

## บทที่ 2

### ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง



#### 2.1 คำนำ

การหารูปแบบของโครงสร้างเปลือกบางมีเป้าหมายในการลดพลังงานความเครียดที่เกิดจากโมเมนต์ดัด ดังนั้นรูปแบบโครงสร้างที่ได้จึงสามารถรับหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในระนาบได้เท่านั้น แต่ไม่สามารถต้านทานโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนนอกระนาบได้ซึ่งส่งผลให้โครงสร้างมีความหนาที่น้อยมากเมื่อเทียบกับมิติอื่น การหารูปแบบของโครงสร้างเปลือกบางทำได้สองวิธีได้แก่ แบบจำลองการแขวน (hanging models) หารูปแบบของโครงสร้างเปลือกบางที่มีหน่วยแรงอัดกระทำเท่านั้น (Isler, 1994) แบบจำลองผิวฟองสบู่ (soap film analogy) หารูปแบบของโครงสร้างเปลือกบางชนิดผ้าใบรับแรงดึง (Otto, 1967)

การวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางในการศึกษานี้เป็นการวิเคราะห์เชิงกลศาสตร์ต่อเนื่องในระนาบพื้นผิวโดยกำหนดให้ความหนาของโครงสร้างคงที่ และกำหนดค่าหน่วยแรงเริ่มต้นโดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของโครงสร้าง การวิเคราะห์โครงสร้างเป็นการวิเคราะห์แบบไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิตโดยพิจารณาให้ความเครียดที่เกิดขึ้นมีค่าน้อยและพิจารณาผลกระทบจากการหมุนของชิ้นส่วนบนพื้นฐานของหน่วยแรงไฟโปลาเคอร์ชอฟลำดับสองและความเครียดกรีน-ลากรองจ์ ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดอาศัยแบบจำลองวัสดุแบบเซนติวีแนนท์-เคอร์ชอฟ โดยที่วัสดุมีคุณสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้นและเชิงฉาก การแก้ปัญหาหาระบบสมการไม่เชิงเส้นอาศัยการประมาณแบบเชิงเส้นโดยการคำนวณซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสัน

การหาแบบตัดที่เหมาะสมที่สุดของโครงสร้างเปลือกบางในการศึกษานี้แบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนได้แก่ 1) การหาพิกัดของแบบตัดที่อยู่ในระนาบสองมิติ และ 2) การหาแบบตัดที่ทำให้เกิดค่าหน่วยแรงเป้าหมายโดยใช้พิกัดในข้อแรกเพื่อหาแบบตัดที่เหมาะสมที่สุดที่ทำให้เกิดการคลาดเคลื่อนของหน่วยแรงเป้าหมายน้อยที่สุด

2.2 กลศาสตร์ต่อเนื่องแบบไม่เชิงเส้น

การวิเคราะห์โครงสร้างในงานวิจัยนี้เป็นการวิเคราะห์แบบไม่เชิงเส้น โดยการกระจัดที่เกิดขึ้นมีค่ามาก ดังนั้นการอ้างอิงตำแหน่งในระบบพิกัดจึงมีความสำคัญ ค่าหน่วยแรงและความเครียดจึงคำนวณโดยอ้างอิงจากตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งปัจจุบัน

2.2.1 เกรเดียนต์การเสียรูป

รูปที่ 2.1 แสดงการกระจัดและการเสียรูปของชิ้นส่วนโครงสร้างเปลือกบางซึ่งมีความหนาคงที่ โดยที่เวกเตอร์  $\mathbf{X}$  แสดงตำแหน่งเริ่มต้น  $P$  ที่เวลา  $t=0$  และ  $\mathbf{x}$  แสดงตำแหน่งปัจจุบัน  $p$  ที่เวลา  $t=t$  ตามลำดับ ความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ของตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งปัจจุบันแสดงได้ดังสมการ

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \tag{2.1}$$

โดยที่  $\Phi$  แทนการส่ง (mapping) เซึ่งการเสียรูปจากตำแหน่งเริ่มต้นไปยังตำแหน่งปัจจุบัน

พิจารณาค่าแห่ง  $Q_1$  และ  $Q_2$  ในพิกัดเริ่มต้นซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์กับตำแหน่ง  $P$  ในรูปเวกเตอร์ได้ดังสมการ

$$d\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_{Q_1} - \mathbf{X}_P; \quad d\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_{Q_2} - \mathbf{X}_P \tag{2.2}$$

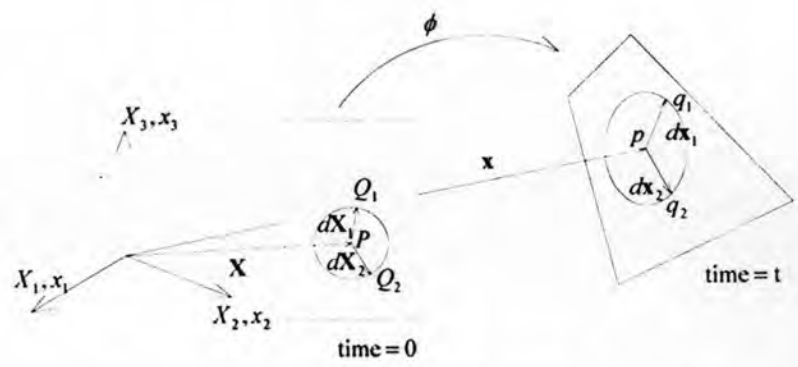
ภายหลังการเสียรูป ตำแหน่ง  $P$   $Q_1$  และ  $Q_2$  จะเปลี่ยนตำแหน่งเป็น  $p$   $q_1$  และ  $q_2$  ตามลำดับโดยสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{q_1} - \mathbf{x}_p = \phi(\mathbf{X}_P + d\mathbf{X}_1, t) - \phi(\mathbf{X}_P, t) \tag{2.3}$$

$$d\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_{q_2} - \mathbf{x}_p = \phi(\mathbf{X}_P + d\mathbf{X}_2, t) - \phi(\mathbf{X}_P, t) \tag{2.4}$$

กำหนดให้เกรเดียนต์การเสียรูป (deformation gradient) แสดงได้ดังสมการ

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \tag{2.5}$$



รูปที่ 2.1 การกระจัดและการเสียรูปของชิ้นส่วนโครงสร้างเปลือกบาง

โดยสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังสมการ

$${}'_0\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial'x_1}{\partial^0x_1} & \frac{\partial'x_1}{\partial^0x_2} & \frac{\partial'x_1}{\partial^0x_3} \\ \frac{\partial'x_2}{\partial^0x_1} & \frac{\partial'x_2}{\partial^0x_2} & \frac{\partial'x_2}{\partial^0x_3} \\ \frac{\partial'x_3}{\partial^0x_1} & \frac{\partial'x_3}{\partial^0x_2} & \frac{\partial'x_3}{\partial^0x_3} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

โดยที่  $'x_1$ ,  $'x_2$  และ  $'x_3$  แทนค่าตำแหน่งในพิกัด  $x_1$ ,  $x_2$  และ  $x_3$  ที่เวลา  $t = t$ ;  ${}^0x_1$ ,  ${}^0x_2$  และ  ${}^0x_3$  แทนค่าตำแหน่งในพิกัด  $X_1$ ,  $X_2$  และ  $X_3$  ที่เวลา  $t = 0$

## 2.2.2 ความเครียด

โดยทั่วไประดับการเสียรูปสามารถพิจารณาจากผลต่างระหว่างผลคูณเชิงสเกลาร์  $d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2$  และ  $dx_1 \cdot dx_2$  ซึ่งประกอบด้วย การเปลี่ยนแปลงขนาด (การยืดหด) และการเปลี่ยนแปลงมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง พิจารณาสมการที่ (2.5) สามารถแสดงเวกเตอร์  $dx_1$  และ  $dx_2$  ในรูปของเวกเตอร์  $d\mathbf{X}_1$  และ  $d\mathbf{X}_2$  ได้ดังสมการ

$$dx_1 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_1; \quad dx_2 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_2 \quad (2.7)$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์  $dx_1$  และ  $dx_2$  สามารถแสดงในรูปของ  $d\mathbf{X}_1$  และ  $d\mathbf{X}_2$  ได้ดังสมการ

$$dx_1 \cdot dx_2 = d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{C}d\mathbf{X}_2 \quad (2.8)$$

โดยที่  $\mathbf{C}$  แสดงเทนเซอร์การเสียรูปของโคชี-กรีนทางขวา (right Cauchy-Green deformation tensor) ซึ่งสามารถแสดงในรูปของเกรเดียนต์การเสียรูปได้ดังสมการ

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.9)$$

ความเครียดกรีน-ลากรองจ์ (Green-Lagrangian strain) สามารถคำนวณจากการเปลี่ยนแปลงเชิงเรขาคณิตของเวกเตอร์ได้ดังสมการ (Javier และ Richard, 1997)

$$\frac{1}{2}(dx_1 \cdot dx_2 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2) = d\mathbf{X}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dx_2 \quad (2.10)$$

โดยสามารถเขียนความเครียดกรีน-ลากรองจ์ได้ดังสมการ

$${}'_0\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}({}'_0\mathbf{F}^T {}'_0\mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.11)$$

โดยที่  ${}'_0\boldsymbol{\varepsilon}$  แทนเทนเซอร์ความเครียดกรีน-ลากรองจ์ที่โครงแบบปัจจุบันเทียบกับโครงแบบเริ่มต้น;  ${}'_0\mathbf{F}$  แทนเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูปที่โครงแบบปัจจุบันเทียบกับโครงแบบเริ่มต้น; และ  $\mathbf{I}$  แทนเมตริกซ์เอกลักษณ์

สมการที่ (2.11) สามารถเขียนในรูปสัญกรณ์ดัชนี (index notation) ได้ดังสมการ

$${}'_0\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial' x_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial' x_k}{\partial^0 x_j} - \delta_{ij} \right) \quad (2.12)$$

โดยที่  $\delta_{ij}$  แทนค่าโคโรเนคเคอร์เดลต้า (kronecker delta) ซึ่งกำหนดให้  $\delta_{ij} = 1$  เมื่อ  $i = j$  และ  $\delta_{ij} = 0$  เมื่อ  $i \neq j$  ในขณะที่  $i = 1, 2, 3$  และ  $j = 1, 2, 3$

พิจารณาตำแหน่ง  $P$  ในรูปที่ 2.1 ที่เวลา  $t = 0$  ซึ่งเปลี่ยนไปยังตำแหน่ง  $p$  ที่เวลา  $t = t$  สามารถเขียนสมการในรูปของการกระจัดได้ดังนี้

$${}'_x_i = {}^0x_i + {}'u_i \quad (2.13)$$

โดยที่  $'u_i$  แทนค่าการกระจัดจากเวลา  $t = 0$  ไปยังเวลา  $t = t$  เมื่อ  $i = 1, 2, 3$

จากสมการที่ (2.12) และ (2.13) สามารถเขียนสมการความเครียดในรูปของการกระจัดได้ดังนี้

$${}'_0\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial' u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial' u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial' u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial' u_k}{\partial^0 x_j} \right) \quad (2.14)$$

สมการที่ (2.14) สามารถกระจายให้อยู่ในรูปของการกระจัด ได้ดังสมการ

$${}'_0\varepsilon_{11} = \frac{\partial' u_1}{\partial^0 x_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial' u_1}{\partial^0 x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial' u_2}{\partial^0 x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial' u_3}{\partial^0 x_1} \right)^2 \right] \quad (2.15)$$

$${}'_0\varepsilon_{22} = \frac{\partial' u_2}{\partial^0 x_2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial' u_1}{\partial^0 x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial' u_2}{\partial^0 x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial' u_3}{\partial^0 x_2} \right)^2 \right] \quad (2.16)$$

$${}'_0\varepsilon_{33} = \frac{\partial' u_3}{\partial^0 x_3} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial' u_1}{\partial^0 x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial' u_2}{\partial^0 x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial' u_3}{\partial^0 x_3} \right)^2 \right] \quad (2.17)$$

$$2'_0\varepsilon_{12} = \frac{\partial' u_1}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial' u_2}{\partial^0 x_1} + \frac{\partial' u_1}{\partial^0 x_1} \frac{\partial' u_1}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial' u_2}{\partial^0 x_1} \frac{\partial' u_2}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial' u_3}{\partial^0 x_1} \frac{\partial' u_3}{\partial^0 x_2} \quad (2.18)$$

$$2'_0\varepsilon_{23} = \frac{\partial' u_2}{\partial^0 x_3} + \frac{\partial' u_3}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial' u_1}{\partial^0 x_2} \frac{\partial' u_1}{\partial^0 x_3} + \frac{\partial' u_2}{\partial^0 x_2} \frac{\partial' u_2}{\partial^0 x_3} + \frac{\partial' u_3}{\partial^0 x_2} \frac{\partial' u_3}{\partial^0 x_3} \quad (2.19)$$

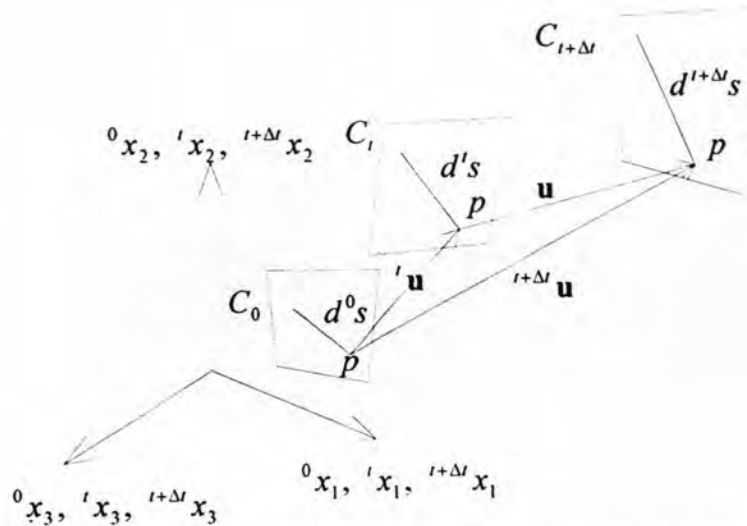
$$2'_0\varepsilon_{31} = \frac{\partial' u_3}{\partial^0 x_1} + \frac{\partial' u_1}{\partial^0 x_3} + \frac{\partial' u_1}{\partial^0 x_3} \frac{\partial' u_1}{\partial^0 x_1} + \frac{\partial' u_2}{\partial^0 x_3} \frac{\partial' u_2}{\partial^0 x_1} + \frac{\partial' u_3}{\partial^0 x_3} \frac{\partial' u_3}{\partial^0 x_1} \quad (2.20)$$

$${}'_0\varepsilon_{12} = {}'_0\varepsilon_{21} \quad {}'_0\varepsilon_{32} = {}'_0\varepsilon_{23} \quad {}'_0\varepsilon_{13} = {}'_0\varepsilon_{31} \quad (2.21)$$

โดยที่  $u_1$ ,  $u_2$  และ  $u_3$  แทนค่าการกระจัดในแนวแกน  $x_1$ ,  $x_2$  และ  $x_3$  ตามลำดับ

พิจารณารูปที่ 2.2 ซึ่งแสดงโครงแบบ (configuration) ของชิ้นส่วนโครงสร้างที่แตกต่างกันได้แก่ โครงแบบเริ่มต้น  $C_0$ , โครงแบบปัจจุบัน  $C_t$  และโครงแบบเพิ่มขึ้นเวลา  $C_{t+\Delta t}$  โดยที่ความสัมพันธ์ของการกระจัดในแต่ละโครงแบบสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^t u_i \quad (2.22)$$



รูปที่ 2.2 การเคลื่อนที่ของวัตถุในสถานะต่างๆ

โดยที่  ${}^{i+\Delta}u_i$ , แทนค่าการกระจัดที่ตำแหน่งโครงแบบ  $C_{i+\Delta}$ ;  ${}^i u_i$ , แทนค่าการกระจัดที่ตำแหน่งโครงแบบ  $C_i$ ; และ  $u_i$ , แทนค่าการกระจัดที่เพิ่มขึ้นจากโครงแบบปัจจุบัน เมื่อ  $i=1, 2, 3$

ในทำนองเดียวกันสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดที่ถูกเพิ่มขึ้นจากโครงแบบปัจจุบันได้ดังสมการ

$${}^0 \varepsilon_{ij} = {}^{i+\Delta} \varepsilon_{ij} - {}^i \varepsilon_{ij} \quad (2.23)$$

โดยที่  ${}^{i+\Delta} \varepsilon_{ij}$ , แทนค่าความเครียดที่ตำแหน่งโครงแบบเพิ่มขึ้นเวลา  $C_{i+\Delta}$ ;  ${}^i \varepsilon_{ij}$ , แทนค่าความเครียดที่ตำแหน่งโครงแบบปัจจุบัน  $C_i$ ; และ  ${}^0 \varepsilon_{ij}$ , แทนค่าความเครียดที่เพิ่มขึ้นจากโครงแบบปัจจุบัน  $C_i$  เทียบกับโครงแบบเริ่มต้น  $C_0$

เมื่อ  $i=1, 2, 3$  และ  $j=1, 2, 3$

เมื่อแทนสมการที่ (2.14) ลงในสมการที่ (2.23) และอาศัยนิยามของ  $u_i$  ในสมการที่ (2.22) สามารถเขียนสมการความเครียดที่เพิ่มขึ้นจากโครงแบบปัจจุบันในรูปของการกระจัดได้ดังสมการ

$${}^0 \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial {}^i u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial {}^i u_k}{\partial^0 x_j} \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_j} \right) \quad (2.24)$$

### 2.2.3 หน่วยแรง สมดุล และงานเสมือน

โดยทั่วไปการคำนวณหน่วยแรงอาศัยการอ้างอิงโครงแบบปัจจุบัน  $C_i$ , ซึ่งเรียกหน่วยแรงดังกล่าวว่าหน่วยแรงโคชี ในการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นซึ่งพิจารณาให้ความแตกต่างระหว่างโครงแบบปัจจุบันและโครงแบบเริ่มต้นมีค่าน้อย การคำนวณหน่วยแรงโดยอ้างอิงโครงแบบปัจจุบันจึงสามารถใช้แทนกันได้ อย่างไรก็ตาม สำหรับปัญหาการกระจัดสูงนั้นมีความแตกต่างระหว่างโครงแบบปัจจุบันและโครงแบบ

เริ่มต้นมาก ดังนั้นการใช้ค่าหน่วยแรงโคชีจึงไม่เหมาะสมและต้องอาศัยหน่วยแรงไพโอลาเคอร์ซอพลำดับที่สองซึ่งอ้างอิงจากโครงสร้างเริ่มต้นเพื่อให้สอดคล้องกับความเครียดกรีน-ลากรองจ์

### 2.2.3.1 หน่วยแรงโคชี

พิจารณาพื้นที่  $\Delta a$  ของชิ้นส่วนโครงสร้าง ซึ่งมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉาก  $\mathbf{n}$  และมีแรงลัพธ์  $\Delta \mathbf{p}$  กระทำ จะสามารถเขียนเวกเตอร์หน่วยแรง (traction)  $\mathbf{t}$  ที่สัมพันธ์กับเวกเตอร์  $\mathbf{n}$  ได้ดังสมการ

$$\mathbf{t}_n = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{p}}{da} \quad (2.24)$$

เมื่อพิจารณารูปที่ 2.3 โดยกำหนดให้  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  และ  $\mathbf{e}_3$  แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง  $x_1$ ,  $x_2$  และ  $x_3$  ตามลำดับ จะสามารถเขียนสมาชิกของเวกเตอร์หน่วยแรงที่สัมพันธ์กับเวกเตอร์  $\mathbf{n}$  ในทิศทาง  $x_1$ ,  $x_2$  และ  $x_3$  ได้ดังสมการ

$$\mathbf{t}_{e_1} = \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{21}\mathbf{e}_2 + \sigma_{31}\mathbf{e}_3 \quad (2.25)$$

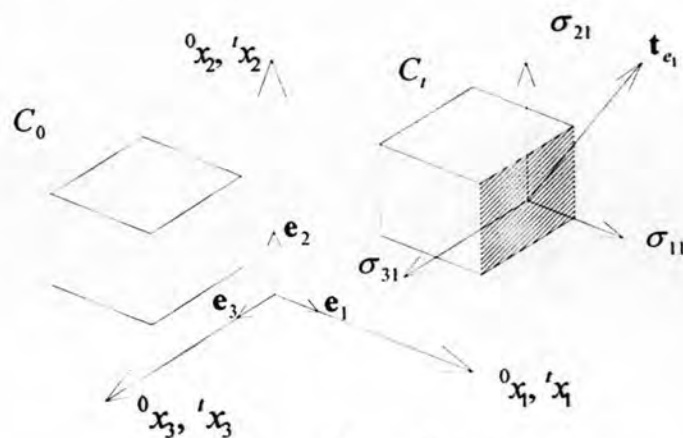
$$\mathbf{t}_{e_2} = \sigma_{12}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{32}\mathbf{e}_3 \quad (2.26)$$

$$\mathbf{t}_{e_3} = \sigma_{13}\mathbf{e}_1 + \sigma_{23}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 \quad (2.27)$$

พิจารณารูปพีระมิดสามเหลี่ยมในรูปที่ 2.4 ภายใต้เวกเตอร์หน่วยแรงบนระนาบพื้นผิวทั้งสี่ด้าน และแรงต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร  $\mathbf{f}$  จะสามารถเขียนสมการแสดงสภาวะสมดุลของรูปพีระมิดสามเหลี่ยมได้ดังนี้

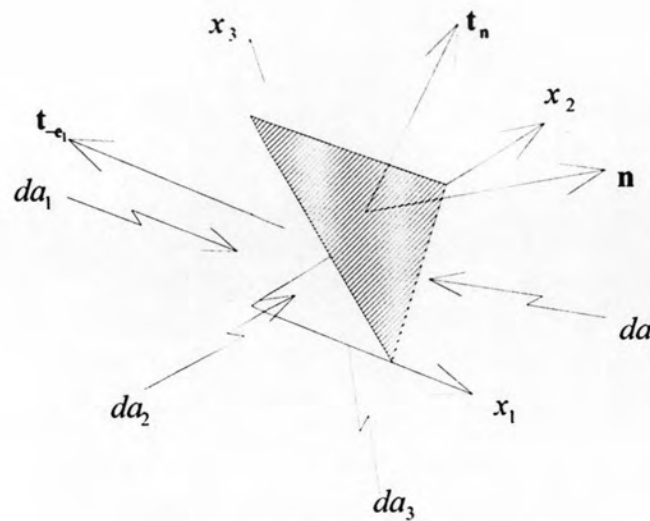
$$\mathbf{t}_n da + \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}_{-e_i} da_i + \mathbf{f} dv = 0 \quad (2.28)$$

โดยที่  $da_i = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) da$  แทนภาพฉาย (projection) ของพื้นที่  $da$  บนระนาบตั้งฉากกับทิศทาง  $x_i$  และ  $dv$  แทนค่าปริมาตรของรูปพีระมิดสามเหลี่ยม



รูปที่ 2.3 สมาชิกของหน่วยแรงโคชี





รูปที่ 2.4 เวกเตอร์หน่วยแรงบนระนาบต่างๆ

สมการที่ (2.28) สามารถเขียนใหม่โดยพิจารณาให้  $\frac{dv}{da} \rightarrow 0$  ในรูป

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n &= -\sum_{j=1}^3 \mathbf{t}_{-e_j} \frac{da_j}{da} - \mathbf{f} \frac{dv}{da} \\ &= \sum_{j=1}^3 \mathbf{t}_{e_j} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j) \end{aligned} \quad (2.29)$$

แทนค่าจากสมการที่ (2.25) ถึง (2.27) ลงในสมการที่ (2.29) จะได้

$$\mathbf{t}_{(n)} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_i \quad (2.30)$$

และเมื่ออาศัยความสัมพันธ์ของเทนเซอร์ลำดับที่สองในรูปผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ตามสมการ  $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$  เมื่อ  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  และ  $\mathbf{w}$  แทนเวกเตอร์ใดๆที่มีมิติสอดคล้องกันจะสามารถเขียนสมการที่ (2.30) ในรูป

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n &= \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{n} \\ &= \left[ \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \right] \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.31)$$

โดยที่เทนเซอร์  $\sigma$  แสดงเทนเซอร์ของหน่วยแรงโคชี ซึ่งสามารถเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังสมการ

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

### 2.2.3.2 สมดุลของวัตถุ

พิจารณากการเสียรูปของโครงสร้างภายใต้เวกเตอร์หน่วยแรง  $\mathbf{t}$  บนขอบเขต  $s$  และแรงต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร  $\mathbf{f}$  ในปริมาตร  $v$  โดยไม่มีการพิจารณาแรงเฉื่อยดังแสดงในรูปที่ 2.5 สมดุลของโครงสร้างสามารถเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$\int_s \mathbf{t} ds + \int_v \mathbf{f} dv = 0 \quad (2.33)$$

เมื่อแทนสมการที่ (2.31) ลงในสมการที่ (2.33) สามารถเขียนเวกเตอร์หน่วยแรงให้อยู่ในรูปของหน่วยแรงโคชีได้ดังนี้

$$\int_s \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds + \int_v \mathbf{f} dv = 0 \quad (2.34)$$

สมการที่ (2.34) สามารถแปลงให้อยู่ในรูปปริพันธ์ของปริมาตรด้วยทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ตามสมการ  $\int_v \text{div} \boldsymbol{\sigma} dv = \int_s \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds$  ได้ดังนี้

$$\int_v (\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) dv = 0 \quad (2.35)$$

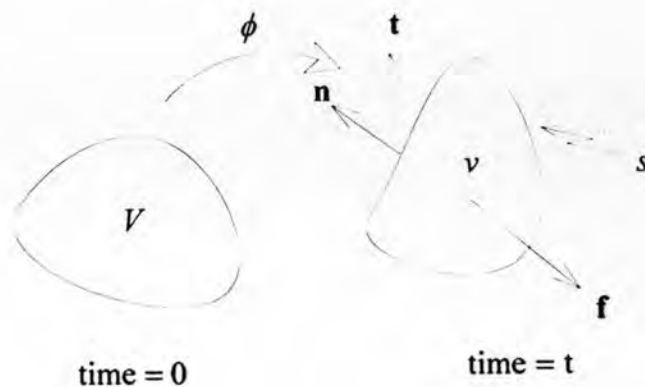
โดยที่  $\text{div} \boldsymbol{\sigma}$  แทนไดเวอร์เจนซ์ของเทนเซอร์หน่วยแรงโคชีซึ่งสามารถเขียนในรูปสมการ

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \quad (2.36)$$

เมื่อพิจารณากการเสียรูปของโครงสร้างในขณะที่โครงสร้างยังไม่เข้าสู่สมดุล สามารถเขียนสมการแรงคงค้าง (residual force) ได้ดังนี้

$$\mathbf{F}_r = \int_v (\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) dv \quad (2.37)$$

ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้นการวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางในการศึกษานี้เป็นการวิเคราะห์เชิงกลศาสตร์ต่อเนื่องในระนาบของพื้นผิว ซึ่งสามารถพิจารณาสมดุลของหน่วยแรงในระนาบของพื้นผิว (2 มิติ) ดังแสดงในรูปที่ 2.6 โดยสามารถเขียนสมดุลของแรงในแนวแกน  $x_1$  และ  $x_2$  ได้ดังสมการ



รูปที่ 2.5 สมดุลของโครงสร้าง



$$\sum F_{x_1} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_{x_1} = 0 \quad (2.38)$$

$$\sum F_{x_2} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_{x_2} = 0 \quad (2.39)$$

โดยที่  $f_{x_1}$  และ  $f_{x_2}$  แทนค่าแรงต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร (น้ำหนักของโครงสร้าง) ในทิศทาง  $x_1$  และ  $x_2$  ตามลำดับ

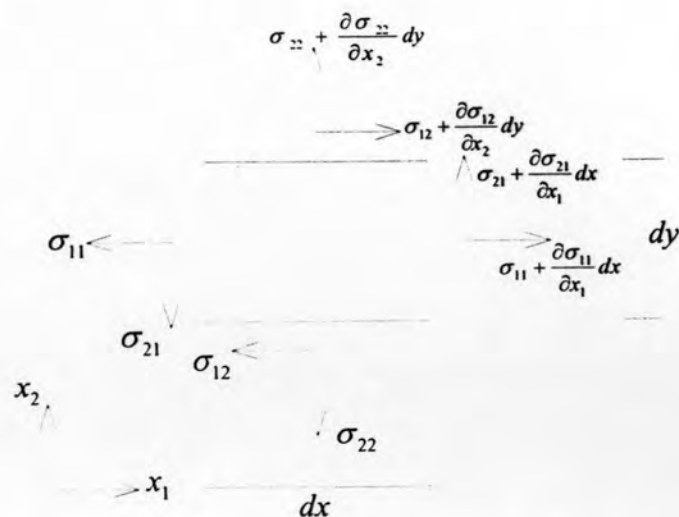
ในการคำนวณค่าหน่วยแรงในทิศทางหลัก (principal stress) ของชิ้นส่วนโครงสร้างเพื่อพิจารณาลักษณะของหน่วยแรงว่าเป็นหน่วยแรงอัดหรือหน่วยแรงดึงอาศัยสมการ

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (2.40)$$

จากสมการที่ (2.40) จะเห็นได้ว่า  $\sigma_{\min}$  อาจมีค่าเป็นลบเมื่อ  $\sigma_{12}$  มีค่ามากเพียงพอซึ่งส่งผลให้เกิดการโก่งเดาะในทิศทางของหน่วยแรงอัดที่เกิดขึ้นหรือเกิดรอยย่นขึ้นบนพื้นผิว

### 2.2.3.3 งานเสมือน

กำหนดให้การกระจัดที่เกิดขึ้นมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของระบบโครงสร้าง และมีความต่อเนื่องในอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งตามเงื่อนไขความเป็นไปได้เชิงการเคลื่อนที่ (kinematically admissible) ของการกระจัด พิจารณาการกระจัดเสมือนในสมมูลซึ่งมีค่าเป็นศูนย์บนขอบเขตที่ระบุค่าการกระจัดได้กล่าวคือ  $\delta u = 0$  บน  $s_u$  เมื่อ  $s_u$  แทนขอบเขตของระบบโครงสร้างที่ระบุค่าการกระจัดได้



รูปที่ 2.6 สมมูลของหน่วยแรงในพื้นที่ผิวของโครงสร้างเปลือกบาง

เมื่อพิจารณาให้แรงคงที่ภายใต้การกระจัดเสมือน  $\delta \mathbf{u}$  สามารถคำนวณงานเสมือน  $\delta W$  ได้ดังสมการ

$$\delta W = \int_V (\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} dv = 0 \quad (2.41)$$

จากคุณสมบัติของเกรเดียนต์และไดเวอร์เจนซ์  $\text{div}(\mathbf{S}^T \mathbf{v}) = \mathbf{S} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{S}$  แทนลงในสมการที่ (2.41) ได้ดังนี้

$$\delta W = \int_V [\text{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \delta \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u}) + \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}] dv \quad (2.42)$$

จากสมการที่ (2.34) และ (2.35) สามารถจัดรูปสมการที่ (2.42) ได้ดังนี้

$$\delta W = \int_S ((\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^T \delta \mathbf{u}) da + \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dv - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} dv \quad (2.43)$$

จัดรูปสมการที่ (2.43) โดยให้  $\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u}$  แทน  $((\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})^T \delta \mathbf{u})$  ได้ดังนี้

$$\delta W = \int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} da + \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dv - \int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} dv \quad (2.44)$$

พิจารณาพจน์สุดท้ายของสมการที่ (2.44) สามารถเขียนเกรเดียนต์ของการกระจัดเสมือนในรูปความเครียดและการหมุนได้ดังนี้

$$\nabla \delta \mathbf{u} = \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \delta \mathbf{e} + \delta \boldsymbol{\omega} \quad (2.45)$$

โดยที่  $\delta \mathbf{e}$  แทนเทนเซอร์ความเครียดเชิงวิศวกรรมเสมือน (virtual engineering strain) และ  $\delta \boldsymbol{\omega}$  แทนเทนเซอร์การหมุนเสมือนซึ่งนิยามตามสมการ

$$\delta e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.46)$$

$$\delta \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.47)$$

ดังนั้นสามารถเขียนพจน์สุดท้ายของสมการที่ (2.44) ได้ตามสมการ

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} dv = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{e} dv + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\omega} dv \quad (2.48)$$

โดยที่  $\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\omega} dv = 0$  เนื่องจาก  $\delta \boldsymbol{\omega}$  มีคุณสมบัติเทนเซอร์สมมาตรเสมือน (skew-symmetric) และสามารถเขียนสมการพลังงานเสมือน (2.45) ได้ดังนี้

$$\delta W = \delta W_{ext} - \delta W_{int} = 0 \quad \text{หรือ} \quad \delta W_{ext} = \delta W_{int} \quad (2.49)$$

โดยที่  $\delta W_{ext} = \int_S \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} da + \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dv$  แทนค่างานเสมือนภายนอก และ  $\delta W_{int} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{e} dv$  แทนค่างานเสมือนภายใน

### 2.2.3.4 หน่วยแรงไพโอลาเคอร์ซอพลำดับที่สอง

ตามที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น งานเสมือนภายในสำหรับปริมาตร  $v$  สามารถเขียนในรูปของงานสังยุคของหน่วยแรงโคชี  $\sigma$  และความเครียดเชิงวิศวกรรมเสมือน  $\delta e$  ได้ดังสมการ

$$\delta W_{int} = \int_v \sigma : \delta e dv \quad (2.50)$$

โดยที่ : แทนการหดตัวสองชั้น (double contraction) ซึ่งสามารถแปลงเทนเซอร์ลำดับที่สองให้เป็นสเกลาร์ แสดงได้ดังสมการ

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = tr(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) \quad (2.51)$$

โดยที่  $\mathbf{A}$  และ  $\mathbf{B}$  แทนเทนเซอร์ลำดับที่สองซึ่งมีมิติสอดคล้องกัน และ  $tr$  แทนรอยเมตริกซ์ (trace) ความเครียดเชิงวิศวกรรมเสมือนสามารถคำนวณในรูปของเกรเดียนต์การเสียรูปได้ดังสมการ

$$\delta e = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} = \frac{\partial(\delta x)}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} = \delta \left( \frac{\partial x}{\partial X} \right) \cdot \mathbf{F}^{-1} = \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.52)$$

โดยที่เกรเดียนต์การเสียรูปสามารถเขียนในรูปการเปลี่ยนแปลงปริมาตรได้ดังสมการ

$$dv = (\det \mathbf{F}) dV \quad (2.53)$$

และสามารถเขียนสมการที่ (2.50) ในรูปหน่วยแรงไพโอลาเคอร์ซอพลำดับที่หนึ่ง  $\mathbf{P}$  ได้ดังสมการ

$$\int_v \sigma : \delta e dv = \int_v (\det \mathbf{F}) \sigma : \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} dV \quad (2.54)$$

หรือ

$$\delta W_{int} = \int_v \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} dV \quad (2.55)$$

เทนเซอร์ของหน่วยแรงไพโอลาเคอร์ซอพลำดับที่หนึ่ง  $\mathbf{P}$  สามารถเขียนในรูปสมการ (Javier และ Ricahrd, 1997)

$$\mathbf{P} = (\det \mathbf{F}) \sigma \mathbf{F}^{-T} \quad (2.56)$$

โดยที่หน่วยแรงไพโอลาเคอร์ซอพลำดับที่หนึ่งไม่สามารถบ่งบอกถึงโครงแบบเริ่มต้น  $C_0$  ได้สมบูรณ์และขาดคุณสมบัติสมมาตรจึงถูกเขียนใหม่ในรูป

$$\mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \sigma \mathbf{F}^{-T} \quad (2.57)$$

โดยที่  $\mathbf{S}$  แทนเทนเซอร์หน่วยแรงไพโอลาเคอร์ซอพลำดับที่สอง

### 2.2.4 แบบจำลองวัสดุ

งานวิจัยนี้พิจารณาความเครียดที่เกิดขึ้นในวัสดุมีค่าน้อย และวัสดุมีคุณสมบัติเชิงจากความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและความเครียดจึงสามารถเขียนในรูปเชิงเส้นโดยใช้หน่วยแรงไพโอลาเคอร์ซอพลำดับที่สองและความเครียดกรีน-ลากรองจ์ ซึ่งเรียกว่าแบบจำลองวัสดุเซนตีวีแนนท์-เคอร์ซอพลำดับที่สอง

$$S_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \text{ หรือ } \mathbf{S} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.58)$$

โดยที่  $\mathbf{C}$  แทนเทนเซอร์ลำดับที่สี่ของค่าคงที่ยืดหยุ่น

แบบจำลองวัสดุเซนต์-แวนท์-เคอร์ชอฟพัฒนาจากสมการพลังงานความเครียดของวัสดุ ซึ่งการหาค่าของหน่วยแรงพิจารณาจากสมการพลังงานในรูปของความเครียดเรียกว่า ไฮเปอร์อีลาสติก (hyperelastic) สมการพลังงานความเครียดต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรแสดงได้ดังสมการ

$$W_{int} = \int S_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int C_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (2.59)$$

หน่วยแรงไฮโอโลเคอร์ชอฟลำดับที่สองคำนวณได้ตามสมการ

$$S_{ij} = \frac{\partial W_{int}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.60)$$

และสามารถคำนวณค่าคงที่ยืดหยุ่นได้ตามสมการ

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \quad (2.61)$$

พิจารณาความต่อเนื่องของสมการพลังงานในรูปสมการ

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.62)$$

สมการที่ (2.62) แสดงถึงความสมมาตรของเทนเซอร์  $\mathbf{C}$  ดังนี้

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (2.63)$$

โดยทั่วไปเทนเซอร์ลำดับที่สี่  $C_{ijkl}$  ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมด  $3^4 = 81$  ค่า เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของหน่วยแรง 9 ค่า และสมาชิกของความเครียด 9 ค่า แต่เมื่อพิจารณาความสมมาตรของเมตริกซ์ความเครียดและหน่วยแรงดังในสมการที่ (2.21) และสมการที่ (2.32) สามารถลดจำนวนสมาชิกของเทนเซอร์  $\mathbf{C}$  เหลือ  $6 \times 6 = 36$  ค่า และเมื่อพิจารณาคคุณสมบัติสมมาตรของเทนเซอร์ในสมการที่ (2.63) สามารถลดจำนวนสมาชิกลงเหลือ  $6(6+1)/2 = 21$  ค่า ดังนั้นค่าคงที่ยืดหยุ่นจึงมีทั้งหมด 21 ค่าที่เป็นอิสระต่อกันโดยสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์จากกฎของวอยท์ (Voigt rule) ได้ดังสมการ

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & \text{Sym} & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

โดยที่ 1 2 และ 3 แทนทิศทาง  $x_1$ ,  $x_2$  และ  $x_3$  ตามลำดับ

จากการพิจารณาสมมาตรของวัสดุ (Nye, 1985) ทำให้ค่าคงที่ยืดหยุ่นลดจำนวนลงจาก 21 ค่าเหลือ 13 ค่าดังสมการ

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

#### 2.2.4.1 คุณสมบัติวัสดุแบบเท่ากันทุกทิศทาง

ในกรณีนี้พิจารณาวัสดุประเภทเนื้อเดียวกัน และมีคุณสมบัติวัสดุแบบเท่ากันทุกทิศทางสามารถแสดงสมาชิกของเทนเซอร์  $C$  ได้ดังสมการ

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.66)$$

โดยที่  $\lambda$  และ  $\mu$  แทนค่าคงที่ลาเมซึ่งนิยามตามสมการ

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.67)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.68)$$

โดยที่  $E$  แทนค่าโมดูลัสยืดหยุ่น และ  $\nu$  แทนค่าอัตราส่วนปัวซอง

การวิเคราะห์โครงสร้างเปลือกบางเป็นการวิเคราะห์เชิงกลศาสตร์ต่อเนื่อง 2 มิติโดยมีมิติความหนา น้อยมาก ดังนั้นแบบจำลองวัสดุจึงเป็นแบบหน่วยแรงระนาบ โดยหน่วยแรงในทิศทาง  $x_3$  มีค่าเป็นศูนย์ ดังนี้

$$S_{33} = 0 \quad S_{31} = 0 \quad \text{และ} \quad S_{32} = 0 \quad (2.69)$$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและความเครียดดังสมการ

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

### 2.2.4.1 คุณสมบัติวัสดุเชิงฉาก

เมื่อพิจารณาสมการที่ (2.65) สามารถเขียนความเครียดในรูปของหน่วยแรงได้ดังนี้

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} S_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} S_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} S_{33} \quad (2.71)$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} S_{11} + \frac{1}{E_2} S_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_3} S_{33} \quad (2.72)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} S_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} S_{22} + \frac{1}{E_3} S_{33} \quad (2.73)$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{1}{G_{12}} S_{12} \quad (2.74)$$

$$2\varepsilon_{23} = \frac{1}{G_{23}} S_{23} \quad (2.75)$$

$$2\varepsilon_{31} = \frac{1}{G_{31}} S_{31} \quad (2.76)$$

โดยที่  $E_1$ ,  $E_2$  และ  $E_3$  แทนค่าโมดูลัสยืดหยุ่นในแนวแกน  $X_1$ ,  $X_2$  และ  $X_3$  ตามลำดับ;  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  และ  $G_{31}$  แทนค่าโมดูลัสเฉือน;  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$  และ  $\nu_{23}$  แทนค่าอัตราส่วนปัวซอง

พิจารณาแบบจำลองวัสดุเป็นแบบหน่วยแรงระนาบสมการที่ (2.71) - (2.76) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} S_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} S_{22} \quad (2.77)$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} S_{11} + \frac{1}{E_2} S_{22} \quad (2.78)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} S_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} S_{22} \quad (2.79)$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{1}{G_{12}} S_{12} \quad (2.80)$$

จากสมการที่ (2.77) - (2.80) สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$



### 2.3 เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ของพื้นผิว

พิจารณาให้ตำแหน่งใดๆบนพื้นผิวโครงสร้างเปลือกบางแสดงในรูปพิกัดพื้นผิว  $\theta_1$  และ  $\theta_2$  โดยที่เส้นโค้งแสดงพิกัดบนพื้นผิวเรียกว่า เส้นพิกัดและเวกเตอร์แสดงตำแหน่ง  $P$  ในพิกัดคาร์ทีเซียนเขียนแทนด้วย  $\mathbf{x}$  ดังแสดงในรูปที่ 2.7 เมื่อกำหนดให้  $\mathbf{x}$  เป็นฟังก์ชันของพิกัด  $\theta_1$  และ  $\theta_2$  ดังสมการ

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta_1, \theta_2) \quad (2.82)$$

กำหนดให้  $\mathbf{g}_1$  และ  $\mathbf{g}_2$  แทนเวกเตอร์ฐานโคแวเรียนต์ (covariant base vectors) ซึ่งแสดงทิศทางเส้นสัมผัสกับเส้นพิกัด และกำหนดให้  $\mathbf{g}^1$  และ  $\mathbf{g}^2$  แทนส่วนกลับของเวกเตอร์ฐานโคแวเรียนต์เรียกว่า เวกเตอร์ฐานคอนทราแวเรียนต์ (contravariant base vectors) ดังสมการ

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_1} \quad (2.83)$$

$$\mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta_2} \quad (2.84)$$

$$\mathbf{g}^1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.85)$$

$$\mathbf{g}^2 = \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.86)$$

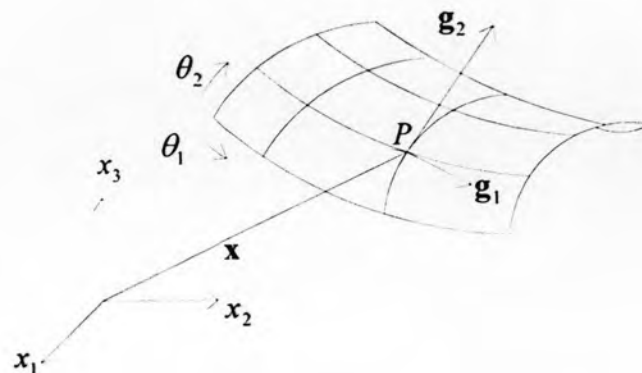
เมื่อพิจารณาพิกัดของเวกเตอร์ฐานโคแวเรียนต์ในพิกัดคาร์ทีเซียนจะไม่เป็นพิกัดเชิงฉาก ดังแสดงในรูปที่ 2.8 โดยเวกเตอร์ฐานโคแวเรียนต์มีคุณสมบัติตั้งฉากกับเวกเตอร์ฐานคอนทราแวเรียนต์ ตามสมการ

$$\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}^1 = 1 \quad (2.87)$$

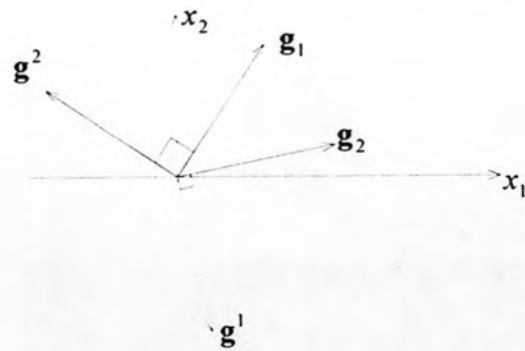
$$\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}^2 = 1 \quad (2.88)$$

$$\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}^2 = 0 \quad (2.89)$$

$$\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}^1 = 0 \quad (2.90)$$



รูปที่ 2.7 พิกัดของพื้นผิวโครงสร้างเปลือกบาง



รูปที่ 2.8 คุณสมบัติตั้งฉากระหว่างเวกเตอร์ฐานโคเวเรียนต์และเวกเตอร์ฐานคอนทราเวเรียนต์

สมาชิกของเวกเตอร์ฐานโคเวเรียนต์  $g_{ij}$  และเวกเตอร์ฐานคอนทราเวเรียนต์  $g'^j$  สามารถแสดงในรูปสมการ

$$g_i = g_{ij} g'^j \quad (2.91)$$

$$g_{ij} = g_i \cdot g_j \quad (2.92)$$

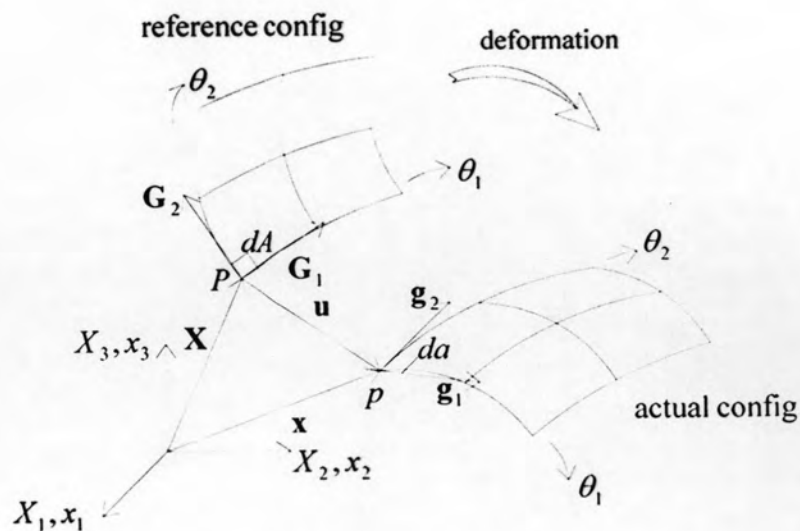
$$g'^i = g'^{ij} g_j \quad (2.93)$$

$$g'^{ij} = g'^i \cdot g'^j \quad (2.94)$$

เมื่อพิจารณารูปที่ 2.9 จะเห็นได้ว่าพื้นที่ผิวปัจจุบัน  $a$  เกิดจากการเสียรูปของพื้นที่ผิวเริ่มต้น  $A$  โดยสามารถคำนวณค่า  $a$  จาก  $g_1$  และ  $g_2$  ดังสมการ

$$da = \|g_1 \times g_2\| = \det g \quad (2.95)$$

$$a = \iint_{\theta_1, \theta_2} \|g_1 \times g_2\| d\theta_1 d\theta_2 \quad (2.96)$$



รูปที่ 2.9 การเสียรูปของพื้นผิว

โดยที่  $\mathbf{g}$  แทนเมตริกซ์  $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$  โดยค่า  $g_{ij}$  เป็นไปตามสมการที่ (2.92)

เมื่อพิจารณาให้พิกัดของตำแหน่ง  $p$  บนพื้นผิวปัจจุบันแทนด้วยเวกเตอร์  $\mathbf{x}(\theta_1, \theta_2)$  และพิกัดของตำแหน่ง  $P$  บนพื้นผิวเริ่มต้นแทนด้วยเวกเตอร์  $\mathbf{X}(\theta_1, \theta_2)$  จะสามารถแสดงการกระจัดของตำแหน่ง  $P$  ดังสมการ

$$\mathbf{u}(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{x}(\theta_1, \theta_2) - \mathbf{X}(\theta_1, \theta_2) \quad (2.97)$$

โดยที่การส่งพื้นผิวเริ่มต้นไปยังพื้นผิวปัจจุบันสามารถแสดงในรูปเกรเดียนต์การเสียรูป  $\mathbf{F}$  ดังสมการ

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (2.98)$$

$$\mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i \quad (2.99)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad (2.100)$$

โดยที่  $\mathbf{G}_i$  และ  $\mathbf{G}^i$  แทนเวกเตอร์ฐานโคแวเรียนและเวกเตอร์ฐานคอนทราแวเรียนต์ในโครงแบบเริ่มต้นตามลำดับ

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ระหว่างพื้นผิวและเกรเดียนต์การเสียรูป ดังสมการ (Kreyszig, 1968)

$$\|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\| = (\det \mathbf{F}) \|\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2\| \quad (2.101)$$

ดังนั้นสามารถเขียนความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงพื้นที่ผิวได้ดังสมการ

$$da = \det \mathbf{F} dA \quad (2.102)$$

$$a = \int_a da = \int_A \det \mathbf{F} dA \quad (2.103)$$

## 2.4 สมการพลังงานของพื้นผิว

โครงสร้างเปลือกบางอาศัยกลไกการเสียรูปของพื้นผิวโครงสร้างในการรับน้ำหนักบรรทุก รูปแบบพื้นผิวที่ได้จากการคำนวณนั้นมีค่าพื้นที่ผิวน้อยที่สุดที่สามารถครอบคลุมขอบเขตที่กำหนดเป็นผลให้พื้นผิวมีสมดุลในตัวเองดังเช่นผิวของฟองสบู่ การคำนวณพื้นที่ผิวน้อยที่สุดสามารถอาศัยวิธีแปรผัน (variation method) โดยพิจารณาสมการที่ (2.103) ดังสมการ

$$\delta a = \delta \left( \int_a da \right) = \int_A \delta(\det \mathbf{F}) dA = 0 \quad (2.104)$$

โดยสามารถแสดงค่าการแปรผันของ  $\det \mathbf{F}$  ได้ดังสมการ

$$\delta(\det \mathbf{F}) = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} : \delta \mathbf{F} \quad (2.105)$$

$$\delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i = \frac{\partial \delta \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.106)$$

$$\mathbf{F}^{-T} : \delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^i \quad (2.107)$$

เมื่อแทนสมการที่ (2.105) ลงในสมการที่ (2.104) จะสามารถเขียนสมการแสดงรูปแบบพื้นผิวได้ดังนี้

$$\delta a = \int_A (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} : \delta \mathbf{F} dA = 0 \quad (2.108)$$

อย่างไรก็ตามการพิจารณาข้างต้นเป็นการคำนวณเชิงเรขาคณิตซึ่งมิได้พิจารณาผลของหน่วยแรง หากพิจารณาพื้นผิวภายใต้หน่วยแรงดังแสดงในรูปที่ 2.10 โดยสมมติให้พื้นผิวอยู่ในสภาวะสมดุลและแรงกระทำภายนอกเท่ากับศูนย์จะสามารถเขียนสมการงานเสมือนได้ดังนี้

$$\delta W = b \int_a \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} da = b \int_a \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{u}_{,x} da = 0 \quad (2.109)$$

โดยที่  $\boldsymbol{\sigma}$  แทนเทนเซอร์ของหน่วยแรงโคชี ซึ่งกระทำบนพื้นผิวในสภาวะสมดุล  $\delta \mathbf{u}_{,x}$  แทนค่าอนุพันธ์ของการกระจัดเสมือนเทียบกับพิกัดปัจจุบัน และ  $b$  แทนความหนาของพื้นผิวซึ่งมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับมิติอื่นๆซึ่งสมมติให้มีค่าคงที่ตลอดการเสียรูป ค่าอนุพันธ์ของการกระจัดสามารถคำนวณในรูปของเกรเดียนต์การเสียรูปได้ดังสมการ

$$\delta \mathbf{u}_{,x} = \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\delta \mathbf{x})}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \delta \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right) \cdot \mathbf{F}^{-1} = \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.110)$$

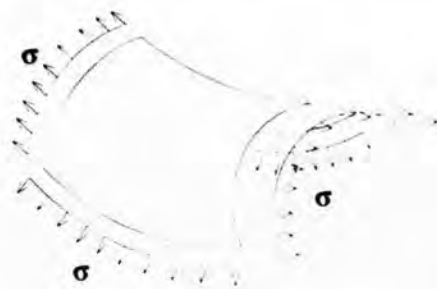
เมื่อแทนสมการที่ (2.110) และสมการที่ (2.102) ลงในสมการที่ (2.109) จะได้ว่า

$$\delta W = b \int_A \boldsymbol{\sigma} : (\delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}) (\det \mathbf{F}) dA = 0 \quad (2.111)$$

$$\delta W = b \int_A (\det \mathbf{F}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-1}) : \delta \mathbf{F} dA = 0 \quad (2.112)$$

$$\delta W = b \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} dA = 0 \quad (2.113)$$

โดยที่  $\mathbf{S}$  แทนเทนเซอร์ของหน่วยแรงไพโอลาเคอร์ซอฟลำดับที่สอง เมื่อพิจารณาสมการที่ (2.112) ภายใต้หน่วยแรงกระทำสม่ำเสมอ  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{I}$  สมการดังกล่าวจะลดรูปลงเป็นสมการที่ (2.108) ซึ่งแสดงสภาวะสมดุลของระบบที่มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด



รูปที่ 2.10 สมดุลของพื้นผิวภายใต้หน่วยแรงสัมผัส

## 2.5 การแก้ปัญหาโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การแก้ปัญหาสมการที่ (2.113) ซึ่งแสดงการแปรผันของพลังงานของพื้นผิวที่ไม่มีแรงภายนอกกระทำสามารถอาศัยฟังก์ชันประมาณค่าสำหรับชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยมที่มีค่าความเครียดคงที่เนื่องจากมีความสะดวกในการวิเคราะห์แบบไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิตและคุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่สามารถแปลงลงสู่ระนาบสองมิติได้ง่าย

### 2.5.1 ชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยม

ฟังก์ชันประมาณค่า  $\phi$  สำหรับชิ้นส่วนของรูปสามเหลี่ยมที่มีค่าความเครียดคงที่สามารถเขียนในรูปสมการเชิงเส้น

$$\phi = a_0 + a_1 r + a_2 s \quad (2.114)$$

โดยที่  $a_0$ ,  $a_1$  และ  $a_2$  แทนค่าคงที่;  $r$  และ  $s$  แทนพิกัดเฉพาะที่ของชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 2.11

พิจารณารูปที่ 2.11 แทนค่าพิกัด  $r$  และ  $s$  ในสมการที่ (2.114) ได้ดังนี้

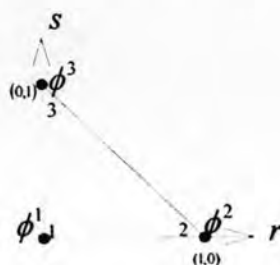
$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}^1 \\ \hat{\phi}^2 \\ \hat{\phi}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

โดยที่  $\hat{\phi}^1$ ,  $\hat{\phi}^2$  และ  $\hat{\phi}^3$  แทนค่าประมาณฟังก์ชันที่จุดต่อ 1 2 และ 3 ตามลำดับ สมการที่ (2.115) สามารถเขียนใหม่ในรูป

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}^1 \\ \hat{\phi}^2 \\ \hat{\phi}^3 \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

แทนค่า  $a_0$ ,  $a_1$  และ  $a_2$  จากสมการที่ (2.116) ลงในสมการที่ (2.114) ดังนี้

$$\phi = (1-r-s)\hat{\phi}^1 + r\hat{\phi}^2 + s\hat{\phi}^3 \quad (2.117)$$



รูปที่ 2.11 ปริมาณสเกลาร์แทนด้วยชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยม

จากสมการที่ (2.117) สามารถเขียนฟังก์ชันรูปร่างได้ตามสมการ

$$h_1 = 1 - r - s \quad h_2 = r \quad h_3 = s \quad (2.118)$$

โดยที่  $h_1$ ,  $h_2$  และ  $h_3$  แทนฟังก์ชันรูปร่างที่จุดต่อ 1 2 และ 3 ตามลำดับ และสามารถคำนวณอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งในสองมิติจากฟังก์ชันรูปร่างได้ดังต่อไปนี้

จากรูปที่ 2.12 กำหนดให้

$${}^0\phi = h_1 {}^0\hat{\phi}^1 + h_2 {}^0\hat{\phi}^2 + h_3 {}^0\hat{\phi}^3 \quad (2.119)$$

$${}^1\phi = h_1 {}^1\hat{\phi}^1 + h_2 {}^1\hat{\phi}^2 + h_3 {}^1\hat{\phi}^3 \quad (2.120)$$

จากกฎของอนุพันธ์ลูกโซ่สามารถเขียนอนุพันธ์ของปริมาณใดๆ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^0\phi}{\partial r} = \frac{\partial^0\phi}{\partial^1x_1} \frac{\partial^1x_1}{\partial r} + \frac{\partial^0\phi}{\partial^1x_2} \frac{\partial^1x_2}{\partial r} \quad (2.121)$$

$$\frac{\partial^0\phi}{\partial s} = \frac{\partial^0\phi}{\partial^1x_1} \frac{\partial^1x_1}{\partial s} + \frac{\partial^0\phi}{\partial^1x_2} \frac{\partial^1x_2}{\partial s} \quad (2.122)$$

สมการข้างต้นสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} {}^0\phi = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial^1x_1} \\ \frac{\partial}{\partial^1x_2} \end{Bmatrix} {}^0\phi \quad (2.123)$$

โดยที่  $\mathbf{J}$  แทนเมตริกซ์จาโคเบียนซึ่งคำนวณได้จากสมการ

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h_i}{\partial r} \hat{x}_i^1 & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h_i}{\partial r} \hat{x}_i^2 \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h_i}{\partial s} \hat{x}_i^1 & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h_i}{\partial s} \hat{x}_i^2 \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

โดยที่  $\hat{x}_i^1$  และ  $\hat{x}_i^2$  แทนพิกัดของจุดต่อ  $i$  ในทิศทาง  $x_1$  และ  $x_2$  ตามลำดับ อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับพิกัดใดๆ แสดงได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial^1x_1} \\ \frac{\partial}{\partial^1x_2} \end{Bmatrix} {}^0\phi = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} {}^0\phi \quad (2.125)$$



รูปที่ 2.12 ฟังก์ชันประมาณค่าบริเวณจุดต่อของชิ้นส่วนรูปสามเหลี่ยมในพิกัดเริ่มต้นและพิกัดปัจจุบัน



## 2.5.2 สมการเชิงเส้นของการกระจัด

พิจารณาสมการที่ (2.113) เมื่อมีแรงภายนอกกระทำสามารถเขียนสมการโดยทั่วไปได้ดังนี้

$$\delta W_{ext} = b \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} dA \quad (2.126)$$

โดยที่  $W_{ext}$  แทนงานเสมือนภายนอกดังแสดงในสมการที่ (2.49)

การแก้สมการที่ (2.126) เพื่อหาค่าต่างๆของโครงแบบ  $C_{t+\Delta t}$  ที่เวลา  $t + \Delta t$  ต้องอาศัยค่าที่ทราบจากโครงแบบที่เวลา  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$  โดยทั่วไปวิธีการพิจารณาสมการเชิงเส้นของการกระจัดเพื่อแก้ปัญหาสมการที่ (2.126) แบ่งออกได้เป็นสองวิธีได้แก่ 1) วิธีลากรองจ์รวม (total Lagrangian) และ 2) วิธีลากรองจ์ปรับ (updated Lagrangian) โดยวิธีแรกพิจารณาตัวแปรทางสถิติศาสตร์และจลนศาสตร์อ้างอิงจากโครงแบบเริ่มต้น  $C_0$  ส่วนวิธีที่สองพิจารณาตัวแปรทางสถิติศาสตร์และจลนศาสตร์อ้างอิงจากโครงแบบปัจจุบัน  $C$ , งานวิจัยนี้เลือกใช้วิธีลากรองจ์รวมเนื่องจากคุณสมบัติวัสดุที่พิจารณาเป็นแบบมีทิศทาง การอ้างอิงโครงแบบเริ่มต้นก่อนเกิดการเสียรูปจึงเหมาะสมกว่าการอ้างอิงโครงแบบปัจจุบันภายหลังการเสียรูปเนื่องจากสามารถระบุทิศทางแน่นอนของเส้นถักวัสดุในโครงแบบเริ่มต้น

สมการที่ (2.126) สามารถอธิบายในรูปลากรองจ์รวมโดยอาศัยสัญกรณ์ดัชนี ได้ดังสมการ

$$b \int_A {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} dA = \delta {}^{t+\Delta t} W_{ext} \quad (2.127)$$

โดยที่  ${}^{t+\Delta t} \varepsilon = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} - \mathbf{I})$  และ  $\delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^T \delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}$

หน่วยแรงไพโอลาเคอร์ชอฟลำดับที่สอง  ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$  และความเครียดกรีน-ลากรองจ์  ${}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij}$  สามารถแยกส่วนได้ในรูปสมการ

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}'_0 S_{ij} + {}_0 S_{ij} \quad (2.128)$$

$$\delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = \delta {}'_0 \varepsilon_{ij} + \delta {}_0 \varepsilon_{ij} \quad (2.129)$$

โดยที่  $'_0 S_{ij}$  แทนหน่วยแรงไพโอลาเคอร์ชอฟลำดับที่สองส่วนปัจจุบัน;  $_0 S_{ij}$  แทนหน่วยแรงไพโอลาเคอร์ชอฟลำดับที่สองส่วนเพิ่ม;  $\delta {}'_0 \varepsilon_{ij}$  แทนความเครียดกรีน-ลากรองจ์เสมือนส่วนปัจจุบัน และ  $\delta {}_0 \varepsilon_{ij}$  แทนความเครียดกรีน-ลากรองจ์เสมือนส่วนเพิ่ม

เมื่อพิจารณาการแปรผันรอบเวลา  $t + \Delta t$  จะได้ว่า  $\delta {}'_0 \varepsilon_{ij} = 0$  และสมการที่ (2.129) ลดรูปดังสมการ

$$\delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = \delta {}_0 \varepsilon_{ij} = \delta {}_0 e_{ij} + \delta {}_0 \eta_{ij} \quad (2.130)$$

โดยที่  $\delta {}_0 e_{ij}$  แทนความเครียดกรีน-ลากรองจ์เสมือนส่วนเพิ่มเชิงเส้นหรือความเครียดเชิงวิศวกรรมเสมือน และ  $\delta {}_0 \eta_{ij}$  แทนความเครียดกรีน-ลากรองจ์เสมือนส่วนเพิ่มไม่เชิงเส้น

เมื่อแทนสมการที่ (2.128) และ (2.130) ลงในสมการที่ (2.127) จะสามารถเขียนสมการในรูปแยกส่วนส่วนเพิ่มดังนี้

$$b \int_A S_{ij} \delta_0 \varepsilon_{ij} dA + b \int_A {}^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} dA + b \int_A {}^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} dA = \delta^{t+\Delta} W_{ext} \quad (2.131)$$

เมื่อพิจารณาพจน์ซ้ายมือของสมการที่ (2.131) พบว่าพจน์ที่สองสามารถระบุค่าได้ และพจน์ที่สามสามารถเขียนในรูปการกระจัดเชิงเส้น ในขณะที่พจน์แรกสามารถประมาณค่าให้อยู่ในรูปเชิงเส้นโดยอนุกรมเทเลอร์ดังนี้

$$b \int_A S_{ij} \delta_0 \varepsilon_{ij} dA = b \int_A \left( \frac{\partial_0' S_{ij}}{\partial_0' \varepsilon_{kl}} \Big|_t ({}_0 e_{kl} + {}_0 \eta_{kl}) + \text{higher order terms} \right) (\delta_0 e_{ij} + \delta_0 \eta_{ij}) dA \quad (2.132)$$

เมื่อไม่พิจารณาพจน์ไม่เชิงเส้นและพจน์อันดับสูงสามารถเขียนสมการที่ (2.132) ใหม่ในรูป

$$b \int_A S_{ij} \delta_0 \varepsilon_{ij} dA \approx b \int_A C_{ijkl} {}_0 e_{kl} \delta_0 e_{ij} dA \quad (2.133)$$

โดยที่  ${}_0 C_{ijkl} = \frac{\partial_0' S_{ij}}{\partial_0' \varepsilon_{kl}} \Big|_t$  แทนเทนเซอร์หน่วยแรง-ความเค้นดัดที่เวลา  $t$

และสามารถเขียนสมการเชิงเส้นของการกระจัดได้ดังนี้

$$b \int_A C_{ijkl} {}_0 e_{kl} \delta_0 e_{ij} dA + b \int_A {}^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} dA = \delta^{t+\Delta} W_{ext} - b \int_A {}^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} dA \quad (2.134)$$

### 2.5.3 เมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยม

พิจารณาสมการที่ (2.134) สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ทางสถิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$({}_0' \mathbf{K}_l + {}_0' \mathbf{K}_m) \mathbf{U} = {}^{t+\Delta} \mathbf{R} - {}_0' \mathbf{F} \quad (2.135)$$

โดยที่  ${}_0' \mathbf{K}_l$  แทนเมตริกซ์สติฟเนสสัมพัทธ์เชิงเส้น ณ เวลา  $t$ ;  ${}_0' \mathbf{K}_m$  แทนเมตริกซ์สติฟเนสสัมพัทธ์ไม่เชิงเส้น ณ เวลา  $t$ ;  $\mathbf{U}$  แทนเวกเตอร์การกระจัดส่วนเพิ่ม;  ${}^{t+\Delta} \mathbf{R}$  แทนเวกเตอร์แรงกระทำที่จุดต่อภายนอก ณ เวลา  $t + \Delta t$  และ  ${}_0' \mathbf{F}$  แทนเวกเตอร์แรงกระทำเทียบเท่าที่จุดต่อที่เกิดจากหน่วยแรงในชิ้นส่วนย่อย ณ เวลา  $t$

เมตริกซ์และเวกเตอร์ในสมการที่ (2.135) สามารถเขียนในรูปของเมตริกซ์ความเค้น-การกระจัดได้ดังนี้

$${}_0' \mathbf{K}_l = b \int_A {}^t \mathbf{B}_l^T {}_0' \mathbf{C}_0' \mathbf{B}_l dA \quad (2.136)$$

$${}_0' \mathbf{K}_m = b \int_A {}^t \mathbf{B}_m^T {}_0' \mathbf{S}_0' \mathbf{B}_m dA \quad (2.137)$$

$${}_0' \mathbf{F} = b \int_A {}^t \mathbf{B}_l^T {}_0' \mathbf{s} dA \quad (2.138)$$

โดยที่  ${}^0\mathbf{B}_i$  แทนเมตริกซ์ความเครียด-การกระจัดเชิงเส้น ณ เวลา  $t$ ;  ${}^0\mathbf{B}_{ii}$  แทนเมตริกซ์ความเครียด-การกระจัดไม่เชิงเส้น ณ เวลา  $t$ ;  ${}^0\mathbf{S}$  แทนเมตริกซ์หน่วยแรงไพโอลาเคอร์ซอพลำดับที่สอง ณ เวลา  $t$  และ  ${}^0\mathbf{s}$  แทนเวกเตอร์หน่วยแรงไพโอลาเคอร์ซอพลำดับที่สอง

เมตริกซ์ความเครียด-การกระจัดเชิงเส้น  ${}^0\mathbf{B}_i$  สามารถเขียนในรูปอนุพันธ์ของฟังก์ชันประมาณค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{B}_i = & \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_2} & 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_1} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_1} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_1} & 0 \end{bmatrix} \\
 + & \begin{bmatrix} \frac{\partial^0 u_1}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_1} & & \frac{\partial^0 u_2}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_1} & & \frac{\partial^0 u_3}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_1} & & & & \\ \frac{\partial^0 u_1}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_2} & & \frac{\partial^0 u_2}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_2} & & \frac{\partial^0 u_3}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_2} & & & & \dots \\ \frac{\partial^0 u_1}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial^0 u_1}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_1} & & \frac{\partial^0 u_2}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial^0 u_2}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_1} & & \frac{\partial^0 u_3}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial^0 u_3}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_1} & & & & \\ & \frac{\partial^0 u_1}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_1} & & \frac{\partial^0 u_2}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_1} & & \frac{\partial^0 u_3}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_1} & & & \\ \dots & \frac{\partial^0 u_1}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_2} & & \frac{\partial^0 u_2}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_2} & & \frac{\partial^0 u_3}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_2} & & & \dots \\ & \frac{\partial^0 u_1}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial^0 u_1}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_1} & & \frac{\partial^0 u_2}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial^0 u_2}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_1} & & \frac{\partial^0 u_3}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial^0 u_3}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_1} & & & \\ \dots & \frac{\partial^0 u_1}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_1} & & \frac{\partial^0 u_2}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_1} & & \frac{\partial^0 u_3}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_1} & & & \\ & \frac{\partial^0 u_1}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial^0 u_1}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_1} & & \frac{\partial^0 u_2}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial^0 u_2}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_1} & & \frac{\partial^0 u_3}{\partial^0 x_1} \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial^0 u_3}{\partial^0 x_2} \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_1} & & & \end{bmatrix} \quad (2.139)
 \end{aligned}$$

โดยที่  $h_i$  แทนฟังก์ชันประมาณค่าตามสมการที่ (2.118);  $\frac{\partial}{\partial^0 x_i}$  แทนอนุพันธ์เทียบกับพิกัด  ${}^0 x_i$  ที่โครง

แบบเริ่มต้นดังสมการที่ (2.125); และ  ${}^0 u_1$ ,  ${}^0 u_2$  และ  ${}^0 u_3$  แทนการกระจัดโดยประมาณที่เวลาปัจจุบัน

โดยอาศัยฟังก์ชันประมาณค่าในสมการที่ (2.120) เมื่อ  $i = 1, 2, 3$  และสามารถเขียนเมตริกซ์ความเครียด-

การกระจัดไม่เชิงเส้น  ${}^0\mathbf{B}_{ii}$  ในรูป

$${}'_0\mathbf{B}_{nl} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial^0 x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial^0 x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial^0 x_2} \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

เมตริกซ์และเวกเตอร์หน่วยแรงไฟฟ้าเคอร์ซอร์ฟลำดับที่สองสามารถเขียนในรูปสมการ

$${}'_0\mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}'_0S_{11} & {}'_0S_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}'_0S_{12} & {}'_0S_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}'_0S_{11} & {}'_0S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}'_0S_{12} & {}'_0S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}'_0S_{11} & {}'_0S_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}'_0S_{12} & {}'_0S_{22} \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

$${}'_0\mathbf{s} = \begin{bmatrix} {}'_0S_{11} \\ {}'_0S_{22} \\ {}'_0S_{12} \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

โดยที่  ${}'_0S_{ij}$  แทนหน่วยแรงไฟฟ้าเคอร์ซอร์ฟลำดับที่สองซึ่งคำนวณจากคุณสมบัติของวัสดุและความเครียดตามสมการที่ (2.70) หรือ (2.81) เมื่อ  $i = 1, 2$  และ  $j = 1, 2$

#### 2.5.4 เมตริกซ์แปลงพิกัด

งานวิจัยนี้อาศัยเมตริกซ์แปลงพิกัด 2 รูปแบบได้แก่ เมตริกซ์แปลงพิกัดเฉพาะที่ของชิ้นส่วนย่อยและเมตริกซ์แปลงพิกัดวัสดุ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

พิจารณาเวกเตอร์  $\mathbf{v}_{12}$  จากตำแหน่งจุดต่อ 1 ไปยังจุดต่อ 2 ของชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 2.13 (ก) โดยกำหนดให้พิกัดเฉพาะที่  $\mathbf{x}_1$  ของชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยมสามารถคำนวณตามสมการ

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\mathbf{v}_{12}}{\|\mathbf{v}_{12}\|} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \\ \cos \gamma_1 \end{Bmatrix} \quad (2.143)$$

โดยที่  $\cos \alpha_1$ ,  $\cos \beta_1$  และ  $\cos \gamma_1$  แทนโคไซน์ทิศทางของ  $\mathbf{x}_1$  เทียบกับพิกัดทั่วไป  $X_1$ ,  $X_2$  และ  $X_3$  ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 2.13 (ข) จากรูปที่ 2.12 (ก) พิจารณาเวกเตอร์  $\mathbf{v}_{13}$  จากตำแหน่งจุดต่อ 1 ไปยังจุดต่อ 3 ของชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยมจะสามารถคำนวณพิกัดเฉพาะที่  $\mathbf{x}_3$  ได้ตามสมการ

$$\mathbf{x}_3 = \frac{\mathbf{v}_{12} \times \mathbf{v}_{13}}{\|\mathbf{v}_{12} \times \mathbf{v}_{13}\|} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_3 \end{Bmatrix} \quad (2.144)$$

โดยที่  $\cos \alpha_3$ ,  $\cos \beta_3$  และ  $\cos \gamma_3$  แทนโคไซน์ทิศทางของ  $\mathbf{x}_3$  เทียบกับพิกัดทั่วไป  $X_1$ ,  $X_2$  และ  $X_3$  ตามลำดับ และสามารถคำนวณพิกัดเฉพาะที่  $\mathbf{x}_2$  จากสมการ

$$\mathbf{x}_2 = \frac{\mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1\|} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \gamma_2 \end{Bmatrix} \quad (2.145)$$

โดยที่  $\cos \alpha_2$ ,  $\cos \beta_2$  และ  $\cos \gamma_2$  แทนโคไซน์ทิศทางของ  $\mathbf{x}_2$  เทียบกับพิกัดทั่วไป  $X_1$ ,  $X_2$  และ  $X_3$  ตามลำดับ ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเฉพาะที่  $(x_1, x_2, x_3)$  และแกนพิกัดทั่วไป  $(X_1, X_2, X_3)$  สามารถเขียนในรูปสมการ

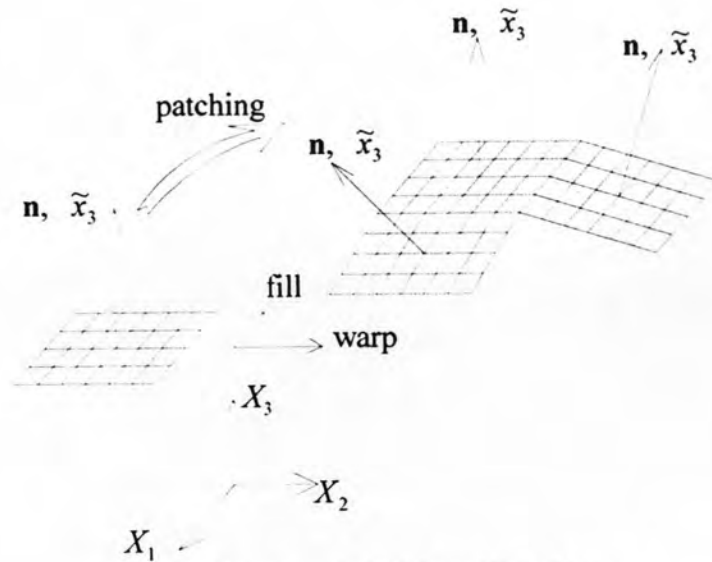
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad (2.146)$$

โดยที่  $\cos \alpha_i$ ,  $\cos \beta_i$  และ  $\cos \gamma_i$  แทนค่าโคไซน์ทิศทางตามสมการที่ (2.144) – (2.146) เมื่อ  $i = 1, 2, 3$

เมตริกซ์แปลงพิกัดวัสดุแตกต่างจากเมตริกซ์แปลงพิกัดเฉพาะที่ของชิ้นส่วนย่อยเนื่องจากพิกัดวัสดุ  $\tilde{\mathbf{x}}_3$  แสดงทิศทางตั้งฉากกับระนาบพื้นผิวดังแสดงในรูปที่ 2.14 เมื่อ  $\mathbf{n}$  แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากกับระนาบพื้นผิว เมตริกซ์แปลงพิกัดวัสดุในระนาบพื้นผิวมีค่าคงที่ตลอดการคำนวณเนื่องจากการวิเคราะห์โดยวิธีลากรองจ์รวม ซึ่งทิศทางคุณสมบัติวัสดุถูกอ้างอิงจากโครงแบบเริ่มต้น  $C_0$



รูปที่ 2.13 (ก) พิกัดเฉพาะที่ และ (ข) โคไซน์ทิศทางสำหรับชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยม



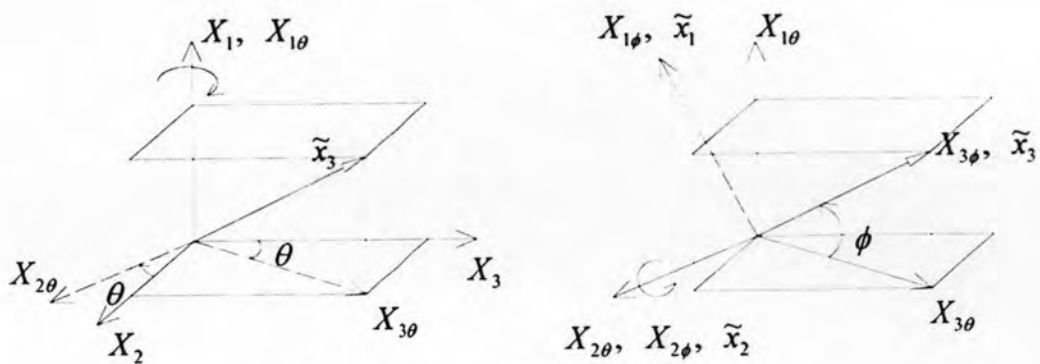
รูปที่ 2.14 ทิศทางของเส้นดักในโครงสร้างเปลือกบาง

ทิศทางของเส้นดักในโครงสร้างสามารถพิจารณาจากทิศทางของเวกเตอร์ตั้งฉาก  $\mathbf{n}$  ของระนาบพื้นผิวซึ่งมีทิศเดียวกับพิกัด  $\tilde{x}_3$  โดยการหมุนแกน  $X_3$  ไปทับแกน  $\tilde{x}_3$  ดังรูปที่ 2.15 เริ่มต้นโดยการฉาย  $\tilde{x}_3$  บนระนาบ  $X_2 - X_3$  แทนด้วย  $X_{3\theta}$  จากนั้นหมุนระนาบ  $X_2 - X_3$  รอบ  $X_1$  เป็นมุม  $\theta$  ตามสมการ

$$\begin{Bmatrix} X_{1\theta} \\ X_{2\theta} \\ X_{3\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad (2.147)$$

โดยที่  $\sin \theta = \frac{\cos \beta_3}{\sqrt{(\cos \beta_3)^2 + (\cos \gamma_3)^2}}$  และ  $\cos \theta = \frac{\cos \gamma_3}{\sqrt{(\cos \beta_3)^2 + (\cos \gamma_3)^2}}$  เมื่อ  $\cos \alpha_3 \cos \beta_3$

และ  $\cos \gamma_3$  แทนโคไซน์ทิศทางของ  $x_3$  เทียบกับพิกัดทั่วไป  $X_1, X_2$  และ  $X_3$  ตามลำดับ



รูปที่ 2.15 การหมุนแกนรอบแกน  $X_1$  และ  $X_{2\theta}$



หมุนระนาบ  $X_{1\theta} - X_{3\theta}$  รอบ  $X_{2\theta}$  เป็นมุม  $\phi$  ตามสมการ

$$\begin{Bmatrix} X_{1\phi} \\ X_{2\phi} \\ X_{3\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{1\theta} \\ X_{2\theta} \\ X_{3\theta} \end{Bmatrix} \quad (2.148)$$

โดยที่  $\sin\phi = \cos\alpha_3$  และ  $\cos\phi = \sqrt{(\cos\beta_3)^2 + (\cos\gamma_3)^2}$

ดังนั้นสามารถเขียนสมการแปลงพิกัดวัสดุดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad (2.149)$$

จากสมการที่ (2.146) และสมการที่ (2.149) สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดวัสดุและพิกัดเฉพาะที่ได้ดังสมการ

$$\begin{Bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (2.150)$$

สมการข้างต้นสามารถเขียนในรูปสัญกรณ์ดัชนีได้ดังนี้

$$\tilde{x}_i = p_{ij} x_j \quad (2.151)$$

โดยที่  $p_{ij}$  แทนผลคูณเมตริกซ์ในสมการที่ (2.150) เมื่อ  $i = 1, 2, 3$  และ  $j = 1, 2, 3$

สังเกตว่าค่า  $p_{13} = p_{23} = p_{31} = p_{32} = 0$  และ  $p_{33} = 1$  เนื่องจาก  $\tilde{x}_3$  และ  $x_3$  มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบพื้นผิว จากสมการที่ (2.151) สามารถคำนวณเมตริกซ์คุณสมบัติวัสดุในพิกัดเฉพาะที่  $C_{local}$

โดยพิจารณาการแปลงพิกัดความเครียดตามสมการ

$$\begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}_{11} & \tilde{\epsilon}_{12} \\ \tilde{\epsilon}_{12} & \tilde{\epsilon}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}^T \quad (2.152)$$

โดยที่  $\tilde{\epsilon}_{ij}$  แทนความเครียดในพิกัดวัสดุ;  $\epsilon_{ij}$  แทนความเครียดในพิกัดเฉพาะที่; และ  $p_{ij}$  แทนเมตริกซ์แปลงพิกัดตามสมการที่ (2.151) ในทำนองเดียวกันพิจารณาการแปลงพิกัดหน่วยแรงตามสมการ

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (2.153)$$

โดยที่  $\tilde{S}_{ij}$  แทนหน่วยแรงไพโอลาเคอร์ซอพลำดับที่สองในพิกัดวัสดุ;  $S_{ij}$  แทนหน่วยแรงไพโอลาเคอร์ซอพลำดับที่สองในพิกัดเฉพาะที่; และ  $p_{ij}$  แทนเมตริกซ์แปลงพิกัดตามสมการที่ (2.151)

สมการที่ (2.152) และสมการที่ (2.153) สามารถเขียนในรูปเวกเตอร์ของหน่วยแรงและความเครียดได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11} \\ \tilde{\varepsilon}_{22} \\ \tilde{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_{11})^2 & (p_{12})^2 & p_{11}p_{12} \\ (p_{21})^2 & (p_{22})^2 & p_{22}p_{21} \\ 2p_{11}p_{21} & 2p_{22}p_{12} & (p_{12}p_{21} + p_{11}p_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.154)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_{11})^2 & (p_{21})^2 & 2p_{11}p_{21} \\ (p_{12})^2 & (p_{22})^2 & 2p_{22}p_{12} \\ p_{11}p_{12} & p_{22}p_{21} & (p_{12}p_{21} + p_{11}p_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{S}_{11} \\ \tilde{S}_{22} \\ \tilde{S}_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.155)$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียด  $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  สามารถเขียนความสัมพันธ์ของเมตริกซ์คุณสมบัติวัสดุในพิกัดเฉพาะที่ของชิ้นส่วนย่อยได้โดยอาศัยสมการที่ (2.154) และ สมการที่ (2.155) ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{local} &= \begin{bmatrix} (p_{11})^2 & (p_{21})^2 & 2p_{11}p_{21} \\ (p_{12})^2 & (p_{22})^2 & 2p_{22}p_{12} \\ p_{11}p_{12} & p_{22}p_{21} & (p_{12}p_{21} + p_{11}p_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \\ \begin{bmatrix} (p_{11})^2 & (p_{12})^2 & p_{11}p_{12} \\ (p_{21})^2 & (p_{22})^2 & p_{22}p_{21} \\ 2p_{11}p_{21} & 2p_{22}p_{12} & (p_{12}p_{21} + p_{11}p_{22}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{T} \end{aligned} \quad (2.156)$$

โดยที่  $\mathbf{C}_{local}$  แทนเมตริกซ์คุณสมบัติวัสดุในพิกัดเฉพาะที่ของชิ้นส่วนย่อย และ  $\tilde{\mathbf{C}}$  แทนเมตริกซ์คุณสมบัติวัสดุในพิกัดวัสดุ

### 2.5.5 การแก้ปัญหาระบบสมการไม่เชิงเส้น

การแก้ปัญหาระบบสมการไม่เชิงเส้นในงานวิจัยนี้อาศัยวิธีนิวตัน-ราฟสันโดยอาศัยการคำนวณซ้ำเพื่อแก้ปัญหสมการสมดุลงเชิงเส้นส่วนเพิ่ม ข้อจำกัดของวิธีการดังกล่าวคือการไม่สามารถควบคุมพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบเมื่อเข้าใกล้จุดขีดจำกัด

พิจารณา  $\mathbf{U}^*$  แทนเวกเตอร์คำตอบของสมการ

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = \mathbf{0} \quad (2.157)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}(\mathbf{U}^*) - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}(\mathbf{U}^*) \quad (2.158)$$

โดยที่  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}$  แทนเวกเตอร์แรงกระทำภายนอก ณ เวลา  $t + \Delta t$ ; และ  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}$  แทนเวกเตอร์แรงภายในของระบบโครงสร้าง ณ เวลา  $t + \Delta t$

พิจารณาการขยายอนุกรมเทเลอร์ในสองอันดับแรก

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = \mathbf{f}({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) + \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^{(i-1)}} (\mathbf{U}^* - {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) + \text{higher order terms} \quad (2.159)$$

เมื่อพิจารณาให้แรงกระทำภายนอกไม่ขึ้นกับการกระจัด และแทนสมการที่ (2.158) ลงในสมการที่ (2.159) โดยไม่คิดพจน์อันดับสูงจะได้

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{t+\Delta t, \mathbf{U}^{(i-1)}} (\mathbf{U}^* - {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)} \quad (2.160)$$

หรือเขียนในรูปสมการ

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)} \quad (2.161)$$

โดยที่  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)}$  แทนเมตริกซ์สติฟเนสสัมผัสปัจจุบันซึ่งนิยามตามสมการ

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} = \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right]_{t+\Delta t, \mathbf{U}^{(i-1)}} \quad (2.162)$$

และ  $\Delta \mathbf{U}^{(i)}$  แทนเวกเตอร์การกระจัดส่วนเพิ่มซึ่งสามารถเขียนในรูปสมการ

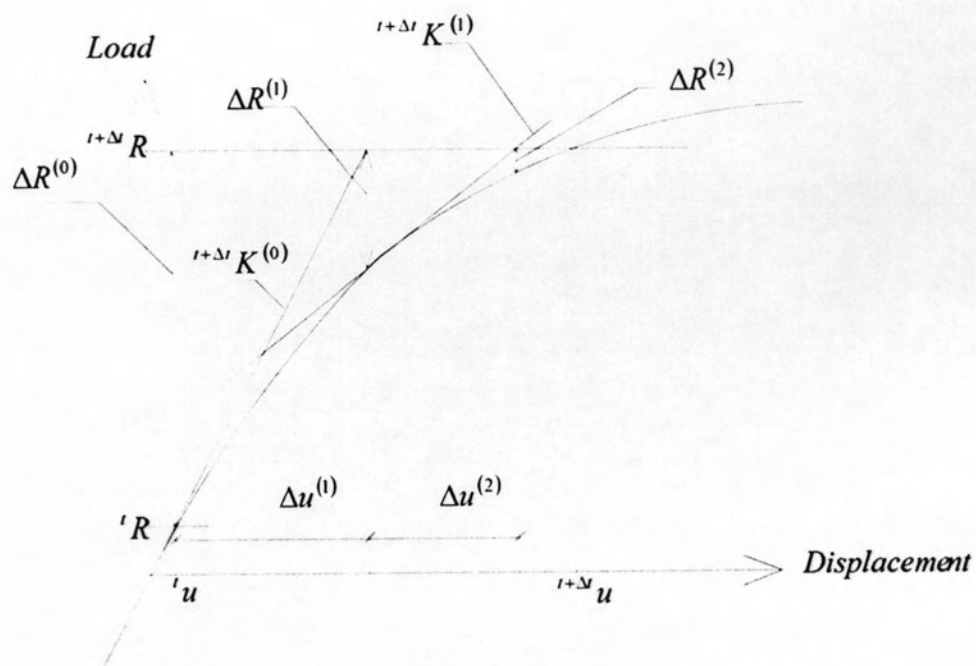
$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} = \Delta \mathbf{U}^i + {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} \quad (2.163)$$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(0)} = {}^t \mathbf{K}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(0)} = {}^t \mathbf{F}$ ; และ  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(0)} = {}^t \mathbf{U}$  และทำการคำนวณซ้ำจนกระทั่ง  $\Delta \mathbf{U}^{(i)}$  หรือ  $\Delta \mathbf{R}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)}$  มีค่าภายในเกณฑ์ที่กำหนดตามสมการ

$$\frac{\|\Delta \mathbf{U}^{(i)}\|}{\|{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}\|} \leq tol \quad (2.164)$$

$$\frac{\|\Delta \mathbf{R}^{(i-1)}\|}{\|{}^{t+\Delta t} \mathbf{R}\|} \leq tol \quad (2.165)$$

โดยที่  $\|\ \|$  แทนยูคลีเดียนนอร์ม และ  $tol$  แทนค่าความคลาดเคลื่อนซึ่งการศึกษานี้กำหนดค่า  $10^{-7}$  รูปที่ 2.16 แสดงการคำนวณซ้ำด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันสำหรับปัญหาหนึ่งระดับชั้นความเสรี



รูปที่ 2.16 ขั้นตอนการวิเคราะห์ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน