บทที่ 2

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดของวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์เพื่อการพยากรณ์ในแต่ละวิธี โดยอาศัยเทคนิคการวิเคราะห์สมการถดถอยเชิงเส้นแบบพหุ เมื่อความคลาดเคลื่อนมีปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ และสิ่งที่ควรจะกล่าวถึงก่อนคือคุณสมบัติทั่วไปของความคลาดเคลื่อน โดยมีรายละเอียดต่างๆเป็นดังนี้

2.1 คุณสมบัติของความคลาดเคลื่อน

ในการวิจัยครั้งนี้ได้ศึกษาลักษณะของความคลาดเคลื่อนที่มีรูปแบบความสัมพันธ์เป็นแบบ AR(1) ดังนี้

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t \quad , t = 1,2,\ldots,n \tag{2.1}$$

โดยที่ $|\rho| < 1$ และ v_t คือ ค่าความคลาดเคลื่อนสุ่มที่ไม่มีสหสัมพันธ์ในตัวเอง ด้วยการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนคงที่ σ_v^2

จากสมการ (2.1) ถ้าเราพิจารณาถึงความสัมพันธ์โดยอาศัยการย้อนคาบเวลาไปในอดีต จะพบว่า

$$\varepsilon_{t-1} = \rho\varepsilon_{t-2} + v_{t-1} \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{t-2} = \rho\varepsilon_{t-3} + v_{t-2} \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_{t-3} = \rho\varepsilon_{t-4} + v_{t-3} \tag{2.4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\varepsilon_{t-s} = \rho\varepsilon_{t-(s+1)} + v_{t-s} \tag{2.s}$$

ดังนั้นจากสมการ $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$ แทนค่า ε_{t-1} ด้วยสมการ (2.2) จะพบว่า

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \rho(\rho\varepsilon_{t-2} + v_{t-1}) + v_t \\ &= \rho^2\varepsilon_{t-2} + (\rho v_{t-1} + v_t)\end{aligned}$$

แทนค่า ε_{t-2} ด้วยสมการ (2.3) จะได้

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \rho^2(\rho\varepsilon_{t-3} + v_{t-2}) + (\rho v_{t-1} + v_t) \\ &= \rho^3\varepsilon_{t-3} + (\rho^2 v_{t-2} + \rho v_{t-1} + v_t)\end{aligned}$$

แทนค่า ε_{t-3} ด้วยสมการ (2.4) จะได้

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \rho^3(\rho\varepsilon_{t-4} + v_{t-3}) + \rho^2 v_{t-2} + \rho v_{t-1} + v_t \\ &= \rho^4\varepsilon_{t-4} + (\rho^3 v_{t-3} + \rho^2 v_{t-2} + \rho v_{t-1} + v_t) \\ &\;\;\vdots\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= v_t + \rho v_{t-1} + \rho^2 v_{t-2} + \ldots \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s v_{t-s}\end{aligned}$$

2.1.1 <u>ค่าคาดหมายของความคลาดเคลื่อน</u>

จาก

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s v_{t-s} \\ &= v_t + \rho v_{t-1} + \rho^2 v_{t-2} + \rho^3 v_{t-3} + \ldots\end{aligned}$$

ได้ว่า $E(\varepsilon_t) = E(v_t) + \rho E(v_{t-1}) + \rho^2 E(v_{t-2}) + \ldots$

$= 0$ เนื่องจาก $E(v_i) = 0$ สำหรับทุกค่า i

2.1.2 ค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

จาก

$$\varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s v_{t-s}$$

จะพบว่า

$$E(\varepsilon_t^2) = E(\sum_{s=0}^{\infty} \rho^s v_{t-s})^2$$

$$= E(v_t + \rho v_{t-1} + \rho^2 v_{t-2} + \dots)^2$$

$$= E[(v_t^2 + \rho^2 v_{t-1}^2 + \rho^4 v_{t-2}^2 + \dots) + (2\rho v_t v_{t-1} + 2\rho^2 v_t v_{t-2} + \dots)]$$

เนื่องจาก $E(v_t^2) = \sigma_v^2$ และ $E(v_t v_{t-s}) = 0$; $s>0$

ดังนั้น $V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = (\sigma_v^2 + \rho^2\sigma_v^2 + \rho^4\sigma_v^2 + \rho^6\sigma_v^2 + \dots) + 0$

$$= \sigma_v^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \rho^6 + \dots)$$

$$= \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2} \quad , |\rho|<1$$

2.1.3 ความแปรปรวนร่วนของความคลาดเคลื่อน

จาก

$$\varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s v_{t-s}$$

จะพบว่า

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = E\{(v_t + \rho v_{t-1} + \rho^2 v_{t-2} + \dots)(v_{t-1} + \rho v_{t-2} + \rho^2 v_{t-3} + \dots)\}$$

$$= E\{[v_t + \rho(v_{t-1} + \rho v_{t-2} + \dots)][v_{t-1} + \rho v_{t-2} + \rho^2 v_{t-3} + \dots]\}$$

$$= E\{v_t(v_{t-1} + \rho v_{t-2} + \rho^2 v_{t-3} + \dots)\} + E\{\rho(v_{t-1} + \rho v_{t-2} + \rho^2 v_{t-3} + \dots)^2\}$$

เนื่องจาก $E(v_t v_{t-s}) = 0$; $s>0$ และ $E(v_t) = 0$

ดังนั้น
$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = 0 + \rho E(\varepsilon_{t-1}^2)$$
$$= \rho\left(\frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}\right)$$
$$= \rho\,\sigma_\varepsilon^2 \qquad \text{เมื่อ } \sigma_\varepsilon^2 = var(\varepsilon_t)$$

โดยอาศัยการพิสูจน์ในทำนองเดียวกัน

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) = \rho^2\left(\frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}\right)$$
$$= \rho^2 \sigma_\varepsilon^2$$

ดังนั้น รูปทั่วไปของความแปรปรวนร่วมระหว่าง ε_t กับ ε_{t-s} เมื่อ $s>0$ คือ

$$cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}) = \rho^s \sigma_\varepsilon^2$$

2.2 การตรวจสอบการเกิดปัญหาอัตตสหสัมพันธ์

เมื่อเกิดปัญหาอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่ 1 ผู้วิจัยสามารถทำการตรวจสอบได้หลายวิธี เช่นวิธีต่อไปนี้

2.2.1 วิธีการของเดอบิน-วัตสัน (Durbin-Watson Test)

สมมติฐานที่ใช้ทดสอบ

H_o : $\rho = 0$

(ค่าความคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กัน)

H1 : $\rho \neq 0$

(ค่าความคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กัน)

2.2.1.1 <u>สถิติที่ใช้ทดสอบ</u>

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

โดยที่ $\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}$

$\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ เป็นเวคเตอร์ที่ได้จากการวิเคราะห์สมการถดถอย โดยวิธี OLS

2.2.1.2 <u>เกณฑ์การตัดสินใจ</u>

นำค่า d ไปเปรียบเทียบกับค่า d_l และ d_u ดังนี้

1. จะปฏิเสธสมมติฐาน H_o เมื่อ $d < d_l$ กล่าวคือ มีอัตตสหสัมพันธ์ทางบวก (Positive Autocorrelation) เกิดขึ้นในข้อมูล แต่ถ้า $d > 4-d_l$ แสดงว่ามีอัตตสหสัมพันธ์ทางลบ (Negative Autocorrelation) เกิดขึ้นในข้อมูล

2. ไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐาน H_o เมื่อ $d_u < d < 4-d_u$ กล่าวคือ ไม่มีอัตตสหสัมพันธ์เกิดขึ้นในข้อมูล

3. ไม่อาจตัดสินใจได้เมื่อ $d_l < d < d_u$ หรือ $4-d_u < d < 4-d_l$

เมื่อ d_l คือ ขีดจำกัดล่างของฟังก์ชันการแจกแจงในตารางเดอบิน-วัตสัน ณ ระดับนัยสำคัญ α

เมื่อ d_u คือ ขีดจำกัดบนของฟังก์ชันการแจกแจงในตารางเดอบินวัตสัน ณ ระดับนัยสำคัญ α

2.3 วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

ในการวิจัยครั้งนี้ได้เสนอวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ 3 วิธีคือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีการแปลงของเพรสและวินส์เทน และวิธีของฮิลเดรธและลู ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.3.1 วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Squares)

วิธีการหาตัวประมาณพารามิเตอร์วิธีนี้ เป็นวิธีที่มีรากฐานมาจากทฤษฎีการประมาณเชิงเส้น (Theory of Linear Estimation) โดยมีหลักเกณฑ์ดังนี้คือ ทำให้ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน $\Sigma \varepsilon_t^2$ มีค่าน้อยที่สุด ภายใต้ข้อสมมติเบื้องต้นของสมการถดถอยดังนี้

1. ค่าคลาดเคลื่อน (ε_t) เป็นตัวแปรสุ่ม
2. $E(\varepsilon_t) = 0$
3. $E(\varepsilon_s \varepsilon_t) = \sigma^2$ เมื่อ s=t (Homoscedasticity)
4. $E(\varepsilon_s \varepsilon_t) = 0$ เมื่อ s≠t (Nonautocorrelation)
5. ตัวแปรอิสระ X เป็นค่าคงที่ (Nonstochastic)

เขียนสมการให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{2.5}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & .. & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & .. & X_{k2} \\ . & . & . & .. & . \\ . & . & . & .. & . \\ . & . & . & .. & . \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & .. & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{Y}$ เป็นเวคเตอร์ขนาด nx1 ของตัวแปรตาม Y

X เป็นเมตริกซ์ขนาด nx(k+1) ของสัมประสิทธิ์พารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$

$\underset{\sim}{\beta}$ เป็นเวคเตอร์ขนาด (k+1)x1 ของพารามิเตอร์

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ เป็นเวคเตอร์ขนาด nx1 ของค่าคลาดเคลื่อน

เมื่อ k คือจำนวนตัวแปรอิสระ

ให้ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ เป็นเวคเตอร์ของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ซึ่งเมื่อแทนที่ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ ลงในสมการ (2.5) จะได้

$$\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\hat{\beta}} + \underset{\sim}{e}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{\hat{\varepsilon}} = \underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}$

พิจารณาผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (Sum Squares of Residual : SSE)

$$\begin{aligned}
SSE &= \sum_{t=1}^{n} e_t^2 \\
&= \underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e} \\
&= (\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}})'(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}) \\
&= (\underset{\sim}{Y}' - \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X')(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}) \\
&= \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{Y}'X\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'X\underset{\sim}{\hat{\beta}} \\
&= \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - 2\underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'X\underset{\sim}{\hat{\beta}}
\end{aligned}$$

การหาค่าต่ำสุดของผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน ทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนเทียบกับ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ แล้ว กำหนดให้เท่ากับ $\underset{\sim}{0}$ ดังนี้

$$\frac{\partial\,(\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - 2\underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'X\underset{\sim}{\hat{\beta}})}{\partial\,\underset{\sim}{\hat{\beta}}} = \underset{\sim}{0}$$

$$-2X'\underset{\sim}{Y} + 2X'X\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \underset{\sim}{0}$$

จะได้สมการปกติคือ

$$X'X\underset{\sim}{\hat{\beta}} = X'\underset{\sim}{Y}$$

ดังนั้น

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}(X'\underset{\sim}{Y})$$

และสมการพยากรณ์ Y_t เมื่อ k=2 คือ

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 X_{1t} + \hat{\beta}_2 X_{2t}$$

2.3.2 <u>วิธีการแปลงของเพรสและวินส์เทน</u> (Prais-Winsten Transformation)

เพรสและวินส์เทนได้เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์เมื่อความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์ โดยอาศัยการย้อนคาบเวลาไปในอดีตดังนี้

จากสมการ

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \varepsilon_t \quad , t = 1,2,\ldots,n \tag{2.6}$$

เมื่อย้อนไป 1 คาบเวลา

$$Y_{t-1} = \beta_o + \beta_1 X_{1t-1} + \beta_2 X_{2t-1} + \varepsilon_{t-1} \tag{2.7}$$

คูณสมการ (2.7) ด้วย ρ

$$\rho Y_{t-1} = \rho\beta_o + \rho\beta_1 X_{1t-1} + \rho\beta_2 X_{2t-1} + \rho\varepsilon_{t-1} \tag{2.8}$$

สมการ (2.6) - (2.8) จะได้

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_o(1-\rho) + \beta_1(X_{1t}-\rho X_{1t-1}) + \beta_2(X_{2t}-\rho X_{2t-1}) + (\varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}) \quad \ldots (2.9)$$

เนื่องจาก $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t \quad , t = 1,2,\ldots,n$

จะได้ $v_t = \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$

แทน v_t ในสมการ (2.9) จะได้

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_o(1-\rho) + \beta_1(X_{1t}-\rho X_{1t-1}) + \beta_2(X_{2t}-\rho X_{2t-1}) + v_t$$

เมื่อ $t = 2,3,\ldots,n$ ... (2.10)

เพรสและวินส์เทนได้กำหนดค่าเริ่มต้น ณ เวลา $t = 1$ ดังนี้

$$\varepsilon_1 = \frac{v_1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

แทนค่า ε_1 ลงในสมการ (2.6) เมื่อ $t = 1$

จะได้

$$Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{21} + \frac{v_1}{\sqrt{1-\rho^2}} \qquad (2.11)$$

คูณสมการ (2.11) ด้วย $\sqrt{1-\rho^2}$

$$Y_1 \sqrt{1-\rho^2} = \beta_0 \sqrt{1-\rho^2} + \beta_1 X_{11} \sqrt{1-\rho^2} + \beta_2 X_{21} \sqrt{1-\rho^2} + v_1 \qquad (2.12)$$

จากสมการ (2.10) และสมการ (2.12) พบว่า v_t เมื่อ $t = 1,2,\ldots,n$ ไม่มีปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ใน ε_t ดังนั้นเมื่อทำการวิเคราะห์สมการถดถอยแล้ว ก็สามารถแก้ปัญหาอัตตสหสัมพันธ์ใน AR(1) ได้

การหาค่าประมาณของ ρ โดยหาค่าต่ำสุดของ

$$S^* = (1-\rho^2)e_1^2 + \sum_{t=2}^{n} (e_t - \rho e_{t-1})^2$$

จะได้

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=3}^{n} e_{t-1}^2}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{\hat{\varepsilon}} = \underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}$

$\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของ $\underset{\sim}{\beta}$ โดยวิธี OLS

เขียนสมการ (2.10) และสมการ (2.12) ให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{Y}^* = X^*\underset{\sim}{\beta}^* + \underset{\sim}{V}$$

โดยที่

$$\underset{\sim}{Y}^* = \begin{bmatrix} Y_1\sqrt{1-\rho^2} \\ Y_2 - \rho Y_1 \\ Y_3 - \rho Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_t - \rho Y_{t-1} \end{bmatrix}, \quad X^* = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & X_{11}\sqrt{1-\rho^2} & X_{21}\sqrt{1-\rho^2} \\ 1-\rho & X_{12}-\rho X_{11} & X_{22}-\rho X_{21} \\ 1-\rho & X_{13}-\rho X_{12} & X_{23}-\rho X_{22} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1-\rho & X_{1t}-\rho X_{1t-1} & X_{2t}-\rho X_{2t-1} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{V} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1\sqrt{1-\rho^2} \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_t \end{bmatrix}$$

จากนั้นประมาณค่าพารามิเตอร์ของ $\underset{\sim}{\beta}^*$ โดยวิธี OLS

จะได้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}^* = (X^{*\prime}X^*)^{-1}(X^{*\prime}\underset{\sim}{Y}^*)$

และสมการพยากรณ์ Y_t คือ

$$\hat{Y}_t = \hat{\rho}Y_{t-1} + \hat{\beta}_0^*(1-\hat{\rho}) + \hat{\beta}_1^*(X_{1t}-\hat{\rho}X_{1t-1}) + \hat{\beta}_2^*(X_{2t}-\hat{\rho}X_{2t-1})$$

2.3.3 วิธีของฮิลเดรธและลู (Hildreth and Lu Method)

ฮิลเดรธและลูได้เสนอกระบวนการค้นหาค่าประมาณของ ρ โดยใช้เทคนิคการค้นหาแบบกริด (Grid Search) พิจารณาจากสมการโดยอาศัยการย้อนคาบเวลาไปในอดีตดังนี้

จากสมการ

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \varepsilon_t \tag{2.13}$$

ย้อนไป 1 คาบเวลา

$$Y_{t-1} = \beta_o + \beta_1 X_{1t-1} + \beta_2 X_{2t-1} + \varepsilon_{t-1} \tag{2.14}$$

คูณสมการ (2.14) ด้วย ρ

$$\rho Y_{t-1} = \rho\beta_o + \rho\beta_1 X_{1t-1} + \rho\beta_2 X_{2t-1} + \rho\varepsilon_{t-1} \tag{2.15}$$

สมการ (2.13)-(2.15) จะได้

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_o(1-\rho) + \beta_1(X_{1t}-\rho X_{1t-1}) + \beta_2(X_{2t}-\rho X_{2t-1}) + (\varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}) \qquad \ldots (2.16)$$

เนื่องจาก $v_t = \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$ แทน v_t ลงในสมการ (2.16) จะได้

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_o(1-\rho) + \beta_1(X_{1t}-\rho X_{1t-1}) + \beta_2(X_{2t}-\rho X_{2t-1}) + v_t$$

เมื่อ $t = 2,3,\ldots,n$ ... (2.17)

จัดรูปสมการใหม่ดังนี้

$$Y_t^* = \beta_o(1-\rho) + \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + v_t \tag{2.18}$$

โดยที่

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$$
$$X_{1t}^* = X_{1t} - \rho X_{1t-1}$$
$$X_{2t}^* = X_{2t} - \rho X_{2t-1}$$

เมื่อ $t = 2,3,\ldots,n$

หาค่าประมาณของ ρ โดยใช้เทคนิคการค้นหาแบบกริดดังนี้

1. จากสมการ (2.18) ทำการทดลองแปรค่า ρ จาก 0, 0.1, 0.2, 0.3,..., 0.9, 1.0

2. ในแต่ละค่า ρ ทำการคำนวณหา ผลบวกของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Sum Squares of Residual) ดังนี้

$$SSE = \sum_{t=2}^{n} (Y_t^* - \hat{Y}_t^*)^2$$

$$= \sum_{t=2}^{n} (Y_t^* - \hat{\beta}_0(1-\hat{\rho}) - \hat{\beta}_1 X_{1t}^* - \hat{\beta}_2 X_{2t}^*)^2$$

โดยหาค่า $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ ด้วยวิธี OLS จากการหาค่าต่ำสุดของ SSE ที่แต่ละค่าของ ρ ค่าของ ρ ค่าใดที่มีผลให้ SSE มีค่าต่ำที่สุด ให้ค่า ρ ค่านั้นเป็นค่าประมาณครั้งแรกของ ρ ซึ่งกำหนดให้เป็น ρ_1

3. จากค่าประมาณครั้งแรกของ ρ คือ ρ_1 ซึ่ง $\rho_1 \in (\rho_{1-1}, \rho_{1+1})$ จะทำการประมาณค่าของ ρ ใหม่ โดยแปรค่า ρ จาก ρ_{1-1} ถึง ρ_{1+1} ในช่วงต่างที่เพิ่มขึ้นครั้งละ 0.01 และแต่ละครั้งที่แปรค่า ρ ทำการคำนวณหา SSE ค่าของ ρ ใดที่มีผลให้ SSE ต่ำที่สุดถือว่าเป็นค่าประมาณใหม่ของ ρ และใช้ค่านี้เป็นค่าประมาณแท้จริงของ ρ แทนด้วย $\hat{\rho}$

4. นำค่าประมาณ $\hat{\rho}$ ใหม่ที่ได้มาแทนในสมการ (2.18)

เขียนสมการ (2.18) ให้อยู่ในรูปทั่วไป ดังนี้

$$\underset{\sim}{Y}^* = X^* \underset{\sim}{\beta}^* + \underset{\sim}{V}$$

โดยที่

$$\underset{\sim}{Y}^{*} = \begin{bmatrix} Y_2 - \hat{\rho}Y_1 \\ Y_3 - \hat{\rho}Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1} \end{bmatrix}, \quad X^{*} = \begin{bmatrix} 1-\hat{\rho} & X_{12}-\hat{\rho}X_{11} & X_{22}-\hat{\rho}X_{21} \\ 1-\hat{\rho} & X_{13}-\hat{\rho}X_{12} & X_{23}-\hat{\rho}X_{22} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1-\hat{\rho} & X_{1t}-\hat{\rho}X_{1t-1} & X_{2t}-\hat{\rho}X_{2t-1} \end{bmatrix}$$

จากนั้นประมาณค่าพารามิเตอร์ของ $\underset{\sim}{\beta}^{*}$ โดยวิธี OLS จะได้

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}}^{*} = (X^{*\prime}X^{*})^{-1}(X^{*\prime}\underset{\sim}{Y}^{*})$$

และสมการพยากรณ์ Y_t คือ

$$\hat{Y}_t = \hat{\rho}Y_{t-1} + \hat{\beta}_o^{*}(1-\hat{\rho}) + \hat{\beta}_1^{*}(X_{1t}-\hat{\rho}X_{1t-1}) + \hat{\beta}_2^{*}(X_{2t}-\hat{\rho}X_{2t-1})$$