด้วยสัญญาณข้อมูลของผู้ใช้โทรศัพท์เคลื่อนที่แต่ละรายซึ่งถูกส่งออกจากสถานที่แตกต่างกันจะถูกลดทอนด้วยค่าสัมประสิทธิ์ช่องสัญญาณที่แตกต่างกัน ส่งผลให้การที่

เครื่องส่งของผู้ใช้แต่ละรายที่ใช้ค่ากำลังงานในแต่ละคลื่นพาห์ย่อยเป็นเอกรูปนั้น ที่เครื่องรับที่สถานีฐานเมื่อรับสัญญาณที่ได้ของผู้ใช้ทุกรายรวมกันแล้วใช้ตัวตรวจหาดังกล่าวแล้ว จึงได้สมรรถนะที่ได้ในระดับหนึ่ง อย่างไรก็ตามหากเครื่องรับที่สถานีฐานสามารถส่งค่าพรีโคดเดอร์กลับไปยังเครื่องส่งของผู้ใช้โทรศัพท์เคลื่อนที่แต่ละรายเพื่อทำการจัดสรรกำลังงานในแต่ละคลื่นพาห์ย่อยให้เหมาะสมกับสถานะช่องสัญญาณของผู้ใช้แต่ละราย แล้วใช้ตัวตรวจหาที่เครื่องรับที่สถานีฐานใหม่ซึ่งมีค่าสัมพันธ์กับพรีโคดเดอร์ที่หาค่าได้ บนเกณฑ์ที่ทำให้ค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยของระบบมีค่าต่ำสุด โดยอาศัยเทคนิคการหาค่าเหมาะที่สุดมาใช้ในการหาค่าพรีโคดเดอร์และตัวตรวจหาดังกล่าว ซึ่งเป็นแนวคิดวิธีการปรับปรุงสมรรถนะของระบบที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ดังแสดงในรูปที่ 3.2

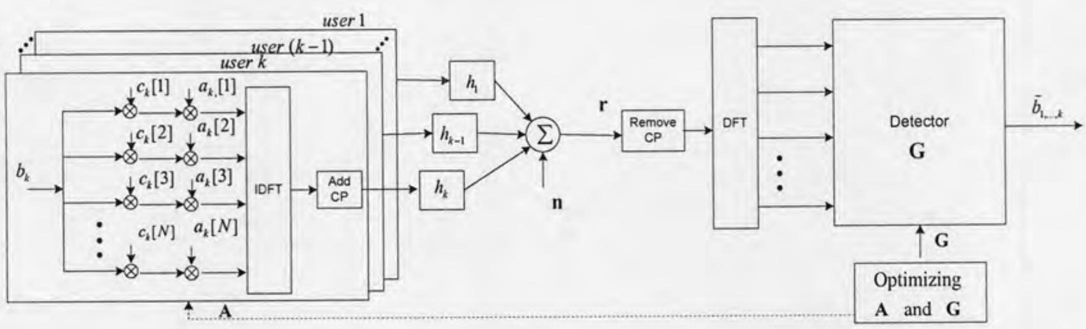


รูปที่ 3.2 แนวคิดที่นำเสนอโดยการออกแบบหาค่าพรีโคดเดอร์ที่เครื่องส่งเพื่อจัดสรรกำลังงานที่ใช้ในแต่ละคลื่นพาห์ย่อยของผู้ใช้แต่ละราย ร่วมกับตัวตรวจหาที่เครื่องรับโดยอาศัยเทคนิกการหาค่าเหมาะที่สุด

จากแนวคิดวิธีการที่นำเสนอเพื่อปรับปรุงสมรรถนะของระบบดังกล่าว จึงนำไปสู่ขั้นตอนในการออกแบบเพื่อหาค่าพรีโคดเดอร์ที่เครื่องส่งและตัวตรวจหาที่เครื่องรับ ดังต่อไปนี้

3.2 ขั้นตอนการออกแบบวิธีการที่นำเสนอ

พิจารณาระบบมัลติแคร์เรียร์ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้น กล่าวคือสัญญาณจากผู้ใช้โทรศัพท์เคลื่อนที่ของผู้ใช้แต่ละรายถูกส่งออกจากสถานที่แตกต่างกัน ผ่านช่องสัญญาณที่มีค่าแตกกต่างกันไปยังเครื่องรับที่สถานีฐาน สัญญาณที่รับได้ที่สถานีฐานจะประกอบด้วยสัญญาณรวมของผู้ใช้ทุกรายซึ่งถูกลดทอนด้วยช่องสัญญาณด้วยค่าที่แตกต่างกันดังกล่าว บวกกับสัญญาณรบกวน และระบบมีการเติมอุปสรรคหมุนวนเพียงพอ แสดงแบบจำลองดังกล่าวได้ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 แบบจำลองระบบที่มีการออกแบบหาค่าพรีโคดเดอร์ที่เครื่องส่งร่วมกับตัวตรวจหาที่เครื่องรับในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้นหลายผู้ใช้ระบบมัลติแคร์เรียร์ซีดีเอ็มเอ

3.2.1 เครื่องส่ง

อธิบายเครื่องส่งได้ดังนี้ โดยสัญญาณข้อมูลของผู้ใช้แต่ละราย b_k จะถูกคูณด้วยรหัสแผ่ของผู้ใช้แต่ราย $\mathbf{c}_k = (c_k[1], c_k[2], ..., c_k[N])^T$ โดยรหัสแผ่ของผู้ใช้แต่ละรายจะมีค่าแตกต่างกัน โดยความยาวของรหัสแผ่ที่ใช้เท่ากับจำนวนคลื่นพาห์ย่อย N หลังจากนั้นสัญญาณที่ได้จะถูกคูณด้วยพรีโคดเดอร์ $\mathbf{a}_k = (a_k[1], a_k[2], ..., a_k[N])^T$ แล้วในแต่ละคลื่นพาห์ย่อยจะถูกมอดูเลชันโดยใช้การแปลงฟูริเยร์ผกผันแบบไม่ต่อเนื่อง สัญญาณที่ได้จะถูกเติมด้วยอุปสรรคหมุนวนก่อนถูกส่งออกไป สามารถเขียนสมการแสดงสัญญาณที่ส่ง $s_k(t)$ ได้ ดังนี้

$$s_k(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_k^i(t - iT_s) \tag{3.1}$$

เมื่อ

$$s_k^i(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} c_k[n] a_k[n] b_k[i] e^{\frac{j2\pi(t-T_{CP})}{T_B}} p_T\left(\frac{t}{T_S}\right)$$

โดย T_S คือความยาวสัญลักษณ์ของมัลติแคร์เรียร์ซีดีเอ็มเอ T_{CP} คือความยาวสัญลักษณ์ของอุปสรรคหมุนวน ดังนั้นความยาวสัญลักษณ์ของมัลติแคร์เรียร์ซีดีเอ็มเอซึ่งไม่รวมความยาวอุปสรรคหมุนวนจะเท่ากับ $T_B = T_S - T_{CP}$ สำหรับ $p_T(t)$ แทนรูปคลื่นสี่เหลี่ยมซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$p_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & otherwise. \end{cases} \tag{3.2}$$

3.2.2 แบบจำลองช่องสัญญาณ

พิจารณาช่องสัญญาณเฟดดิงแบบเลือกความถี่ในข่ายเชื่อมโยงขาขึ้น ซึ่งสัญญาณที่ส่งออกจากโทรศัพท์เคลื่อนที่ของผู้ใช้แต่ละรายถูกส่งออกมาจากตำแหน่งที่แตกต่างกัน ไปยังเครื่องรับที่สถานีฐาน หลังจากนั้นที่สถานีฐานจะทำการประมาณเมทริกซ์ของช่องสัญญาณของผู้ใช้ทุกรายและค่าสหสัมพัทธ์ของสัญญาณรบกวนซึ่งเรียกว่าสถานะช่องสัญญาณ สำหรับช่องสัญญาณเฟดดิงพหุวิถี ของผู้ใช้แต่ละรายจะสามารถแทนได้ด้วยแบบจำลอง (wide sense stationary uncorrelated scattering : WSSUS) โดยสามารถเขียนแบบจำลองช่องสัญญาณเฟดดิงพหุวิถีที่มีจำนวน L วิถี ของผู้ใช้แต่ละรายได้ ดังนี้

$$h_k(\tau, t) = \sum_{l=1}^{L} \alpha_{k,l} \delta(t - \tau_l(t)) \tag{3.3}$$

เมื่อ $\alpha_{k,l}$ คือค่าเชิงซ้อนของอัตราขยายช่องสัญญาณ (complex-value channel gain) สำหรับวิถีลำดับที่ l^{th} ของผู้ใช้ลำดับที่ k^{th} ค่า $\tau_l(t)$ คือเวลาหน่วงสำหรับวิถีลำดับที่ l^{th}

3.2.2 เครื่องรับ

สัญญาณที่รับได้ที่เครื่องรับของสถานีฐานนั้น จะเป็นการรวมกันของสัญญาณที่ถูกส่งออกจากโทรศัพท์เคลื่อนที่ของผู้ใช้แต่ละรายกับค่าผลตอบสนองอิมพัลส์ด้วยการทำสังวัตนาการเชิงเส้น สัญญาณที่รับได้ที่เครื่องรับ $r_k(t)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบเบสแบนด์ (baseband) ในโดเมนเวลาได้ ดังนี้

$$r(t) = \sum_{k=0}^{K-1} r_k(t) + n(t) \tag{3.4}$$

เมื่อ

$$r_k(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_{k,l} \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_k^i(t - \tau_k(l) - iT_S)$$

เนื่องจากการใช้อุปสรรคหมุนวนเพื่อป้องกันการเกิดการรบกวนระหว่างสัญลักษณ์ และด้วยการใช้ตัวดำเนินการแปลงฟูริเยร์แบบไม่ต่อเนื่อง ทำให้เมทริกซ์ช่องสัญญาณมีลักษณะเชิงวงกลม (circulant) และทแยงมุม (diagonal) [22] สัญญาณที่รับได้ที่เครื่องรับจึงสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบในโดเมนความถี่ ได้ดังนี้

$$\mathbf{r} = \sum_{l=1}^{K} \mathbf{H}_l \mathbf{A}_l \mathbf{c}_l b_l + \mathbf{n} \tag{3.5}$$

เมื่อ

$\mathbf{r} = (r[1], r[2], ..., r[N])^T$ แทนสัญญาณที่รับได้ที่เครื่องรับ

$\mathbf{H}_k = diag(H_k[1], H_k[2], ..., H_k[N])$ แทนสัมประสิทธิ์ช่องสัญญาณของผู้ใช้แต่ละราย

$\mathbf{A}_k = diag(a_k[1],\ a_k[2], ..., a_k[N])$ แทนพรีโคดเดอร์ที่ต้องการหาที่เครื่องส่ง

$\mathbf{c}_k = (c_k[1], c_k[2], ..., c_k[N])^T$ แทนรหัสแผ่ของผู้ใช้แต่ละราย

b_k แทนสัญญาณข้อมูลที่ส่งของผู้ใช้แต่ละราย

$\mathbf{n} = (n[1], n[2], ..., n[N])^T$ แทนสัญญาณรบกวน

เมื่อ $\mathbf{H}_k = diag(H_k[1], H_k[2], ..., H_k[N])$ แทนช่องสัญญาณของผู้ใช้แต่ละคนเขียนโดย $H_k[i]$ คือผลตอบสนองทางความถี่ของช่องสัญญาณผู้ใช้ลำดับที่ k^{th} ที่ตำแหน่ง i^{th} ของความถี่ $\omega_i = 2\pi i/n$ จากการแปลงฟูริเยร์ และ $\mathbf{c}_k = (c_k[1], c_k[2], ..., c_k[N])^T$ แทนรหัสแผ่ของผู้ใช้แต่ละราย พรีโคดเดอร์เขียนแทนด้วย $\mathbf{A}_k = diag(a_k[1],\ a_k[2], ..., a_k[N])$ ข้อมูลของผู้ใช้แต่ละรายแทนด้วย b_k ซึ่งถูกจำลองอย่างขนานไปยังแต่ละคลื่นพาห์ย่อย N สำหรับสัญญาณรบกวนนั้นเขียนแทนด้วย $\mathbf{n}$

โดยปกติแล้ววิธีการตรวจหาสัญญาณที่ใช้ที่เครื่องรับเพื่อที่จะให้มีค่าอัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน (signal-to-noise-interference-plus-noise ratio : SINR) มากที่สุดนั้น

จะใช้ตัวตรวจหาแบบที่ให้ค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุด โดยตัวตรวจหาชนิดนี้จะเป็นการหาค่า $\mathbf{G}_k$ ที่จะใช้ที่เครื่องรับเพื่อทำการประมาณสัญญาณข้อมูลของผู้ใช้แต่ละราย ดังนี้

$$\hat{b}_k = \mathbf{G}_k \mathbf{r} \tag{3.6}$$

โดย $\mathbf{G}_k = diag(G_k[1], G_k[2], ..., G_k[N])$ แทนตัวตรวจหาที่ใช้ที่เครื่องรับเพื่อตรวจหาสัญญาณข้อมูลของผู้ใช้แต่ละราย เมื่อคูณสัญญาณที่เครื่องรับรับได้ที่เครื่องรับคือ $\mathbf{r} = (r[1], r[2], ..., r[N])^T$ ด้วยตัวตรวจหา $\mathbf{G}_k$ จะได้สัญญาณข้อมูลที่ตรวจหาได้ของผู้ใช้แต่ละราย $\hat{b}_k$

สามารถเขียนสมการค่าความผิดพลาดของผู้ใช้รายที่ k ได้ โดยค่าความผิดพลาดของผู้ใช้รายที่ k คือ e_k นั้นหาได้จากผลต่างของสัญญาณข้อมูลที่ตรวจหาได้ $\hat{b}_k$ กับ สัญญาณข้อมูลที่ส่ง b_k แล้วทำการแทน $\hat{b}_k$ ด้วย $\mathbf{G}_k \mathbf{r}$ และจัดพจน์ใหม่ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} e_k &= \hat{b}_k - b_k \\ &= \mathbf{G}_k \mathbf{r} - b_k \\ &= \sum_{l=1}^{K} \mathbf{G}_k \mathbf{H}_l \mathbf{A}_l \mathbf{c}_l b_l + \mathbf{G}_k \mathbf{n} - b_k \\ &= (\mathbf{G}_k \mathbf{H}_k \mathbf{A}_k \mathbf{c}_k - 1) b_k + \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^{K} \mathbf{G}_k \mathbf{H}_l \mathbf{A}_l \mathbf{c}_l b_l + \mathbf{G}_k \mathbf{n} \end{aligned} \tag{3.7}$$

จากนั้นนำค่าความผิดพลาด e_k ที่ได้มาหาค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (covariance) ของค่าความผิดพลาดของผู้ใช้แต่ละราย $E\{e_k e_k^H\}$ ได้โดยการแทนค่าความผิดพลาด e_k จากสมการแล้วทำการกระจายพจน์ต่างๆ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E\{e_k e_k^H\} &= E\{b_k b_k^H\}(\mathbf{G}_k \mathbf{H}_k \mathbf{A}_k \mathbf{c}_k - 1)(\mathbf{G}_k \mathbf{H}_k \mathbf{A}_k \mathbf{c}_k - 1)^H + E\{\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{K} (\mathbf{G}_k \mathbf{H}_l \mathbf{A}_l \mathbf{c}_l b_l)(\mathbf{G}_k \mathbf{H}_k \mathbf{A}_k \mathbf{c}_k - 1)^H\} + E\{\mathbf{n} b_k^H\} \mathbf{G}_k (\mathbf{G}_k \mathbf{H}_k \mathbf{A}_k \mathbf{c}_k - 1)^H \\ &+ E\{(\mathbf{G}_k \mathbf{H}_k \mathbf{A}_k \mathbf{c}_k - 1) b_k \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{K} (\mathbf{G}_k \mathbf{H}_l \mathbf{A}_l \mathbf{c}_l b_k)^H\} + E\{\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{K} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{K} (\mathbf{G}_k \mathbf{H}_l \mathbf{A}_l \mathbf{c}_l b_l)(\mathbf{G}_m \mathbf{H}_l \mathbf{A}_l \mathbf{c}_l b_l)^H\} + E\{\mathbf{G}_k \mathbf{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{K} (\mathbf{G}_k \mathbf{H}_l \mathbf{A}_l \mathbf{C}_l b_l)^H\} \\ &+ E\{b_k \mathbf{n}^H\}(\mathbf{G}_k \mathbf{H}_k \mathbf{A}_k \mathbf{c}_k - 1)\mathbf{G}_k^H + E\{\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{K} (\mathbf{G}_k \mathbf{H}_l \mathbf{A}_l \mathbf{c}_l b_k)(\mathbf{G}_k \mathbf{n})^H\} + E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\} \mathbf{G}_k \mathbf{G}_k^H \end{aligned} \tag{3.8}$$

และโดยอาศัยข้อกำหนดคุณสมบัติต่างๆ เมื่อค่าสหสัมพันธ์ของสัญญาณที่ส่งถูกทำให้เป็นบรรทัดฐาน (normalized) สัญญาณของผู้ใช้กับสัญญาณรบกวนไม่สหสัมพันธ์ สัญญาณของผู้ใช้แต่ละรายไม่สหสัมพันธ์ และรู้ค่าเมทริกซ์สหสัมพันธ์ของสัญญาณรบกวน [8] ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &E\{b_k b_k^H\} = 1, \quad k = 1, 2, ..., K \\ &E\{b_k \mathbf{n}^H\} = 0, \quad k = 1, 2, ..., K, \\ &E\{b_k b_l^H\} = 0, \quad k, l = 1, 2, ..., K, \quad k \neq l \\ &E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\} = \mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I} \end{aligned} \tag{3.9}$$

โดยอาศัยคุณสมบัติต่างๆ ดังที่กล่าว เมื่อนำไปแทนค่าในสมการที่ (3.8) จะทำให้สามารถเขียนค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยว ของค่าความผิดพลาดของผู้ใช้รายที่ k คือ $E\{e_k e_k^H\}$ ได้ใหม่ ดังนี้

$$E\{e_k e_k^H\} = (\mathbf{G}_k\mathbf{H}_k\mathbf{A}_k\mathbf{c}_k - 1)(\mathbf{G}_k\mathbf{H}_k\mathbf{A}_k\mathbf{c}_k - 1)^H + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{K}(\mathbf{G}_k\mathbf{H}_l\mathbf{A}_l\mathbf{c}_l)(\mathbf{G}_k\mathbf{H}_l\mathbf{A}_l\mathbf{c}_l)^H + \mathbf{G}_k\mathbf{R}\mathbf{G}_k^H \qquad (3.10)$$

เมื่อให้ค่าผกผันของความแปรปรวนร่วมเกี่ยวของสัญญาณที่รับได้ที่เครื่องรับคือ $\mathbf{W}$ เพื่อนำมาใช้ในการเขียนค่า $E\{e_k e_k^H\}$ ใหม่ โดยค่า $\mathbf{W}$ สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\mathbf{W} = \left(\sum_{k=1}^{K}(\mathbf{H}_k\mathbf{A}_k\mathbf{c}_k\mathbf{c}_k^H\mathbf{A}_k^H\mathbf{H}_k^H) + \sigma^2\mathbf{I}\right)^{-1} \qquad (3.11)$$

โดยเมื่อนำสมการที่ (3.11) ไปแทนในสมการที่ (3.10) จะทำให้สามารถเขียนสมการ $E\{e_k e_k^H\}$ ของผู้ใช้แต่ละรายใหม่ได้ ดังนี้

$$E\{e_k e_k^H\} = \mathbf{G}_k\mathbf{W}^{-1}\mathbf{G}_k^H - \mathbf{G}_k\mathbf{H}_k\mathbf{A}_k\mathbf{c}_k - (\mathbf{G}_k\mathbf{H}_k\mathbf{A}_k\mathbf{c}_k)^H + 1 \qquad (3.12)$$

จากสมการที่ (3.12) สามารถนำไปเขียนในรูปในลักษณะปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดทั่วไปได้ เพื่อหาค่าต่ำสุดบนเกณฑ์ของค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ย โดยเป้าหมายคือการหาค่าพรีโคดเดอร์ $\mathbf{A}_k$ ของผู้ใช้แต่ละรายที่จะถูกใช้ที่เครื่องส่ง ร่วมกับตัวตรวจหา $\mathbf{G}_k$ ที่จะถูกใช้ที่เครื่องรับเพื่อตรวจหาสัญญาณข้อมูล ของผู้ใช้แต่ละราย $\hat{b}_k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} &\underset{\{\mathbf{A}_k,\mathbf{G}_k\},k=1,2,\dots,K}{\text{minimize}} \quad \text{trace}\left(\sum_{k=1}^{K} E\{e_k e_k^H\}\right) \\ &\text{subject to} \quad \text{trace}(\mathbf{A}_k\mathbf{A}_k^H) \le p_k, \quad k = 1,2,\dots,K. \end{aligned} \qquad (3.13)$$

อธิบายสมการที่ (3.13) ได้ดังนี้ โดยเป็นปัญหาการหาค่าต่ำสุด โดยมีฟังก์ชันจุดประสงค์คือค่าความผิดพลาดเฉลี่ยกำลังสองของระบบซึ่งประกอบด้วยผู้ใช้ทุกราย และมีเงื่อนไขบังคับคือกำลังรวมในแต่ละคลื่นพาห์ย่อยของพรีโคดเดอร์ $\mathbf{A}_k$ ซึ่งถูกจำกัด โดยผลรวมของกำลังงานทุกคลื่นพาห์ย่อยของผู้ใช้แต่ละรายมีค่าไม่ให้เกินค่า p_k ของผู้ใช้แต่ละรายที่กำหนด เป้าหมายคือการหาค่าพรีโคดเดอร์ $\mathbf{A}_k$ ซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขบังคับ และตัวตรวจหา $\mathbf{G}_k$ ซึ่งสอดคล้องกับค่าพรีโคดเดอร์ โดยทำให้ผลรวมของค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยทั้งระบบมีค่าต่ำสุด

อย่างไรก็ตามปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด ดังสมการที่ (3.13) นั้นเนื่องจากฟังก์ชันจุดประสงค์ประกอบด้วยตัวตรวจหา $\mathbf{G}_k$ ซึ่งไม่ใช่ตัวแปรในเงื่อนไขบังคับ ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดดังกล่าวจึงเป็นปัญหาไม่คอนเวกซ์ เราจะทำการกำจัดตัวแปร $\mathbf{G}_k$ โดยเขียนให้อยู่ใน

รูปของตัวแปรในเงื่อนไขบังคับ $\mathbf{A}_k$ โดย $\mathbf{G}_k$ ที่ใช้ในเครื่องรับแบบที่ให้ค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดเมื่อทำการคงค่าของ $\mathbf{A}_k$ ไว้ สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{c}_k^H \mathbf{A}_k^H \mathbf{H}_k^H \mathbf{W} \tag{3.14}$$

หลังจากนั้นนำค่า $\mathbf{G}_k$ ในสมการที่ (3.14) ไปแทนในสมการที่ (3.12) จะทำให้สามารถเขียนฟังก์ชันจุดประสงค์ได้ใหม่โดยอยู่ในรูปของการหาค่าตัวพรีโคดเดอร์ $\mathbf{A}_k$ ซึ่งทำให้สมการค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยว ของค่าความผิดพลาดของผู้ใช้รายที่ k คือ $E\{e_k e_k^H\}$ เขียนได้ดังนี้

$$E\{e_k e_k^H\} = -\mathbf{c}_k^H \mathbf{A}_k^H \mathbf{H}_k^H \mathbf{W} \mathbf{H}_k^H \mathbf{A}_k^H \mathbf{c}_k^H + 1 \tag{3.14}$$

และสามารถเขียนค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ย (mean square error : MSE) ของระบบในฟังก์ชันจุดประสงค์ได้ใหม่ โดยใช้ค่า $E\{e_k e_k^H\}$ ที่ได้จากสมการที่ (3.14) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE} &= \mathrm{trace}\left(\sum_{k=1}^{K} E(e_k e_k^H)\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{K}\left(\mathrm{trace}(\mathbf{c}_k^H \mathbf{A}_k^H \mathbf{H}_k^H \mathbf{W} \mathbf{H}_k^H \mathbf{A}_k^H \mathbf{c}_k^H)\right) + (KN) \\
&= -\mathrm{trace}\left(\mathbf{W}\sum_{k=1}^{K}(\mathbf{H}_k \mathbf{A}_k \mathbf{c}_k \mathbf{c}_k^H \mathbf{A}_k^H \mathbf{H}_k^H)\right) + KN \\
&= -\mathrm{trace}\left(\mathbf{W}(\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{R})\right) + KN \\
&= \mathrm{trace}(\mathbf{WR}) + (K-1)N
\end{aligned} \tag{3.15}$$

จากนั้นจะใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปร เพื่อเขียนให้อยู่ในรูปของตัวแปร $\mathbf{U}_k$ โดยกำหนดให้ $\mathbf{U}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^H$ ซึ่งจะทำให้ค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยในฟังก์ชันจุดประสงค์เขียนได้ดังนี้

$$\mathrm{MSE} = \mathrm{trace}\left(\left(\sum_{k=1}^{K}(\mathbf{H}_k \mathbf{c}_k \mathbf{U}_k \mathbf{c}_k^H \mathbf{H}_k^H) + \mathbf{R}\right)^{-1} \mathbf{R}\right) + (K-1)N \tag{3.16}$$

และเงื่อนไขบังคับเขียนได้ใหม่ ดังนี้

$$\mathrm{trace}(\mathbf{U}_k) \le p_k, \quad k = 1,2,\ldots,K \tag{3.17}$$

ดังนั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปปบบปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} &\underset{\{\mathbf{U}_k\},k=1,2,\ldots,K}{\text{minimize}} \quad \text{trace}\left(\left(\sum_{k=1}^{K}(\mathbf{H}_k\mathbf{c}_k\mathbf{U}_k\mathbf{c}_k^H\mathbf{H}_k^H)+\sigma^2\mathbf{I}\right)\sigma^2\mathbf{I}\right) \\ &\text{subject to} \quad \text{trace}(\mathbf{U}_k)\le p_k, \quad k=1,2,\ldots,K. \\ &\qquad\qquad\quad \mathbf{U}_k\succeq 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

เนื่องจากช่องสัญญาณ $\mathbf{H}_k$ และ $\mathbf{U}_k$ นั้นค่าต่างๆอยู่ในแนวทแยง ทำให้สามารถลดรูปเขียนปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{w},\{\mathbf{U}_k\},k=1,2,\ldots,K}{\text{minimize}} \quad \sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2\mathbf{w}[i] \\ &\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{N}\mathbf{u}_k[i]\le p_k, \quad k=1,2,\ldots,K \\ &\qquad \mathbf{w}[i]\left(\sum_{k=1}^{K}\left(|H_k[i]\bullet c_k[i]|^2\,\mathbf{u}_k[i]\right)+\sigma_i^2\right)\ge 1 \\ &\qquad \mathbf{u}_k[i]\ge 0, \quad i=1,2,\ldots,N \\ &\qquad k=1,2,\ldots,K \end{aligned} \tag{3.19}$$

อย่างไรก็ตามเงื่อนไขบังคับ $\mathbf{w}[i]\left(\sum_{k=1}^{K}\left(|H_k[i]\bullet c_k[i]|^2\,\mathbf{u}_k[i]\right)+\sigma_i^2\right)\ge 1$ ในปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดในสมการที่ (3.19) ยังไม่อยู่ในรูปแบบกรวยอันดับสอง ซึ่งเป็นคอนเวกซ์ ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 ทำให้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดดังกล่าว ยังไม่สามารถที่จะใช้ตัวแก้ปัญหาซึ่งอาศัยวิธีจุดภายใน เช่น SeDuMi เพื่อใช้คำนวนหาคำตอบของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์ได้ ดังนั้นจึงทำการแปลงเงื่อนไขบังคับนี้ให้อยู่ในรูปแบบของกรวยอันดับสองเสียก่อน ขั้นตอนสามารถทำได้ดังนี้ เมื่อพิจารณาจากเงื่อนไขบังคับ

$$\mathbf{w}[i]\left(\sum_{k=1}^{K}\left(|H_k[i]\bullet c_k[i]|^2\,\mathbf{u}_k[i]\right)+\sigma_i^2\right)\ge 1 \tag{3.20}$$

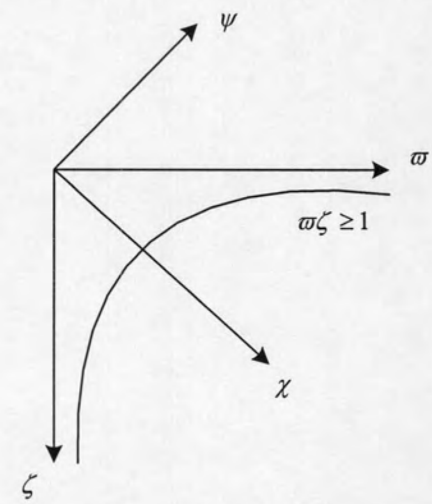
โดยกำหนดให้ ζ แทน $\left(\sum_{k=1}^{K}\left(|H_k[i]\bullet c_k[i]|^2\,\mathbf{u}_k[i]\right)+\sigma_i^2\right)$ และ ϖ แทน $\mathbf{w}[i]$ ทำให้เขียนสมการที่ (3.20) ได้ใหม่ ดังนี้

$$\varpi\zeta\ge 1;\quad \zeta=\sum_{k=1}^{K}\left(|H_k[i]C_k[i]|^2\,\mathbf{u}_k[i]\right)+\sigma_i^2 \tag{3.20}$$

จะทำการแปลงให้อยู่ในรูปแบบกรวยอันดับสอง พิจารณาโดยอาศัยการแปลงพิกัด หรือคือ การแปลงเชิงเส้น (linear transform) ดังนี้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}\varpi\\ \zeta\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\chi\\ \psi\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\chi+\psi\\ \chi-\psi\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.21}$$

ซึ่งสามารถมองการแปลงดังกล่าวในเชิงภาพ ได้ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 การแปลงเชิงเส้นเพื่อทำให้เงื่อนไขบังคับอยู่ในรูปแบบกรวยอันดับสอง

แสดงความสัมพันธ์การแปลง ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}\chi\\ \psi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\varpi\\ \zeta\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\varpi+\zeta\\ \varpi-\zeta\end{bmatrix} \tag{3.22}$$

จากการแปลงดังกล่าว ทำให้เขียนได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}(\chi+\zeta)(\chi-\zeta) &\geq 1\\ \chi^2-\zeta^2 &\geq 1\\ \chi^2 &\geq \zeta^2+1\end{aligned} \tag{3.23}$$

หลังจากนั้นจะทำการแปลงกลับให้อยู่ในรูปของตัวแปรเดิมซึ่งเป็นการหมุนไป $\pi/4$ ได้ โดย ν คือตัวแปรช่วย (slack variable) ดังนี้

$$\begin{aligned}\chi^2 &\geq \zeta^2+\nu^2\\ \nu^2 &\geq 1\end{aligned} \tag{3.24}$$

รายละเอียดการแปลงกลับในรูปของตัวแปรเดิม เขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\varpi+\zeta)^2 &\geq \frac{1}{4}(\varpi-\zeta)^2+\nu^2\\ (\varpi+\zeta)^2 &\geq (\varpi-\zeta)^2+4\nu^2\\ |\varpi+\zeta| &\geq \left\|\begin{bmatrix}\varpi-\zeta\\ 2\nu\end{bmatrix}\right\|\end{aligned} \tag{3.25}$$

ซึ่งจะทำให้ได้ผลการแปลงเงื่อนไขบังคับจาก

$$\mathbf{w}[i]\left(\sum_{k=1}^{K}\left(\left|H_k[i]\bullet c_k[i]\right|^2 \mathbf{u}_k[i]\right)+\sigma_i^2\right)\geq 1 \tag{3.26}$$

เขียนได้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}\varpi+\zeta &\geq \left\|\begin{bmatrix}\varpi-\zeta\\ 2v\end{bmatrix}\right\| \\ v &\geq 1 \quad (v \text{ is slack variable})\end{aligned} \tag{3.27}$$

ทำให้สามารถเขียนปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดจากสมการที่ (3.19) ได้ใหม่ โดยเงื่อนไขบังคับที่ได้ใหม่ดังสมการที่ (3.27) ซึ่งอยู่ในรูปแบบกรวยอันดับสอง และปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดที่เขียนใหม่นี้จึงกลายเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงกรวยอันดับสองซึ่งเป็นคอนเวกซ์ และสามารถนำไปใช้คำนวนด้วยตัวแก้ปัญหาโดยวิธีจุดภายใน เพื่อหาคำตอบของปัญหาดังกล่าวได้ โดยปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงกรวยอันดับสองเป็นรูปแบบหนึ่งของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์ได้ เขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
&\underset{\varpi,\{\mathbf{U}_k\},k=1,2,\ldots,K}{\text{minimize}} && \sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2\varpi \\
&\text{subject to} && \sum_{i=1}^{N}\mathbf{u}_k[i]\leq p_{k,} \quad k=1,2,\ldots,K \\
& && \varpi+\zeta \geq \left\|\begin{bmatrix}\varpi-\zeta\\ 2v\end{bmatrix}\right\| \\
& && \mathbf{u}_k[i]\geq 0, \;\; i=1,2,\ldots,N, \;\; k=1,2,\ldots,K \\
& && v\geq 1. \quad (v \text{ is slack variable}) \\
&\text{where,} && \zeta=\sum_{k=1}^{K}\left(\left|H_k[i]c_k[i]\right|^2\mathbf{u}_k[i]\right)+\sigma_i^2
\end{aligned} \tag{3.28}$$

อธิบายปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดที่ได้ดังสมการที่ (3.28) ได้ดังนี้ โดยจะเป็นการหาคำตอบคือ $\mathbf{U}_k$ ($\mathbf{U}_k=\mathbf{A}_k\mathbf{A}_k^H$) ซึ่งคือกำลังงานในแต่ละคลื่นพาห์ย่อยของผู้ใช้แต่ละราย โดยเมื่อทำการแยก $\mathbf{U}_k$ จากสมการที่กำหนดขึ้น คือ $\mathbf{U}_k=\mathbf{A}_k\mathbf{A}_k^H$ จะทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์ในแต่ละคลื่นพาห์ย่อยของผู้ใช้แต่ละราย $\mathbf{A}_k$ ที่จะถูกใช้ที่เครื่องส่ง และเมื่อนำ $\mathbf{A}_k$ ที่ได้ไปแทนในสมการที่ (3.14) จะได้ตัวตรวจหา $\mathbf{G}_k$ ที่จะถูกใช้ที่เครื่องรับ โดยมีค่าสอดคล้องกันทำให้ค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยของระบบมีค่าต่ำสุด ดังฟังก์ชันจุดประสงค์ที่ใช้ในปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด และเนื่องจากปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดดังกล่าวซึ่งอยู่ในรูปแบบปัญหาปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงกรวยอันดับสองนั้นเป็น ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดคอนเวกซ์ ทำให้ค่าคำตอบที่หาได้เป็นค่าเหมาะที่สุด และเมื่อใช้ตัวแก้ปัญหาซึ่งใช้วิธีจุดภายใน ทำให้ใช้เวลาในการหาคำตอบได้อย่างรวดเร็ว