

## ทฤษฎีพื้นฐานของการจับอนุภาคในสนามแม่เหล็กเกรเดียนต์สูง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีของเกอร์เบอร์ (2) ซึ่งเป็นทฤษฎีพื้นฐานของการจับอนุภาคในตัวกรองแม่เหล็กทรงกระบอกแบบตามแนวแกน โดยแสดงรายละเอียดเกี่ยวกับการคำนวณสนามแม่เหล็กตามแบบจำลองตัวจับเดี่ยว ผลการคำนวณเพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคและการจับอนุภาคในสภาวะต่าง ๆ คาดคะเนประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็กทรงกระบอกแบบตามแนวแกน

### 2.1 สนามแม่เหล็กตามแบบจำลองตัวจับเดี่ยว

เกอร์เบอร์ (2) ได้ประมาณสนามแม่เหล็กรอบตัวจับใด ๆ โดยไม่คิดผลจากตัวจับอื่น ๆ ที่อยู่ข้างเคียง นั่นคือ สนามแม่เหล็กรอบตัวจับใด ๆ ในตัวกรองแม่เหล็ก สมมติว่าเป็นสนามแม่เหล็กซึ่งคำนวณจากกรณีมีตัวจับเดี่ยวในตัวกรองแม่เหล็ก เรียก สนามแม่เหล็กตามแบบจำลองตัวจับเดี่ยว (single collector model) โดยพิจารณาเป็น 2 กรณีตามคุณสมบัติทางแม่เหล็กของตัวจับ ซึ่งจะแสดงรายละเอียดการคำนวณสนามแม่เหล็ก ดังนี้คือ

กรณีที่ 1 เมื่อตัวจับเป็นสารพาราแมกเนติก ให้ค่าสภาพให้ซึมได้ทางแม่เหล็กเป็น  $\mu_2$  รัศมีทรงกระบอก  $a$  วางอยู่ในสนามแม่เหล็กภายนอก (applied magnetic field) ความเข้มสนามแม่เหล็ก  $H_0$  มีทิศตั้งฉากกับแกนของตัวจับ และตัวจับถูกล้อมรอบด้วยของไหลซึ่งมีค่าสภาพให้ซึมได้ทางแม่เหล็ก  $\mu_1$

สนามแม่เหล็กรอบตัวจับ ( $H$ ) สามารถคำนวณได้โดยวิธีการแก้ปัญหาแบบมีขอบเขตเพื่อหาค่าศักย์แม่เหล็ก (magnetic potential,  $\Phi$ )

เมื่อ  $\phi$  สัมพันธ์กับสนามแม่เหล็กดังนี้

$$\vec{H} = -\nabla\phi$$

โดยกำหนดแกน  $z$  ในระบบพิกัดทรงกระบอกให้อยู่ซ้อนกับแกนของตัวจับ ดังรูปที่ 2.1  $\phi_1$  และ  $\phi_2$  เป็นศักย์แม่เหล็กบริเวณรอบตัวจับและในตัวจับตามลำดับ โดย  $\phi_1$  และ  $\phi_2$  สอดคล้องกับ (satisfy) สมการลาปลาซ ในแต่ละบริเวณคือ

$$\nabla^2 \phi_1 = 0 \quad \text{เมื่อ } a < r < \infty \quad (2.1.1)$$

$$\nabla^2 \phi_2 = 0 \quad \text{เมื่อ } 0 < r < a \quad (2.1.2)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

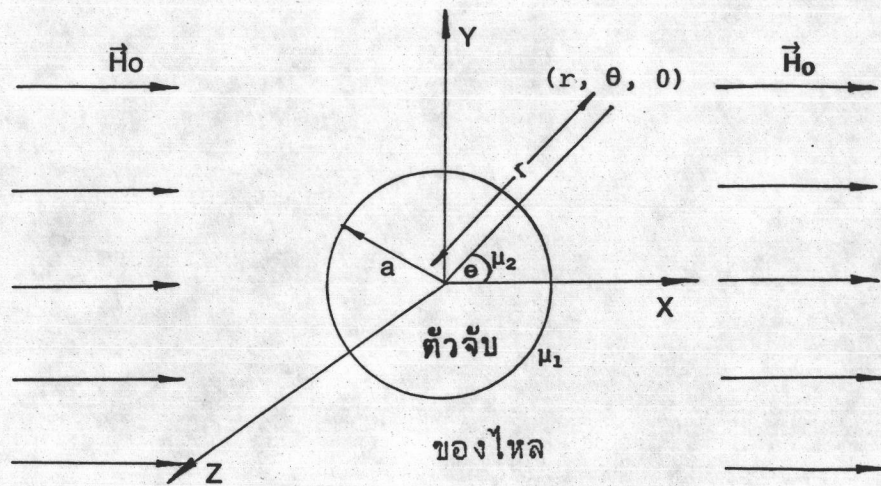
1) สนามแม่เหล็กบริเวณไกลจากตัวจับมาก ๆ คือสนามแม่เหล็กภายนอก  $\vec{H}_0$  นั่นคือ

$$\phi_1(r, \theta) = -H_0 r \cos\theta \quad \text{ที่ } r \rightarrow \infty$$

2) ความเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กในแนวตั้งฉากกับผิวของตัวจับมีค่าต่อเนื่องที่บริเวณรอยต่อผิวของตัวจับกับของไหล นั่นคือ

$$\mu_1 \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = \mu_2 \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right|_{r=a}$$

3) สนามแม่เหล็กในแนวขนานกับผิวของตัวจับมีค่าต่อเนื่องที่บริเวณรอยต่อผิวของตัวจับกับของไหล นั่นคือ



รูปที่ 2.1 แสดงภาคตัดขวางของตัวจับที่ถูกล้อมรอบด้วยของไหล และสนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ ( $H_0$ )

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right|_{r=a}$$

รูปทั่วไปของ  $\phi_1$  และ  $\phi_2$  ซึ่งเป็นผลเฉลย (solution) ของสมการลาปลาซ (2.1.1) และ (2.1.2) และเป็นจริงตามเงื่อนไขขอบเขต

1) คือ

$$\phi_1(r, \theta) = -H_0 r \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-n} \cos n\theta \quad (2.2.1)$$

$$\phi_2(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \cos n\theta \quad (2.2.2)$$

จากเงื่อนไขขอบเขต 2) และ 3) จะได้

$$\mu_1 H_0 + \mu_1 A_1 a^{-2} + \mu_2 B_1 = 0 \quad \text{สำหรับ } n = 1$$

$$\mu_1 A_n n a^{-n-1} - \mu_2 B_n n a^{n-1} = 0 \quad \text{สำหรับ } n \neq 1$$

$$H_0 a - A_1 a^{-1} + B_1 a = 0 \quad \text{สำหรับ } n = 1$$

$$n A_n a^n - n B_n a^n = 0 \quad \text{สำหรับ } n \neq 1$$

ซึ่งหาค่าคงที่  $A_n$  และ  $B_n$  จากสมการข้างต้นได้ดังนี้

$$A_1 = K H_0 a^2, \quad ,$$

$$B_1 = \frac{-2H_0}{(v+1)}, \quad ,$$

และ  $A_n = B_n = 0$  สำหรับ  $n \neq 1$

$$\text{เมื่อ } K = \frac{(\nu-1)}{(\nu+1)}, \quad \nu = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (2.3)$$

แทนค่า  $A_n$  ในสมการ (2.2.1) จะได้ศักย์แม่เหล็ก

$$\Phi_1(r, \theta) = -H_0 r \cos\theta + KH_0 \frac{a^2}{r} \cos\theta \quad (2.4)$$

ซึ่งนำไปคำนวณสนามแม่เหล็กรอบตัวจับ ( $\vec{H}$ ) จาก  $\vec{H} = -\nabla\Phi$  ได้ดังนี้

$$\vec{H} = H_0 \left[ \left(1 + \frac{K}{r_a^2}\right) \cos\theta \hat{r} - \left(1 - \frac{K}{r_a^2}\right) \sin\theta \hat{\theta} \right], \quad 1 < r_a < \infty \quad (2.5)$$

$$\text{เมื่อ } r_a = \frac{r}{a}$$

กรณีที่ 2 เมื่อตัวจับเป็นสารเฟอร์โรแมกเนติกซึ่งมีแมกนีโตเซชัน  $\vec{M}_s$  ในทิศทางเดียวกับ  $\vec{H}_0$  สนามแม่เหล็กบริเวณรอบตัวจับ  $\vec{H}$  หาได้โดยวิธีการแก้ปัญหาแบบมีขอบเขตดังกล่าวมาแล้ว แต่เงื่อนไขขอบเขต ข้อ 2) กรณีตัวจับมีแมกนีโตเซชันอิมิตัวต่างจากเดิมคือ ความเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กภายในตัวจับเป็นไปตามสมการ  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}_s$  ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่ว่าความเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กในแนวตั้งฉากกับผิวของตัวจับมีค่าต่อเนื่องที่บริเวณรอยต่อตรงผิวของตัวจับคือ

$$-\mu_1 \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = -\mu_0 \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right|_{r=a} + M_s \cos\theta$$

ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1 จะสามารถหาค่า  $A_n$  และ  $B_n$  ได้ดังนี้

$$A_1 = \frac{-H_0 a^2 (\mu_1 - \mu_0) - M_s a^2}{(\mu_1 + \mu_0)}$$

$$B_1 = \frac{M_s - 2\mu_1 H_0}{(\mu_1 + \mu_0)}$$

และ  $A_n = B_n = 0$  สำหรับ  $n \neq 1$  (2.6.1)

โดยธรรมชาติค่าสภาพให้ซึมได้ทางแม่เหล็กของของไหลมีค่าใกล้เคียงกับค่าของสูญญากาศ ( $\mu_1 \approx \mu_0$ ) หรือ  $\mu_0 - \mu_1 < 10^{-3}$  (9) จึงสามารถประมาณ  $\mu_1$  เป็น  $\mu_0$  ซึ่งทำให้  $A_n$  และ  $B_n$  ลดรูปเป็น

$$A_1 = \frac{M_s a^2}{2\mu_0} \quad (2.6.2)$$

$$B_1 = \frac{M_s}{2\mu_0} - H_0 \quad (2.6.3)$$

เมื่อแทนค่า  $A_n$  จากสมการ (2.6.1) และ (2.6.2) ในสมการ (2.2.1) จะได้ศักย์แม่เหล็ก

$$\phi_1(r, \theta) = -H_0 r \cos\theta + \frac{M_s a^2}{2\mu_0 r} \cos\theta \quad (2.7)$$

และนำไปคำนวณสนามแม่เหล็กรอบตัวจับจาก  $\vec{H} = -\vec{\nabla}\phi$  ได้ผลดังนี้

$$\vec{H} = H_0 \left[ \left(1 + \frac{K}{r_a^2}\right) \cos\theta \hat{r} - \left(1 - \frac{K}{r_a^2}\right) \sin\theta \hat{\theta} \right], \quad 1 < r < \infty \quad (2.8)$$

เมื่อ  $K = \frac{M_s}{2\mu_0 H_0}$  (2.9)

จากการเปรียบเทียบสนามแม่เหล็กรอบตัวจับสมการ (2.5) และ (2.8) จะเห็นได้ว่าสนามแม่เหล็กรอบตัวจับเดี่ยวกรณีตัวจับเป็นสารพารา



เหล็ก  $\vec{v}_p$  และ  $\vec{v}_f$  คือความเร็วของอนุภาคและของของไหลตามลำดับ สำหรับอนุภาคที่มีขนาดเล็กกว่าไมครอน แรงโน้มถ่วงของโลก มีความสำคัญน้อย (1) ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้แรงความเหนี่ยวนำ แม่เหล็ก และแรงเนื่องจากความหนืดของของไหล สำหรับสนามแม่เหล็กตามแบบจำลองตัวจับเดี่ยวตามสมการ (2.5) หรือ (2.6) จึงเขียนได้เป็น

$$\frac{2\rho_p R^2}{9\eta} \left[ \frac{d^2 r_a}{dt^2} - r_a \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{dr_a}{dt} = -\frac{P_m}{4\eta l a} \left( \frac{K}{r_a} + \frac{\cos 2\theta}{r_a^3} \right), r_a = r/a \quad (2.12.1)$$

$$\frac{2\rho_p R^2}{9\eta} \left[ \frac{1}{r_a} \frac{d}{dt} \left( r_a^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] + r_a \frac{d\theta}{dt} = -\frac{P_m}{4\eta l a} \frac{\sin 2\theta}{r_a^3}, \quad (2.12.2)$$

$$\frac{2\rho_p R^2}{9\eta} \left[ \frac{d^2 z_a}{dt^2} \right] + \frac{dz_a}{dt} = \frac{P_o}{4\eta l a} (1 - r_a^2 + q \ln r_a), z_a = z/a \quad (2.12.3)$$

โดยแทนความเร็วของของไหล ( $\vec{v}_f$ ) ในสมการ (2.11) เป็น

$$\vec{v}_f = \frac{P_o}{4\eta l a} (1 - r_a^2 + q \ln r_a) \hat{z} \quad (\text{ดูภาคผนวก ข}) \quad \text{เมื่อ}$$

$l a$  คือ ความยาวของตัวจับต่อรัศมีของตัวจับ  $q = 4\pi/3\sqrt{3}F$

$P_o$  คือความแตกต่างของความดันของของไหลระหว่างต้นและปลายของตัวจับ

$$P_m = \frac{-16\mu_o (x_p - x_f) K R_a^2 H_o^2 l a}{9\eta} \quad \text{คือสัมประสิทธิ์ความดันทางแม่เหล็ก}$$

(magnetic pressure coefficient) และ  $\rho_p$  คือ ความหนาแน่นของอนุภาค

สำหรับกรณีที่เราพิจารณาคืออนุภาคแม่เหล็กมีขนาดเล็กมากและของไหลเป็นของเหลว  $2\rho_p R^2/9\eta$  มีค่าน้อย (ประมาณ  $10^{-6}$  (9)) ทำให้เทอมทางซ้ายของสมการ (2.12.1), (2.12.2) และ (2.12.3) มีความสำคัญน้อยเมื่อเทียบกับเทอมอื่น ๆ จึงสามารถตัดทิ้งได้ ในกรณีนี้เสมือนอนุภาคถูกกระทำด้วยแรงแม่เหล็กและแรงเนื่องจากความหนืดของ



ไหลเท่านั้น สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคในสนามแม่เหล็กตามแบบจำลอง  
ตัวจับเดี่ยวจึงประมาณได้ดังนี้

$$\frac{dr_a}{dt} = -\frac{P_m}{4\eta la} \left( \frac{K}{r_a^5} + \frac{\cos 2\theta}{r_a^3} \right) \quad (2.13.1)$$

$$r_a \frac{d\theta}{dt} = -\frac{P_m}{4\eta la} \frac{\sin 2\theta}{r_a^3} \quad (2.13.2)$$

$$\frac{dz_a}{dt} = \frac{P_o a}{4\eta la} (1 - r_a^2 + q \ln r_a) \quad (2.13.3)$$

จากสมการ (2.13.1) และ (2.13.2) จะได้

$$\frac{dr_a}{d\theta} = \frac{K}{r_a \sin 2\theta} + r_a \cot 2\theta \quad (2.14)$$

ซึ่งเมื่ออินทิเกรตแล้วจะได้สมการแสดงโพรงเจกชันของทางเดินอนุภาคบน  
ระนาบ xy ดังนี้

$$r_a = (-K \cos 2\theta + C |\sin 2\theta|)^{\frac{1}{2}} \quad (2.15)$$

เมื่อ C เป็นค่าคงที่ซึ่งคำนวณจากเงื่อนไขตั้งต้น (initial condition)  
คือตำแหน่งตั้งต้นบนระนาบ xy ของอนุภาค  $(r_{ai}, \theta_i)$  ได้ดังนี้

$$C = (r_{ai}^2 + K \cos 2\theta_i) / |\sin 2\theta_i|$$

จากสมการ (2.13.1) และ (2.13.3) จะได้

$$\frac{dz_a}{d\theta} = -\frac{P_o (1 - r_a^2 + q \ln r_a) r_a^4}{P_m \sin 2\theta} \quad (2.16)$$

ซึ่งเมื่ออินทิเกรตแล้ว จะได้โพรงเจกชันของตำแหน่งของอนุภาคบนแกน  $z$  ขึ้นกับตำแหน่งตั้งต้นของอนุภาค  $(r_{ai}, \theta_i)$  ตำแหน่งปัจจุบันของอนุภาค  $(r_a, \theta)$  ค่า  $P_o/P_m$ ,  $K$  และ  $F$  ดังนี้

$$z_a = \frac{P_o}{P_m} [I_1(\theta) + I_2(\theta) + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}F} I_3(\theta)] \frac{\theta_i}{\theta} \quad (2.17)$$

เมื่อ

$$I_1(\theta) = \frac{K^2}{2} \ln |\tan \theta| - Kr_a^2 - \frac{(K^2 + C^2)}{2} \cos 2\theta$$

$$I_2(\theta) = \frac{r_a^2}{2} (Kr_a^2 + \frac{(K^2 + C^2)}{2} \cos 2\theta) + \frac{K^3}{2} \ln |\sin 2\theta| + \frac{C(C^2 + 3K^2)}{2} \frac{|\sin 2\theta|}{\sin 2\theta}$$

$$I_3(\theta) = \frac{(K^2 + C^2)}{4} \left( \frac{C}{(K^2 + C^2)^{1/2}} \ln \left| \frac{K|\tan \theta| + C - (K^2 + C^2)^{1/2}}{K|\tan \theta| + C + (K^2 + C^2)^{1/2}} \right| + \cos 2\theta \right)$$

$$+ \frac{Kr_a^2}{2} - (Kr_a^2 + \frac{(K^2 + C^2)}{2} \cos 2\theta) \ln r_a +$$

$$K^2 \sum_{l=1}^p \frac{\ln r_a(\theta_l)}{P \sin 2\theta_l} (\theta - \theta_s)$$

$$\theta_l = \theta_s + (2l-1)(\theta - \theta_s)/2p$$

$$\theta_s = \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{-K - |C|(K^2 + C^2 - 1)^{1/2}}{K^2 + C^2} \right)$$

### 2.3 ทางเดินของอนุภาค

จากตำแหน่งตั้งต้นของอนุภาค  $(r_{ai}, \theta_i, 0)$  ที่ทราบค่า เราสามารถทำนายทางเดินของอนุภาคได้ดังนี้ จากสมการ (2.15) และ (2.17) เราสามารถคำนวณค่า  $r_a$  และ  $z_a$  ที่มุม  $\theta$  ใด ๆ โดยวิธีเชิงวิเคราะห์ (analytic method) โดยแปรค่ามุม  $\theta$  จากมุมตั้งต้น  $(\theta_i)$  จนถึงมุมที่อนุภาคถูกจับบนตัวจับ  $(\theta_e)$  ซึ่งสามารถคำนวณจากสมการ (2.15) โดยแทนค่า  $r_a = 1$  ได้  $\theta_e = \frac{-K+C(K^2+C^2-1)^{1/2}}{K^2+C^2}$  จากข้อมูลของ  $r_a$  และ  $z_a$  จากมุม  $\theta$  ถึง  $\theta_e$  ที่คำนวณได้นี้จะสามารถเขียนทางเดินของอนุภาคได้

อีกวิธีหนึ่งในการคำนวณทางเดินของอนุภาคคือ วิธีของรุ่งก์ กัตต้า (Runge-Kutta method) โดยอินทิเกรตเชิงตัวเลข (numerical integration) สมการ (2.14) และ (2.16) โดยตรง จากการเปรียบเทียบผลการคำนวณทางเดินอนุภาคทั้งสองวิธี โดยกำหนดตำแหน่งตั้งต้นเป็น  $(6.9, 23^\circ, 0)$  และพารามิเตอร์  $P_o/P_\infty = 1, K = 0.8, F = 7\%$  สำหรับ  $P = 3$  ในสมการ (2.17) ปรากฏว่าผลการคำนวณทั้งสองวิธีมีความแตกต่างกันน้อยกว่า 1% ดังแสดงในตารางที่ 2.1

สำหรับระบบตัวกรองแม่เหล็กที่พิจารณานี้มีปลายตัวจับด้านทางเข้าของของไหล อยู่บนระนาบ  $xy$  และตำแหน่งตั้งมีระยะทางตามแนวแกน  $z$  ต่อรัศมีตัวจับ  $(z_a)$  เท่ากับ 0 ในการวิจัยนี้ได้ศึกษาทางเดินของอนุภาครอบตัวจับตัวใดตัวหนึ่งในตัวกรองแม่เหล็ก ในกรณีต่าง ๆ โดยวิธีรุ่งก์ กัตต้า คือ

กรณีที่ 1 เมื่ออนุภาคตั้งต้นบนระนาบ  $xy$  ที่มุมตั้งต้น  $(\theta_i)$  ต่างกัน โดยมีระยะทางตั้งต้นตามแนวรัศมี  $(r_{ai})$  เท่ากัน ผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่า ระยะทางตามแกน  $z$  ที่อนุภาคถูกจับสั้น เมื่ออนุภาคตั้งต้นใกล้แกน  $x$

ตารางที่ 2.1 แสดงการเปรียบเทียบผลการคำนวณทางไดนามิกวิธี  
เชิงวิเคราะห์และวิธีเชิงตัวเลขริงก์ กัดต้า

θ(องศา)	$r_a$		$z_a$	
	วิธีเชิงวิเคราะห์	วิธีเชิงตัวเลข ริงก์ กัดต้า	วิธีเชิงวิเคราะห์	วิธีเชิงตัวเลข ริงก์ กัดต้า
22.94	6.894	6.893	66.17	66.18
22.71	6.866	6.865	331.4	331.5
22.25	6.810	6.809	864.1	864.2
22.08	6.789	6.788	$1.065 \times 10^3$	$1.065 \times 10^3$
21.74	6.745	6.744	$1.467 \times 10^3$	$1.467 \times 10^3$
21.34	6.694	6.693	$1.937 \times 10^3$	$1.937 \times 10^3$
20.99	6.649	6.648	$2.342 \times 10^3$	$2.342 \times 10^3$
20.54	6.588	6.587	$2.882 \times 10^3$	$2.882 \times 10^3$
20.13	6.533	6.532	$3.355 \times 10^3$	$3.355 \times 10^3$
19.16	6.395	6.394	$4.505 \times 10^3$	$4.505 \times 10^3$
18.70	6.328	6.327	$5.045 \times 10^3$	$5.045 \times 10^3$
17.79	6.189	6.188	$6.118 \times 10^3$	$6.119 \times 10^3$
16.30	5.950	5.949	$7.836 \times 10^3$	$7.836 \times 10^3$
15.21	5.763	5.762	$9.058 \times 10^3$	$9.058 \times 10^3$
14.52	5.640	5.639	$9.810 \times 10^3$	$9.811 \times 10^3$
13.55	5.458	5.457	$1.084 \times 10^4$	$1.084 \times 10^4$
12.57	5.266	5.265	$1.183 \times 10^4$	$1.183 \times 10^4$
11.54	5.052	5.051	$1.283 \times 10^4$	$1.283 \times 10^4$
10.22	4.759	4.758	$1.400 \times 10^4$	$1.400 \times 10^4$
9.535	4.596	4.595	$1.456 \times 10^4$	$1.456 \times 10^4$
8.561	4.354	4.353	$1.530 \times 10^4$	$1.530 \times 10^4$
7.358	4.030	4.029	$1.610 \times 10^4$	$1.610 \times 10^4$
6.556	3.796	3.795	$1.655 \times 10^4$	$1.655 \times 10^4$
5.524	3.471	3.471	$1.705 \times 10^4$	$1.705 \times 10^4$
4.550	3.131	3.130	$1.742 \times 10^4$	$1.742 \times 10^4$
3.462	2.698	2.697	$1.771 \times 10^4$	$1.771 \times 10^4$
2.259	2.116	2.115	$1.791 \times 10^4$	$1.791 \times 10^4$
1.571	1.695	1.694	$1.796 \times 10^4$	$1.796 \times 10^4$
0.8260	1.064	1.064	$1.799 \times 10^4$	$1.797 \times 10^4$

(มุม  $\theta_i$  น้อย) ดังรูปที่ 2.2 เนื่องจากแรงแม่เหล็กที่ดึงดูดอนุภาคขึ้นกับ

$\frac{K \cos 2\theta}{r_a^3}$  ซึ่งมีค่าสูงสุดบริเวณใกล้แกน  $x$

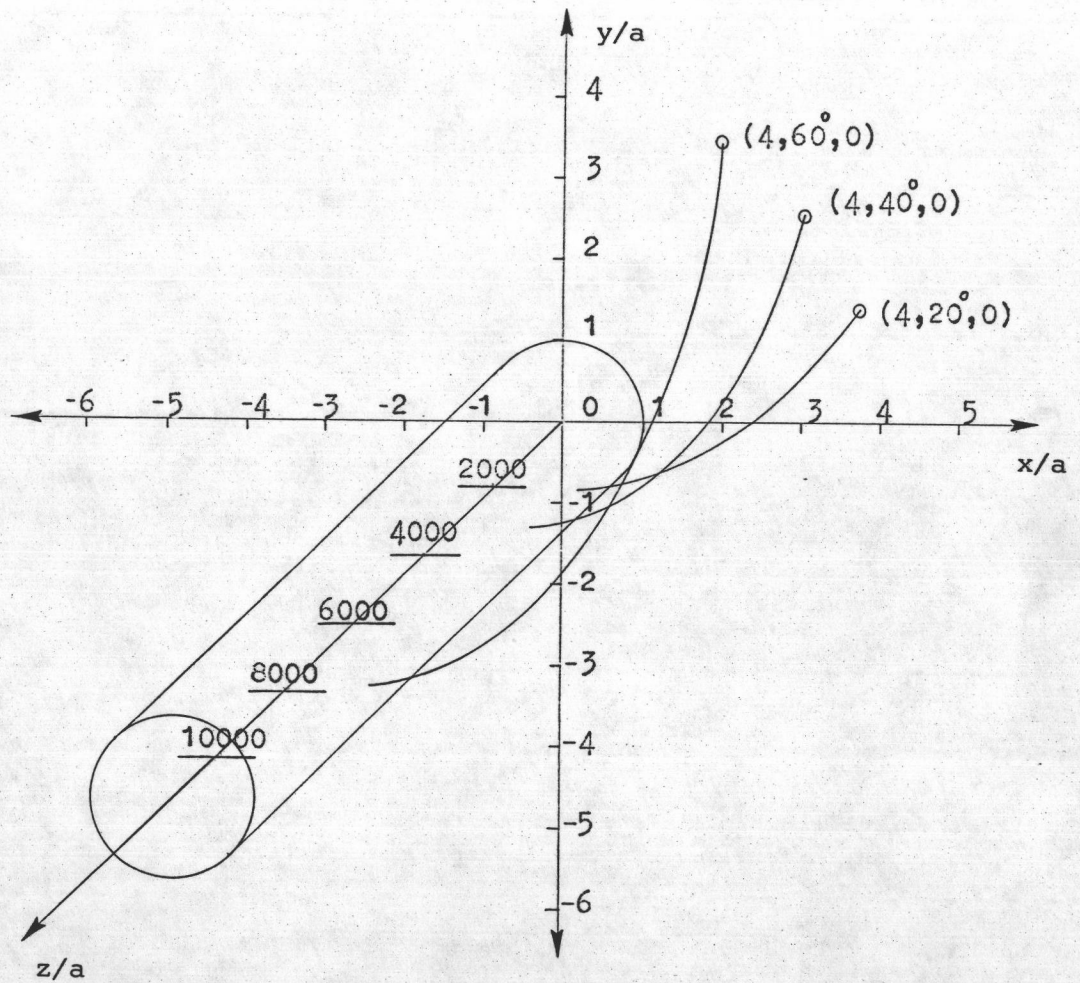
กรณีที่ 2 เมื่ออนุภาคตั้งต้นมีมุมตั้งต้น ( $\theta_i$ ) เดียวกัน แต่รัศมีตั้งต้น ( $r_{ai}$ ) ต่างกัน ผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่าระยะทางตามแกน  $z$  ที่อนุภาคถูกจับสั้น เมื่ออนุภาคตั้งต้นใกล้ตัวจับ (ดูรูปที่ 2.3) ทั้งนี้เนื่องจากแรงแม่เหล็กที่ดึงดูดอนุภาคแปรผกผันกับ  $r_a^3$

กรณีที่ 3 เมื่อตำแหน่งตั้งต้นของอนุภาคบนระนาบ  $xy$  อยู่ที่เดียวกัน แต่มีค่าคงที่ทางแม่เหล็ก ( $K$ ) ต่างกัน ผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่า ถ้า  $K$  มีค่ามากแล้วระยะทางตามแกน  $z$  ที่อนุภาคถูกจับจะสั้นกว่ากรณี  $K$  มีค่าน้อย ๆ (ดูรูปที่ 2.4) ทั้งนี้เนื่องจากแรงแม่เหล็กที่ดึงดูดอนุภาคมีค่ามากเมื่อ  $K$  มีค่ามาก

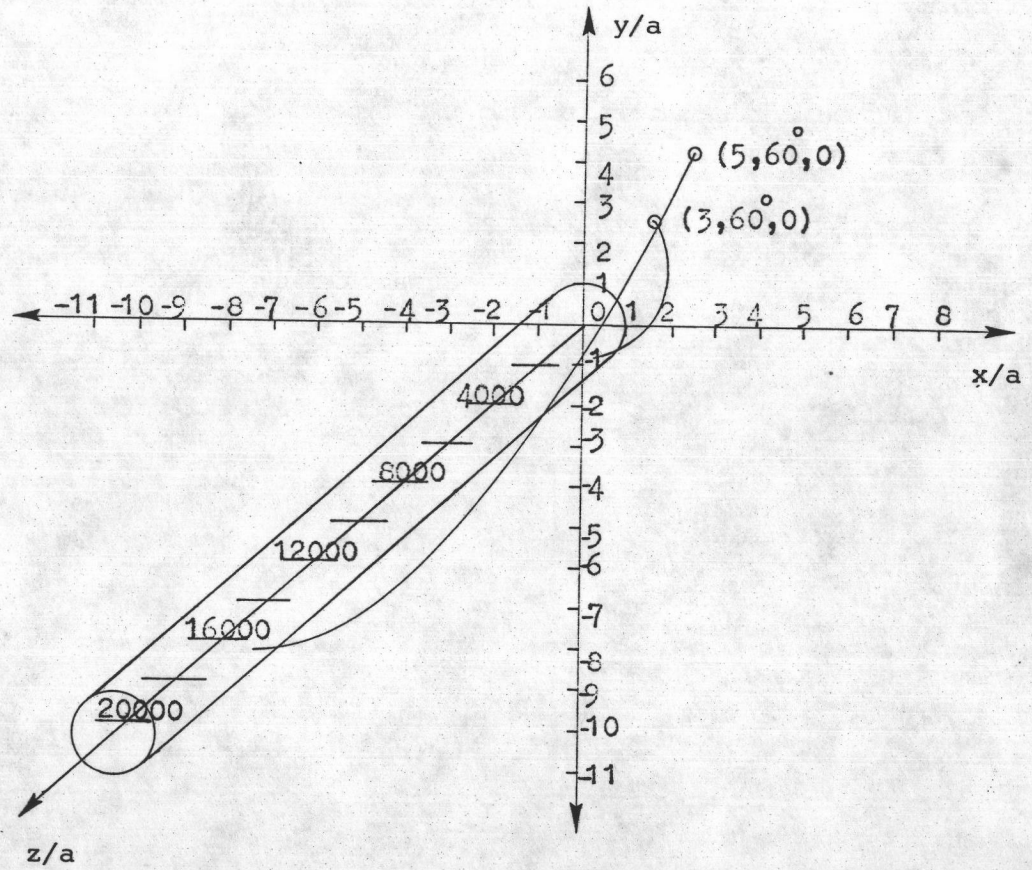
กรณีที่ 4 เมื่อตำแหน่งตั้งต้นของอนุภาคบนระนาบ  $xy$  อยู่ที่เดียวกัน แต่สัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก ( $F$ ) ต่างกัน ผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่าระยะทางตามแกน  $z$  ที่อนุภาคถูกจับสั้นเมื่อ  $F$  มีค่ามาก และมีค่ามากกว่าสำหรับ  $F$  ค่าน้อย (ดูรูปที่ 2.5) เนื่องจากความเร็วของของไหล (ซึ่งมีทิศตามแกน  $z$ ) ต่ำในกรณี  $F$  มีค่ามาก ทำให้การจับอนุภาคกรณี  $F$  มีค่ามากเป็นไปได้ง่ายกว่ากรณี  $F$  มีค่าน้อย

## 2.4 เส้นโค้งไอโซเทลิกและพื้นที่ของการจับ

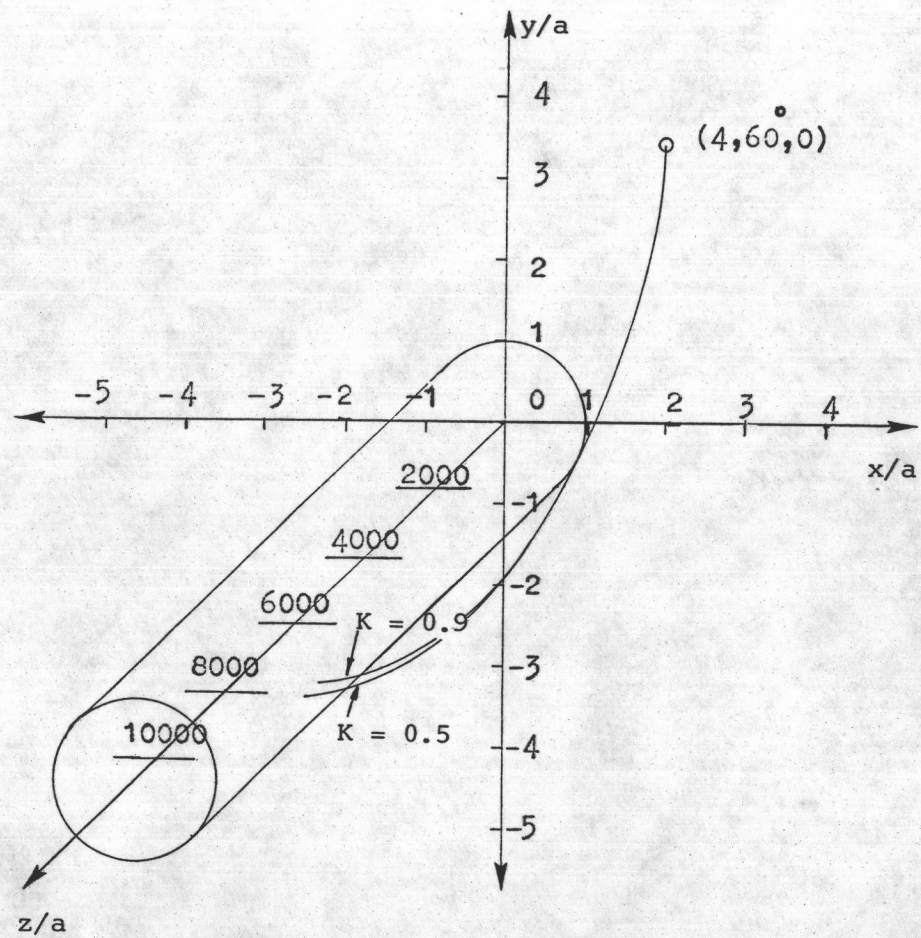
ในทางกลับกันกับการศึกษาทางเดินของอนุภาค ซึ่งทราบตำแหน่งตั้งต้นของอนุภาคแล้วทำนายทางเดินของอนุภาคในตัวกรองแม่เหล็ก ในหัวข้อนี้เราจะคำนวณตำแหน่งตั้งต้นของอนุภาคที่จะต้องตั้งต้น ณ ตำแหน่งใดเมื่อเคลื่อนที่เข้ามาในตัวกรองแม่เหล็กแล้วจะถูกจับที่ปลายตัวจับที่พิจารณา โดยการเชื่อมโยงทุกตำแหน่งตั้งต้นของอนุภาคดังกล่าว จะได้เส้นโค้งไอโซเทลิก (isotelic curve) (ดังรูปที่ 2.6) และพื้นที่ภายในเส้นโค้งนี้คือพื้นที่ของการจับ (capture area,  $A_a$ ) ซึ่งเป็นปริมาณสำคัญที่บ่งบอกถึง



รูปที่ 2.2 แสดงทางเดินของอนุภาคสำหรับ  $K = 0.8$ ,  
 $F = 7\%$ ,  $P_o/P_m = 1$ ,  $r_{ai} = 4$   
 เมื่อ  $\theta_i = 20^\circ$ ,  $40^\circ$  และ  $60^\circ$

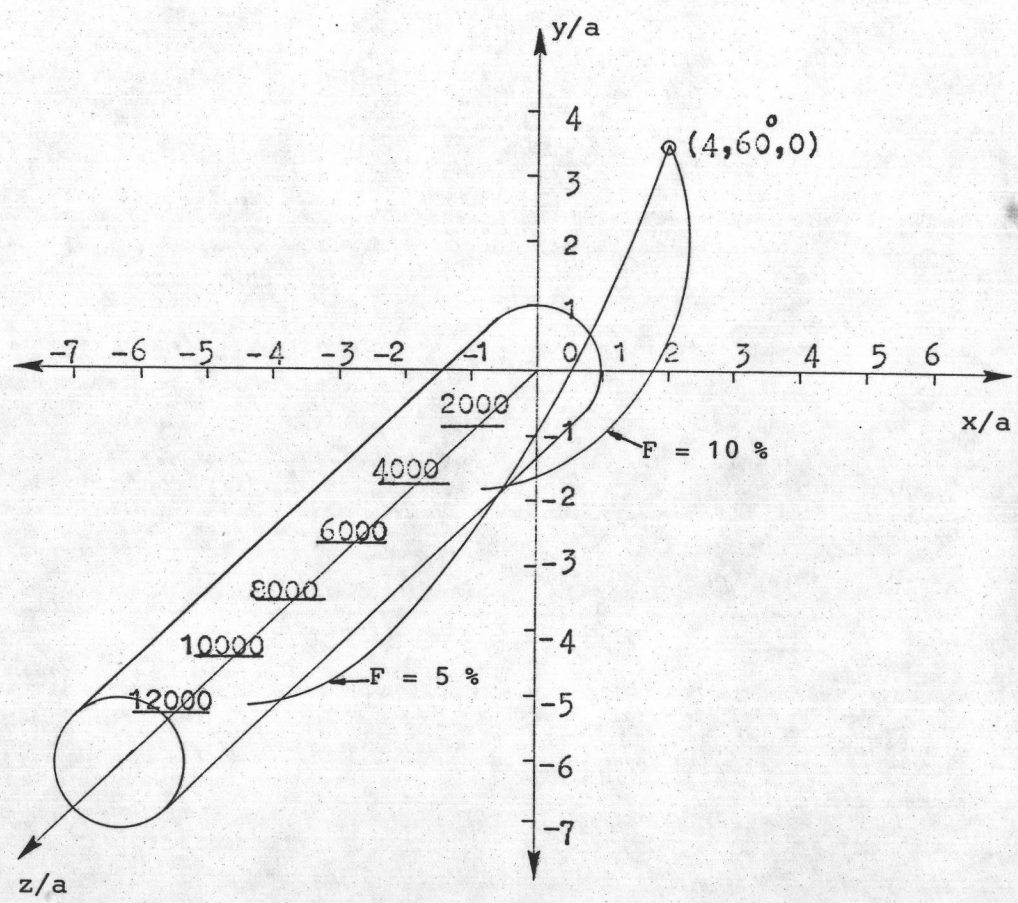


รูปที่ 2.3 แสดงทางเดินของอนุภาคสำหรับ  $K = 0.8$ ,  
 $F = 7\%$ ,  $P_o/P_m = 1$   $\theta_i = 60^\circ$  เมื่อ  
 $r_{ai} = 3$  และ  $5$

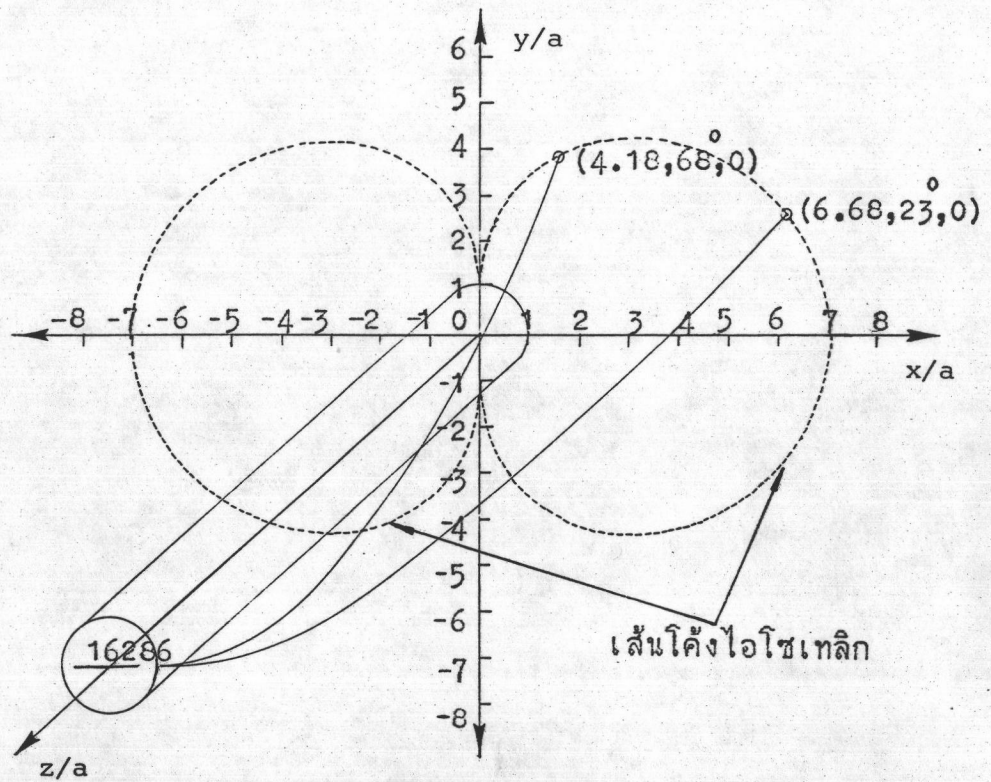


รูปที่ 2.4 แสดงทางเดินของอนุภาคสำหรับ  $r_{ai} = 4, \theta_i = 60^\circ$ ,  
 $P_o/P_m = 1$ ,  $F = 7\%$  เมื่อ  $K = 0.5$  และ  $0.9$





รูปที่ 2.5 แสดงทางเดินของอนุภาคสำหรับ  $r_{ai} = 4, \theta_i = 60^\circ, P_o/P_m = 1, K = 0.8$  เมื่อ  $F = 5\%$  และ  $10\%$



รูปที่ 2.6 แสดงเส้นโค้งไอโซเทลิก (-----) และทาง  
 เดินของอนุภาค (————) สำหรับ  
 $La = 16286$ ,  $F = 7\%$  และ  $K = 0.8$

ประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็ก

จากสมการ (2.17) ซึ่งเป็นสมการรูปโพลีโนเมียลของ  $r_{ai}$  ที่แฝงอยู่ในค่า  $C$  นั้น เราสามารถหาผลเฉลย  $r_{ai}$  ได้โดยวิธีเชิงตัวเลขของนิวตัน (Newton's method) สำหรับแต่ละค่าของ  $(r_a, \theta, z_a)$  และ  $\theta_i$  ที่กำหนดให้ และเพื่อความสะดวก

ในการหาผลเฉลย  $r_{ai}$  จากสมการ (2.17) จึงให้

$$La = \frac{P_m l_a}{P_o} = \frac{-16\mu_o (x_p - x_f) K R_a^2 H_o^2 l_a^2}{9\eta P_o} \quad \text{เรียก } La \text{ เป็นความยาว}$$

ในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ (normalised capture length)

เป็นค่าที่ขึ้นกับความเข้มสนามแม่เหล็กภายนอก ( $H_o$ ) ความดันของของไหล ( $P_o$ ) และความยาวของตัวจับต่อรัศมีของตัวจับ ( $l_a$ ) เป็นต้น

ในที่นี้เราแทนตำแหน่งของอนุภาคที่ถูกจับบริเวณปลายตัวจับที่พิจารณาด้วย  $(r_{ai} = 1, \theta = \theta_e, z_a = l_a)$  แล้วเราคำนวณ  $r_{ai}$  สำหรับ  $\theta_i$  ซึ่งแปรค่าจาก  $0^\circ$  ถึง  $90^\circ$  แล้วลากเส้นเชื่อมโยงจุด  $(r_{ai}, \theta_i)$  ทั้งหมด จะได้เส้นโค้งไอโซเทสิกในจตุภาค (quadrant) ที่หนึ่ง และโดยที่ความเร็วของของไหลและสนามแม่เหล็ก (ดูรูปที่ 1.1) ในจตุภาคอื่น ๆ มีความสมมาตรกัน เราจึงสามารถเขียนเส้นโค้งไอโซเทสิกรอบตัวจับอนุภาคในทั้ง 4 จตุภาคได้ ถ้าอนุภาคมีตำแหน่งตั้งต้นภายในเส้นโค้งไอโซเทสิก จะถูกจับ ณ ตำแหน่งหนึ่งก่อนถึงปลายตัวจับ ดังเช่นรูปที่ 2.3 ซึ่งแสดงให้เห็นว่า อนุภาคที่มีมุมตั้งต้น ( $\theta_i$ ) เดียวกันจะถูกจับที่ระยะใกล้กว่าถ้ามีรัศมีตั้งต้น ( $r_{ai}$ ) น้อยกว่า

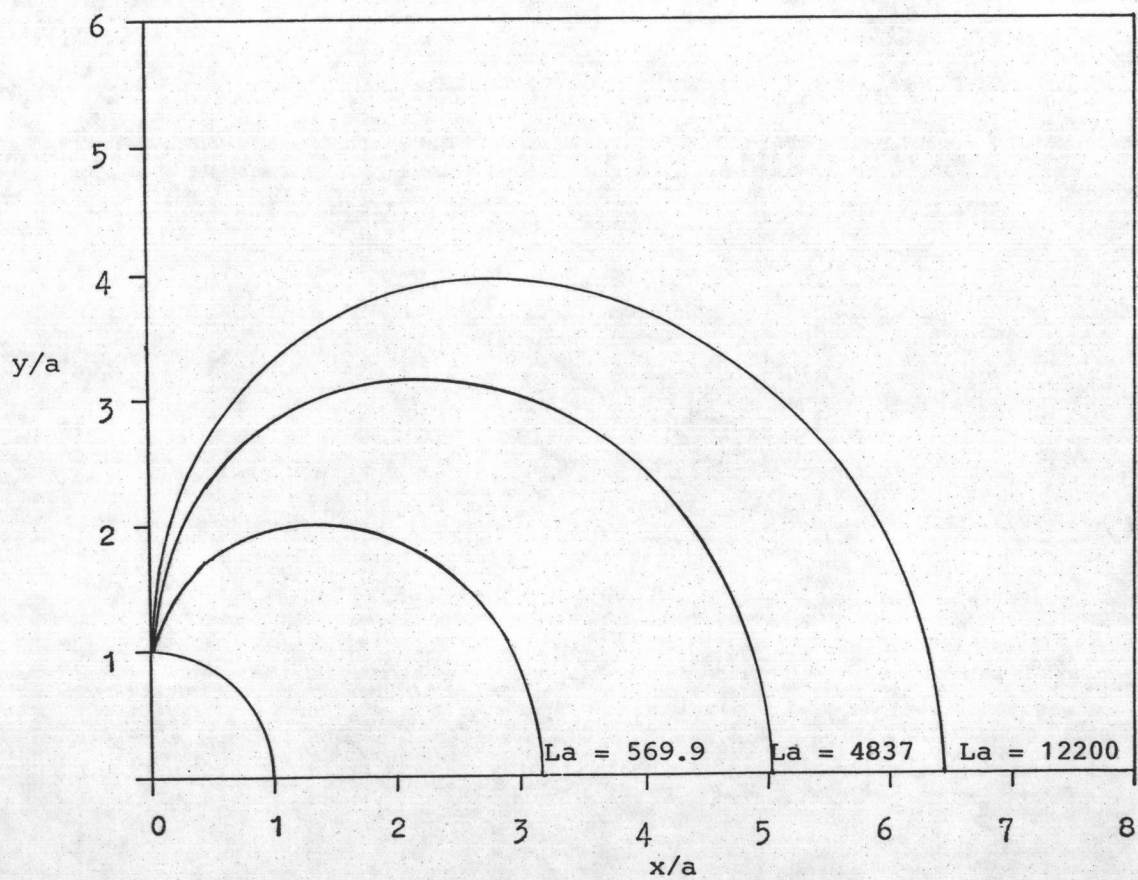
ในการวิจัยนี้ได้ศึกษาลักษณะเส้นโค้งไอโซเทสิกในจตุภาคที่หนึ่งของตัวจับที่พิจารณาเป็นตัวจับตัวแทนของตัวกรองแม่เหล็ก และศึกษาพื้นที่ของการจับ (คำนวณได้โดยการอินทิเกรตเชิงตัวเลข (numerical integration)) ซึ่งขึ้นกับความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ ( $La$ ) สัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก ( $F$ ) และค่าคงที่ทางแม่เหล็ก ( $K$ ) ในกรณีต่าง ๆ ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก ( $F$ ) และค่าคงที่ทางแม่เหล็ก ( $K$ ) คงที่ มีความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ ( $La$ )

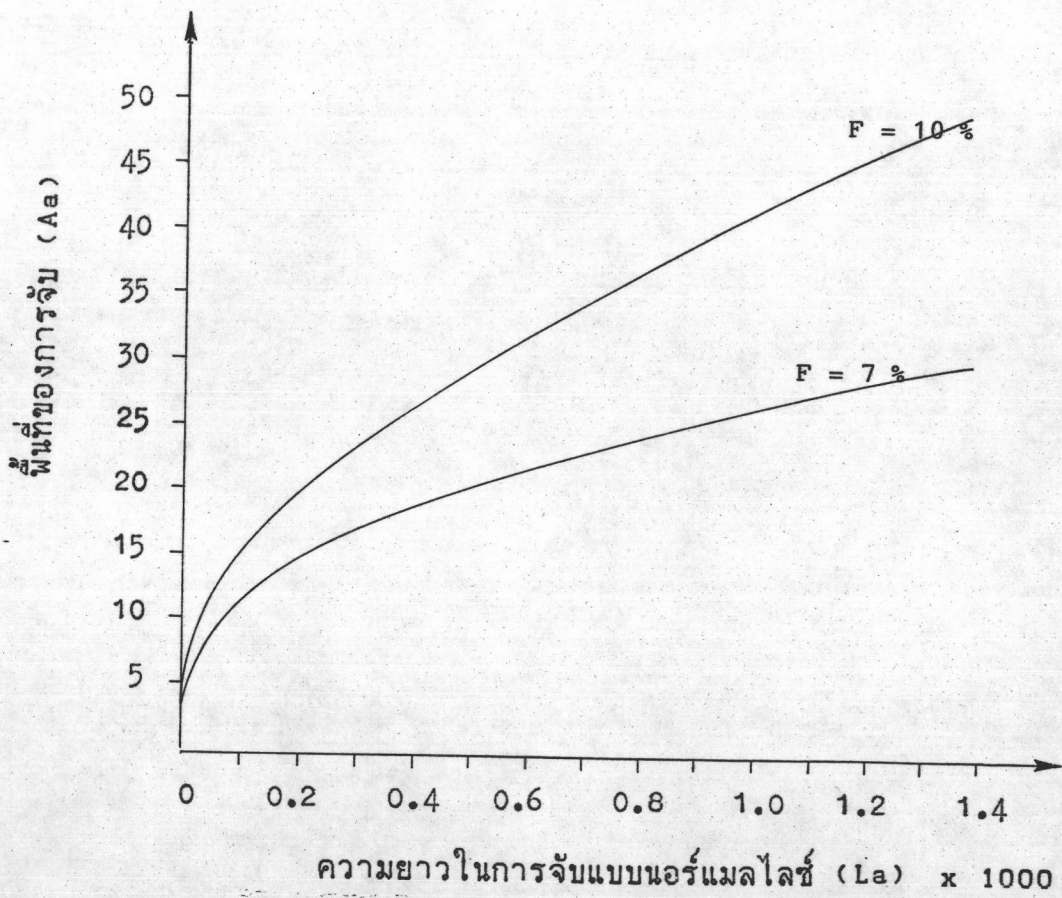
เป็นพารามิเตอร์ ผลการคำนวณเส้นโค้งไอโซเทลิก ดังแสดงในรูปที่ 2.7 ยืนยันความถูกต้องของการคำนวณของเกอร์เบอร์ (2) ในปี ค.ศ. 1978 จากรูปจะเห็นได้ว่าพื้นที่ของการจับเพิ่มขึ้นเสมอ เมื่อความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ ( $L_a$ ) มีค่ามากขึ้น และในรูปที่ 2.8 ได้แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของการจับ ( $A_a$ ) กับความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ ( $L_a$ ) ที่สัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) คงที่ 2 ค่าคือ 7 % และ 10 % จึงจะเห็นได้ว่า พื้นที่ของการจับ ( $A_a$ ) มีการเพิ่มขึ้นทางเดียว (monotonic increasing) กับการเพิ่มค่าความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ ( $L_a$ ) ( $L_a \propto H_0^2 l a^2$ ) การเพิ่มค่าความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ ( $L_a$ ) หมายถึงการเพิ่มความเข้มข้นแม่เหล็กภายนอกและ/หรือการเพิ่มความยาวของตัวจับอนุภาค

กรณีที่ 2 เมื่อความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ ( $L_a$ ) และค่าคงที่ทางแม่เหล็ก (K) คงที่ มีสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) เป็นพารามิเตอร์ ผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่า พื้นที่ของการจับ ( $A_a$ ) มีขนาดใหญ่กว่ากรณีที่มีสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) มีค่าสูงกว่า ดังรูปที่ 2.9 และในรูปที่ 2.10 ได้แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของการจับ ( $A_a$ ) กับสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) สำหรับค่าความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ ( $L_a$ ) คงที่ 2 ค่าคือ 2000 และ 4837 จากกราฟจะเห็นได้ว่าพื้นที่ของการจับ ( $A_a$ ) มีการเพิ่มขึ้นทางเดียว (monotonic increasing) กับการเพิ่มค่าสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) ทั้งนี้เนื่องจากในตัวกรองแม่เหล็กที่มีสัดส่วนของตัวจับมากกว่าความเร็วของของไหลซึ่งอยู่ในทิศทางกับแกนตัวจับช้ากว่า ทำให้การจับอนุภาคที่ปะปนมากับของไหลเป็นไปได้ง่ายกว่า

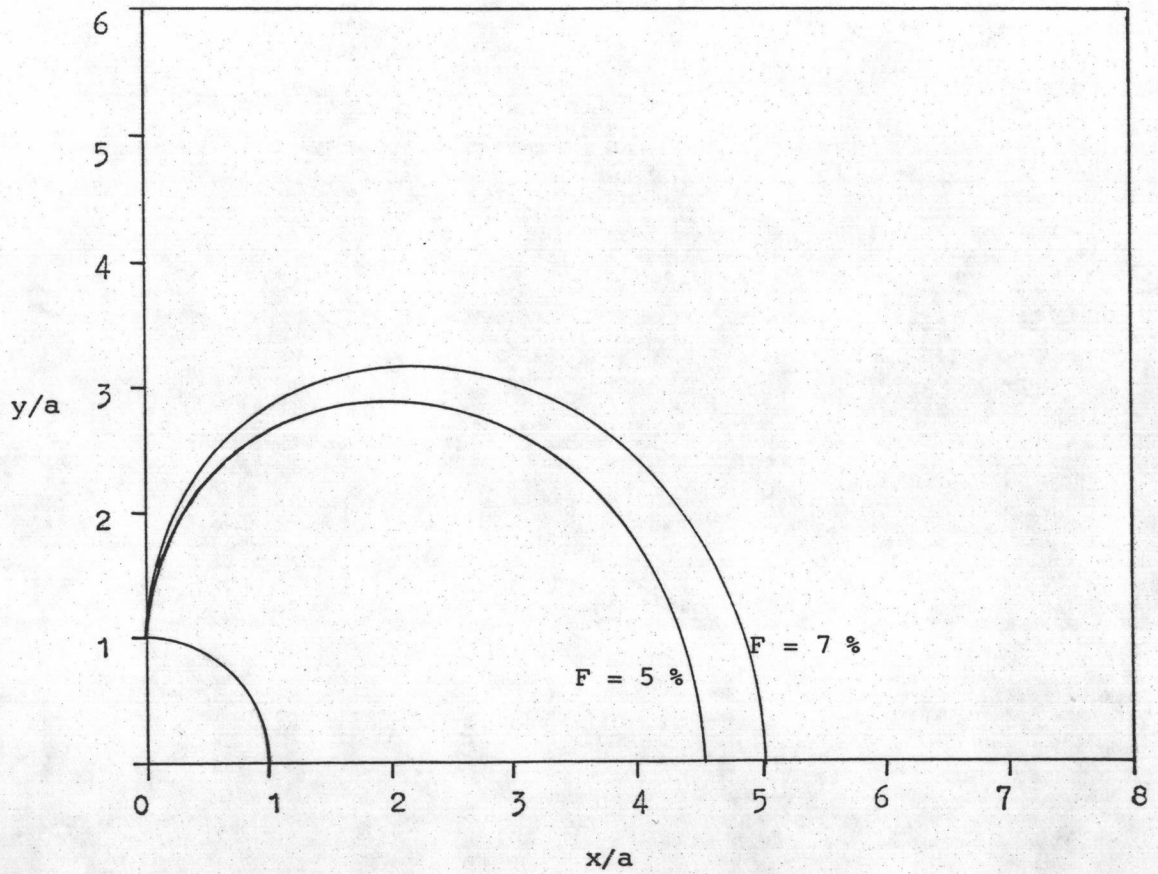
กรณีที่ 3 เมื่อความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ ( $L_a$ ) และสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) คงที่ สำหรับค่าคงที่ทางแม่เหล็ก (K) ต่างกันคือ 0.8 และ 1.0 ผลการคำนวณดังรูปที่ 2.11 แสดงให้



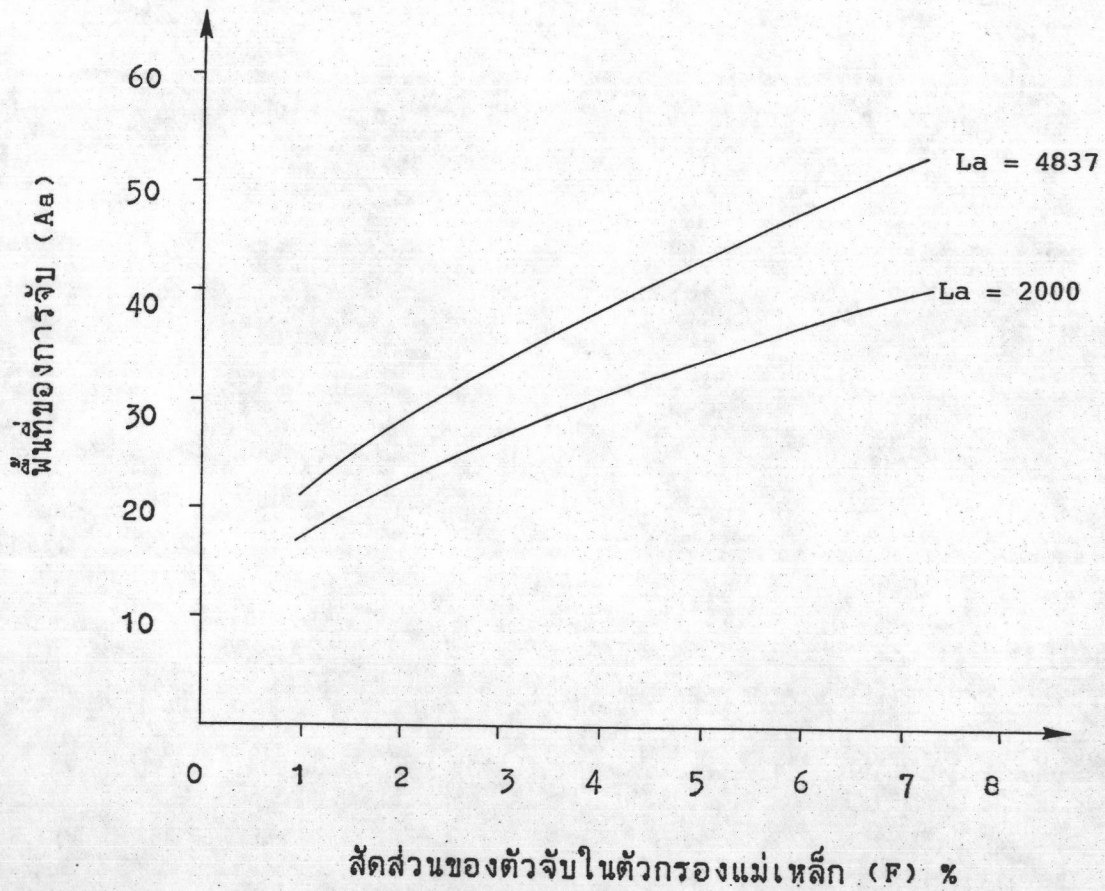
รูปที่ 2.7 แสดงเส้นโค้งไอโซเทอริกสำหรับ  $K = 0.8$ ,  $F = 7\%$   
เมื่อ  $La = 569.9$ ,  $4837$  และ  $12200$



รูปที่ 2.8 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของการจับ (Aa) กับความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ (La) เมื่อ  $F = 7\%$  และ  $10\%$  สำหรับ  $K = 0.8$

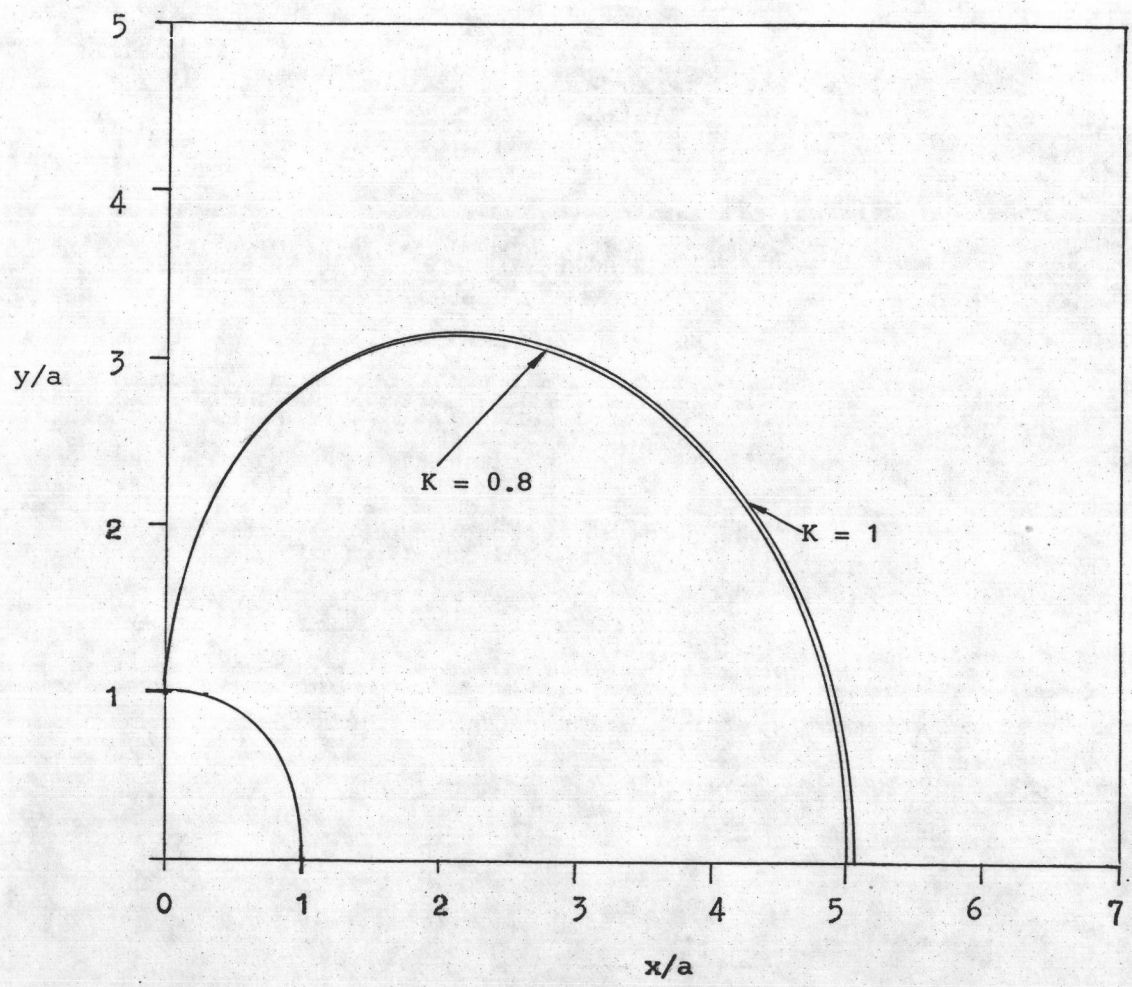


รูปที่ 2.9 แสดงเส้นโค้งไอโซเทอริกสำหรับ  $La = 4837$ ,  
 $K = 0.8$  เมื่อ  $F = 5\%$  และ  $7\%$



รูปที่ 2.10 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของการจับ ( $A_a$ ) กับสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) เมื่อ  $La = 4837$  และ  $2000$  สำหรับ  $K = 0.8$





รูปที่ 2.11 แสดงเส้นโค้งไอโซเทอริกสำหรับ  $Le = 4837$ ,  
 $F = 7\%$  เมื่อ  $K = 0.8$  และ  $1$

เห็นว่า พื้นที่ของการจับทั้ง 2 กรณี ต่างกันประมาณได้ว่าเท่ากันไม่ขึ้นอยู่กับค่าคงที่ทางแม่เหล็ก (K) ซึ่งผลการคำนวณนี้สนับสนุนการคำนวณของไกรเนอร์และออฟมานน์ (4) ซึ่งให้ข้อสรุปว่าพื้นที่ของการจับไม่ขึ้นกับค่าคงที่ทางแม่เหล็ก (K) และยืนยันในทฤษฎีของเกอร์เบอร์ (2) ทฤษฎีของบริษัทและคณะ (7) เป็นต้น ในการไม่ระบุค่าคงที่ทางแม่เหล็ก (K) เป็นพารามิเตอร์

## 2.5 ประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็ก

ปริมาณที่บ่งบอกถึงประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็กทรงกระบอกแบบตามแนวแกนคือ อัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของการจับทั้งหมดต่อพื้นที่หน้าตัดของตัวกรองแม่เหล็กซึ่งของไหลเคลื่อนที่เข้ามาในแนวตั้งฉาก ให้แต่ละตัวจับมีพื้นที่ของการจับ A และจำนวนตัวจับทั้งหมดต่อพื้นที่หน้าตัดของตัวกรองแม่เหล็ก (หรือจำนวนตัวจับต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ของตัวกรองแม่เหล็ก) เป็น  $n$  นั่นคือ

$$\begin{aligned} \text{ประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็ก} &= \left( \frac{\text{พื้นที่ของการจับทั้งหมด}}{\text{พื้นที่หน้าตัดของตัวกรองแม่เหล็ก}} \right) \times 100 \% \\ &= \left( \frac{\text{จำนวนตัวจับทั้งหมด}}{\text{พื้นที่หน้าตัดของตัวกรองแม่เหล็ก}} \right) \times A \times 100 \% \\ &= nA \times 100 \% \quad (2.18.1) \end{aligned}$$

เนื่องจากสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) คือ

$$\frac{\text{จำนวนตัวจับทั้งหมด} \times \pi a^2}{\text{พื้นที่หน้าตัดของตัวกรองแม่เหล็ก}}$$

หรือ  $F = \pi a^2$

ดังนั้นประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็กขึ้นกับสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) และพื้นที่ของการจับ (A) ดังนี้

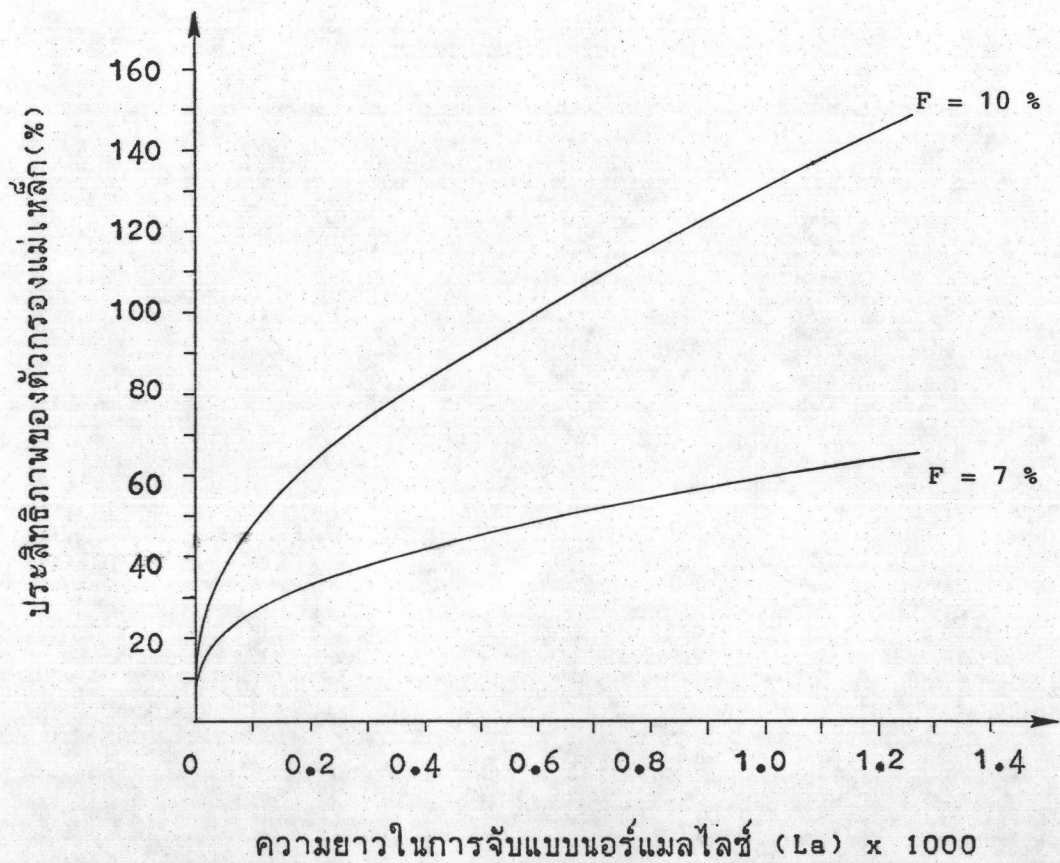
$$\text{ประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็ก} = \frac{FAa}{\pi} \times 100 \% \quad (2.18.2)$$

เมื่อ  $Aa = A/a^2$

ในการวิจัยนี้ได้ศึกษาประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็กทรงกระบอกแบบตามแนวแกน กรณีต่าง ๆ ดังนี้

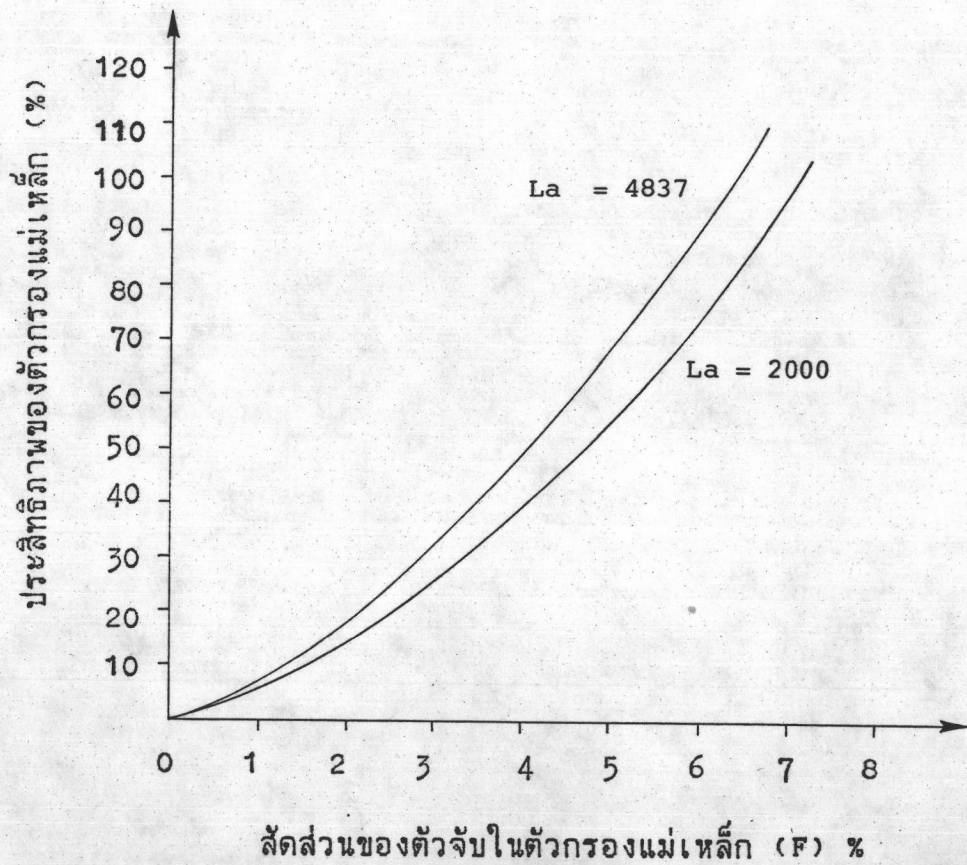
กรณีที่ 1 ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็กกับความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ ( $L_a$ ) สำหรับสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) คงที่ 2 ค่าคือ 7 % และ 10 % จากผลการคำนวณดังแสดงในรูปที่ 2.12 จะเห็นได้ว่า ประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็กสูงเพิ่มเรื่อย ๆ ในลักษณะการเพิ่มทางเดียวเมื่อความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ ( $L_a$ ) มีค่าเพิ่มขึ้น และประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็กมีค่าเกิน 100 % ในกรณีสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) เท่ากับ 10 % เมื่อความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ ( $L_a$ ) มากกว่า 600 นั่นคือทฤษฎีการจับอนุภาคภายใต้สนามแม่เหล็กตามแบบจำลองตัวจับเดี่ยวมีข้อจำกัดในการประยุกต์ใช้ได้เฉพาะกรณีสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็กและความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ ( $L_a$ ) ( $L_a \propto H_0^2 a^2$ ) มีค่าไม่สูงเกินไป

กรณีที่ 2 ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็กกับสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) สำหรับความยาวในการ



รูปที่ 2.12 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็กกับความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ ( $L_a$ ) เมื่อ  $F = 7\%$  และ  $10\%$  สำหรับ  $K = 0.8$

จับแบบนอร์แมลไลซ์ (La) 2 ค่าคือ 2000 และ 4837 จากผลการคำนวณดังแสดงในรูปที่ 2.13 จะเห็นได้ว่า ประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็กสูงเพิ่มเรื่อย ๆ ในลักษณะการเพิ่มทางเดียวเมื่อสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) มีค่าเพิ่มขึ้น และประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็กมีค่าเกิน 100 % ในกรณีความยาวในการจับแบบนอร์แมลไลซ์ (La) เท่ากับ 4837 และ 2000 เมื่อสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) มากกว่า 6.4 % และ 7.2 % ตามลำดับ ซึ่งยืนยันทฤษฎีการจับอนุภาคภายใต้สนามแม่เหล็กตามแบบจำลองตัวจับเดี่ยวของเกอร์เบอร์ที่มีข้อจำกัดว่าใช้ได้เฉพาะเมื่อสัดส่วนของตัวจับในตัวกรองแม่เหล็ก (F) มีค่าน้อย ๆ



รูปที่ 2.13 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างประสิทธิภาพของตัวกรองแม่เหล็กกับสัดส่วนของตัวจับในตัวอย่างแม่เหล็ก (F) เมื่อ  $La = 4837$  และ  $2000$  สำหรับ  $K = 0.8$