บทที่ 2

แนวเหตุผลและแนวคิดที่สำคัญ

การประมวลผลจุดเดี่ยวที่ให้ค่าความละเอียดสูง (Precise Point Positioning : PPP) เป็นวิธีการหาตำแหน่งจุดเดี่ยวโดยใช้ทั้งข้อมูลการวัดเฟสของรหัสของคลื่นส่งและข้อมูลการวัดเฟสของคลื่นส่ง โดยแนวความคิดของ PPP จะเกี่ยวข้องกับการลดความคลาดเคลื่อนต่างๆที่ปรากฏในสมการและการแก้สมการเพื่อหาตัวแปรไม่ทราบค่า ได้แก่ ตำแหน่งของเครื่องรับสัญญาณดาวเทียม ความคลาดเคลื่อนของนาฬิกาเครื่องรับ และค่าเลขปริศนาของดาวเทียมแต่ละดวง โดยในบทนี้จะกล่าวถึงแนวคิดเกี่ยวกับการประมวลผลจุดเดี่ยวที่ให้ค่าความละเอียดสูง แนวคิดเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์คือวิธีการคำนวณปรับแก้ค่าพิกัดด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดซึ่งเป็นวิธีการประมวลผลข้อมูล และหัวข้อสุดท้ายพูดถึงแบบจำลองสโตคาสติกที่เลือกใช้ในการประมวลผลข้อมูลในงานวิจัยนี้ โดยมีรายละเอียดในหัวข้อต่างๆดังนี้

2.1 แนวคิดเกี่ยวกับการประมวลผลจุดเดี่ยวที่ให้ค่าความละเอียดสูง (Precise Point Positioning : PPP)

โดยปกติการหาตำแหน่งจุดเดี่ยวจะอาศัยทั้งข้อมูลซูโดเรนจ์และเฟสของคลื่นส่ง ซึ่งมีสมการทางคณิตศาสตร์แสดงในหน่วยระยะทางดังนี้ (Leick,1995)

$$
\begin{aligned}
P(Li) &= \rho + c(dt - dT) + d_{orb} + d_{trop} + d_{ion/Li} + \varepsilon \\
\phi(Li) &= \rho + c(dt - dT) + d_{orb} + d_{trop} - d_{ion/Li} + \lambda_i N_i + \varepsilon
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

โดยที่

- $P(Li)$ คือ ซูโดเรนจ์ที่ได้จากการวัดรหัสของคลื่นส่ง Li (เมตร)
- $\phi(Li)$ คือ ข้อมูลเฟสที่ได้จากการวัดเฟสของคลื่นส่ง Li (เมตร)
- ρ คือ ระยะทางเรขาคณิตระหว่างดาวเทียมและเครื่องรับ (เมตร)
- c คือ ความเร็วของคลื่นส่งหรือความเร็วแสง (เมตร/วินาที)
- dt คือ ความคลาดเคลื่อนของนาฬิกาดาวเทียม (วินาที)
- dT คือ ความคลาดเคลื่อนของนาฬิกาเครื่องรับ (วินาที)
- d_{orb} คือ ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากวงโคจรดาวเทียม (เมตร)

d_{trop} คือ ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากชั้นบรรยากาศโทรโพสเฟียร์ (เมตร)

$d_{ion/Li}$ คือ ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากชั้นบรรยากาศไอโอโนสเฟียร์ของคลื่นส่ง Li (เมตร)

λ_i คือ ความยาวคลื่นของคลื่นส่ง Li (เมตร)

N_i คือ เลขปริศนาของคลื่นส่ง Li (ลูกคลื่น)

ε คือ ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการเกิดคลื่นหลายวิถีและสัญญาณรบกวน(Noise) (เมตร)

แนวคิดของ PPP จะเกี่ยวข้องกับการลดความคลาดเคลื่อนต่างๆที่ปรากฏในสมการที่ (2.1) ดังนี้

2.1.1 เทอม dt และ d_{orb} ใช้ข้อมูลวงโคจรดาวเทียมความละเอียดสูงและค่าแก้นาฬิกาดาวเทียมความละเอียดสูงจากหน่วยงาน IGS (IGS, 2007)โดยใช้ข้อมูลแบบ Final Product ซึ่งมีความละเอียดถูกต้องของตำแหน่งดาวเทียมและค่าแก้นาฬิกาดาวเทียมในระดับต่ำกว่า 5 เซนติเมตร และ0.1 นาโนวินาทีตามลำดับ

2.1.2 เทอม d_{trop} ใช้แบบจำลองความคลาดเคลื่อนในชั้นบรรยากาศโทรโพสเฟียร์แบบ Saastamoinen model รายละเอียดเพิ่มเติมศึกษาได้จาก Saastanoinen (1973)ร่วมกับ Neill Mapping Function รายละเอียดเพิ่มเติมศึกษาได้จาก Niell (1996) โดยมีสมการของเทอม d_{trop} ดังนี้

$$d_{trop} = d^z_{dry}.m_{dry} + d^z_{wet}.m_{wet} \qquad (2.2)$$

โดยที่

d_{trop} คือ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดในชั้นบรรยากาศโทรโพสเฟียร์

d^z_{dry} คือ dry zenith path delay

d^z_{wet} คือ wet zenith path delay

m_{dry} คือ mapping function ของส่วนประกอบแห้ง

m_{wet} คือ mapping function ของส่วนประกอบชื้น

2.1.3 เทอม $d_{ion/Li}$ ใช้แบบจำลอง Ionosphere-free Combination (L3) โดยสร้างสมการขึ้นจากการผสมผสานกันระหว่างข้อมูล L1 และ L2 ดังนี้ (Rizos, 1997; Leick, 1995)

$$P(L3) = \frac{f_1^2 .P(L1) - f_2^2 .P(L2)}{f_1^2 - f_2^2}$$
$$\phi(L3) = \frac{f_1^2 .\phi(L1) - f_2^2 .\phi(L2)}{f_1^2 - f_2^2} \tag{2.3}$$

โดยที่

$P(L3)$ คือ ซูโดเรนจ์ที่ได้จากการผสมผสานระหว่างข้อมูลการวัดรหัสของคลื่นส่ง L1, L2 (เมตร)

$\phi(L3)$ คือ ซูโดเรนจ์ที่ได้จากการผสมผสานระหว่างข้อมูลการวัดเฟสของคลื่นส่ง L1, L2 (เมตร)

$P(L1), P(L2)$ คือ ซูโดเรนจ์ที่ได้จากการวัดเฟสของรหัสของคลื่นส่ง L1และ L2 ตามลำดับ (เมตร)

$\phi(L1), \phi(L2)$ คือ ซูโดเรนจ์ที่ได้จากการวัดเฟสของคลื่นส่ง L1และ L2 ตามลำดับ (เมตร)

f_1^2, f_2^2 คือ ความถี่ของคลื่นส่ง L1,L2 ตามลำดับ (Hz)

จากการใช้แบบจำลองความคลาดเคลื่อนดังที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้น ทำให้สามารถคำนวณค่าของเทอม dt, d_{orb}, d_{trop} และ $d_{ion/Li}$ ในสมการ (2.1) ได้ ส่วนเทอมที่เหลือซึ่งได้แก่ ค่าเลขปริศนาของดาวเทียมแต่ละดวง ค่าความคลาดเคลื่อนเนื่องจากนาฬิกาเครื่องรับ และค่าพิกัดเครื่องรับสัญญาณซึ่งแฝงอยู่ในเทอมของระยะทางเรขาคณิตระหว่างดาวเทียมและเครื่องรับ เทอมต่างๆเหล่านี้จะถูกกำหนดให้เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในสมการซึ่งจะต้องทำการประมาณค่าต่อไป โดยการแก้สมการหาค่าตัวแปรดังกล่าวจะใช้วิธีการคำนวณปรับแก้ค่าพิกัดด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดในหัวข้อถัดไป

2.2 แนวคิดเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นตัวอธิบายถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างค่าสังเกตจากการรังวัดข้อมูลจีพีเอสกับพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า (Leick, 1995) ในงานวิจัยนี้เลือกวิธีการคำนวณปรับแก้ค่าพิกัดด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด โดยสมการค่าสังเกต (Observation equation)

2.2.1 วิธีการคำนวณปรับแก้ค่าพิกัดด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

วิธีกำลังสองน้อยที่สุดเป็นวิธีการคำนวณที่ใช้กันอย่างแพร่หลายโดยเฉพาะในงานทางด้านวิศวกรรมสำรวจ ซึ่งเป็นวิธีการที่ให้ค่าผลลัพธ์เป็นเอกภาพ ในการประมวลผลข้อมูลจีพีเอส วิธีกำลังสองน้อยที่สุดโดยสมการค่าสังเกตจะเป็นวิธีที่ใช้กันทั่วไป (Rizos, 1997) ซึ่งมีรายละเอียดในการคำนวณดังนี้

จากสมการ (2.1) ให้ เวคเตอร์ x ประกอบด้วยพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าซึ่งใช้ในการคำนวณปรับแก้ค่าพิกัดด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้สมการค่าสังเกตดังนี้

$$l_i = A_i x + v_i ; i = 1,2,\ldots,n \tag{2.4}$$

ซึ่งมี

$$\begin{aligned} l_i &= [l_i(1), l_i(2),\ldots, l_i(s)]^T ; \\ A_i &= [A_i(1), A_i(2),\ldots, A_i(s)]^T ; \\ v_i &= [v_i(1), v_i(2),\ldots, v_i(s)]^T \end{aligned} \tag{2.5}$$

โดยที่

l_i คือ สมการค่าสังเกต ขนาด s*1

A_i คือ design matrix ที่สัมพันธ์กับค่าสังเกต l_i

v_i คือ residual vector ของค่าสังเกต l_i

s คือ จำนวนของค่าสังเกตที่ทำการรังวัดมา

สำหรับพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าในการคำนวณปรับแก้ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดในที่นี้ประกอบด้วย

- ค่าพิกัดตำแหน่งของเครื่องรับ (X, Y, Z)
- ค่าเลขปริศนาของดาวเทียมแต่ละดวง (N)
- และค่าความคลาดเคลื่อนนาฬิกาเครื่องรับแต่ละขณะเวลา (dt)

ในการสร้างเมทริกซ์ A_i และ l_i จะต้องอาศัยค่าประมาณเริ่มต้นของพารามิเตอร์ x_0 ซึ่งดูรายละเอียดในหัวข้อการหาค่าประมาณเริ่มต้นในวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

เมทริกซ์ A คืออนุพันธ์ย่อย (partial derivative) ของสมการค่าสังเกตเทียบกับพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าดังที่กล่าวถึงไปแล้วดังข้างต้น ตัวอย่างเมทริกซ์ A สำหรับการประมวลผลที่ช่วงระยะเวลาการรับข้อมูล 5 นาที มีดาวเทียม 4 ดวง ขณะเวลาที่ 1 (i=1) จะมีค่าดังนี้

$$A_i^p(\phi)=\begin{bmatrix} \frac{\bar{x}_i-X_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{y}_i-Y_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{z}_i-Z_i^p}{\rho_i^p} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{x}_i-X_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{y}_i-Y_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{z}_i-Z_i^p}{\rho_i^p} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{x}_i-X_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{y}_i-Y_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{z}_i-Z_i^p}{\rho_i^p} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{x}_i-X_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{y}_i-Y_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{z}_i-Z_i^p}{\rho_i^p} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_i^p(P)=\begin{bmatrix} \frac{\bar{x}_i-X_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{y}_i-Y_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{z}_i-Z_i^p}{\rho_i^p} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{x}_i-X_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{y}_i-Y_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{z}_i-Z_i^p}{\rho_i^p} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{x}_i-X_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{y}_i-Y_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{z}_i-Z_i^p}{\rho_i^p} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{x}_i-X_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{y}_i-Y_i^p}{\rho_i^p} & \frac{\bar{z}_i-Z_i^p}{\rho_i^p} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$\rho_i^p=\sqrt{(\bar{x}_i-X_i^p)^2+(\bar{y}_i-Y_i^p)^2+(\bar{z}_i-Z_i^p)^2}$$

โดยที่

$A_i^p(\phi)$ คือ design matrix ของข้อมูลการวัดเฟสของคลื่นส่ง

$A_i^p(P)$ คือ design matrix ของข้อมูลการวัดรหัสของคลื่นส่ง

$\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ คือ ค่าพิกัดของเครื่องรับสัญญาณ ณ ขณะเวลา i = 1

X_i^p, Y_i^p, Z_i^p คือ ค่าพิกัดของดาวเทียม p ณ ขณะเวลา i = 1

ขั้นตอนต่อไปเป็นการกำหนดแบบจำลองสโตคาสติกซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดในหัวข้อถัดไป โดยที่เมทริกซ์ค่าน้ำหนัก (Weight matrix : W) เป็นส่วนกลับของค่าความแปรปรวนร่วม (C) ดังสมการ

$$W=C^{-1} \tag{2.7}$$

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สมการ (2.4) และแบบจำลองสโตคาสติกสมการ (2.7) สามารถหาค่าแก้สำหรับค่าประมาณเริ่มต้นของพารามิเตอร์ที่ต้องการ $(\hat{x})$ ค่าพารามิเตอร์ที่

ต้องการ (Unknown Parameters : x) และเศษเหลือของค่าสังเกต (Residuals of the measurements : $\hat{v}$) ได้ดังนี้

$$\hat{x} = [A^T W A]^{-1} A^T W l \tag{2.8}$$

$$x = x_0 + \hat{x} \tag{2.9}$$

$$\hat{v} = l - A\hat{x} \tag{2.10}$$

ในทางปฏิบัติ การคำนวณปรับแก้ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดมักจะมีการวนซ้ำ (iteration) เนื่องจากค่า ($\hat{x}$) ที่ได้จากการคำนวณในรอบแรกมักจะมีขนาดใหญ่ ซึ่งในกรณีนี้ การคำนวณจะกลับไปที่สมการ (2.4) และใช้ค่า x ที่คำนวณจากสมการ (2.9) เป็นค่าเริ่มต้น

2.2.2 ค่าประมาณเริ่มต้นในวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

ในขั้นตอนก่อนทำการปรับแก้ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะต้องมีการกำหนดค่าเริ่มต้นหรือค่าโดยประมาณให้กับพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า (x_0) ในที่นี้คือ

- ค่าเริ่มต้นของค่าพิกัดตำแหน่งของเครื่องรับ (X, Y, Z) ซึ่งได้จากค่าพิกัดโดยประมาณในไฟล์ RINEX
- ค่าเริ่มต้นของค่าเลขปริศนาของดาวเทียมแต่ละดวง (N) ซึ่งกำหนดให้เป็น 0 เมตร
- และค่าเริ่มต้นของความคลาดเคลื่อนเนื่องจากนาฬิกาเครื่องรับแต่ละขณะเวลา (dt)

สำหรับค่าเริ่มต้นของความคลาดเคลื่อนเนื่องจากนาฬิกาเครื่องรับในเมทริกซ์ x สามารถหาค่าโดยประมาณได้จากซูโดเรนจ์ที่ได้จากการวัดรหัสของคลื่นส่งจากดาวเทียมดวงแรก ศึกษารายละเอียดได้จาก Zumberge et.al. (2000) โดยมีสมการดังนี้

$$R_i = P_i^p - (\rho_i^p - cdt_i^p) \tag{2.11}$$

โดยที่

R_i คือ ความคลาดเคลื่อนของนาฬิกาเครื่องรับโดยประมาณ ณ ขณะเวลา i (เมตร)
P_i^p คือ ซูโดเรนจ์ที่ได้จากการวัดรหัสของคลื่นส่งจากดาวเทียม p ณ ขณะเวลา i (เมตร)
ρ_i^p คือ ระยะทางเรขาคณิตระหว่างเครื่องรับและดาวเทียม p ณ ขณะเวลา i (เมตร)
c คือ ความเร็วของคลื่นส่งหรือความเร็วแสง (เมตร/วินาที)
dt คือ ความคลาดเคลื่อนของนาฬิกาดาวเทียม p ณ ขณะเวลา i (วินาที)

2.3 แนวคิดเกี่ยวกับแบบจำลองสโตคาสติก

แบบจำลองสโตคาสติก อธิบายถึงรูปแบบทางสถิติของค่าสังเกตที่ได้จากการรังวัด ในขณะที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้น อธิบายถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างค่าสังเกตจากการรังวัดจีพีเอสกับพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า (Leick, 1995) ซึ่งปัจจุบันนี้ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการประมวลผลข้อมูลจีพีเอสโดยใช้แบบจำลองปรับแก้ค่าคลาดเคลื่อนต่างๆนั้น สามารถกำจัดค่าคลาดเคลื่อนไปได้หลายชนิด แต่ก็ยังมีความคลาดเคลื่อนบางตัวหลงเหลืออยู่ ทำให้ค่าพิกัดที่คำนวณได้ยังมีความคลาดเคลื่อนแฝงอยู่ ซึ่งการจะปรับปรุงให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องและความน่าเชื่อถือสูงขึ้น สามารถทำได้ด้วยการกำหนดแบบจำลองสโตคาสติกที่เหมาะสมและใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุด สำหรับงานวิจัยเรื่องนี้ได้เลือกกรณีศึกษาโดยใช้แบบจำลองสโตคาสติก 3 แบบดังนี้

2.3.1 แบบจำลองสโตคาสติกแบบให้น้ำหนักของค่าสังเกตเท่ากัน

เมื่อ σ^2 คือค่าความแปรปรวนของค่าสังเกต โดยสามารถแสดงในรูปเมทริกซ์ของ variance-covariance matrix ได้ดังนี้

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2 \tag{2.12}$$

โดยที่ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของข้อมูลการวัดเฟสของคลื่นส่ง (σ_{ph}) มีค่า 0.002 เมตร และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของข้อมูลการวัดรหัสของคลื่นส่ง (σ_{pr}) มีค่า 0.2 เมตร

2.3.2 แบบจำลองสโตคาสติกแบบให้น้ำหนักของค่าสังเกตจากมุมสูงของดาวเทียม (Satellite Elevation)

โดยมีสมการของค่าความแปรปรวน σ^2 ดังนี้ (Gerdan, 1995)

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sin E} \tag{2.13}$$

เมื่อ σ^2 คือ ค่าความแปรปรวนค่าสังเกต และ E คือ มุมสูงของดาวเทียม โดยสามารถแสดงในรูปเมทริกซ์ของ variance-covariance matrix ได้ดังนี้

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sin E_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sin E_n} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

2.3.3 แบบจำลองสโตคาสติกแบบให้น้ำหนักของค่าสังเกต จากการประมาณค่าเศษเหลือด้วยวิธีการ MINQUE

จาก Gauss-Markov Model : ค่าสังเกต n ค่า และตัวไม่ทราบค่า t ตัว

$$l = Ax + v \tag{2.15}$$

$$C = W^{-1} = \sum_{i=1}^{k} \theta_i T_i \tag{2.16}$$

โดยที่

l คือ เวคเตอร์ค่าต่างของค่าสังเกต ขนาด n*1

A คือ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์ ขนาด n*t

x คือ เวคเตอร์ของพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า ขนาด t*1

v คือ เวคเตอร์ค่าตรวจแก้ค่าสังเกต ขนาด n*1

C คือ เมทริกซ์ variance-covariance matrix ของค่าสังเกต

W คือ เมทริกซ์ของน้ำหนักของค่าสังเกต

$\theta_1^\wedge, \theta_2^\wedge, \dots, \theta_k^\wedge$ คือ ค่า variance-covariance component ของค่าสังเกตที่จะนำมาทำการประมาณค่า

$T_1, T_2, \dots, T_k$ คือ Accompanying Matrices ศึกษาได้จาก Wang et al. (1998)

k คือ จำนวนของ variance-covariance component

Rao (1970,1971) ได้พัฒนาวิธีการที่เรียกว่า MINQUE ขึ้นมา จากฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear function) ของ $\theta_i (i = 1,2,\dots,k)$ เช่น $g_1\theta_1 + g_2\theta_2 + \dots + g_k\theta_k$ จะเป็นฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic function) $l^T Ml$ ได้ ก็ต่อเมื่อเมทริกซ์ M สามารถหาได้จากเงื่อนไข

$$Tr\{MCMC\} = \min \quad ; \quad MA = 0 \tag{2.17}$$

จะได้ $Tr\{MT_i\} = g_i$ (2.18)

จากสมการ (2.17) และ (2.18) สามารถหาค่าประมาณของ variance-covariance component ได้ดังนี้

$$\hat{\theta} = (\theta_1^{\wedge}, \theta_2^{\wedge}, ..., \theta_k^{\wedge}) = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{q} \tag{2.19}$$

เมื่อ $\mathrm{S} = \{\mathrm{S}_{ij}\}$; $\mathrm{S}_{ij} = Tr\{RT_iRT_j\}$ (2.20)

และ $q = \{q_i\}$; $q_i = l^T RT_iRl$ (2.21)

โดยที่ $R = WQ_vW$ (2.22)

และเมทริกซ์ residuals cofactor matrix ที่ปรับแก้แล้ว $Q_v = W^{-1} - A\left(A^T PA\right)^{-1} A^T$ (2.23)

เมทริกซ์ R สามารถเขียนใหม่ในรูป partitioned matrix ได้ดังนี้

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{m1} & R_{m2} & \dots & R_{mm} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

โดยที่ m คือ จำนวน observation epoch ใน 1 ช่วงการรับสัญญาณ

จากความสัมพันธ์ระหว่าง v และ l

จะได้ $v = -Q_vWl$ (2.25)

$$WQ_vWv = -WQ_vWl = Wv \tag{2.26}$$

จากสมการ (2.25) และ (2.26) สามารถเขียนสมการ (2.21) ได้ใหม่ดังนี้

$$q_i = l^T RT_iRl = v^T RT_iRv = v^T WT_iWv \tag{2.27}$$

จากสมการ (2.19), (2.20), (2.21) และ (2.22) จะเห็นว่าค่าประมาณของ variance-covariance component ขึ้นอยู่กับเมทริกซ์ C ซึ่งรวมถึงค่า variance-covariance component ในตัวมันเองด้วย ดังนั้นจึงต้องมีขั้นตอนการวนซ้ำ โดยกำหนดค่าเริ่มต้นของ $\theta_i = \theta_i^0$ จากสมการ (2.19)

ก็จะได้ค่าประมาณเริ่มต้นของ $\theta^{\wedge 1}$ และสำหรับการวนซ้ำรอบที่ $(j+1)^{th}$ โดยใช้ค่าประมาณจากรอบก่อนหน้า $\theta^{\wedge j}$ เป็นค่าเริ่มต้น จะได้ค่าประมาณใหม่เป็น

$$\theta^{\wedge j+1} = S^{-1}\left(\theta^{\wedge j}\right)q\left(\theta^{\wedge j}\right) \qquad ; \quad j = 0,1,2,... \tag{2.28}$$

ถ้าค่าของ $\hat{\theta}$ ลู่เข้า จะได้ $\quad S\left(\hat{\theta}\right)\hat{\theta} = q\left(\hat{\theta}\right)$ (2.29)

ดังนั้น $\quad Tr\left\{R\left(\hat{\theta}\right)T_i\right\} = l^T R\left(\hat{\theta}\right)T_i R\left(\hat{\theta}\right)l \quad ; \quad i = 1,2,...,k$ (2.30)