บทที่ 2

สมการระบบไฟฟ้าและเมตริกซ์โครงสร้าง

2.1 การใช้สัญญลักษณ์และการแทนค่าในวงจรไฟฟ้า

2.1.1 วงจรและกราฟ (Graph and Network)

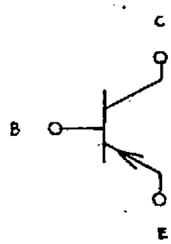
ในวงจรไฟฟ้าใดๆ จะสามารถแทนได้ด้วยกราฟ ซึ่งประกอบด้วยบรานช์ (branch) ที่มีจุดปลาย 2 จุด โดยที่แต่ละจุดเรียกว่าโหนด บรานช์แต่ละบรานช์หมายถึงเอลเมนท์ของวงจรอาจเป็นชนิดเชิงเส้น (Linear) หรือนอนลิเนียร์ (Nonlinear) ก็ได้ ซึ่งกราฟนี้จะบอกรายละเอียดต่างๆของวงจรไฟฟ้า เช่น กระแสไฟฟ้าที่บรานช์ แรงดันไฟฟ้าคร่อมบรานช์ ซึ่งอาจเป็นบรานช์ชนิดต่างๆ เช่น ความต้านทานคาปาซิเตอร์ อินดักเตอร์ หรือ นอนลิเนียรเอลเมนท์ เป็นต้น

2.1.2 แหล่งจ่ายกำลังไฟฟ้าอิสระ (Independent Source)

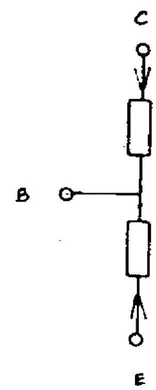
ในวงจรไฟฟ้าใดๆ แหล่งจ่ายกำลังไฟฟ้าสามารถแบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ แหล่งจ่ายแรงดันอิสระ (Independent Voltage Source) และ แหล่งจ่ายกระแสอิสระ (Independent Current Source) แหล่งจ่ายกำลังไฟฟ้านี้อาจเป็นชนิดไฟตรงหรือฟังค์ชั่นกับเวลาก็ได้ โดยทั่วไปแหล่งจ่ายกำลังไฟฟ้าชนิดไฟตรงจะเป็นส่วนที่จ่ายพลังงานไฟฟ้าให้กับวงจรไฟฟ้า และแหล่งจ่ายกำลังไฟฟ้าชนิดฟังค์ชั่นกับเวลาจะเป็นส่วนอินพุทที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงภายในวงจรไฟฟ้า

2.1.3 เอลเมนท์ชนิดต่างๆ ของวงจรไฟฟ้า

วงจรไฟฟ้าใดๆ มักประกอบด้วยเอลเมนท์หลัก 4 ชนิด คือ ความต้านทาน คาปาซิเตอร์ อินดักเตอร์ และนอนลิเนียร์เอลเมนท์ ในที่นี้นอนลิเนียร์เอลเมนท์ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดีคือ ไดโอดหรือทรานซิสเตอร์ซึ่งจะถูก แทนด้วยกราฟ ตัวอย่างเช่น ทรานซิสเตอร์ชนิด พี-เอ็น-พี มีสัญญลักษณ์ดังรูป 2.1 ก. สามารถเขียนแทนด้วยโมเดลของอีเบอร์-มอลล์ (Eber-Moll model)(14) และกราฟดังรูป 2.1ข. และ 2.1 ค. ตามลำดับ



รูปที่ 2.1 ก. ทรานซิสเตอร์ชนิดพี-เอ็น-พี



รูปที่ 2.1 ข. โมเดลของอิเบอร์-มอลล์

รูปที่ 2.1 ค. กราฟของทรานซิสเตอร์ชนิดพี-เอ็น-พี

2.2 สมการระบบไฟฟ้า (Network Equation)

โดยใช้วิธีวิเคราะห์วงจรแบบไฮบริด (10,12) ซึ่งเป็นวิธีที่รวมสมการทั้งสองของเคอร์ชอฟเข้าด้วยกันในรูปเมตริกซ์โครงสร้าง และจัดสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสและแรงดันในรูปของ implicit function เมตริกซ์โครงสร้างของวงจรไฟฟ้าได้นิยามไว้ดังนี้ คือ

A คือ อินซิเดนซ์เมตริกซ์ (incidence matrix)

B คือ ฟันดาเมนตัลเซอร์กิตเมตริกซ์ (fundamental circuit matrix)

C คือ ฟันดาเมนทัลคัทเซ็ทเมตริกซ์ (fundamental cutset matrix)

2.2.1 ทฤษฎีหลักในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า

จากทฤษฎีลิเนียร์กราฟ (14) ซึ่งประกอบด้วยโหนดและบรานช์ และฟันดาเมนทัลเซอร์กิตเมตริกซ์ B ของกราฟใดๆ สามารถแบ่งแยกส่วนออกเป็น

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} T & L \end{array} \\ L & \begin{bmatrix} B_T & U_L \end{bmatrix} \end{array}$$

T คือ ทรีบรานช์ (tree-branch)

L คือ ลิงค์ (link)

U_L คือ เมตริกซ์เอกภาพ (unit matrix)

เนื่องจากการหาสมการแสดงสมรรถนะของวงจรนี้ เป็นการหาโดยวิธีไฮบริด นั่นคือ แหล่งจ่ายแรงดันอิสระทุกตัวจะถูกจัดให้อยู่ในทรี-บรานช์ และแหล่งจ่ายกระแสอิสระจะถูกจัดให้อยู่ในลิงค์ด้วยวิธีนี้จะทำให้แยกแมตริกซ์ B ออกเป็นส่วนย่อยๆ ดังนี้

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} TE & TH & LH & LI \end{array} \\ \begin{array}{c} LH \\ LI \end{array} & \begin{bmatrix} B_{THE} & B_{THH} & U_{LH} & 0 \\ B_{TIE} & B_{TIH} & 0 & U_{LI} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2.2)$$

E คือ แหล่งจ่ายแรงดันอิสระ (independent voltage source)

I คือ แหล่งจ่ายกระแสอิสระ (independent current source)

H คือ เอลเมนท์ชนิดใดๆ

โดยการแบ่งเวคเตอร์ของกระแสและแรงดันออกเป็นส่วนต่างๆ กัน ฟันดาเมนทัลคัทเซ็ทเมตริกซ์ C สามารถแบ่งออกเป็นส่วนย่อยๆ ดังนี้

$$C = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} TE \\ TH \end{array} & \begin{bmatrix} U_{TE} & 0 & C_{LEH} & C_{LEI} \\ 0 & U_{TH} & C_{LHH} & C_{LHI} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2.3)$$

โดยที่ $C_L = -B_T^t$, จากสมการทั้งสองของเคอร์ชอฟ

$$B.v = 0 \qquad C.i = o \qquad (2.4)$$

$$v^t = \left[v_{TE}^t \;\; v_{TH}^t \;\; v_{LH}^t \;\; v_{LI}^t \right] \qquad (2.5)$$

$$i^t = \left[i_{TE}^t \;\; i_{TH}^t \;\; i_{LH}^t \;\; i_{LI}^t \right] \qquad (2.6)$$

v คือ เวคเตอร์ของแรงดันคร่อมบรานช์

v_T คือ เวคเตอร์ของแรงดันคร่อมทรี-บรานช์

v_L คือ เวคเตอร์ของแรงดันคร่อมลิงค์

i คือ เวคเตอร์ของกระแสในบรานช์

i_T คือ เวคเตอร์ของกระแสในทรี-บรานช์

I_L คือ เวคเตอร์ของกระแสในลิงค์

สำหรับสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสแรงดัน สามารถจัดให้อยู่ในรูปของสมการเวคเตอร์

$$H\ (v_{TH}, v_{LH}, i_{TH}, i_{LH}) = o \qquad (2.7)$$

ในสมการ (2.5) และ (2.6) v_{TE} และ i_{LI} เป็นฟังค์ชั่นที่รู้ค่า i_{TE} และ v_{LI} คือกระแสที่ไหลผ่านแหล่งจ่ายแรงดันอิสระและแรงดันคร่อมแหล่งจ่ายกระแสอิสระตามลำดับ โดยการจัดเรียงสมการ (2.4) และแทนค่ากลับจากสมการ (2.5),(2.6) โดยวิธีไฮบริด เราจะได้เมตริกซ์โครงสร้างที่เหมาะสมดังนี้ คือ

$$w = Tx+Sf \qquad (2.8)$$

$$m = -S^t x+Df \qquad (2.9)$$

$$H(x,w) = 0 \qquad (2.10)$$

$$x = \begin{bmatrix} v_{TH} \\ i_{LH} \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} i_{TH} \\ v_{LH} \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} v_{TE} \\ i_{LI} \end{bmatrix} \qquad m = \begin{bmatrix} i_{TE} \\ v_{LI} \end{bmatrix}$$

และเมตริกซ์โครงสร้าง T,S และ D มีค่าดังนี้

$$T = \begin{bmatrix} o & B_{THH} \\ -B_{THH} & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & -C_{LHH} \\ C^t_{LHH} & o \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$S = \begin{bmatrix} o & B^t_{TIH} \\ -B_{THE} & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & -C_{LHI} \\ C^t_{LEH} & o \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$D = \begin{bmatrix} o & B^t_{TIE} \\ -B_{TIE} & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & -C_{LEI} \\ C^t_{LEI} & o \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

เมตริกซ์ T,S และ D สามารถหาได้หลังจากที่ทราบค่าเมตริกซ์ B หรือ C แล้ว โดยสรุปแล้วสมการสมดุลย์ทั้งสองของเคอร์ชอฟสามารถจัดให้อยู่ในรูปของสมการเมตริกซ์ (2.8) และ (2.9) โดยที่ v_{TE} และ i_{LI} เป็นตัวแปรอิสระ และแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ x เรียกว่าเวคเตอร์แสดงสภาวะ (state vector)

สมการ (2.10) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสและแรงดันของเอลเมนท์ชนิดนอนลิเนียร์ใดๆ ในวงจร โดยที่กระแสหรือแรงดันในส่วนใดๆของวงจรสามารถเป็นตัวแปรอิสระหรือตัวแปรที่ควบคุมพารามิเตอร์ชนิดนอนลิเนียร์ในส่วนอื่นๆของวงจรได้

2.3 เมตริกซ์โครงสร้าง (Topological Matrices)

ด้วยการเลือกทรี (tree) ของวงจรที่เหมาะสม เราสามารถเขียนอินซิเดนซ์เมตริกซ์ A (incidence matrix A) ซึ่งมีขนาด nxb โดยที่ n คือ จำนวนโหนดและ b คือ จำนวนบรานช์ของวงจรไฟฟ้า

$$A = \begin{bmatrix} A_T & A_L \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

โดยการคูณสมการข้างต้นด้วย A_T^{-1} เมตริกซ์

$$A_T^{-1} A = \begin{bmatrix} U & A_T^{-1} A_L \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

จากความสัมพันธ์ ออโทคอนัล (orthogonality matrix)(14) เราจะได้

$$AB^t = \begin{bmatrix} A_T & A_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_T^t \\ U_L^t \end{bmatrix} = 0 \qquad (2.16)$$

$$A_T B_T^t = -A_L$$

$$B_T^t = -A_T^{-1} A_L = -C_L \qquad (2.17)$$

นั่นคือเราสามารถสร้างฟันดาเมนทัลเซอร์กิตเมตริกซ์ B หรือ ฟันดาเมนทัลคัทเซ็ทเมตริทซ์ C ได้ โดยใช้วิธีเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan elimination) (14) กับสมการ (2.4)

ขั้นตอนในการสร้างฟันดาเมนทัลคัทเซ็ทเมตริกซ์ C ของวงจรไฟฟ้า อาจทำได้ดังต่อไปนี้

1. เลือกเอลเมนท์ที่เป็นแหล่งจ่ายแรงดันอิสระไปอยู่ที่คอลัมน์ทางซ้ายมือ และแหล่งจ่ายกระแสอิสระไปอยู่ที่คอลัมน์ทางขวามือของเมตริกซ์ A
2. ให้คอลัมน์แรกของเมตริกซ์ A เป็นทรี-บรานซ์ (tree-branch) จากขั้นตอน 1 และข้ามไปขั้นตอน 5
3. ตรวจสอบคอลัมน์ถัดไปเป็นทรี-บรานซ์หรือไม่ ถ้าคอลัมน์ดังกล่าวเป็นแหล่งจ่ายกระแสอิสระอีกตัวหนึ่งให้ข้ามไปขั้นตอน 5 มิฉนั้นให้ข้ามไปขั้นตอน 4
4. พิจารณาคอลัมน์อื่นๆของเมตริกซ์ A ต่อไป ถ้าคอลัมน์ดังกล่าวเป็นอิสระซึ่งกันและกัน (linearly independent set) ให้รวมคอลัมน์นั้นในสับทรี (subtree) และไปยังขั้นตอน 5 มิฉนั้นแสดงว่าคอลัมน์ดังกล่าวเป็นลิงค์ (link) ให้รวมในโคทรี (cotree) และกลับไปขั้นตอน 3
5. เลือกค่าใดๆ ในคอลัมน์ที่สมนัยกับบรานซ์ ที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์เป็นพิโวท (pivot) แล้วใช้วิธี เกาส์-จอร์แดน ทำการแปลงเมตริกซ์ A ให้เป็นเมตริกซ์ที่มีพิโวทเอลเมนท์ ในคอลัมน์ที่เลือกไว้เป็น +1 นอกนั้นเป็นศูนย์
6. ถ้าจำนวนบรานซ์ในสับทรีน้อยกว่า (n-1) ให้กลับไปขั้นตอน 3 แต่ถ้าจำนวนบรานซ์ในสับทรีเท่ากับ (n-1) แสดงว่าได้เมตริกซ์ A ตามต้องการ

จากขั้นตอนดังกล่าว เราสามารถแปลงเมตริกซ์ A ให้เป็นเมตริกซ์สมมูลย์ ซึ่งมีแถวที่ n มีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมดดังนี้ คือ

$$\text{เมตริกซ์สมมูลย์ของ } A = \begin{bmatrix} U_T & C_L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

U_T คือ เมตริกซ์เอกภาพที่มีมิติ $(n-1)\times(n-1)$

ในสมการ (2.3) นั้น $\begin{bmatrix} U_T & C_L \end{bmatrix}$ คือฟันดาเมนทัลคัทเซ็ทเมตริกซ์ C และด้วยความสัมพันธ์ $B_T^t = -C_L$ และการแทนค่ากลับไปในสมการ (2.11),(2.12) และ (2.13) เราจะสามารถสร้างเมตริกซ์โครงสร้าง T,S และ D ได้ตามลำดับ