การหักล้างความสมมาตรพลวัตในปัญหาความสอดคล้องแบบบูลโดยใช้ประพจน์เลือกต่อเติมพร้อมด้วยการเล็มต้นไม้ค้นหาในเวลาเชิงพหุนาม

นายเตวิช ตรีธัญญพงศ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2561

Dynamic Symmetry Breaking in SAT Using Augmented Clauses with A Polynomial-time Lexicographic Pruning

Mr. Tevich Treethanyaphong

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Computer Engineering
Department of Computer Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2018

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การหักล้างความสมมาตรพลวัตในปัญหาความสอดคล้องแบบบูลโดยใช้ประพจน์เลือกต่อเติมพร้อมด้วยการเล็มต้นไม้ค้นหาในเวลาเชิงพหุนาม
โดย	นายเตวิช ตรีธัญญพงศ์
สาขาวิชา	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ เตชวรสินสกุล)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.เศรษฐา ปานงาม)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง)

เตวิช ตรีธัญญพงศ์ : การหักล้างความสมมาตรพลวัตในปัญหาความสอดคล้องแบบบูลโดยใช้ประพจน์เลือกต่อเติมพร้อมด้วยการเล็มต้นไม้ค้นหาในเวลาเชิงพหุนาม. (Dynamic Symmetry Breaking in SAT Using Augmented Clauses with A Polynomial-time Lexicographic Pruning) อ.ที่ปรึกษาหลัก : ผศ. ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

การเพิ่มความเร็วในการแก้ปัญหาความสอดคล้องแบบบูลนั้นสามารถทำได้ด้วยการใช้สมบัติของความสมมาตร หนึ่งในเทคนิคที่ใช้ประโยชน์จากความสมมาตรคือการหักล้างความสมมาตรพลวัต ซึ่งโดยปกติแล้วจะทำโดยการเพิ่มประพจน์เลือกที่สมมาตรกับประพจน์เลือกที่ถูกเรียนรู้ลงไปในนิพจน์บูลีนด้วย วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จัดทำขึ้นเพื่อทำให้เทคนิคการหักล้างความสมมาตรพลวัตสามารถหักล้างความสมมาตรได้เป็นจำนวนที่เป็นเอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชันและใช้พื้นที่หน่วยความจำเป็นฟังก์ชันพหุนามของข้อมูลนำเข้า โดยใช้แนวคิดของประพจน์เลือกต่อเติมในกรณีที่กลุ่มความสมมาตรประกอบด้วยความสมมาตรแบบแถว วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะแสดงให้เห็นว่าปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เคซึ่งจำเป็นสำหรับการเผยแพร่ประพจน์เลือกเดี่ยวสามารถแก้ได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามเมื่อกลุ่มความสมมาตรเป็นความสมมาตรแบบแถว ผู้จัดทำยังได้ทำการศึกษาสมบัติของกลุ่มความสมมาตรที่มีความสมมาตรแบบแถวเป็นกลุ่มย่อยปกติ เช่น การแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของความสมมาตรแบบแถวที่เป็นกลุ่มย่อยปกติ และความเป็นเอกลักษณ์ของการแยกตัวประกอบ เนื่องด้วยสมบัติเหล่านี้ ทางผู้จัดทำจึงได้เสนอวิธีการสร้างกลุ่มย่อยที่สามารถหาผลเฉลยได้ และเทคนิคการเล็มต้นไม้ค้นหาที่สมบูรณ์และสามารถทำได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามสำหรับปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เคภายใต้กลุ่มย่อยที่เราได้เสนอ และในส่วนสุดท้าย ผู้จัดทำได้ทำการวิเคราะห์บางแง่มุมของการการใช้งานเทคนิคที่ได้นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

สาขาวิชา	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์	ลายมือชื่อนิสิต	....
ปีการศึกษา	2561	ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก	....

6070194221 : MAJOR COMPUTER ENGINEERING

KEYWORD: Boolean Satisfiability Problem, Symmetry Breaking

Tevich Treethanyaphong : Dynamic Symmetry Breaking in SAT Using Augmented Clauses with A Polynomial-time Lexicographic Pruning. Advisor: Asst. Prof. Dr. Athasit Surarerks

Symmetries in Boolean satisfiability problems (SAT) can be used for speeding-up solving the problems. One of the techniques that makes use of them is dynamic symmetry breaking. This technique often operates by adding symmetric versions of the learned clauses into the clause database. This thesis aims to achieve the coverage of exponentially many symmetries while using only polynomial size of space. To acquire our goal, we used the notion of augmented clauses in the cases of symmetry groups that contain a row symmetry group. We showed in this research that under the row symmetry groups, the search problems necessary for performing unit propagation could be solved in polynomial-time. Such a problem is called the k-transporters problems. We also explored some properties of the groups that contains row symmetry groups as normal subgroups. These properties include the factorizations of the group into products of row symmetry normal subgroup and the uniqueness of this factorization. Taking advantages of these properties we introduced the construction of solvable subgroups. And then, we devised a complete lexicographic pruning technique for the k-transporter problems that could be done in polynomial-time under our constructed subgroup. Lastly, we discussed some aspect of the implementation and some of its implications.

Field of Study: Computer Engineering		Student's Signature ....
Academic Year: 2018		Advisor's Signature ....

กิตติกรรมประกาศ

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่คอยให้คำปรึกษาแนะนำ และเป็นแรงผลักดันข้าพเจ้าตลอดระยะเวลาการศึกษานี้ และขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. เศรษฐา ปานงาม ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และ รองศาสตราจารย์ ดร. อานนท์ รุ่งสว่าง กรรมการภายนอก ที่ช่วยเหลือตรวจสอบให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความถูกต้องเหมาะสมและสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

เตวิช ตรีธัญญพงศ์

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

ในหลาย ๆ กรณีของปัญหาความสอดคล้องแบบบูลนั้นมีสมบัติพิเศษที่เรียกว่าความสมมาตรอยู่ ซึ่งความสมมาตรเหล่านี้สามารถนำมาใช้ช่วยเพิ่มความเร็วในการแก้ปัญหาในกรณีเหล่านี้ได้ เนื่องจากความสมมาตรในนิพจน์บูลีน (Boolean formula) นั้นสามารถถูกนิยามได้โดยการเรียงสับเปลี่ยนสัญพจน์ (literal) ที่เป็นไปตามแบบแผนของพีชคณิตแบบบูล กล่าวคือการเรียงสับเปลี่ยนดังกล่าวมีสมบัติการสลับที่ (commute) กับนิเสธของสัญพจน์ โดยที่นิพจน์ผลลัพธ์จากการเรียงสับเปลี่ยนยังคงเดิม ผลกระทบจากความสมมาตรในนิพจน์บูลีนที่สำคัญประการหนึ่งคือ ผลที่เกิดกับการกำหนดค่าความจริง (truth assignment) แบบต่าง ๆ เนื่องจากผลลัพธ์จากการเรียงสับเปลี่ยนการกำหนดค่าความจริงใด ๆ ด้วยความสมมาตรของนิพจน์บูลีนจะให้ค่าความจริงเดียวกันเมื่อทำการแทนค่าลงในนิพจน์บูลีนดังกล่าวเสมอ จะเรียกการกำหนดค่าความจริงที่เกิดจากการเรียงสับเปลี่ยนด้วยความสมมาตรกับการกำหนดค่าความจริงหนึ่ง ๆ ว่าเป็น การกำหนดค่าความจริงที่สมมาตรกับการกำหนดค่าความจริงนั้น ความสัมพันธ์ระหว่างการกำหนดค่าความจริง ที่ถูกกำหนดโดยความสมมาตรกันนั้นก่อให้เกิดชั้นสมมูล (equivalence class) ขึ้นในเซตของการกำหนดค่าความจริง และเนื่องจากการกำหนดค่าความจริงในภายในคลาสเดียวกันสมมาตรกัน ดังนั้นสมาชิกในคลาสใด ๆ จะเป็นคำตอบของปัญหาก็ต่อเมื่อทุก ๆ สมาชิกในคลาสนั้นเป็นคำตอบเช่นกัน ทำให้ในการค้นหาคำตอบนั้นสามารถทำได้โดยทดสอบสมาชิกเพียงตัวเดียวจากแต่ละคลาสก็เพียงพอ [1]

ในช่วงแรกเริ่มนั้น ความสมมาตรถูกนำมาใช้ประโยชน์โดยการทำ การหักล้างความสมมาตรแบบสถิต (static symmetry breaking) โดยการเพิ่ม เงื่อนไขบังคับ (constraints) ที่ไม่สมมาตรลงไปในนิพจน์บูลีน โดยที่เงื่อนไขบังคับเหล่านี้จะเป็นจริงเพียงกรณีเดียวของการกำหนดค่าความจริงในแต่ละคลาสที่เกิดจากความสมมาตร โดยเงื่อนไขที่นิยมใช้คือ เงื่อนไขบังคับการจัดเรียงแบบพจนานุกรม (lexicographical constraints) ที่กำหนดว่าสมาชิกในแต่ละคลาสจะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อเป็นสมาชิกลำดับแรกสุดเมื่อนำมาเรียงลำดับตามการจัดเรียงตามแบบพจนานุกรมเท่านั้น ([2], [3], [4]) อย่างไรก็ตาม ในหลาย ๆ กรณี การสร้างเงื่อนไขที่สามารถหักล้างความสมมาตรได้อย่างสมบูรณ์นั้นจำเป็นต้องใช้เงื่อนไขบังคับ จำนวนมาก

ต่อมา ความสมมาตรถูกนำมาปรับใช้ในระหว่างการค้นหาเพื่อยับยั้งการค้นหาในส่วนที่สมมาตรกับส่วนที่เคยค้นไปแล้ว โดยที่วิธีการเหล่านี้จำเป็นที่จะต้องทำการดัดแปร ตัวแก้ปัญหาความสอดคล้องแบบบูล (SAT solver) ซึ่งวิธีการเหล่านี้สามารถถูกจัดหมวดหมู่ออกเป็น 3 หมวดตามส่วนของตัวแก้ปัญหาที่ถูกแก้ไข

วิธีการในหมวดแรก เป็นการแก้ไขกระบวนการแตกกิ่งในการค้นหาดังเช่นใน [5] โดยในที่นี้ ในขั้นตอนการเลือกกำหนดค่าให้ตัวแปรในแต่ละขั้นของการค้นหา จะทำการแตกกิ่งอิงกับจำนวนของตัวแปรที่สามารถเปลี่ยนกันได้ (interchangeable variables) ที่ถูกกำหนดให้เป็นจริงในแต่ละขั้น แทนการแตกกิ่งอิงกับค่าความจริงของแต่ละตัวแปรในแต่ละขั้น ข้อจำกัดของวิธีการนี้คือสามารถใช้ได้กับเฉพาะ ความสมมาตรตัวแปร (variable symmetry) เท่านั้น

ในหมวดต่อมาเป็นการต่อเติมกระบวนการ การเผยแพร่ประพจน์เลือกเดี่ยว (unit propagation) ใน ตัวแก้ปัญหาแบบเรียนรู้ประพจน์เลือกโดยข้อขัดแย้ง (conflict driven clause learning SAT solver) โดยในแต่ละครั้งที่เกิดการเผยแพร่ประพจน์เลือกเดี่ยวขึ้น จะทำการเผยแพร่ประพจน์เลือกที่สมมาตรกันตามความสมมาตรของนิพจน์บูลีนภายใต้การกำหนดค่าความจริงในขณะเดียวกัน ([6], [7]) อย่างไรก็ตาม การคำนวณหาความสมมาตรทั้งหมดของนิพจน์บูลีนนั้นอาจทำให้สิ้นเปลืองเวลามากเกินไปได้

หมวดสุดท้ายเป็นการต่อเติม กระบวนการเรียนรู้ประพจน์เลือก (clause learning) โดยที่เมื่อตัวแก้ปัญหาทำการเพิ่มประพจน์เลือกใหม่ลงไปในนิพจน์บูลีน ประพจน์เลือกที่สมมาตรกันก็จะถูกเพิ่มเข้าไปด้วยเช่นกัน ([8], [9], [10]) ข้อควรระวังสำหรับเทคนิคนี้อยู่ที่การเพิ่มประพจน์เลือกจำนวนมากเกินไปจะทำให้กระบวนการแก้ปัญหาช้าลงได้

งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีการใหม่ในการต่อเติมกระบวนการเรียนรู้ประพจน์เลือกโดยการใช้แนวคิดของ ประพจน์เลือกต่อเติม (augmented clause) [11],[12] แทนเซตของประพจน์เลือกที่สมมาตรกัน โดยที่การใช้ประพจน์เลือกต่อเติมจะทำให้ภาระงานย่อยต่าง ๆ เช่น การเผยแพร่ประพจน์เลือกเดี่ยว กลายเป็นปัญหาการค้นหาการเรียงสับเปลี่ยนที่ทำให้เซตหนึ่งกลายเป็นเซตย่อยของอีกเซตหนึ่ง ซึ่งปัญหานี้เป็นปัญหา เอ็นพีแบบยาก (NP-Hard) งานวิจัยนี้จึงเสนอการเพิ่มประสิทธิภาพในกรณีที่กลุ่มความสมมาตรเป็นผลคูณของ ความสมมาตรแถว (row symmetry) เพื่อให้สามารถค้นหาคำตอบของปัญหาย่อยได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

1.2 วัตถุประสงค์

งานวิจัยนี้จัดทำขึ้นเพื่อนำเสนอวิธีการประยุกต์ใช้ ประพจน์เลือกต่อเติม และ เทคนิคการหักล้างความสมมาตรโดยการต่อเติมขั้นตอนการเรียนรู้ประพจน์เลือก งานวิจัยนี้จะเน้นไปที่การหักล้างความสมมาตรที่มีความสมมาตรแบบแถวอยู่ด้วย โดยที่วิธีการที่เสนอจะต้องสามารถหักล้างความสมมาตรได้เป็นจำนวนที่เป็นเอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชันและใช้พื้นที่หน่วยความจำเป็นฟังก์ชันพหุนามของข้อมูลนำเข้า นอกจากนี้ยังต้องสามารถหักล้างความสมมาตรแบบแถวอย่างสมบูรณ์ ได้อย่างสมบูรณ์ และภาระงานย่อยในการเพิ่มความเร็วการแก้ปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เคสามารถทำงานเสร็จในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

1.3 ขอบเขตการวิจัย

1. งานวิจัยนี้จะครอบคลุมวิธีการในทางทฤษฎีของ ขั้นตอนการแยกโคเซต เทคนิคการเพิ่มประสิทธิภาพโดยใช้ดับเบิลโคเซต และการแก้ปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เคภายใต้กลุ่มความสมมาตรแบบแถวอย่างสมบูรณ์
2. กลุ่มความสมมาตรที่สนใจ จะต้องมีกลุ่มความสมมาตรแบบแถวอย่างสมบูรณ์เป็นกลุ่มย่อยปกติอยู่ด้วย
3. ความซับซ้อนเชิงพื้นที่และเวลาจะถูกวิเคราะห์ในทางทฤษฎี โดยจะพิสูจน์ว่าสามารถทำงานจบโดยใช้พื้นที่เป็นฟังก์ชันพหุนามของขนาดของข้อมูลนำเข้าหรือไม่

1.4 ขั้นตอนและวิธีการวิจัย

1. ศึกษาความรู้และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. ศึกษาสมบัติของกลุ่มการเรียงสับเปลี่ยนแบบแถว
3. ออกแบบอัลกอริทึมในการแก้ปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เค
4. วิเคราะห์ประสิทธิภาพเชิงเวลาและพื้นที่ของอัลกอริทึม
5. จัดทำเอกสารและวิทยานิพนธ์

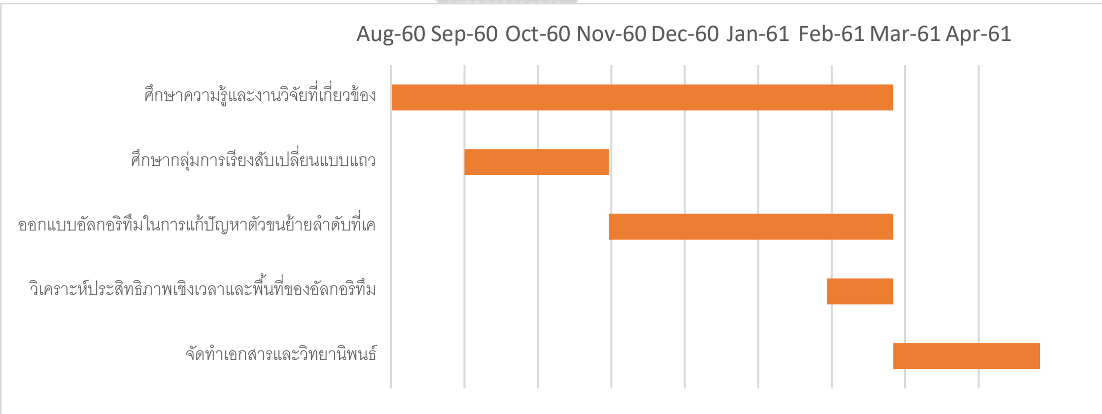


Figure 7 แสดงขั้นตอนการวิจัย

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1. สามารถใช้เป็นทางเลือกหนึ่งในการหักล้างความสมมาตรโดยการต่อเติมกระบวนการเรียงรู้ประพจน์เลือก
2. สามารถใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาการหักล้างความสมมาตรโดยการต่อเติมกระบวนการเรียนรู้ประพจน์เลือก ให้มีประสิทธิภาพในการหักล้างความสมมาตรทัดเทียมกับเทคนิคในการหักล้างความสมมาตรแบบสถิตในกรณีของความสมมาตรแบบแถว
3. สามารถนำเทคนิคการแยกโคเซตไปประยุกต์ใช้กับกลุ่มของความสมมาตรแบบอื่น ๆ ได้

1.6 ผลงานตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์

ส่วนหนึ่งของงานวิจัยนี้ได้รับการตีพิมพ์ในรายงานการประชุมวิชาการระดับนานาชาติ

Treethanyaphong, T., & Surarerks, A., *Dynamic symmetry breaking in SAT using augmented clauses with a polynomial-time lexicographic pruning,* European Conference on Electrical Engineering and Computer Science (EECS), 2018.

บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทที่ 2 นี้จะกล่าวถึงทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ โดยจะแบ่งเป็น 2 ส่วนด้วยกัน ได้แก่ ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยในส่วนแรกนั้นจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่จำเป็นในงานวิจัยชิ้นนี้ และในส่วนที่สองนั้นจะกล่าวถึงงานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกัน

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในบทย่อยนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในงานวิจัยนี้ แบ่งเป็น ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับปัญหาความสอดคล้องแบบบูล ตัวแก้ปัญหาความสอดคล้องแบบบูล สมบัติเบื้องต้นที่เกี่ยวข้องกับกลุ่มเรียงสับเปลี่ยน ความสมมาตรในปัญหาความสอดคล้องแบบบูล และปัญหาที่เกี่ยวข้องในกลุ่มเรียงสับเปลี่ยน

2.1.1 ปัญหาความสอดคล้องแบบบูล

ปัญหาความสอดคล้องแบบบูลประกอบไปด้วย ตัวแปรบูลีน (Boolean variable) ซึ่งประกอบกันเป็นนิพจน์บูลีนโดยตัวดำเนินการบูลีน และการกำหนดค่าความจริงให้กับตัวแปรเหล่านี้ ซึ่งส่วนประกอบเหล่านี้ถูกนิยามได้ดังต่อไปนี้

นิยาม 2.1.1.1 กำหนดให้ V *เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่างของ ตัวแปรบูลีน*

- *สัญพจน์ คือ* x *หรือ* $\neg x$ *เมื่อ* $x \in V$
- *ประพจน์เลือก คือ สัญพจน์ที่ถูกเชื่อมด้วย ตัวดำเนินการหรือ ซึ่งแทนด้วยเครื่องหมาย* $+$ *เช่น* $\neg x + y$ *เมื่อ* $x, y \in V$
- *นิพจน์บูลีน คือ ประพจน์เลือกที่ถูกเชื่อมด้วย ตัวดำเนินการและ ซึ่งแทนด้วยการเขียนติดกัน เช่น*
  $(\neg x + y)(x + \neg y)$ *เมื่อ* $x, y \in V$
- *การกำหนดค่าความจริง คือ เซตของสัญพจน์ที่ถูกกำหนดค่าให้เป็นจริง เช่น สมมติว่า* $V = \{x, y, z\}$ *การกำหนดค่าความจริง* $\{x, \neg y\}$ *หมายความว่า* x *มีค่าความจริงเป็นจริงและ* y *มีค่าความจริงเป็นเท็จ*

ปัญหาความสอดคล้องแบบบูลคือปัญหาที่ว่าด้วยการตัดสินว่านิพจน์บูลีนหนึ่ง ๆ จะมีการกำหนดค่าความจริงที่ทำให้นิพจน์ดังกล่าวเป็นจริงหรือไม่ ตัวอย่างเช่น

พิจารณาตารางค่าความจริงของ $(\neg x + y)(x + \neg y)$

x	y	$(\neg x + y)(x + \neg y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Table 1 ตารางแสดงค่าความจริงของ $(\neg x + y)(x + \neg y)$

จะพบว่ามีการกำหนดค่าความจริงที่ทำให้เป็นจริง อาทิเช่น $\{x, y\}$ และ $\{\neg x, \neg y\}$ เป็นต้น ในทางกลับกัน พิจารณาตารางค่าความจริงของ

$$(x + y)(x + \neg y)(\neg x + y)(\neg x + y)(\neg x + \neg y)$$

x	y	$(x + y)(x + \neg y)(\neg x + y)(\neg x + y)(\neg x + \neg y)$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Table 2 ตารางแสดงค่าความจริงของนิพจน์บูลีน

จะพบว่าไม่มีการกำหนดค่าความจริงใดที่ทำให้นิพจน์บูลีนนี้เป็นจริง

2.1.2 ตัวแก้ปัญหาแบบเรียนรู้ประพจน์เลือกโดยข้อขัดแย้ง

ในงานวิจัย [13] ได้เสนอตัวแก้ปัญหาเหล่านี้ที่ใช้อัลกอรีทึมประเภท การค้นหาและย้อนรอย (backtracking search algorithm) ในการแก้ปัญหา โดยที่การแตกกิ่งของต้นไม้ค้นหาแต่ละครั้งจะอิงกับค่าความจริงที่ถูกกำหนดให้กับตัวแปรบูลีนแต่ละตัว หรืออีกนัยหนึ่งคือ แต่ละปมของต้นไม้

ค้นหาจะถูกกำกับโดยเซตของสัญพจน์ที่แทนการกำหนดค่าความจริง และเซตดังกล่าวจะต้องเป็นเซตย่อยแท้ของปมลูก ตัวอย่างเช่นในรูปที่ 1 แสดงตัวอย่างต้นไม้ค้นหาของปัญหาที่มี 3 ตัวแปร

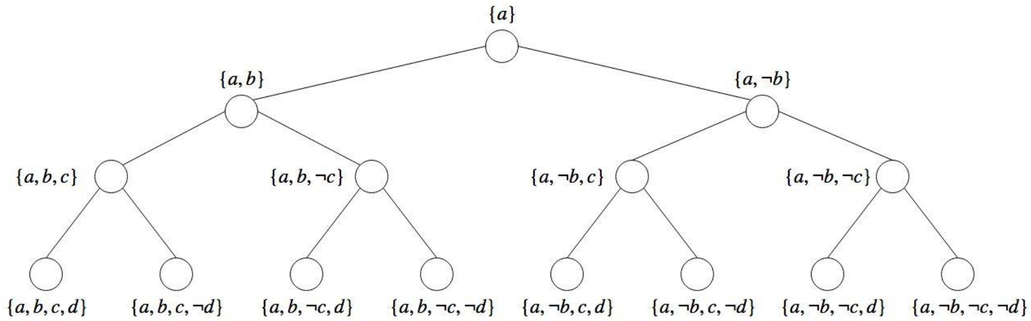


Figure 1 ตัวอย่างต้นไม้ค้นหา

นอกจากนี้ยังใช้เทคนิคที่สำคัญอีก 2 เทคนิค ได้แก่

2.1.2.1 การเผยแพร่ประพจน์เลือกเดี่ยว

จะเกิดขึ้นเมื่อ การกำหนดค่าความจริงทำให้มีประพจน์เลือกที่มี สัญพจน์ที่ไม่ถูกกำหนดค่าเหลืออยู่เพียง 1 ตัว และที่เหลือถูกแทนค่าเป็นเท็จ หรือที่เรียกว่า ประพจน์เลือกเดี่ยว ตัวอย่างเช่น

การกำหนดค่าความจริง $A = \{a, b, c\}$ ทำให้ประพจน์เลือก $C = \neg a + \neg b + d$ กลายเป็นประจพน์เลือกเดี่ยวเนื่องจาก $\neg a$ และ $\neg b$ เป็นเท็จและ d ยังไม่ถูกกำหนดค่า

จะพบว่าเมื่อมีประพจน์เลือกเดี่ยวเกิดขึ้น สัญพจน์ที่เหลืออยู่ในประพจน์เลือกดังกล่าวจะต้องถูกกำหนดค่าให้เป็นจริงเท่านั้นจึงจะทำให้การกำหนดค่าความจริงที่ต่อเติมจากการกำหนดค่าในปัจจุบันมีโอกาสที่จะทำให้นิพจน์บูลีนตั้งต้นเป็นจริง ทำให้ตัวแก้ปัญหาสามารถเลือกค่าให้ตัวแปรบูลีนดังกล่าวได้ทันทีโดยไม่จำเป็นต้องแตกกิ่ง ดังเช่นในรูปที่ 2 แสดงตัวอย่างการทำงานของกระบวนการเผยแพร่ประพจน์เลือกเดี่ยว

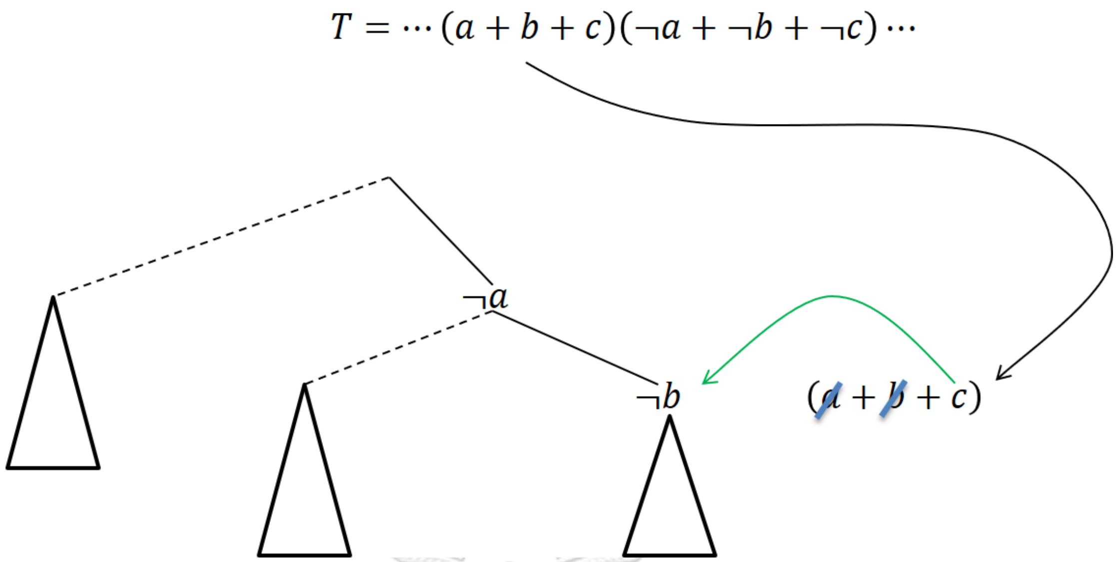


Figure 2 ตัวอย่างการเผยแพร่ประพจน์เลือก

2.1.2.2 การเรียนรู้ประพจน์เลือก

จะเกิดขึ้นเมื่อในขั้นตอนของการเผยแพร่ประพจน์เลือกเดี่ยวทำให้เกิด ข้อขัดแย้ง (conflict) คือ เกิดประพจน์เลือกที่เป็นเท็จขึ้นมา ตัวแก้ปัญหาจะทำการวิเคราะห์การกำหนดค่าความจริงที่ก่อให้เกิดข้อขัดแย้งนี้ จากนั้นจะสร้างประพจน์เลือกที่รับประกันว่าจะไม่ทำให้เกิดข้อขัดแย้งนี้ขึ้นมาอีก ซึ่งประพจน์เลือกเหล่านี้จะเป็นเงื่อนไขจำเป็นของนิพจน์บูลีนตั้งต้น จากนั้นจึงเพิ่มลงไปในนิพจน์บูลีนตั้งต้น ดังเช่นในรูปที่ 3 แสดงตัวอย่างการทำงานของกระบวนการเรียนรู้ประพจน์เลือก

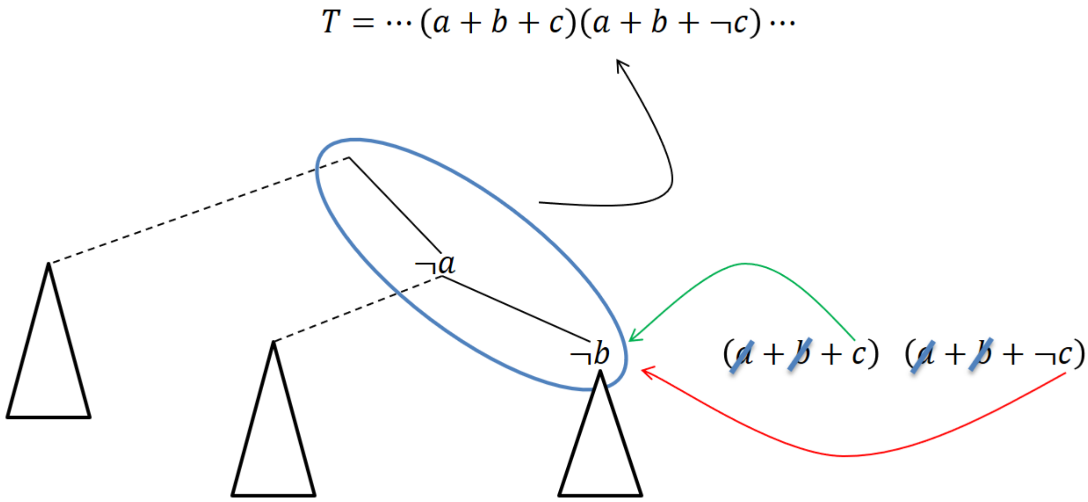


Figure 3 ตัวอย่างการเรียนรู้ประพจน์เลือก

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนดให้

$$\mathrm{T} = (\neg x_1 + x_2)(\neg x_1 + x_3 + x_7)(\neg x_2 + \neg x_3 + x_4)$$
$$(\neg x_4 + x_5 + x_8)(\neg x_4 + x_6 + x_9)(\neg x_5 + \neg x_6)$$

และให้ A แทนการกำหนดค่าความจริง

ตัวอย่างการค้นหาสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

ที่ความลึก 1 เลือก x_7 เป็น เท็จ จะได้

$$A = \{\neg x_7\}$$

ที่ความลึก 2 เลือก x_8 เป็น เท็จ จะได้

$$A = \{\neg x_7, \neg x_8\}$$

ที่ความลึก 3 เลือก x_9 เป็น เท็จ จะได้

$$\mathrm{A} = \{\neg \mathrm{x}_7, \neg \mathrm{x}_8, \neg \mathrm{x}_9\}$$

ที่ความลึก 4 เลือก x_1 เป็น จริง จะได้

$$\mathrm{A} = \{\neg \mathrm{x}_7, \neg \mathrm{x}_8, \neg \mathrm{x}_9, \mathrm{x}_1\}$$

จะพบว่า

$(\neg \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2)$ และ $(\neg \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_7)$ เป็นประพจน์เลือกเดี่ยว

โดยมี

x_2 และ x_3 เป็นสัญพจน์ที่ยังไม่ถูกกำหนดค่าตามลำดับ

ตัวแก้ปัญหาจะทำการเพิ่ม x_2 และ x_3 ลงไปใน A จะได้

$$\mathrm{A} = \{\neg \mathrm{x}_7, \neg \mathrm{x}_8, \neg \mathrm{x}_9, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3\}$$

จะพบว่า

$(\neg \mathrm{x}_2 + \neg \mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_4)$ เป็นประพจน์เลือกเดี่ยว

โดยมี

x_4 เป็นสัญพจน์ที่ยังไม่ถูกกำหนดค่า

ตัวแก้ปัญหาจะทำการเพิ่ม x_4 ลงไปใน A จะได้

$$\mathrm{A} = \{\neg \mathrm{x}_7, \neg \mathrm{x}_8, \neg \mathrm{x}_9, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4\}$$

จะพบว่า

$(\neg x_4 + x_5 + x_8)$ และ $(\neg \mathrm{x}_4 + \mathrm{x}_6 + \mathrm{x}_9)$ เป็นประพจน์เลือกเดี่ยว

โดยมี

x_5 และ x_6 เป็นเป็นสัญพจน์ที่ยังไม่ถูกกำหนดค่าตามลำดับ

ตัวแก้ปัญหาจะทำการเพิ่ม x_5 และ x_6 ลงไปใน A จะได้

$$\mathrm{A} = \{\neg \mathrm{x}_7, \neg \mathrm{x}_8, \neg \mathrm{x}_9, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4, \mathrm{x}_5, \mathrm{x}_6\}$$

จะพบว่า

$(\neg \mathrm{x}_5 + \neg \mathrm{x}_6)$ เป็นเท็จ จะได้ว่า

การเลือก $\{\neg x_7, \neg x_8, \neg x_9, \neg x_1\}$ ทำใด้เกิดข้อขัดแย้ง
ตัวแก้ปัญหาจะทำการเพิ่มประพจน์เลือก $(x_7 + x_8 + x_9 + \neg x_1)$ ลงไปในนิพจน์บูลีน
*การเพิ่ม $(x_7 + x_8 + x_9 + \neg x_1)$ ลงไปจะทำให้ตัวแก้ปัญหาไม่ทำการค้นหาภายใต้ปมที่มี $\{\neg x_7, \neg x_8, \neg x_9, \neg x_1\}$ เป็นเซตย่อยของ A เนื่องจากการเผยแพร่ประพจน์เลือกจะรับรองว่า $(x_7 + x_8 + x_9 + \neg x_1)$ จะไม่เป็นเท็จ

2.1.3 กลุ่มเรียงสับเปลี่ยน

จากนิยามของความสมมาตรของนิพจน์บูลีนที่กำหนดให้เป็น การเรียงสับเปลี่ยนสัญพจน์ ที่มีสมบัติการสลับที่กับตัวดำเนินการนิเสธ และไม่ทำให้นิพจน์บูลีนเปลี่ยนแปลง เราจะพบว่าเซตของความสมมาตรทั้งหมดเป็นกลุ่มภายใต้ตัวดำเนินการประกอบฟังก์ชัน (composition operator) กลุ่มที่เกิดจากการเรียงสับเปลี่ยนและตัวดำเนินการประกอบฟังก์ชันมีชื่อเรียกโดยทั่วไปว่า กลุ่มเรียงสับเปลี่ยน (Permutation group)

นิยาม 2.1.3.1 *สำหรับการเรียงสับเปลี่ยน ϕ ใด ๆ บนเซตจำกัด Ω ใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเขียนแทนด้วยฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง $\phi: \Omega \to \Omega$ และจะเขียนแทน $\phi(x)$ ด้วย x^{ϕ}*

นิยาม 2.1.3.2 *ตัวดำเนินการประกอบฟังก์ชัน $\circ$ จะนิยามโดย สำหรับฟังก์ชัน $f: A \to B$, $g: B \to C$ จะให้ $f \circ g(x) \coloneqq g(f(x))$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$ และจะเขียนฟังก์ชันผลลัพธ์ $f \circ g(x)$ แทนด้วย $f \circ g$ หรือ fg*

สำหรับการเรียงสับเปลี่ยนบนเซตจำกัดใด ๆ จะสามารถเขียนแทนได้ด้วย วัฏจักร (cycle) ของสมาชิกของเซตดังกล่าวที่เกิดขึ้นจากการเรียงสับเปลี่ยน

นิยาม 2.1.3.3 *ให้ Ω เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง และ f เป็นการเรียงสับเปลี่ยนบน Ω*

1. *สำหรับ $c = \{x_1, x_2, \dots, x_l\} \subseteq \Omega$ จะเรียก c ว่าเป็น วัฏจักรของ f เมื่อ $f(x_i) = x_{(i \bmod l)+1}$ และจะเขียนแทนด้วย $(x_1 x_2 \cdots x_l)$*
2. *ให้ $c_1, c_2, \dots, c_m$ เป็นวัฏจักรทั้งหมดของ f ที่มีสมาชิกมากกว่า 1 ตัว จะเขียนแทน f ด้วย $c_1 c_2 \cdots c_m$*

ตัวอย่างเช่น ให้ $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ และ f นิยามโดย

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 5,$$
$$f(3) = 4, \quad f(4) = 1,$$
$$f(5) = 2, \quad f(6) = 6$$

จะเขียนแทน f ได้ด้วย $(134)(25)$

นิยาม 2.1.3.4 *กลุ่ม (group)* G *คือคู่อันดับ* $(G,\times)$ *ของเซต* G *ที่ไม่ใช่เซตว่างและตัวดำเนินการทวิภาค* $\times$ *โดยมีสมบัติดังต่อไปนี้*

1. *สมบัติปิด (closure)*

$$\forall a, b \in G, \qquad a \times b \in G$$

2. *สมบัติการเปลี่ยนหมู่ (associativity)*

$$\forall a, b, c \in G, \quad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

3. *มีเอกลักษณ์ (identity element)*

$$\exists e \forall a \in G, \quad a \times e = e \times a = a$$

4. *มีตัวผกผัน (inverse element)*

$$\forall a \exists a^{-1} \in G, \; a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$$

**หมายเหตุ เพื่อความกระชับจะเขียนแทน* $a \times b$ *ด้วย* ab

กลุ่มทางคณิตศาสตร์นั้นมีสมบัติทางโครงสร้างที่สำคัญมากมาย สมบัติเบื้องต้นดังต่อไปเป็น เป็นสมบัติที่สำคัญและถูกใช้ประโยชน์ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

นิยาม 2.1.3.5 *กลุ่ม* H *เป็น กลุ่มย่อย (subgroup) ของกลุ่ม* G เมื่อ $H \subseteq G$ และ H เป็นกลุ่มภายใต้ตัวดำเนินการทวิภาคของ G และจะเขียนแทนด้วย $H \leq G$

นิยาม 2.1.3.6 สำหรับ $H \leq G$ และ $g \in G$ จะเรียกเซต $\{gh \mid h \in H\}$ และ $\{hg \mid h \in H\}$ ว่า โคเซตซ้าย (left coset) และ โคเซตขวา (right coset) และเขียนแทนด้วย gH และ Hg ตามลำดับ

ทฤษฎีบทย่อย 2.1.3.7 *ให้* $H \leq G$ *และ* $\forall a, b \in G$ *จะได้ว่า*

1. ถ้า $aH \cap bH \neq \emptyset$ *แล้ว* $aH = bH$

2. ถ้า $Ha \cap Hb \neq \emptyset$ *แล้ว* $Ha = Hb$

พิสูจน์

สำหรับข้อ 1 ให้ $aH \cap bH \neq \emptyset$ ดังนั้นมี $h_1, h_2 \in H$ ที่ทำให้ $ah_1 = bh_2$

ดังนั้น $a = bh_2h_1^{-1}$

ดังนั้น $aH \subseteq bH$

ในทำนองเดียวกัน $bH \subseteq aH$

ดังนั้น $aH = bH$

ในทำนองเดียวกันข้อ 2 จึงเป็นจริง ■

ทฤษฎีบทย่อย 2.1.3.8 *ให้* $H \leq G, g \in G$ *แล้ว* $|gH| = |Hg| = |H|$

พิสูจน์

ให้ $\phi: gH \to H$ นิยามโดย $\phi(h) = g^{-1}h$ จะพิสูจน์ว่า ϕ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

1. สมมติให้มี $h_1, h_2 \in H$ ที่ $\phi(h_1) = \phi(h_2)$

จะได้ว่า $g^{-1}h_1 = g^{-1}h_2$ ดังนั้น $h_1 = gg^{-1}h_1 = gg^{-1}h_2 = h_2$

ดังนั้น ϕ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2. สำหรับ $h' \in H$ ใด ๆ จะได้ว่า $gh' \in gH$

ดังนั้น $\phi(gh') = g^{-1}gh' = h'$

ดังนั้น ϕ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ในทำนองเดียวกัน $\phi': Hg \to H$ นิยามโดย $\phi'(h) = hg^{-1}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ■

นิยาม 2.1.3.9 *สำหรับกลุ่มเรียงสับเปลี่ยน* G *บนเซต* Ω จะเรียกเซต $x^G = \{x^g \mid g \in G\}$ สำหรับ $x \in \Omega$ ว่าออร์บิทของ x ภายใต้ G

ทฤษฎีบทย่อย 2.3.10 *ถ้า* $x^G \cap y^G \neq \emptyset$ *แล้ว* $x^G = y^G$

พิสูจน์

สมมติให้ $x^G \cap y^G \neq \emptyset$ จะได้ว่ามี $g_1, g_2 \in G$ ที่ทำให้ $x^{g_1} = y^{g_2}$
ดังนั้น $x = y^{g_2 g_1^{-1}}$ จะได้ว่า $x^G \subseteq y^G$
ในทำนองเดียวกัน $y^G \subseteq x^G$
ดังนั้น $x^G = y^G$ ■

นิยาม 2.1.3.11 *สำหรับกลุ่มเรียงสับเปลี่ยน G บนเซต Ω จะเรียกเซต G_x สำหรับ $x \in \Omega$ ซึ่งนิยามโดย $G_x = \{g \in G \mid x^g = x\}$ ว่าสเตบิไลเซอร์ของ x ภายใต้ G*

ทฤษฎีบทย่อย 2.1.3.12 *ถ้า G เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซต Ω และ $x \in \Omega$ แล้ว* $G_x \leq G$
พิสูจน์

1. G_x มีสมบัติปิดเนื่องจาก ถ้า $a, b \in G_x$ แล้ว $x^{ab} = (x^a)^b = x^b = x$
2. G_x มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่เนื่องจาก $G_x \subseteq G$
3. G_x มีเอกลักษณ์เนื่องจาก $x^e = x$
4. G_x มีตัวผกผันเนื่องจาก ถ้า $a \in G_x$ แล้ว $x^{a^{-1}} = (x^a)^{a^{-1}} = x$ ■

ทฤษฎีบทย่อย 2.1.3.13 *ถ้า $g \in G$ โดยที่ $x^g = y$ จะได้ว่า* $x^{g'} = y$ ก็ต่อเมื่อ $g' \in G_x g$
พิสูจน์

เห็นได้ชัดว่าถ้า $g' \in G_x g$ แล้ว $x^{g'} = y$
สมมติให้ $x^{g'} = y$ จะได้ว่า $x^{g' g^{-1}} = x$ ดังนั้น $g' \in G_x g$ ■

ทฤษฎีบทย่อย 2.1.3.14 $|G| = |x^G||G_x|$
พิสูจน์

ให้ $S_y = \{g \in G \mid x^g = y\}$ สำหรับ $y \in x^G$
เห็นได้ชัดว่าถ้า $g \in S_y$ แล้ว $g \notin S_{y'}$ เมื่อ $y' \neq y$
จะได้ว่า $|G| = \sum_{y \in x^G} |S_y|$
แต่จากทฤษฎีบทย่อย 2.1.3.13 จะได้ว่า $S_y = G_x g'$ สำหรับบาง g'
และจากทฤษฎีบทย่อย 2.1.3.8 จะได้ว่า $|S_y| = |G_x g'| = |G_x|$

ดังนั้น $|G| = |x^G||G_x|$ ■

นิยาม 2.1.3.15 สำหรับ $N \leq G$ จะเรียก N ว่า กลุ่มย่อยปกติ (normal subgroup) ของ G เมื่อ $gN = Ng$ สำหรับทุก ๆ $g \in G$ และจะเขียนแทนด้วย $N \trianglelefteq G$

นิยาม 2.1.3.16 สำหรับ $N \trianglelefteq G$ กลุ่มที่เกิดจากเซตของทุก ๆ โคเซตของ N ใน G กับตัวดำเนินการ คูณกันของเซต ซึ่งนิยามโดย สำหรับ $H, K \subseteq G, HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ จะเรียกกลุ่มดังกล่าวว่า กลุ่มผลหาร (quotient group) และเขียนแทนด้วย G/N

นิยาม 2.1.3.17 สำหรับกลุ่ม G ใด ๆ จะเรียก G ว่าเป็น กลุ่มอาบีเลียน (Abelian group) เมื่อ G มีสมบัติการสลับที่ (commutativity) กล่าวคือ $\forall a, b \in G, ab = ba$

นิยาม 2.1.3.18 *สำหรับกลุ่ม* G_0 *ใด ๆ จะเรียก* G_0 *ว่าเป็น กลุ่มที่สามารถหาผลเฉลยได้ (solvable group) เมื่อมี กลุ่มย่อย* $G_1, G_2, \cdots, G_n$ *โดยที่*

1. $G_{i+1} \trianglelefteq G_i, \ \ 0 \leq i < n$
2. G_i/G_{i+1} *เป็น กลุ่มอาบีเลียน สำหรับทุก ๆ* $0 \leq i < n$
3. G_n *มีสมาชิกเพียงตัวเดียว*

นิยาม 2.1.3.19 *สำหรับ* $S \subseteq G$ *จะให้* $< S >$ *แทนกลุ่มที่ถูกก่อกำเนิดโดย* S *โดยที่* $< S >$ *ถูกนิยามโดย*

1. $\forall s \in S, \quad s, s^{-1} \in < S >$
2. *ถ้า* $s_1, s_2 \in < S >$ *แล้ว* $s_1 s_2 \in < S >$

และจะเรียก S *ที่ก่อกำเนิด* G *ว่าเป็น เซตก่อกำเนิด (generator set) ของ* G

นิยาม 2.1.3.20 *ให้* G *และ* H *เป็นกลุ่ม จะเรียกฟังก์ชัน* $\phi: G \to H$ *โดยที่* $\forall g_1, g_2 \in G$ $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$ *ว่า โฮโมมอร์ฟิซึม (Homomorphism)*

นิยาม 2.1.3.21 *ให้* G *และ* H *เป็นกลุ่ม และ* $\phi: G \to H$ *เป็นโฮโมมอร์ฟิซึม จะให้*

$$\ker(\phi) = \{g \in G \mid \phi(g) = e\}$$

นิยาม 2.1.3.22 *ให้* G *และ* H *เป็นกลุ่ม และ* $\phi: G \to H$ *เป็นโฮโมมอร์ฟิซึม จะเรียก* ϕ *ว่าไอโซมอร์ฟิซึม (Isomorphism) เมื่อ* ϕ *เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง และจะเรียก* G *ว่า ไอโซมอร์ฟิก (Isomorphic) กับ* H *เมื่อ มีไอโซมอร์ฟิซึมจาก* G *ไปหา* H *และจะเขียนแทนด้วย*
$G \cong H$

นิยาม 2.1.3.23 *ให้* G *เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซต* Ω *จะเรียก* G *ว่าเป็นกลุ่มถ่ายทอด (transitive) บน* Ω *เมื่อ* $x^G = \Omega$ *สำหรับ* $x \in \Omega$ *ใด ๆ*

นิยาม 2.1.3.24 *ให้* G *เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนและเป็นกลุ่มถ่ายทอดบนเซต* Ω *จะเรียก* $B \subseteq \Omega$ *ว่าบล็อคเมื่อ สำหรับ* $g \in G$ *ใด ๆ ถ้า* $B \cap B^g \neq \emptyset$ *แล้ว* $B = B^g$ *และจะเรียก* G *ว่าพริมิติฟ (primitive) บทเซต* Ω *เมื่อ ถ้า* B *เป็นบล็อคใด ๆ ของ* G *แล้ว* $B = \Omega$ *หรือ* $|B| = 1$

2.1.4 ความสมมาตรในปัญหาความสอดคล้องแบบบูล

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงนิยามและสมบัติที่สำคัญเบื้องต้นของความสมมาตรในปัญหาความสอดคล้องแบบบูล ประกอบด้วยสมบัติที่สำคัญ 2 ประการคือ การกำหนดค่าความจริงที่สมมาตรกันจะให้ค่าความจริงเดียวกันเสมอเมื่อทำการแทนค่า และประพจน์เลือกที่สมมาตรกับประพจน์เลือกที่เป็นเงื่อนไขจำเป็นก็จะเป็นเงื่อนไขจำเป็นด้วย ซึ่งสมบัติเหล่านี้สามารถนำมาใช้ลดเวลาการค้นหาได้โดยการหลีกเลี่ยงการค้นหาการกำหนดค่าความจริงที่สมมาตรกับการกำหนดค่าที่ถูกค้นหาไปแล้ว หรือทำการเพิ่มประพจน์เลือกที่สมมาตรกับประพจน์เลือกที่ถูกเรียนรู้ลงไปในนิพจน์บูลีนด้วย เป็นต้น

นิยาม 2.1.4.1 *สำหรับการเรียงสับเปลี่ยนสัญพจน์* ϕ *ใด ๆ การทำการเรียงสับเปลี่ยน* ϕ *บนประพจน์เลือก, นิพจน์บูลีน และ การกำหนดค่าความจริง จะถูกนิยามดังต่อไปนี้*

1. *สำหรับประพจน์เลือก* $C = l_1 + l_2 \cdots l_m$ *จะให้ผลลัพธ์ของการเรียงสับเปลี่ยน* C *ด้วย* ϕ *คือ* $l_1^\phi + l_2^\phi \cdots l_m^\phi$ *และจะเขียนแทนด้วย* C^ϕ
2. *สำหรับนิพจน์บูล* $F = C_1 C_2 \cdots C_n$ *จะให้ผลลัพธ์ของการเรียงสับเปลี่ยน* T *ด้วย* ϕ *คือ* $C_1^\phi C_2^\phi \cdots C_m^\phi$ *และจะเขียนแทนด้วย* T^ϕ
3. *สำหรับการกำหนดค่าความจริง* $A = \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ *จะให้ผลลัพธ์ของการเรียงสับเปลี่ยน* A *ด้วย* ϕ *คือ* $\{l_1^\phi, l_2^\phi, \cdots, l_k^\phi\}$ *และจะเขียนแทนด้วย* A^ϕ

นิยาม 2.1.4.2 ให้ T เป็นนิพจน์บูลีนและ l เป็นสัญพจน์ใด ๆ ϕ จะเป็นความสมมาตรของ T เมื่อ $T^{\phi} = T$ และ $\phi(\neg l) = \neg\phi(l)$

ตัวอย่างเช่น

สำหรับนิพจน์บูลีน $T = (x + \neg y + z)(\neg x + y + z)$

การเรียงสับเปลี่ยน $\rho = (x\neg y)(\neg xy)(y\neg x)(\neg yx)$

ถือว่าเป็นความสมมาตรหนึ่งของ T เนื่องจาก $T^{\rho} = T$ และ $p(\neg l) = \neg p(l)$ สำหรับทุก ๆ สัญพจน์ l

เซตของความสมมาตรทั้งหมดของนิพจน์บูลีนใด ๆ จะเป็นกลุ่มภายใต้ตัวดำเนินการประกอบฟังก์ชัน ตัวอย่างเช่น

เซตของความสมมาตรทั้งหมดของ $T = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$

ได้แก่เซตที่ประกอบด้วย

การเรียงสับเปลี่ยน $e = ()$

การเรียงสับเปลี่ยน $s = (xy)(\neg x\neg y)$

การเรียงสับเปลี่ยน $n = (x\neg x)(y\neg y)$

และการเรียงสับเปลี่ยน $\rho = (x\neg y)(\neg xy)(y\neg x)(\neg yx)$

จะพบว่าเซตดังกล่าวเป็นกลุ่มภายใต้ตัวดำเนินการประกอบฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 2.1.4.3 *กำหนดให้* T *เป็นนิพจน์บูลีน* A *เป็นการกำหนดค่าความจริง และ* σ *เป็นความสมมาตรของ* T *จะได้ว่า* A^{σ} *ทำให้* T *เป็นจริงก็ต่อเมื่อ* A *ทำให้* T *เป็นจริง [1]*

ทฤษฎีบทนี้กล่าวว่า การกำหนดค่าความจริงที่สมมาตรกันจะให้ค่าความจริงเดียวกันเสมอเมื่อแทนลงในนิพจน์บูลีนตั้งต้น หรืออีกนัยหนึ่งคือ ออร์บิท A^{G} ของ A ภายใต้ กลุ่มความสมมาตร G ของ T ให้ค่าความจริงเดียวกันเสมอ

ทำให้ การตรวจสอบสมาชิกเพียงตัวเดียวในออร์บิทก็เพียงพอที่จะบอกค่าความจริงของทุก ๆ สมาชิกในออร์บิทดังกล่าว

ทฤษฎีบท 2.1.4.4 *กำหนดให้ T เป็นนิพจน์บูลีน c เป็นประพจน์เลือก และ σ เป็นความสมมาตรของ T จะได้ว่า ถ้า $T \vDash c$ แล้ว $T \vDash c^{\sigma}$ กล่าวคือ c เป็นจริงในทุก ๆ การกำหนดค่าความจริงที่ทำให้ T เป็นจริง แล้ว c^{σ} ก็จะเป็นจริงเช่นเดียวกัน*

ทฤษฎีบทนี้ ยืนยันว่าประพจน์เลือกที่สมมาตรกับประพจน์เลือกที่เป็นเงื่อนไขจำเป็นของ T จะเป็น เงื่อนไขจำเป็นด้วยเช่นกันเสมอ

ตัวอย่างเช่น

พิจารณานิพจน์บูลีน $T = (\neg x + y)(\neg y + z)(\neg z + x)$

จะพบว่าการเรียงสับเปลี่ยน $\sigma = (xyz)(\neg x \neg y \neg z)$ เป็นความสมมาตรของ T

และจากตารางค่าความจริงจะพบว่า $(\neg x + z)$ เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นของ T และ

$(\neg y + x) = (\neg x + y)^{\sigma}$ ก็เป็นเงื่อนไขจำเป็นด้วย

x	y	z	$(\neg x + y)(\neg y + z)(\neg z + x)$	$(\neg x + y)$	$(\neg y + z)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F
T	F	T	F	F	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T

Table 3 ตารางแสดงค่าความจริง

ประเภทของความสมมาตรที่สำคัญประเภทหนึ่งคือความสมมาตรแถวซึ่งเป็นการเรียงสับเปลี่ยนที่เกิดจากการเรียงสับเปลี่ยนแถวในเมทริกซ์ของสัญพจน์ ที่เป็นความสมมาตรของนิพจน์บูลีนด้วยเช่นกัน ตัวอย่างเช่น

สำหรับนิพจน์บูลีน $T = (x + \neg y + z)(\neg x + y + z)$

และเมทริกซ์ $M = \begin{bmatrix} x & y \\ \neg x & \neg y \end{bmatrix}$

การเรียงสับเปลี่ยน $\sigma = (x \neg x)(y \neg y)$ เป็นความสมมาตรแบบแถวเนื่องจาก σ เกิดจากการสลับแถวที่ 1 และ 2 ของ M และ σ เป็นความสมมาตรของ T

2.1.5 ประพจน์เลือกต่อเติม

ประพจน์เลือกต่อเติมคือ ออร์บิทของประพจน์เลือกใด ๆ ภายใต้กลุ่มเรียงสับเปลี่ยนที่นำมาทำการต่อเติมประพจน์เลือกดังกล่าว [12] ตัวอย่างเช่น

ประพจน์เลือกต่อเติมของ $C = (x + z)$ ด้วยกลุ่มเรียงสับเปลี่ยน G ที่ถูกก่อกำเนิดโดย การเรียงสับเปลี่ยน $(xy)(\neg x \neg y)$ และ $(x \neg x)(y \neg y)$ คือเซตของประพจน์เลือก

$$\{(x + z), (y + z), (\neg x + z), (\neg y + z)\}$$

และจะเขียนแทนด้วย (C, G)

2.1.5.1 ปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เค (k-transporter problem)

ในงานวิจัย [14] ได้แสดงให้เห็นว่าในการปรับใช้ประพจน์เลือกต่อเติมกับตัวแก้ปัญหาแบบเรียนรู้ประพจน์เลือกโดยข้อขัดแย้ง นั้นจำเป็นที่จะต้องทำการต่อเติมกระบวนการเผยแพร่ประพจน์เลือกเดี่ยว เนื่องจากตัวแก้ปัญหาต้องตรวจสอบว่า ออร์บิทของประพจน์เลือกนั้นมีประพจน์เลือกเดี่ยวเกิดขึ้นหรือไม่ ซึ่งปัญหาดังกล่าวสามารถอธิบายได้ด้วย ปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เค ซึ่งเป็นปัญหา เอ็นพีแบบยาก

นิยาม 2.1.5.1.1 *กำหนดให้* G *เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบน เซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง* Ω *ปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เค* $Trans(G, C, A, U, k)$ *คือปัญหาดังต่อไปนี้*

ข้อมูลนำเข้า: $C, A, U \subseteq \Omega$, *กลุ่มเรียงสับเปลี่ยน* G *และ จำนวนนับ* k

ผลลัพธ์: $g \in G$ *โดยที่* $|C^g \cap A| \leq k$ *และ* $C^g \cap U = \emptyset$ *หรือ ล้มเหลวเมื่อไม่มี* g *ที่ตรงตามเงื่อนไข*

เมื่อให้ Ω เป็นเซตของสัญพจน์, G เป็นกลุ่มความสมมาตรของนิพจน์บูลีน, C เป็นประพจน์เลือก, A เป็นเซตของสัญพจน์ที่ยังไม่ถูกกำหนดค่า และ U เป็นเซตที่แทนการกำหนดค่าความจริง และ $k = 1$ ปัญหานี้จะเทียบได้กับการตรวจสอบว่า ประพจน์เลือกต่อเติม (C, G) มีประพจน์เลือกเดี่ยวหรือประพจน์เลือกที่เป็นเท็จเกิดขึ้นภายใต้การกำหนดค่าความจริง U หรือไม่

2.1.5.2 การแยกโคเซต (coset decomposition)

สำหรับการแก้ปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เค นั้นจะใช้การค้นหาในกลุ่ม โดยการใช้วิธีการแยกโคเซต ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ G เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบน เซต $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ โดยที่ $n \geq 1$ การแยกโคเซตทำได้โดย พิจารณา กลุ่มย่อย $G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \cdots \geq G_n$ โดยที่ $G_{i+1} = (G_i)_{x_{i+1}}$ โดยที่ $0 \leq i \leq n$

1. ในขั้นแรก $G = G_0$ จะถูกแยกออกเป็น โคเซตขวาของ G_1
2. ในขั้นที่ i แต่ละโคเซตขวาของ G_i จะถูกแยกออกเป็น โคเซตขวาของ G_{i+1}

นิยาม 2.1.5.2.1 *ต้นโครงสร้างของกลุ่ม G ที่เกิดจากการแยกโคเซต เป็นไปตามนิยามดังต่อไปนี้*

1. *ที่รากของต้นไม้การแยกโคเซตคือปมที่แทน G_0*
2. *ปมลูกของปมที่ความลึก i คือปมที่แทน โคเซตขวาของ G_{i+1} ทั้งหมดที่เป็นเซตย่อยของโคเซตที่ปมดังกล่าว*

ตัวอย่างเช่น

ต้นไม้การแยกโคเซตของกลุ่ม $Sym(a, b, c, d)$ กลุ่มของการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดบนเซต $\{a, b, c, d\}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 4

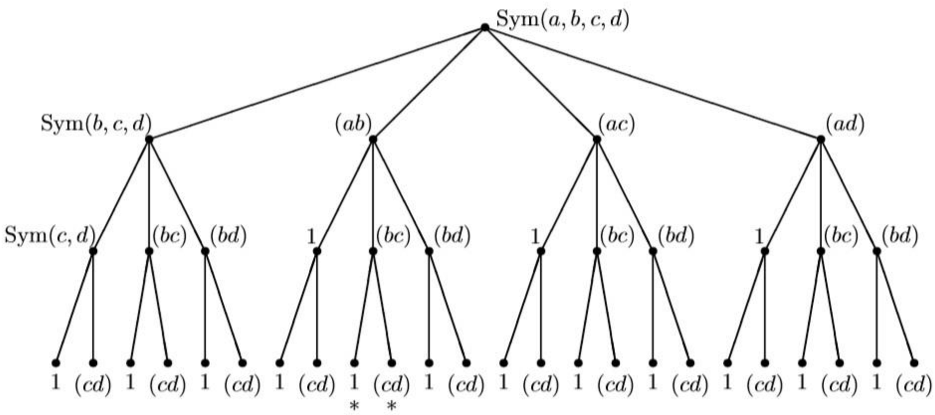


Figure 4 แสดงต้นไม้การแยกโคเซตของกลุ่ม $Sym(a, b, c, d)$ [14]

2.1.5.3 เทคนิคการเพิ่มประสิทธิภาพการแก้ปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เค

เทคนิคนี้เป็นการใช้ประโยชน์จากความจริงที่ว่า สำหรับ $H = G_C = \{g \in G \mid C^g = C\}$ และ $K = G_{A,U} = \{g \in G \mid A^g = A, U^g = U\}$ แล้ว สมาชิกใด ๆ ใน ดับเบิลโคเซต $HgK = \{hgk \mid h \in H, k \in K\}$ สำหรับ $g \in G$ ใด ๆ จะเป็นคำตอบก็ต่อเมื่อ g เป็นคำตอบ [14]

การเพิ่มประสิทธิภาพสามารถทำได้โดยการตัดแต่งต้นไม้การแยกโคเซตของ G โดยการตัดต้นไม้ย่อยที่โคเซต C'_i ที่ปมรากไม่มี $g \in C'_i$ ที่อยู่เป็นอันดับแรกสุดในดับเบิลโคเซต HgK ในการเรียงลำดับแบบพจนานุกรม ซึ่งถูกนิยามโดย การเรียงลำดับของสัญพจน์ โดยที่ สำหรับ การเรียงสับเปลี่ยน g_1, g_2 จะกล่าวว่า $g_1 < g_2$ เมื่อมี สัญพจน์ l_i ที่ $g_1(l_i) < g_2(l_i)$ และ $g_1(l_j) = g_2(l_j)$ สำหรับทุก ๆ สัญพจน์ $l_j < l_i$

2.1.6 ปัญหาในกลุ่มเรียงสับเปลี่ยน

ปัญหาในกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนที่สำคัญและจำเป็นในงานวิจัยฉบับนี้ มีหลายปัญหาที่ยังไม่พบวิธีการแก้ปัญหาที่สามารถทำได้เสร็จในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามของขนาดของข้อมูลนำเข้า โดยปัญหาที่สำคัญที่สุดที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้คือ ปัญหาการค้นหาสตริงน้อยสุดตามการเรียงลำดับแบบพจนานุกรมภายใต้กลุ่มเรียงสับเปลี่ยน (String lexicographic placement) ซึ่งเป็นปัญหาเอ็นพีแบบยาก แต่อย่างไรก็ตามในบางลำดับปัญหานี้สามารถแก้ได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามเมื่อกลุ่มการเรียงสับเปลี่ยนเป็นกลุ่มที่สามารถหาผลเฉลยได้ [15]

นิยาม 2.1.6.1 *ให้* Σ *เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียกฟังก์ชัน* $s: \{1, 2, \dots, n\} \to \Sigma$ *ว่า สตริง (String) บนเซตของตัวอักษร* Σ *และ* s *มีความยาว* n

นิยาม 2.1.6.3 *ให้* s_1, s_2 *เป็นสตริงบนเซต* Σ *ที่มีความยาว* n *จะเรียก* s_1 *ว่ามีลำดับตามพจนานุกรมน้อยกว่า* s_2 *หรือเขียนแทนด้วย* $s_1 < s_2$ *เมื่อ* $\exists m \in \{1, 2, \dots, n\}$ $s_1(i) = s_2(i), \forall\, i < m$ *และ* $s_1(m) < s_2(m)$

นิยาม 2.1.6.3 *ให้* s *เป็นสตริงที่มีความยาว* n *และ* $\sigma \in G$ *เป็นสมาชิกในกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซต* $\{1, 2, \dots, n\}$ *จะนิยามการกระทำของ* G *บนสตริง* s *โดย* $s^\sigma(i) = s(i^{\sigma^{-1}})$

จากนิยามข้างต้น ปัญหาการค้นหาสตริงน้อยสุดตามการเรียงลำดับแบบพจนานุกรมภายใต้กลุ่มเรียงสับเปลี่ยน จะถูกนิยามดังนี้

นิยาม 2.1.6.4 *กำหนดให้* $\Sigma \neq \emptyset$ *เป็นเซตจำกัดของตัวอักษร* s *เป็นสตริงบน* Σ *ที่มีความยาว* n G *เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบน* $\{1, 2, \dots, n\}$ *และ* $s^G = \{s^g \mid g \in G\}$ *เป็นออร์บิทของ* s *ภายใต้* G *ปัญหา* $Placement(s, G)$ *คือปัญหาดังต่อไปนี้*

ข้อมูลนำเข้า: *สตริง* s *และเซตก่อกำเนิดของกลุ่มเรียงสับเปลี่ยน* G

ผลลัพธ์: *สมาชิก* g *ทุกตัวใน* G *ที่ทำให้* s^g *มีลำดับตามพจนานุกรมน้อยที่สุดใน* s^G

นอกจากนี้ปัญหาการหาสเตบิไลเซอร์ของเซตและปัญหาการหาอินเตอร์เซกชันของกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนยังเป็นปัญหาที่จำเป็นต้องใช้ในงานวิจัยนี้ แต่เนื่องจากปัญหาทั้งคู่นี้เป็นปัญหาที่สมมูลกัน *[16]* และปัญหาสเตบิไลเซอร์ของเซตนั้นสามารถลดรูปไปเป็นปัญหาการค้นหาสตริงน้อยสุดตามการเรียงลำดับแบบพจนานุกรมภายใต้กลุ่มเรียงสับเปลี่ยนได้ จึงทำให้ทั้ง 2 ปัญหานี้สามารถแก้ได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามเมื่อกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนเป็นกลุ่มที่สามารถหาผลเฉลยได้ อย่างไรก็ตามปัญหาเหล่านี้ยังไม่สามารถแก้ได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามในกรณีทั่วไป

นิยาม 2.1.6.5 *กำหนดให้* G *เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซต* Ω *และ* $\mathrm{A} \subseteq \Omega$ *ปัญหาการหาสเตบิไลเซอร์ของเซต* $\mathrm{Stab}(\mathrm{A}, \mathrm{G})$ *คือปัญหาดังต่อไปนี้*

ข้อมูลนำเข้า: *เซตย่อย* A *ของ* Ω *และกลุ่มเรียงสับเปลี่ยน* G *บน* Ω

ผลลัพธ์: $\{\mathrm{g} \in \mathrm{G} \mid \mathrm{A}^{\mathrm{g}} = \mathrm{A}\}$

นิยาม 2.1.6.6 *กำหนดให้* $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ *เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซต* Ω *ปัญหาอินเตอร์เซกชันของกลุ่ม* $\mathrm{Intersection}(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2)$ *คือปัญหาดังต่อไปนี้*

ข้อมูลนำเข้า: *กลุ่มเรียงสับเปลี่ยน* $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ *บน* Ω

ผลลัพธ์: $\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2$

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยฉบับนี้ จะแบ่งออกเป็น 3 หมวดสำคัญคือ งานวิจัยจำพวก การต่อเติมกระบวนการเรียนรู้ประพจน์เลือกด้วยความสมมาตร ได้แก่ [8], [6], [10] งานวิจัยเกี่ยวกับการใช้ประพจน์ต่อเติม ได้แก่ [12], [14] และงานวิจัยที่ใช้ประโยชน์จากความสมมาตรแบบแถว

2.2.1 การต่อเติมกระบวนการเรียนรู้ประพจน์เลือกด้วยความสมมาตร

งานวิจัยในหมวดนี้มีพื้นฐานมาจาก การที่ประพจน์เลือกที่ถูกเรียนรู้โดยตัวแก้ปัญหาจะเป็นเงื่อนไขจำเป็นเสมอ ประกอบกับ ทฤษฎีบทที่ 2 จึงทำให้ประพจน์เลือกที่สมมาตรกับประพจน์เลือกเหล่านี้เป็นเงื่อนไขจำเป็นด้วยเช่นกัน และการเพิ่มประพจน์เลือกที่สมมาตรกันเหล่านี้ลงไปจะทำให้ไม่เกิดข้อขัดแย้งที่สมมาตรกันขึ้นมาอีก

อย่างไรก็ตามการเพิ่มประพจน์เลือกจำนวนมากลงไปจะทำให้การค้นหาช้าลงได้และอาจทำให้เกิดปัญหาหน่วยความจำไม่พอได้ นอกจากนี้ โดยทั่วไปแล้วประพจน์ที่สมมาตรกันมักจะมีจำนวนมาก จึงทำให้เทคนิคเหล่านี้จำเป็นต้องมีวิธีการจัดการ การเพิ่มประพจน์เลือกเพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาเหล่านี้

ในงานวิจัย [8] ได้ทำการจำลอง การหดตัวของซีคอฟ (Zykov contraction) ในการแก้ปัญหา การระบายสีกราฟ (graph coloring) ที่ถูกเข้ารหัสเป็นปัญหาความสอดคล้องแบบบูล โดยการดัดแปลงประพจน์เลือกที่ถูกเรียนรู้จากข้อขัดแย้ง โดยการจำการหดตัวของซีคอฟ ที่ทำให้เกิดข้อขัดแย้งนั้น ซึ่งประพจน์เลือกที่ถูกดัดแปลงดังกล่าว จะสมมูลกับการเพิ่มออร์บิทของประพจน์เลือกตั้งต้นภายใต้ความสมมาตรที่เกิดจากการสลับสี

วิธีการนี้ทำให้สามารถกำจัดความสมมาตรทั้งหมดที่การการสลับสีได้ โดยที่ประพจน์เลือกที่ถูกดัดแปลงแล้วมีขนาดเป็นฟังก์ชันพหุนามของขนาดของประพจน์เลือกตั้งต้นและจำนวนของตัวแปรบูลีน อย่างไรก็ตามวิธีการนี้สามารถใช้ได้เฉพาะกับปัญหาการระบายสีกราฟเท่านั้น

ในงานวิจัย [6] ได้ทำการเพิ่มผลลัพธ์ของการเรียงสับเปลี่ยนประพจน์เลือกที่ถูกเรียนรู้ด้วยสมาชิกในเซตก่อกำเนิดลงไปด้วย ซึ่งจะมีเซตก่อกำเนิดที่มีขนาดเป็นลอการิทึมฟังก์ชันของขนาดของกลุ่มที่ถูกสร้างขึ้นเสมอ ทำให้จำนวนประพจน์เลือกที่ถูกเพิ่มเข้าไปเป็นฟังก์ชันพหุนามของจำนวนประพจน์เลือกที่เกิดจากข้อขัดแย้ง และ จำนวนของตัวแปรบูลีน ส่งผลให้สามารถลดเวลาการทำงานลงได้อย่างมีนัยสำคัญในหลาย ๆ ปัญหา

ต่อมาใน [10] ได้ทำการเพิ่มประพจน์เลือกที่สมมาตรกันโดยสมาชิกของเซตก่อกำเนิดเพียงเฉพาะกับประพจน์เลือกที่เป็นสาเหตุของการทำ การเผยแพร่ประพจน์เลือกเดี่ยว และทำการลบประพจน์เลือกเหล่านี้ออกไปจากนิพจน์บูล เมื่อตัวแก้ปัญหาทำการย้อนรอยกลับไปก่อนที่จะเกิดการเผยแพร่ขึ้น

วิธีการนี้จะใช้พื้นที่หน่วยความจำน้อยกว่าใน [9] เนื่องจากประพจน์เลือกที่สมมาตรจะถูกเพิ่มลงไปเฉพาะกับประเลือกที่ทำให้เกิดการเผยแพร่เท่านั้นซึ่งมีจำนวนไม่เกิน จำนวนของตัวแปรบูลีน ทำให้วิธีการนี้เกิดปัญหาหน่วยความจำไม่พอน้อยกว่า [9] ในขณะที่ยังคงทำงานได้เร็วกว่า [9] ในหลาย ๆ ปัญหา ([10])

2.2.2 การใช้ประพจน์เลือกต่อเติม

ใน [12] ได้เสนอสมบัติในทางทฤษฎีของการใช้ประพจน์เลือกต่อเติมกับตัวแก้ปัญหาที่ใช้ ดีพีแอลแอลอัลกอรีทึม (Davis–Putnam–Logemann–Loveland algorithm : DPLL algorithm) ซึ่งเป็นอัลกอริทึมพื้นฐานของตัวแก้ปัญหาในปัจจุบัน

งานวิจัยนี้เสนอการดัดแปลงตัวแก้ปัญหาให้ทำงานกับประพจน์เลือกต่อเติมได้ โดยเน้นที่การดัดแปลงกระบวนการทำ เรสโซลูชัน (resolution) ซึ่งเป็นกระบวนการที่เทียบได้กับการเรียนรู้ประพจน์เลือกในตัวแก้ปัญหาปัจจุบัน ให้รองรับการใช้ประพจน์เลือกต่อเติม

งานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นว่า ประพจน์เลือกต่อเติมสามารถใช้แทนที่เซตของประพจน์เลือกที่มีขนาดเป็นฟังก์ชันชี้กำลังของจำนวนตัวแปรได้ นอกจากนี้ ยังสามารถพิสูจน์ ปัญหารังนกพิราบ และปัญหาการทาสีกลุ่มพรรคพวก (clique coloring) ได้ด้วยการพิสูจน์ที่มีความยาวเป็นฟังก์ชันพหุนามของขนาดของปัญหาได้ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ในระบบการพิสูจน์แบบเรสโซลูชันธรรมดา

ในงานวิจัยที่ [13] ได้พิจารณารายละเอียดต่าง ๆ ในการปรับแก้ตัวแก้ปัญหาแบบดีพีแอลแอลให้ใช้งานกับประพจน์เลือกต่อเติมได้ โดยในงานวิจัยนี้ได้เน้นไปที่การปรับปรุง การเผยแพร่ประพจน์เลือกเดี่ยว และการทำเรสโซลูชัน

โดยที่ในขั้นตอนการเผยแพร่ประพจน์เดี่ยวนั้นจำเป็นที่จะต้องแก้ปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่ 0 และ 1 ซึ่ง งานวิจัยนี้ได้ เสนอวิธีการแก้ปัญหานี้โดยการค้นหาโดยการแยกโคเซต นอกจากนี้ยังได้เสนอเทคนิคสำหรับการเพิ่มความเร็วในการค้นหาโดยการตัดแต่งต้นไม้ค้นหา โดยการพิจารณาโคเซต, บล็อค และดับเบิลโคเซต

อย่างไรก็ตามเทคนิคที่ใช้ดับเบิลโคเซตนั้นจำเป็นที่จะต้องแก้ปัญหาสเตบิไลเซอร์ของเซตซึ่งยังไม่มีอัลกอริทึมที่สามารถแก้ปัญหานี้ได้ ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามในทุกกรณี

2.2.3 การใช้ประโยชน์จากความสมมาตรแบบแถว

ใน [17] ได้แสดงให้เห็นว่า กลุ่มของความสมมาตรแบบแถวอย่างสมบูรณ์ ซึ่งเป็นกลุ่มของความสมมาตรแบบแถวที่บรรจุทุก ๆ การเรียงสับเปลี่ยนแถวที่เป็นไปได้ สามารถถูกหักล้างได้อย่างสมบูรณ์โดยการเพิ่มเงื่อนไขบังคับที่ทำการเรียงลำดับแถวของเมทริกซ์ กล่าวคือ

สำหรับกลุ่มความสมมาตรแบบแถวอย่างสมบูรณ์ R_M บนเมทริกซ์ M ขนาด $m \times n$

เงื่อนไขบังคับ $r_i \leq r_{i+1}$, $1 \leq i \leq m$ เมื่อ r_i คือแถวของ M

จะมี $A^{'} \in A^{R_M}$ เพียงหนึ่งเดียวเท่านั้นสำหรับแต่ละการกำหนดค่าความจริง A ที่เป็นจริงตามเงื่อนไขบังคับนี้ โดยแนวคิดนี้ได้ถูกนำมาใช้กับการหักล้างความสมมาตรแบบสถิต ในการแก้ปัญหาความสอดคล้องแบบบูล ใน [18]

บทที่ 3 การหักล้างความสมมาตรพลวัตในปัญหาความสอดคล้องแบบบูลโดยใช้ประพจน์เลือกต่อเติมพร้อมด้วยการเล็มต้นไม้ค้นหาในเวลาเชิงพหุนาม

ในบทนี้จะกล่าวถึงแนวคิดในการแก้ปัญหาและการปรับปรุงวิธีการในงานวิจัยก่อนหน้า ในแง่มุมต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยชิ้นนี้ ซึ่งจะถูกแบ่งออกเป็น 4 หัวข้อได้แก่

3.1 ความสมมาตรแบบแถวและกลุ่มย่อยปกติ

ความสมมาตรแบบแถวคือความสมมาตรที่สามารถแทนได้ด้วยการเรียงสับเปลี่ยนแถวของเมทริกซ์ของสัญพจน์ ในบทย่อยนี้จะกล่าวถึงสมบัติต่าง ๆ ของกลุ่มความสมมาตรที่มีกลุ่มความสมมาตรแบบแถวเป็นกลุ่มย่อยปกติ

นิยาม 3.1.1 *ให้* L *เป็นเซตของสัญพจน์ทั้งหมด จะนิยามเมทริกซ์ของสัญพจน์โดยฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง* $M:\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}\to L$ *และจะเรียก* M *ว่าเป็นเมทริกซ์ที่มี* m *แถวและมี* n *หลัก*

ในนิยาม 3.1.1 เป็นการแทนเมทริกซ์โดยฟังก์ชันระบุสมาชิกในเมทริกซ์ที่อยู่ในแถวและหลักใด ๆ ของเมทริกซ์ ตัวอย่างเช่น สำหรับเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} x & y \\ \neg y & \neg x \end{bmatrix}$$

$M(1,1) = x$ และ $M(2,2) = \neg x$ เป็นต้น

นิยาม 3.1.2 *ให้* L *เป็นเซตของสัญพจน์ทั้งหมด* M *เป็นเมทริกซ์ของสัญพจน์ และ* Ω *เป็นเรนจ์ของ* M *จะเรียกการเรียงสับเปลี่ยน* σ *ว่า ความสมมาตรแบบแถวเมื่อสำหรับคู่อันดับ* (i_1, j_1) *และ* (i_2, j_2) *ใด ๆ ในโดเมนของ* M

1. $M(i_1, j_1)^\sigma = M(i', j_1)$
2. *ถ้า* $i_1 = i_2$ *และ* $M(i_1, j_1)^\sigma = M(i_1', j_1'), M(i_2, j_2)^\sigma = M(i_2', j_2')$ *แล้ว* $i_1' = i_2'$
3. $l^\sigma = l$ *เมื่อ* $l \in L - \Omega$

จากนิยาม 3.1.2 ความสมมาตรแบบแถวจะกล่าวได้ว่าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนแถวของเมทริกซ์เนื่องจากในข้อ 1 ของนิยามกล่าวว่า ผลลัพธ์ของการเรียงสับเปลี่ยนสมาชิกในหลักใด ๆ จะยังคงอยู่ในหลักเดิมเสมอ และข้อ 2 กล่าวว่าสมาชิกในแถวเดียวกันจะถูกเรียงสับเปลี่ยนไปอยู่ในแถวเดียวกันเสมอ ตัวอย่างเช่น สำหรับเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} x & y \\ \neg y & \neg x \end{bmatrix}$$

จะกล่าวว่า $\sigma = (x\neg y)(y\neg x)$ เป็นความสมมาตรแบบแถวของ M เนื่องจาก สมาชิกในหลักใด ๆ ถูกเรียงสับเปลี่ยนไปยังหลักเดิม และสมาชิกในแถวเดียวกันถูกเรียงสับเปลี่ยนไปยังแถวเดียวกัน และจะเห็นว่า σ เป็นการสลับแถวที่ 1 และ 2 ของ M

ทฤษฎีบทย่อย 3.1.3 *ให้ L เป็นเซตของสัญพจน์ทั้งหมด M เป็นเมทริกซ์ของสัญพจน์ Ω เป็นเรนจ์ของ M และ R_M เป็นเซตของความสมมาตรแบบแถวทั้งหมดของ M แล้ว R_M เป็นกลุ่มภายใต้ตัวดำเนินการประกอบฟังก์ชัน*

พิสูจน์

1. จะพิสูจน์ว่า R_M มีสมบัติปิด สมมติให้ $r_1, r_2 \in R_M$

   จากนิยามข้อ 1 ของความสมมาตรแบบแถว สำหรับ (i,j) ใด ๆ ในโดเมนของ M

   $$M(i,j)^{r_1 r_2} = M(i',j)^{r_2} = M(i'',j)$$

   จากนิยามข้อ 2 ของความสมมาตรแบบแถว จะได้ว่า สำหรับ $(i,j_1),(i,j_2)$ ใด ๆ ในโดเมนของ M

   $$M(i,j_1)^{r_1} = M(i',j_1), M(i,j_2)^{r_2} = M(i',j_2)$$

   ดังนั้น

   $$M(i,j_1)^{r_1 r_2} = M(i'',j_1), M(i,j_2)^{r_1 r_2} = M(i'',j_2)$$

   จากนิยามข้อ 3 ของความสมมาตรแบบแถว จะได้ว่า สำหรับ $l \in L - \Omega$ ใด ๆ

   $$l^{r_1 r_2} = l^{r_2} = l$$

   ดังนั้น $r_1 r_2 \in R_M$
2. R_M มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่เนื่องจากตัวดำเนินการประกอบฟังก์ชันมีสมบัติการเปลี่ยนหมู่
3. R_M มีเอกลักษณ์เนื่องจาก $e(l) = l, \forall l \in L$ เป็นความสมมาตรแบบแถว
4. จะพิสูจน์ว่า R_M มีตัวผกผัน สมมติให้ $r \in R_M$ และ $Sym(L)$ เป็นกลุ่มของการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดบนเซต L

   จะได้ว่า $r \in L$ และ $|Sym(L)| = |L|!$

พิจารณาลำดับ $[r, r^2, r^3, \dots, r^{|L|!+1}]$
จากหลักรังนกพิราบจะมี $r^i = r^j$ โดยที่ $i \neq j$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ $i < j$
จะได้ว่า $e = r^{j-i}$ ถ้า $j - i = 1$ จะได้ว่า $r = e$
ดังนั้น $r^{-1} = e \in R_M$
แต่ถ้า $j - i > 1$ จะได้ว่า $r^{j-i-1} = r^{-1}$
แต่เนื่องจาก R_M มีสมบัติปิด ดังนั้น $r^{-1} \in R_M$ ■

นิยาม 3.1.4 *ให้* L *เป็นเซตของสัญพจน์ทั้งหมด และ* M *เป็นเมทริกซ์ของสัญพจน์ จะเรียกกลุ่มของความสมมาตรแบบแถวทั้งหมดของ* M *ว่า กลุ่มความสมมาตรแบบแถวของ* M

บทตั้ง 3.1.5 *ให้* L *เป็นเซตของสัญพจน์ทั้งหมด* M *เป็นเมทริกซ์ของสัญพจน์* R *เป็นกลุ่มความสมมาตรแบบแถวของ* M *และ* $G \leq Sym(L)$ *ถ้า* $R \trianglelefteq G, g \in G$ *และ* $l \in L$ *แล้วจะมี* $l' \in L$ *ที่ทำให้* $l^{Rg} = l'^R$
พิสูจน์

เนื่องจาก $R \trianglelefteq G$ จะได้ว่า $Rg = gR$ ดังนั้น $l^{Rg} = l^{gR} = (l^g)^R$
ดังนั้น $l' = l^g$ ■

บทตั้งที่ 3.1.5 ได้กล่าวว่าถ้ากลุ่มความสมมาตรแบบแถว R เป็นกลุ่มย่อยปกติของกลุ่มเรียงสับเปลี่ยน G ใด ๆ แล้วสมาชิกใน G จะทำการเรียงสับเปลี่ยนออร์บิทของ R ไปเป็นออร์บิทของ R ด้วยเสมอ และเนื่องจาก ออร์บิทของ R ภายในเมทริกซ์คือคอลัมน์ ดังนั้นจะกล่าวได้ว่า การเรียงสับเปลี่ยนของ G รักษาความเป็นคอลัมน์ของเมทริกซ์

นิยาม 3.1.6 ให้ M *เป็นเมทริกซ์ของสัญพจน์* จะกำหนดให้ $\rho_M\big(M(i,j)\big) = i$

บทตั้ง 3.1.7 *ให้* L *เป็นเซตของสัญพจน์ทั้งหมด* M *เป็นเมทริกซ์ของสัญพจน์ที่มีอย่างน้อย 3 แถว* R *เป็นกลุ่มความสมมาตรแบบแถวของ* M *และ* $G \leq Sym(L)$ *ถ้า* $R \trianglelefteq G, g \in G$ $x, y \in \Omega$ *และ* $\rho_M(x) = \rho_M(y)$ *แล้ว* $\rho_M(x^g) = \rho_M(y^g)$
พิสูจน์

จะพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง

สมมติให้ $\rho(x^g) \neq \rho(y^g)$ จะแสดงว่ามี $r \in R$ ที่ทำให้ $grg^{-1} \notin R$

ให้ g_1 นิยามโดย $g_1(\rho_M(l_x)) = \rho_M(l_x^g)$ สำหรับทุก ๆ $l_x \in x^R$

ให้ g_2 นิยามโดย $g_2\left(\rho_M(l_y)\right) = \rho_M(l_y^g)$ สำหรับทุก ๆ $l_y \in y^R$

เนื่องจาก ออร์บิทของ R ภายใน M คือ คอลัมน์ของ M ทำให้

จากบทตั้ง 3.1.5 จะได้ว่า ทุก ๆ l_x^g และ l_y^g จะอยู่ในคอลัมน์เดียวกันกับ x^gและ y^g

ตามลำดับ และเนื่องจาก g เป็นการเรียงสับเปลี่ยน ดังนั้น g_1, g_2 เป็นการเรียง

สับเปลี่ยนบน $\{1,2,\dots,m\}$ เมื่อ m เป็นจำนวนแถวของ M และ $g_1 \neq g_2$

ให้ r_1' นิยามโดย $r_1'(\rho_M(l_x)) = \rho_M(l_x^r)$ สำหรับทุก ๆ $l_x \in x^R$ และ $r \in R$

ให้ r_2' นิยามโดย $r_2'\left(\rho_M(l_y)\right) = \rho_M(l_y^r)$ สำหรับทุก ๆ $l_y \in y^R$ และ $r \in R$

จะได้ว่า $r_1' = r_2'$ และให้ r' แทน r_1' และ r_2'

สำหรับ $r \in R$ ใด ๆ

ให้ ϕ_1 นิยามโดย $\phi_1(\rho_M(l_x)) = \rho_M(l_x^{grg^{-1}})$ สำหรับทุก ๆ $l_x \in x^R$

และ

ให้ ϕ_2 นิยามโดย $\phi_2\left(\rho_M(l_y)\right) = \rho_M(l_y^{grg^{-1}})$ สำหรับทุก ๆ $l_y \in y^R$

จะได้ว่า $\phi_1 = g_1 r' g_1^{-1}$ และ $\phi_2 = g_2 r' g_2^{-1}$ แต่เนื่องจาก $g_1 \neq g_2$

จะได้ว่า $g_2^{-1} g_1 \neq e$ ดังนั้นมี i, j ที่ $i \neq j$ และ $i^{g_2^{-1} g_1} = j$

แต่ M มีอย่างน้อย 3 แถว

ดังนั้นเลือก $r \in R$ ที่สลับแถวที่ j กับแถวที่ k โดยที่ $k \neq i, j$

จะได้ว่า $i^{r'^{-1} g_2^{-1} g_1 r'} = i^{g_2^{-1} g_1 r'} = j^{r'} = k$

ดังนั้น $r'^{-1} g_2^{-1} g_1 r' \neq g_2^{-1} g_1$ ดังนั้น $g_1 r' g_1^{-1} \neq g_2 r' g_2^{-1}$

ดังนั้น $\phi_1 \neq \phi_2$ ดังนั้น $grg^{-1} \notin R$ เนื่องจากไม่เป็นไปตามนิยามข้อ 2 ของนิยาม 3.1.2

ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้ง ■

บทตั้ง 3.1.7 กล่าวว่าถ้า G มีกลุ่มความสมมาตรแบบแถว R เป็นกลุ่มย่อยปกติแล้วการเรียงสับเปลี่ยนของ G จะต้องรักษาความเป็นแถวของเมทริกซ์ด้วย

นิยาม 3.1.8 *ให้ L เป็นเซตของสัญพจน์ทั้งหมด M เป็นเมทริกซ์ของสัญพจน์ Ω เป็นเรนจ์ของ M และ $G \leq Sym(L)$ จะให้*

$$Stab_M(G) = \{g \in G \mid \rho_M(l^g) = \rho_M(l), \forall l \in \Omega\}$$

ทฤษฎีบทย่อย 3.1.9 $Stab_M(G)$ *เป็นกลุ่มภายใต้ตัวดำเนินการประกอบฟังก์ชัน*

พิสูจน์

1. $\mathrm{Stab}_\mathrm{M}(G)$ มีสมบัติปิดเนื่องจาก สำหรับ $s_1, s_2 \in Stab_M(G)$ ใด ๆ จะได้ว่า สำหรับ $l \in \Omega$ ใด ๆ $\rho_M(\mathrm{l}^{s_1 s_2}) = \rho_M(l^{s_1}) = \rho_M(l)$ ดังนั้น $s_1 s_2 \in Stab_M(G)$
2. $\mathrm{Stab}_\mathrm{M}(G)$ มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่เนื่องจากตัวดำเนินการประกอบฟังก์ชันมีสมบัติการเปลี่ยนหมู่
3. $Stab_M(G)$ มีเอกลักษณ์เนื่องจาก สำหรับ $l \in \Omega$ ใด ๆ $l^e = l$
4. $Stab_M(G)$ มีตัวผกผันเนื่องจาก G เป็นกลุ่มจำกัดและ $Stab_M(G)$ มีสมบัติปิด ■

บทตั้ง 3.1.10 *ให้ L เป็นเซตของสัญพจน์ทั้งหมด M เป็นเมทริกซ์ของสัญพจน์ที่มีอย่างน้อย 3 แถว R เป็นกลุ่มความสมมาตรแบบแถวของ M และ $G \leq Sym(L)$ ถ้า $R \trianglelefteq G$แล้ว*

$$G = Stab_M(G)R$$

พิสูจน์

ให้ x อยู่ในเรนจ์ของ M จะได้ว่าสำหรับ $g \in G$ ใด ๆ

ให้ g' นิยามโดย $g'\big(\rho_M(l_x)\big) = \rho_M(l_x^g)$ สำหรับ $l_x \in x^R$ ใด ๆ

จากบทตั้ง 3.1.5 จะได้ว่า ทุก ๆ l_x^g จะอยู่ในคอลัมน์เดียวกันกับ x^g

ให้ ϕ นิยามโดย $\phi\big(\rho_M(l_x)\big) = \rho_M(l_x^{gr^{-1}})$ สำหรับ $l_x \in x^R$ และ $r \in R$ ใด ๆ

แต่เนื่องจาก R เป็นกลุ่มความสมมาตรแบบแถวของ M

ดังนั้นมี $r \in R$ ที่ทำให้ $\phi(i) = i$

จากบทตั้ง 3.1.7 จะได้ว่าสำหรับ l ในเรนจ์ของ M ใด ๆ ที่ $\rho_M(l_x) = \rho_M(l)$

$\rho_M\left(l_x^{gr^{-1}}\right) = \rho_M(l^{gr^{-1}})$

แต่เนื่องจาก $\phi(i) = i$ ดังนั้น $\rho_M(l_x) = \rho_M(l_x^{gr^{-1}})$

ดังนั้น $\rho_M(l^{gr^{-1}}) = \rho_M(l)$ ดังนั้น $gr^{-1} \in Stab_M(G)$

ดังนั้น $g \in Stab_M(G)R$

ดังนั้น $G = Stab_M(G)R$ เนื่องจาก $Stab_M(G)R \subseteq \mathrm{G}$ ■

บทตั้งที่ 3.1.10 กล่าวว่าถ้า G มีกลุ่มความสมมาตรแบบแถว R เป็นกลุ่มย่อยปกติแล้ว G จะสามารถถูกแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของ $Stab_M(G)R$ ได้

ทฤษฎีบทย่อย 3.1.11 *ให้ L เป็นเซตของสัญพจน์ทั้งหมด M เป็นเมทริกซ์ของสัญพจน์ที่มีอย่างน้อย 3 แถว R เป็นกลุ่มความสมมาตรแบบแถวของ M และ $G \leq Sym(L)$ ถ้า $R \trianglelefteq G$ แล้วสำหรับ $r \in R$ และ $s \in Stab_M(G)$ ใด ๆ*

$$rs = sr$$

พิสูจน์

จะพิสูจน์ว่า $l^{rs} = l^{rs}$ สำหรับ l ที่อยู่ในเรนจ์ของ M ใด ๆ

สำหรับ (i,j) ใด ๆ ในโดเมนของ M จะได้ว่า $M(i,j)^r = M(i',j)$

แต่เนื่องจาก $s \in Stab_M(G)$ ดังนั้น $M(i',j)^s = M(i',j')$

แต่จากบทตั้ง 3.1.5 จะได้ว่า $M(i,j)^{rs}$ จะต้องอยู่ในคอลัมน์เดียวกันกับ $M(i,j)^s$

และ $s \in Stab_M(G)$ ดังนั้น $M(i,j)^s = \mathrm{M(i,j')}$

แต่เนื่องจากข้อ 2 ของนิยามของความสมมาตรแบบแถว

จะได้ว่า $M(i,j')^r = M(i',j')$

ดังนั้น $M(i,j)^{rs} = M(i,j)^{sr}$ สำหรับทุก ๆ สมาชิกในเรนจ์ของ M

ดังนั้น $rs = sr$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.12 *ให้ L เป็นเซตของสัญพจน์ทั้งหมด $G \leq Sym(L)$ M_1, M_2 เป็นเมทริกซ์ของสัญพจน์ที่มีอย่างน้อย 3 แถว และ R_1, R_2 เป็นกลุ่มความสมมาตรแบบแถวของ M_1, M_2 ตามลำดับ ถ้า $R_1, R_2 \trianglelefteq G$ แล้ว $R_2 \leq Stab_{M1}(G)$*

พิสูจน์

จะพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง

สมมติให้มี l_1, l_2 ในเรนจ์ของ M_1 ที่ $\rho_{M_1}(l_1) \neq \rho_{M_1}(l_2)$ โดยที่ $l_2 \in l_1^{R_2}$

กรณีที่ 1 มี l ที่ $|l^{R_1} \cap l^{R_2}| > 1$

พิจารณา l^{R_2} จะได้ว่า $l^{R_1} \subseteq l^{R_2}$ เนื่องจากถ้ามี $l' \in l^{R_1} - l^{R_2}$ แล้วจะได้ว่า จะสามารถเลือก $r_1 \in R_1$ ที่สลับ l และ l' ซึ่งจะทำให้มี $r_2 \in R_2$ ที่ $r_1^{-1} r_2 r_1 \notin R_2$

ในทำนองเดียวกัน $l^{R_2} \subseteq l^{R_1}$ ดังนั้น $l^{R_1} = l^{R_2}$

แต่จากบทตั้ง 3.1.7 จะสรุปได้ว่าสำหรับ x ใด ๆ ในเรนจ์ของ M_1 จะถูกเรียงสับเปลี่ยนโดย R_2 เนื่องจาก x จะต้องอยู่ในแถวเดียวกันกับบางสมาชิกใน l^{R_1}

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $x^{R_1} = x^{R_2}$

ดังนั้น $\{x^{R_1} \mid x \in \Omega_1\} \subseteq \{x^{R_2} \mid x \in \Omega_2\}$ เมื่อ Ω_1, Ω_2 เป็นเรนจ์ของ M_1, M_2 ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกัน $\{x^{R_2} \mid x \in \Omega_2\} \subseteq \{x^{R_1} \mid x \in \Omega_1\}$

ดังนั้น $\{x^{R_1} \mid x \in \Omega_1\} = \{x^{R_2} \mid x \in \Omega_2\}$ จะได้ว่า $R_1 = R_2$

ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่ 2 สำหรับทุก ๆ l แล้ว $|l^{R_1} \cap l^{R_2}| = 1$

พิจารณา $l_2^{R_1}$ จะได้ว่ามี $l_3 \in l_2^{R_1}$ โดยที่ $\rho_{M_1}(l_3) \neq \rho_{M_1}(l_2), \rho_{M_1}(l_1)$

เลือก $r_1 \in R_1$ ที่ทำการสลับแถวของ l_2 และ l_3 จะได้ว่ามี $r_2 \in R_2$ ที่ทำให้ $r_1^{-1} r_2 r_1 \notin R_2$ ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้ง ■

ทฤษฎีบท 3.1.12 กล่าวว่าเราจะสามารถแยกตัวประกอบ G ได้ออกเป็นผลคูณของกลุ่มความสมมาตรแบบแถว R_i ทุก ๆ กลุ่มที่เป็นกลุ่มย่อยปกติของ G กับกลุ่มเศษเหลือที่เกิดจากอินเตอร์เซกชันของ $Stab_{M_i}(G)$ และจากทฤษฎีบทย่อย 3.1.11 จะทำให้สามารถแยกตัวประกอบได้แบบเดียวเท่านั้น

3.2 ตัวขนย้ายลำดับที่เคกับความสมมาตรแบบแถว

สำหรับปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เค $Trans(G, C, A, U, k)$ ในกรณีที่กลุ่มของความสมมาตร G เป็นความสมมาตรแบบแถว และ $C \subseteq M$ โดยที่ M เป็นเมทริกซ์ที่ถูกเรียงสับเปลี่ยนโดย G ปัญหานี้สามารถถูกเปลี่ยนเป็นปัญหาการกำหนดงาน (Assignment Problem) ได้ดังต่อไปนี้

นิยาม 3.2.1 *ให้ L เป็นเซตของสัญพจน์ทั้งหมด G เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบน L และเป็นกลุ่มความสมมาตรแบบแถว $A, U \subseteq L, C \subseteq M$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ จะให้ $Bipartite(G, C, A, U, k)$ แทนกราฟสองส่วน (bipartite graph) ดังต่อไปนี้*

1. *สำหรับเมทริกซ์ที่มี m แถว สร้างกราฟสองส่วน ที่มี 2m ปม โดยที่แต่ละส่วนมีจำนวน m ปม ให้ V_1, V_2 แทนเซตของปมในส่วนแรกและส่วนที่สองตามลำดับ*
2. *สำหรับน้ำหนักของเส้นเชื่อม $\{v_i, v'_j\}$ โดยที่ $v_i \in V_1, v'_j \in V_2$ จะมีค่าเป็น $k + 1$ เมื่อ มีสมาชิกใน C ที่อยู่ในแถวที่ i ที่อยู่ในคอลัมน์เดียวกันกับสมาชิกใน U ที่อยู่ในแถวที่ j และมีค่าเท่ากับจำนวนสมาชิกใน C ที่อยู่ในแถวที่ i ที่อยู่ในคอลัมน์เดียวกันกับสมาชิกใน A ที่อยู่ในแถวที่ j ในกรณีอื่น ๆ*

ตัวอย่างเช่น

เมทริกซ์ $M = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix}$

$$C = \{x_{1,2},\ x_{2,1}\} \qquad U = \{x_{1,2},\ x_{2,1},\ x_{3,3}\}$$
$$A = \{x_{1,3},\ x_{2,2}\} \qquad k = 1$$

จะสร้างกราฟได้ดังรูปที่ 5

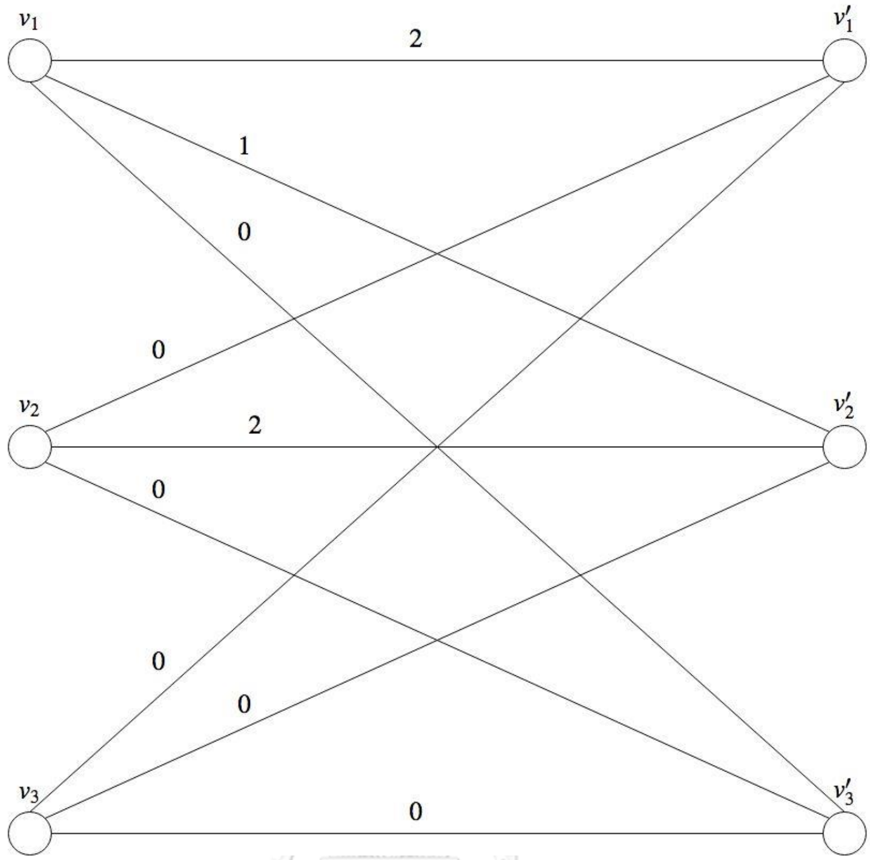


Figure 5 แสดงกราฟ 2 ส่วน $Bipartite(G, C, A, U, k)$

นิยาม 3.2.2 *ให้* $B(V_1, V_2, E)$ *เป็นกราฟสองส่วน โดยที่* V_i *แทนเซตของจุดยอดในแต่ละส่วน และ* E *แทนเซตของเส้นเชื่อมและ* w *แทนฟังก์ชันน้ำหนักของเส้นเชื่อม จะเรียกฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง* $f: V_1 \to V_2$ *ว่าการกำหนดงาน (Assignment) เมื่อ* $\{v, f(v)\} \in E, \forall v \in V_1$ *และจะให้* $w(f) = \sum_{v \in V_1} w(\{v, f(v)\})$

ทฤษฎีบท 3.2.3 $Trans(G, C, A, U, k)$ *จะมีคำตอบก็ต่อเมื่อมีการกำหนดงาน* f *ในกราฟ* $Bipartite(G, C, A, U, k)$ *ที่* $w(f) \leq k$

พิสูจน์

ให้ f เป็นการกำหนดงานใน $Bipartite(G, C, A, U, k)$ โดยที่ $w(f) \leq k$ จะได้ว่าถ้าให้ $\phi \in G$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนแถวที่กำหนดโดย

$\phi(\rho(v)) = \rho(f(v))$

เมื่อ $\rho(v)$ แทนแถวของปม v แล้ว $\left|C^{\phi} \cap A\right| \leq k$ และ $C^{\phi} \cap U = \emptyset$

ดังนั้น ϕ เป็นคำตอบของ $Trans(G, C, A, U, k)$

ในทางกลับกัน ให้ ϕ เป็นคำตอบของ $Trans(G, C, A, U, k)$
จะได้ว่าถ้าให้ f เป็นการกำหนดงานใน $Bipartite(G, C, A, U, k)$ ที่กำหนดโดย
$f(v_i) = v'_{\phi(i)}$ เมื่อ v_i แทนปมที่ของแถว i จะได้ว่า $w(f) \leq k$ ■

จากทฤษฎีบท *3.2.3* จะพบว่าคำตอบของ $Trans(G, C, A, U, k)$ สามารถตรวจสอบได้จาก คำตอบของปัญหาการกำหนดงานของกราฟที่ถูกสร้างขึ้น โดยที่ $Trans(G, C, A, U, k)$ จะมีคำตอบก็ต่อเมื่อมีการกำหนดงานที่น้ำหนักรวมของเส้นเชื่อมที่ถูกเลือกมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ k หรืออีกนัยหนึ่งคือเมื่อการกำหนดงานที่มีน้ำหนักรวมน้อยที่สุด มีน้ำหนักรวมไม่เกิน k

ตัวอย่างเช่น

ในรูปที่ 5 จะพบว่าการกำหนดงาน f โดยที่

$$f(v_1) = v'_3 \qquad f(v_2) = v'_1 \qquad f(v_3) = v'_2$$

มีน้ำหนักเท่ากับ 0 ซึ่งมีค่าน้อยที่สุด ดังนั้นจะเห็นว่าการเรียงสับเปลี่ยน $\phi \in G$ โดยที่

$$\phi\big(M(1,i)\big) = M(3,i) \qquad \phi\big(M(2,i)\big) = M(1,i)$$
$$\phi\big(M(3,i)\big) = M(2,i) \qquad i = 1,2,3$$

ทำให้ $C^{\phi} = \{x_{1,2}, x_{2,1}\}^{\phi} = \{x_{3,1}, x_{1,1}\}$

ทำให้ $\left|C^{\phi} \cap A\right| = \left|\{x_{3,1}, x_{1,1}\} \cap \{x_{1,3}, x_{2,2}\}\right| = 0$ และ

$C^{\phi} \cap U = \{x_{3,1}, x_{1,1}\} \cap \{x_{1,2}, x_{2,1}, x_{3,3}\} = \emptyset$

ดังนั้น ϕ เป็นคำตอบของ $Trans(G, C, A, U, k)$

การแปลงปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เคในกรณีที่กลุ่มเรียงสับเปลี่ยนเป็นกลุ่มความสมมาตรแบบแถวให้กลายเป็นปัญหาการหาการกำหนดงานที่มีน้ำหนักรวมน้อยสุด ทำให้ปัญหาตัวขนย้ายฯ ในกรณีนี้สามารถหาคำตอบได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามของขนาดของข้อมูลนำเข้า เนื่องจากปัญหาการหาการกำหนดงานที่มีน้ำหนักรวมน้อยสุดนั้น เป็นปัญหาที่สามารถแก้ได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

3.3 กลุ่มย่อยที่สามารถหาผลเฉลยได้

จากบทย่อยที่ 3.1 จะพบว่ากลุ่มเรียงสับเปลี่ยนที่มีกลุ่มความสมมาตรแบบแถวเป็นกลุ่มย่อยปกตินั้นจะสามารถแยกตัวประกอบได้เป็นผลคูณของกลุ่มความสมมาตรแบบแถวและกลุ่มเศษเหลือ ทว่าโดยปรกติแล้วกลุ่มความสมมาตรแบบแถวจะไม่เป็นกลุ่มที่สามารถหาผลเฉลยได้ เนื่องจากความจริงที่

เป็นที่รู้จักกันโดยทั่วไปในทฤษฎีกลุ่มที่ว่า กลุ่มของการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดของสิ่งของ n สิ่ง โดยที่ n มากกว่า 5 เป็นกลุ่มที่ไม่สามารถหาผลเฉลยได้ ทำให้กลุ่มเรียงสับเปลี่ยนที่มีกลุ่มความสมมาตรแบบแถวเป็นกลุ่มย่อยปกติมักจะไม่เป็นกลุ่มย่อยที่สามารถหาผลเฉลยได้ ดังนั้นในบทย่อยนี้จึงเสนอวิธีการสร้างกลุ่มย่อยที่เป็นกลุ่มที่สามารถหาผลเฉลยได้ของกลุ่มความสมมาตรแบบแถว

นิยาม 3.3.1 *ให้ G เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซต Ω และ Σ เป็นเซตจำกันที่ไม่ใช่เซตว่าง*

1. *จะให้ $G^i, \forall i \in \Sigma$ เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซต $\Omega \times \Sigma$ โดยที่ $G^i = \{g^i \mid \forall g \in G\}$ และ g^i นิยามโดย $\forall x \in \Omega, \forall \mathrm{j} \in \Sigma, \mathrm{j} \neq \mathrm{i}$ $(x,i)^{g^i} = (x^g, i)$ และ $(x,j)^{g^i} = (x,j)$*
2. *จะให้ G^Σ เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบทเซต $\Sigma \times \Omega$ โดยที่ $G^\Sigma = \{g^\Sigma \mid \forall g \in G\}$ และ g^Σ นิยามโดย $\forall (k,x) \in \Sigma \times \Omega$ $(k,x)^{g^\Sigma} = (k, x^g)$*

นิยาม 3.3.2 *ให้ G และ S เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซต Ω และ Σ ตามลำดับ จะให้ $G \wr S$ เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซต $\Omega \times \Sigma$ ที่ก่อกำเนิดโดย $\left(\bigcup_{i\in\Sigma} G^i\right) \cup S^\Omega$*

นิยาม 3.3.3 *ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะให้ C_n เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซต $\Omega = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ ที่ก่อกำเนิดโดย $\{g\}$ โดยที่ $x_i^g = x_{i+1 \bmod n}$ $\forall x_i \in \Omega$*

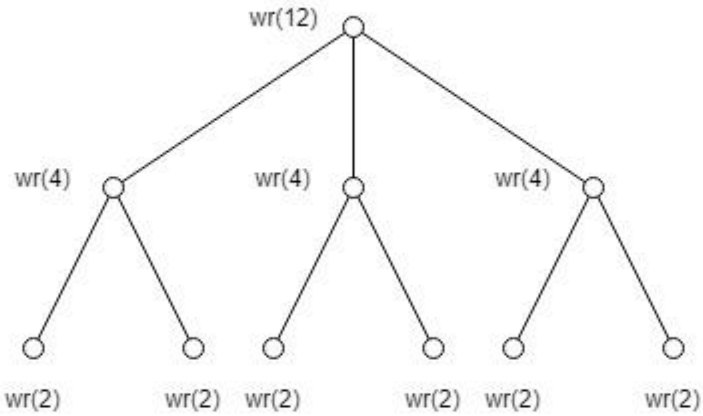
นิยาม 3.3.4 *ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะให้ $wr(n)$ เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนโดยที่*

1. $wr(n) = C_n$ *เมื่อ n เป็นจำนวนเฉพาะ*
2. $wr(n) = wr(n/p) \wr C_p$ *เมื่อ n เป็นจำนวนประกอบและ p เป็นจำนวนเฉพาะที่มากที่สุดที่หาร n ลงตัว*

จากนิยามจะพบว่า กลุ่มย่อย W ที่ก่อกำเนิดโดย $\bigcup_{0\le i<p} wr(n/p)^{x_i}$ เป็นกลุ่มย่อยปกติของ $wr(n)$ และ $wr(n)/W \cong C_p$ ซึ่ง C_p เป็นกลุ่มอาบีเลียน นอกจากนี้จะเห็นว่า $W = \prod_{0\le i<p} wr(n/p)^{x_i}$ ทำให้สามารถพิสูจน์โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ได้ไม่ยากว่า $wr(n)$ เป็นกลุ่มย่อยที่สามารถหาผลเฉลยได้

นิยาม 3.3.5 *ต้นไม้* $Struct(wr(n))$ *จะนิยามโดย*

1. *ให้แต่ละปมแทนกลุ่มย่อยของ* $wr(n)$
2. *ถ้า* n *เป็นจำนวนเฉพาะ* $Struct(wr(n))$ *มีเพียงปมเดียวซึ่งแทน* C_n
3. *ถ้า* n *เป็นจำนวนประกอบ* $Struct(wr(n))$ *จะประกอบด้วยปมรากซึ่งแทน* C_p *และต้นไม้ย่อย* $Struct(wr(n/p))$ *ทั้งหมด* p *ต้น ซึ่งแทนแต่ละ* $wr(n/p)^{x_i}$
4. *ปมราก* C_p *ของ* $Struct(wr(n))$ *มีเส้นเชื่อมไปยังปมรากของทุก ๆ ต้นไม้ย่อย* $Struct(wr(n/p))$ *โดยแต่ละเส้นเชื่อมแทน* x_i



5.

Figure 6 แสดงต้นไม้ $Struct(wr(12))$

รูปที่ 4 แสดงต้นไม้ $Struct(wr(n))$ โดยแต่ละปมจะแทนกลุ่มที่ถูกก่อกำเนิดโดยกลุ่มย่อยที่ถูกแทนด้วยทุก ๆ ปมที่อยู่ในต้นไม้ย่อยของปมนั้น ๆ

นิยาม 3.3.6 *ให้* R *เป็นกลุ่มความสมมาตรแบบแถวของเมทริกซ์* M *ที่มี* n *แถวและ* m *หลัก ให้* Ω *เป็นเซตที่ถูกเรียงสับเปลี่ยนโดย* $wr(n)$ *และ* ϕ *เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงจาก* Ω *ไปยังแถวของ* M *จะให้* $solvable(R,\phi)$ *แทนเซต*

$$\{r \in R \mid r'\big(\phi(x)\big) = \phi(x^g), \exists g \in wr(n), \forall x \in \Omega\}$$

เมื่อ r' *นิยามโดย* $r'\big(\rho_M(l)\big) = \rho_M(l^r)$ *สำหรับทุก ๆ* l *ในเรนจ์ของ* M

จากนิยาม 3.3.6 จะพบว่า $solvable(R,\phi) \cong wr(n)$ ดังนั้น $solvable(R,\phi)$ เป็นกลุ่มย่อยของ R ที่เป็นกลุ่มที่สามารถหาผลเฉลยได้ ตัวอย่างเช่น

พิจารณา

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ให้ R แทนกลุ่มความสมมาตรแบบแถวของ M และ $\{0,1\} \times \{0,1,2\}$ เซตที่ถูกเรียงสับเปลี่ยนโดย $wr(6)$

ให้ ϕ นิยามโดย $\phi\big((i,j)\big) = i + 2j + 1$ จะได้ว่า $solvable(R, \phi)$ คือกลุ่มที่ถูกก่อกำเนิดโดย$\{(12), (34), (56), (135)(246)\}$

3.4 วิธีการแก้ปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เค

ในบทย่อยนี้จะกล่าวถึงวิธีการแก้ปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เคโดยการแยกโคเซตและการเล็มต้นไม้ค้นหาของการแยกโคเซตโดยเทคนิคการเรียงลับดับตามพจนานุกรม

ในการแก้ปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เค $Trans(G, C, A, U, k)$ นั้น จะทำโดยการตรวจสอบสมาชิกทุก ๆ ตัวใน G ว่าตรงตามเงื่อนไขหรือไม่ ดังเช่นอัลกอริทึมต่อไปนี้

อัลกอริทึม 3.4.1

ข้อมูลนำเข้า: กลุ่มเรียงสับเปลี่ยน G เซต C, A, U จำนวนเต็ม $0 \leq k$

Procedure: $Trans(G, C, A, U, k)$

For each $g \in G$ do

If $|C^g \cap A| \leq k$ & $C^g \cap U = \emptyset$

Return g

ในขั้นตอนการตรวจสอบสมาชิกของ G นั้นจำเป็นต้องทำการแจงนับ (enumerate) สมาชิกภายใน G ซึ่งในกรณีของกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนสามารถทำได้โดยการแยกโคเซต ทำให้อัลกอริทึม 3.4.1 สามารถเขียนได้เป็นอัลกอริทึมต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ Ω เป็นเซตที่ถูกเรียงสับเปลี่ยนโดย G

นิยาม 3.4.2 *ให้* G *เป็นกลุ่มและ* $H \leq G$ *จะเรียกเซต* T_l *และ* T_r *ว่าเส้นตัดขวางทางซ้ายและขวา (left and right transversal) ของ* H *ใน* G *ตามลำดับ เมื่อ* T_l *และ* T_r *อินเตอร์เซกกับสมาชิกเพียงตัวเดียวของแต่ละโคเซตทางซ้ายและขวาของ* H *ใน* G *ตามลำดับ*

อัลกอริทึม 3.4.3

ข้อมูลนำเข้า: กลุ่มเรียงสับเปลี่ยน G เซต C, A, U จำนวนเต็ม $k \geq 0$

Procedure: $Trans(G, C, A, U, k)$

If G มี $g \in G$ โดยที่ $g \neq e$ do

$x \leftarrow l \in \Omega$ โดยที่มี $g \in G$ ที่ทำให้ $l^g \neq l$

$T \leftarrow T_l$ เมื่อ T_l เป็นเส้นตัดขวางทางซ้ายของ G_x ใน G

For each $g' \in T$ do

$Ans \leftarrow Trans(G_x, C^{g'}, A, U, k)$

If Ans ไม่ล้มเหลว do

Return Ans

Return ล้มเหลว

Else do

If $|C^g \cap A| \leq k$ & $C^g \cap U = \emptyset$ do

Return g

Else do

Return ล้มเหลว

โดยทั่วไปแล้วสมาชิกของกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนมักจะมีจำนวนเป็นเอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชันของจำนวนสมาชิกของเซตที่ถูกเรียงสับเปลี่ยนทำให้อัลกอริทึม 3.4.3 มักจะใช้เวลาเป็นเอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชันด้วย อย่างไรก็ตามจากงานวิจัย [14] จะพบว่าถ้า $H = G_C$ และ $K = G_{A,U}$ แล้วสำหรับ $g \in G$ ใด ๆ จะเป็นคำตอบก็ต่อเมื่อสมาชิกทุก ๆ ตัวใน HgK เป็นคำตอบด้วย ทำให้เมื่อทำการตรวจสอบว่า g เป็นคำตอบหรือไม่ก็เพียงพอสำหรับแต่ละดับเบิลโคเซต HgK

ทฤษฎีบทย่อย 3.4.4 *ให้* G *เป็นกลุ่มและ* $H, K \leq G$ แล้วสำหรับ $g, g' \in G$ ใด ๆ ถ้า $g' \in HgK$ แล้ว $Hg'K = HgK$

พิสูจน์

ให้ $g' \in HgK$ จะได้ว่ามี $h \in H$ และ $k \in K$ ที่ $g' = hgk$
ดังนั้นสำหรับ $h' \in H$ และ $k' \in K$ ใด ๆ $h'g'k' = h'hgkk'$
ดังนั้น $Hg'K \subseteq HgK$
แต่เนื่องจาก $h'gk' = h'h^{-1}hgkk^{-1}k'$
ดังนั้น $HgK \subseteq Hg'K$
ดังนั้น $Hg'K = HgK$ ∎

จากทฤษฎีบทย่อย 3.4.4 จะพบว่าความสัมพันธ์ $g' \sim g$ ที่นิยามโดย $g' \in HgK$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล ดังนั้นดับเบิลโคเซตจึงเป็นชั้นสมมูลของความสัมพันธ์นี้ จึงทำให้การตรวจสอบสมาชิกเพียงตัวเดียวจากแต่ละชั้นสมมูลจึงเพียงพอที่จะตอบปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เค

ดับเบิลโคเซตนั้นสามารถถูกตีความได้เป็นออร์บิทของกลุ่มเรียงสับเปลี่ยน $H \times K$ บนสมาชิกของกลุ่ม G ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 3.4.5 *ให้ G เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซต Ω $H, K \leq G$ จะให้กลุ่ม $H \times K$ แทนกลุ่มของคู่อันดับ (h, k) และตัวดำเนินการทวิภาค*

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 h_2, k_1 k_2)$$

นิยาม 3.4.6 *ให้ G เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซต Ω $H, K \leq G$ ให้ $P \leq H \times K$ จะให้ P เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบน G โดยที่ $g^{(h,k)} = h^{-1}gk$ สำหรับ $g \in G$ และ $(h, k) \in P$*

ในการเลือกตัวแทนจากแต่ละดับเบิลโคเซตสำหรับกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนนั้นสามารถทำได้โดยการเลือกสมาชิกอันดับแรกสุดจากการเรียงลำดับตามพจนานุกรม

นิยาม 3.4.7 *ให้ G เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซตจำกัด Ω สำหรับ $g_1, g_2 \in G$ ใด ๆ จะให้ $g_1 < g_2$ เมื่อมี $x \in \Omega$ ที่ $g_1(x) < g_2(x)$ และ $g_1(x') = g_2(x')$ สำหรับทุก ๆ $x' < x$*

บทตั้ง 3.4.8 *ให้* G *เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซตจำกัด* Ω, $H, K < G$ และ $P \leq H \times K$ *แล้วสำหรับ* $g \in G$ *ใด ๆ จะมี* $g' \in g^P$ *ที่สำหรับ* $g'' \in g^P$ *ใด ๆ ที่ถ้า* $g'' \neq g'$ *แล้ว* $g' < g''$

พิสูจน์

ให้ $x_0 \in \Omega$ เป็นสมาชิกที่น้อยที่สุดใน Ω ที่มี $f_0 \in O_0 = g^P$ ที่ $x_0^{f_0} \neq x_0$

เลือก g_{x_0} ใน O_0 ที่ $x_0^{g_{x_0}}$ มีค่าน้อยที่สุด

สำหรับ n ใด ๆ

ให้ $O_{n+1} = O_n \cap G_{x_n} g_{x_n}$

เลือก $x_{n+1} \in \Omega$ ที่น้อยที่สุดที่มี $f_{n+1} \in O_{n+1}$ ที่ $x_{n+1}^{f_{n+1}} \neq x_{n+1}^{g_{x_n}}$

เลือก $g_{x_{n+1}}$ ใน O_{n+1} ที่ $x_{n+1}^{g_{x_{n+1}}}$ มีค่าน้อยที่สุด

ให้ m เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่ทำให้

สำหรับทุก ๆ $x \in \Omega, x^f = x^{g_{x_m}}$ สำหรับทุก ๆ $f \in O_{m+1}$

จะได้ว่า $g_{x_m} < g'' \in g^P$ สำหรับทุก ๆ $g'' \neq g_{x_m}$ ■

ปัญหาสำคัญของการลดจำนวนการค้นหาโดยใช้ตัวแทนของดับเบิลโคเซต HgK ประการหนึ่งคือการคำนวนหา H และ K ซึ่งเป็นสเตบิไลเซอร์ของเซต ทำให้การคำนวนหากลุ่มย่อยเหล่านี้โดยทั่วไปไม่สามารถทำได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม ด้วยเหตุนี้งานวิจัยนี้จึงเลือกใช้กลุ่มย่อยที่สามารถหาผลเฉลยได้เนื่องจากสเตบิไลเซอร์ของเซตสามารถคำนวนได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามในกรณีนี้ นอกจากนี้เมื่อ H เป็นกลุ่มที่สามารถหาผลเฉลยได้แล้ว ในงานวิจัย [16] ได้กล่าวว่าจะสามารถคำนวนหา $p \in P$ ทั้งหมดที่ทำให้ $g^p = g'$ ได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามสำหรับบางการเรียงลำดับของสมาชิกใน Ω

ในกรณีที่กลุ่มเรียงสับเปลี่ยน G สามารถแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของกลุ่มความสมมาตรแบบแถวนั้น การแจกแจงสมาชิกใน G นั้นจะสามารถทำได้โดยการแจกแจงสมาชิกของตัวประกอบแต่ละตัวของ G ตามลำดับ แทนการแยกโคเซตของทั้งกลุ่ม G

นิยาม 3.4.9 *ให้* $G = R_1 R_2 \cdots R_m$ *โดยที่* R_i *เป็นกลุ่มความสมมาตรแบบแถวของเมทริกซ์* M_i *สำหรับ* $g_1, g_2 \in G$ *ใด ๆ จะให้* $g_1 < g_2$ *เมื่อมี* i *และ* x *ในเมทริกซ์* M_i *ที่ทำให้*

$\rho_{M_i}\big(g_1(x)\big) < \rho_{M_i}(g_2(x))$ *และ สำหรับ* $x' \in M_i$ *และ* $y \in M_j$ *ใด ๆ โดยที่*
$\rho_{M_i}(x') < \rho_{M_i}(x)$ *และ* $j < i$
$\rho_{M_i}\big(g_1(x')\big) = \rho_{M_i}(g_2(x'))$ *และ* $\rho_{M_j}\big(g_1(y)\big) = \rho_{M_j}(g_2(y))$
กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ เรียงลำดับสมาชิกใน G ตามการเรียงสับเปลี่ยนแถวของทุก ๆ เมทริกซ์

บทตั้ง 3.4.10 *ให้* $G = R_1R_2 \cdots R_m$ *โดยที่* R_i *เป็นกลุ่มความสมมาตรแบบแถวของเมทริกซ์* M_i, $H, K \leq G$ และ $P \leq H \times K$ *แล้วสำหรับ* $g \in G$ *ใด ๆ จะมี* $g' \in g^P$ *ที่สำหรับ* $g'' \in g^P$ *ใด ๆ ที่ถ้า* $g'' \neq g'$ *แล้ว* $g' < g''$

พิสูจน์

ให้ $P_1 = P$
ให้ ϕ_1 เป็นโฮโมมอร์ฟิซึมจาก G ไปยัง $Sym(n_1)$ เมื่อ n_1 เป็นจำนวนแถวของ M_1 และ $Sym(n_1)$ เป็นกลุ่มของการเรียงสับเปลี่ยนแถวทั้งหมดของ M_1
ให้ $O_1 = \{\phi_1(g'') \mid \forall g'' \in g^{P_1}\}$
จากบทตั้ง 3.4.8 มี $g_1 \in O_1$ ที่น้อยที่สุด
ให้ $x_1 \in g^P$ โดยที่ $\phi_1(x_1) = g_1$ เลือก $g_1' = x_1$
สำหรับ $i > 1$ ใด ๆ ให้ $P_i = (\mathrm{P}_{i-1})_{g_{i-1}}$
ให้ ϕ_i เป็นโฮโมมอร์ฟิซึมจาก G ไปยัง $Sym(n_i)$
ให้ $O_i = \{\phi_i(g'') \mid \forall g'' \in (g_{i-1}')^{P_i}\}$
จากบทตั้ง 3.4.8 มี $g_i \in O_i$ ที่น้อยที่สุด
ให้ $x_i \in (g_{i-1}')^{P_i}$ โดยที่ $\phi_i(x_i) = g_i$ เลือก $g_i' = x_i$
จะได้ว่า g_n' น้อยที่สุดใน g^P ■

สำหรับการเลือกค้นหาเฉพาะตัวแทนของแต่ละดับเบิลโคเซตสามารถทำได้โดยใช้บทตั้งดังต่อไปนี้

บทตั้ง 3.4.11 *ให้* G *เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบนเซต* $\Omega, \Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \Omega$ *เป็นเซตของสมาชิก* n *ตัวแรกของ* Ω, $G' = G_{x_1, x_2, \dots, x_n}$, $H \leq G_{\Delta}, K \leq G_{\Delta^g}, P \leq H \times K$ *และ* $g \in G$ *แล้ว* $G'g$ *จะมีสมาชิก* g' *ที่เป็นสมาชิกที่น้อยที่สุดใน* g'^P *ก็ต่อเมื่อ* $x_i^g = x_i^{g_l}$ *สำหรับทุก ๆ* $x_i \in \Delta$ *เมื่อ* g_l *เป็นสมาชิกที่น้อยที่สุดใน* g^P

พิสูจน์

จะพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งว่า ถ้า $G'g$ มีสมาชิก g' ที่เป็นสมาชิกที่น้อยที่สุดใน g'^P แล้ว $x_i^g = x_i^{g_l}$ สำหรับทุก ๆ $x_i \in \Delta$ เมื่อ g_l เป็นสมาชิกที่น้อยที่สุดใน g^P

ให้ $p \in P$ โดยที่ $g_l = g^p$ และสมมติให้มี $x_j \in \Delta$ ที่น้อยที่สุดที่ $x_j^g \neq x_j^{g_l}$

จะได้ว่า $x_j^g > x_j^{g_l}$ เนื่องจาก $g_l \leq g$ ดังนั้น $g_l < g$

แต่เนื่องจาก $x_i^{g_l} = x_i^{g'^p}$ และ $x_i^g = x_i^{g'}$

ดังนั้น $g'^p < g'$ เกิดข้อขัดแย้ง

ต่อไปจะพิสูจน์ว่า ถ้า $x_i^g = x_i^{g_l}$ สำหรับทุก ๆ $x_i \in \Delta$ เมื่อ g_l เป็นสมาชิกที่น้อยที่สุดใน g^P แล้ว $G'g$ มีสมาชิก g' ที่เป็นสมาชิกที่น้อยที่สุดใน g'^P

ให้ $p \in P$ โดยที่ $g^p = g_l$

เนื่องจาก $p \in P$ ดังนั้น $p = (h, k)$ และ $g_l = h^{-1}gk$ สำหรับบาง $h \in H$ และ $k \in K$

จะได้ว่า $g_l = (h^{-1}gkg^{-1})g$

แต่เนื่องจาก $x_i^g = x_i^{g_l}$ สำหรับทุก ๆ $x_i \in \Delta$

ดังนั้น $x_i^{h^{-1}gkg^{-1}} = x_i^{g_l g^{-1}} = x_i^{gg^{-1}} = x_i$ สำหรับทุก ๆ $x_i \in \Delta$

ดังนั้น $h^{-1}gkg^{-1} \in G'$ ดังนั้น $g_l \in G'g$

ดังนั้นมี $g' \in G'g$ ที่เป็นสมาชิกที่น้อยที่สุดใน g'^P ■

บทตั้ง 3.4.11 สามารถใช้ตรวจสอบโคเซตในระหว่างการแจกแจงสมาชิกของ G โดยการแยกโคเซต เพื่อตรวจสอบว่าในแต่ละโคเซตนั้นมีสมาชิกที่น้อยที่สุดในดับเบิลโคเซตหรือไม่ ดังเช่นอัลกอริทึมดังต่อไปนี้ เมื่อกลุ่มเรียงสับเปลี่ยน $G = R_1 R_2 \cdots R_m$

อัลกอริทึม 3.4.12

ข้อมูลนำเข้า: กลุ่มความสมมาตร $R_i' \leq R_i$ กลุ่มเรียงสับเปลี่ยน G $g \in G$ เซต C, A, U จำนวนเต็ม $k \geq 0$

Procedure: $Trans(R_i', G, g, C, A, U, k)$

$P \leftarrow \left(G_{C,\Delta} \times G_{A,U,\Delta^g}\right)_{g_1, g_2, \ldots, g_{i-1}}$ เมื่อ Δ คือเซตของแถวที่ถูกกำหนดให้ไม่ถูกเรียงสับเปลี่ยนโดย R_i ในขั้นตอนการแยกโคเซต และ $g_j = \phi_j(g)$ โดยที่ ϕ_j เป็นโฮโมมอร์ฟิซึมจาก G ไปยัง $Sym(n_j)$ เมื่อ n_j เป็นจำนวนแถวของ M_j และ $Sym(n_j)$ เป็นกลุ่มของการเรียงสับเปลี่ยนแถวทั้งหมดของ M_j สำหรับจำนวนเต็มบวก $j < i$ ใด ๆ

$g_l \leftarrow g' \in g^P$ โดยที่ $\phi_i(g') \leq \phi_i(g'')$ สำหรับทุก ๆ $g'' \in g^P$

If $x^{g_l} \neq x^g, \exists x \in \Delta$ do

    Return ล้มเหลว

If R_i' มี $r \in R_i'$ โดยที่ $r \neq e$ do

    $x \leftarrow l \in n_i - \Delta$ โดยที่ l น้อยที่สุดใน $n_i - \Delta$

    $T \leftarrow T_x$ เมื่อ T_x เป็นเส้นตัดขวางทางขวาของ $(R_i')_x$ ใน R_i'

    For each $g' \in T$ do

        $Ans \leftarrow Trans((R_i')_x, G, g'g, C, A, U, k)$

        If Ans ไม่ล้มเหลว do

            Return Ans

    Return ล้มเหลว

Else do

    If $i < m$ do

        Return $Trans(R_{i+1}, G, g, C, A, U, k)$

    Else do

        If $|C^g \cap A| \leq k$ & $C^g \cap U = \emptyset$ do

            Return g

        Else do

            Return ล้มเหลว

ในอัลกอริทึมที่ 3.4.12 นั้นหากแทนที่กลุ่มเรียงสับเปลี่ยน $G = R_1 R_2 \cdots R_m$ ด้วย $G' = R_1' R_2' \cdots R_m'$ เมื่อ $R_i' \cong wr(n_i)$ จะทำให้การคำนวนหา g_l นั้นสามารถทำได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามเนื่องจาก G' เป็นกลุ่มที่สามารถหาผลเฉลยได้

นอกจากนี้ เทคนิคการแปลงปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เคไปเป็นปัญหาการกำหนดงานในกรณีของกลุ่มความสมมาตรแบบแถวยังสามารถนำมาใช้ร่วมกับอัลกอริทึม 3.4.12 ได้โดยทำการแจกแจงสมาชิกเพียงแค่กลุ่มย่อย $R_1' R_2' \cdots R_{m-1}'$ ของ G' จากนั้นจึงแก้ปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เคในกรณีที่กลุ่มเรียงสับเปลี่ยนเป็น R_m สำหรับสมาชิกทุก ๆ ตัวใน $R_1' R_2' \cdots R_{m-1}'$ โดยการแปลงปัญหาไปเป็นปัญหาการกำหนดงาน

บทที่ 4 บทวิเคราะห์

ในบทนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์จำนวนความสมมาตรที่ถูกกำจัดและประสิทธิภาพเชิงพื้นที่ของวิธีการที่นำเสนอภายในงานวิจัยฉบับนี้ โดยจะแสดงให้เห็นว่าวิธีการนี้สามารถกำจัดความสมมาตรออกได้เป็นจำนวนที่เป็นเอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชัน และใช้พื้นที่ในการทำงานเป็นฟังก์ชันพหุนาม จากนั้นจะทำการวิเคราะห์ประสิทธิภาพเชิงเวลาของการแก้ปัญหาตัวขนย้าย ฯ โดยการนับปมในต้นไม้ค้นหา

4.1 ความสมมาตรที่ถูกกำจัด

ในบทย่อยนี้จะทำการคำนวนจำนวนของความสมมาตรที่ถูกกำจัด โดยกลุ่มความสมมาตรที่สนใจคือกลุ่มความสมมาตรที่เป็นผลคูณของกลุ่มความสมมาตรแบบแถว ซึ่งในงานวิจัยนี้จะให้ความสมมาตรหนึ่ง ๆ ถูกกำจัดออกจากประพจน์เลือกใด ๆ เมื่อประพจน์เลือกผลลัพธ์จากการเรียงสับเปลี่ยนด้วยความสมมาตรนั้นถูกเพิ่มลงไปในนิพจน์บูลีน

นิยาม 4.1.1 *ให้* T *เป็นนิพจน์บูลีน* G *เป็นกลุ่มความสมมาตรของ* T C *เป็นประพจน์เลือก และ* $H \leq G$ *จะให้* H *เป็นกลุ่มความสมมาตรที่ถูกกำจัดไปจาก* C *เมื่อมีการเพิ่มประพจน์เลือกต่อเติม* (C, H) *ลงไปใน* T

ด้วยนิยามของความสมมาตรที่ถูกกำจัดจะพบว่า จำนวนความสมมาตรที่ถูกกำจัดนั้นเท่ากับจำนวนของกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนที่ใช้ต่อเติมประพจน์เลือก หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือกับจำนวนสมาชิกของกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนที่เป็นข้อมูลนำเข้าของปัญหาตัวขนย้าย ฯ

ทฤษฎีบทย่อย 4.1.2 *ให้* G *และ* N *เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบทเซต* Ω *และ* S *ตามลำดับจะได้ว่า* $|G \wr N| = |G|^{|S|}|N|$

พิสูจน์

เห็นได้ชัดว่า กลุ่มย่อย G^* ที่ก่อกำเนิดโดย $\bigcup_{i \in S} G^i$

มีจำนวนสมาชิก $|G^*| = |G|^{|S|}$

และเห็นได้ชัดว่า $G^* \lhd G \wr N$ และ $(G \wr N)/\mathrm{G}^* \cong N^{\Omega} \cong N$

ดังนั้น $|G \wr N| = |G|^{|S|}|N|$ ■

ทฤษฎีบทย่อย 4.1.3 *ให้* n *เป็นจำนวนเต็มบวก* p *เป็นจำนวนเฉพาะที่ซึ่ง ถ้า* $d|n$ *และ* $d \neq 1$ *แล้ว* $p \leq d$ *แล้ว* $|wr(pn)| \geq p^n$

พิสูจน์

จะพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์อย่างเข้มบน n

ในกรณีที่ $n = 1$ จะพิสูจน์ว่า $|wr(p)| \geq p$

จากนิยาม 3.3.4 จะได้ว่า $wr(p) \cong C_p$ ดังนั้น $|wr(p)| = p \geq p$

สมมติให้ $|wr(pi)| \geq p^i$ สำหรับทุก ๆ $i \leq k$ ที่ถ้า $d|i$ และ $d \neq 1$ แล้ว $p \leq d$

จะพิสูจน์ว่า ถ้าสำหรับ $d \neq 1$ ใด ๆ ที่ $d|(k+1)$ แล้ว $p \leq d$ แล้ว $|wr(p(k+1))| \geq p^{(k+1)}$

ให้ q เป็นจำนวนเฉพาะที่มากที่สุดที่ $q|p(k+1)$

จะได้ว่า $p \leq q$ และ $q|(k+1)$

ดังนั้น $p(k+1)/q = pm$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก m

จากนิยาม 3.3.4 และทฤษฎีบทย่อย 4.1.2

จะได้ว่า $|wr(p(k+1))| = |wr(pm)|^q|q|$

แต่เนื่องจาก $k+1 = qm$ ดังนั้นสำหรับ $d \neq 1$ ใด ๆ ที่ $d|m$ แล้ว $d|(k+1)$

ดังนั้น $p \leq d$

ดังนั้น $|wr(pm)| \geq p^m$

ดังนั้น $|wr(p(k+1))| \geq p^{mq}|p| = p^{k+1}|q| \geq p^{k+1}$ ∎

ทฤษฎีบทย่อย 4.1.4 *ให้* n *เป็นจำนวนประกอบคี่ จะได้ว่า* $|wr(n)| \geq e^{\sqrt{n}\ln(\sqrt{n})}$

พิสูจน์

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะที่น้อยที่สุดที่ $p|n$

จากทฤษฎีบทย่อย 4.1.3 จะได้ $|wr(n)| \geq p^{n/p} = e^{n\ln(p)/p}$

ให้ $f(x) = \ln(x)/x$ จะได้ว่า $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}$

จะพบว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $x > e$

แต่จำนวนเฉพาะคี่ $p \geq 3 > e$ เสมอ และ $p \leq \sqrt{n}$

ดังนั้น $f(p) \geq f(\sqrt{n})$

ดังนั้น $wr(n) = e^{n\ln(p)/p} \geq e^{\sqrt{n}\ln(\sqrt{n})}$ ■

จากทฤษฎีบทย่อย 4.1.3 จะเห็นว่าในกรณีที่ n เป็นจำนวนคู่ จำนวนของความสมมาตรที่ถูกกำจัดจะมีอย่างน้อย $2^{n/2}$ หรือก็คือ $(\sqrt{2})^n$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลของ n นอกจากนี้ในกรณีที่ n เป็นจำนวนประกอบคี่ ทฤษฎีบทย่อย 4.1.4 ได้รับประกันว่าจะมีความสมมาตรที่ถูกกำจัดไม่น้อยกว่า $e^{\sqrt{n}\ln(\sqrt{n})}$ ซึ่งเป็นเอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชันของ $\sqrt{n}$

4.2 ความซับซ้อนเชิงพื้นที่และเวลา

ในบทย่อยนี้จะกล่าวถึงความซับซ้อนเชิงพื้นที่ของอัลกอริทึม 3.4.12 โดยจะแสดงว่าใช้พื้นที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม และจะทำการวิเคราะห์ความซับซ้อนเชิงเวลาในกรณีที่ประพจน์เลือก C มีขนาดจำกัด

บทตั้ง 4.2.1 *ให้ G เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบทเซต Ω และ $H, K \leq G$ เป็นกลุ่มที่สามารถหาผลเฉลยได้ แล้วสำหรับ $P \leq H \times K$ และ $g \in G$ ใด ๆ แล้ว P_g สามารถคำนวนหาได้โดยใช้พื้นที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม*

พิสูจน์

เนื่องจาก H เป็นกลุ่มที่สามารถหาผลเฉลยได้ ดังนั้นจาก [16] จะสามารถคำนวนหา $p \in P$ ทั้งหมดที่ g^p ที่น้อยที่สุดใน g^P สำหรับบางการเรียงลำดับของสมาชิกใน Ω ได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

ให้ $S = \{p \in P \mid g^p \leq g', \forall g' \in g^P\}$ จะได้ว่า S เป็นโคเซตของ P_g

ดังนั้น $P_g = Sp^{-1}$

ดังนั้น P_g สามารถคำนวนหาได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

ดังนั้น P_g สามารถคำนวนหาได้โดยใช้พื้นที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม ■

จากบทตั้ง 4.2.1 จะทำให้บรรทัดแรกของอัลกอริทึม 3.4.12 ทำงานเสร็จในเวลาและพื้นที่ ที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม นอกจากนี้พื้นที่สำหรับใช้คำนวนหา P ยังสามารถนำกลับมาใช้ใหม่ได้อีกด้วย

ในทำนองเดียวกันกับบทตั้ง 4.2.1 บรรทัดที่ 2 ของ อัลกอริทึม 3.4.12 ใช้พื้นที่ในการทำงานเป็นฟังก์ชันพหุนาม

ทฤษฎีบทย่อย 4.2.2 *ให้ G เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนที่สามารถหาผลเฉลยได้บนเซต Ω อัลกอริทึม 3.4.12 ใช้พื้นที่ในการทำงานเป็นฟังก์ชันพหุนามสำหรับบางการเรียงลำดับของสมาชิก Ω*

พิสูจน์

จากบทตั้ง 4.2.1 บรรทัดที่ 1 ของอัลกอริทึม 3.4.12 ใช้พื้นที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

และจาก [16] บรรทัดที่ 2 ของอัลกอริทึม 3.4.12 ใช้พื้นที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม สำหรับบางการเรียงลำดับของสมาชิก Ω

แต่เนื่องจาก อัลกอริทึม 3.4.12 เป็นการทำการค้นหาในแนวลึกของต้นไม้ค้นหาที่เกิดจากการแยกโคเซตของแต่ละตัวประกอบ R_i' ของ G

แต่เนื่องจากความลึกของต้นไม้ค้นหาของ R_i' มีค่าไม่เกิน n_i เมื่อ n_i เป็นจำนวนแถวที่ R_i' ทำการเรียงสับเปลี่ยน

ดังนั้นต้นไม้ค้นหาของ G มีความลึกไม่เกิน mn_j เมื่อ n_j มีค่ามากที่สุด

ดังนั้น อัลกอริทึม 3.4.12 ใช้พื้นที่ในการทำงานเป็นฟังก์ชันพหุนาม ■

ในการวิเคราะห์ความซับซ้อนเชิงเวลาของอัลกอริทึม 3.4.12 นั้น การเรียงลำดับของสมาชิกในเซต Ω นั้นมีความสำคัญอย่างมาก เนื่องจากการคำนวนหาสมาชิกที่น้อยที่สุดในบรรทัดที่ 2 นั้นสามารถทำได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามในบางการเรียงลำดับของสมาชิกใน Ω เท่านั้น ซึ่งได้ถูกนิยามไว้ในงานวิจัย [16] ด้วยเหตุนี้งานวิจัยนี้จึงจะพิจารณาในกรณีของการเรียงลำดับที่ถูกกล่าวถึงใน [16] เท่านั้น

นิยาม 4.2.3 [16] *ให้ O เป็นออร์บิทของ $x \in \Omega$ ใด ๆ ที่ถูกเรียงสับเปลี่ยนโดย G จะให้ต้นไม้โครงสร้าง $struct_G(O)$ นิยามโดย*

1. *$struct_G(O)$ มีเพียงปมเดียวเมื่อ $|O| = 1$*
2. *ปมรากของ $struct_G(O)$ แทน O*
3. *ให้ r แทนปมรากของ $struct_G(O)$ ปมลูกแต่ละปมของ r คือปมรากของ $struct_{G_{B_i}}(B_i)$ สำหรับ $B_i \in B^G$ ใด ๆ เมื่อ B เป็นบล็อคที่ G พริมิติฟเมื่อทำการเรียงสับเปลี่ยนบนเซต B^G*

สำหรับกลุ่มถ่ายทอดใด ๆ จากนิยาม 4.2.3 จะได้ว่าการเรียงลำดับสมาชิกใน Ω ที่ได้จากการเรียงลำดับจากซ้ายไปขวาของใบของ $struct_G(\Omega)$ จะทำให้ปัญหาการหาสมาชิกที่น้อยที่สุดในดับเบิลโคเซตสามารถแก้ได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามเมื่อ G เป็นกลุ่มที่สามารถหาผลเฉลยได้ ในกรณีที่กลุ่ม $G = wr(n)$ จะได้ว่ากราฟ $Struct(wr(n))$ ไอโซมอร์ฟิกกับกราฟย่อย (subgraph) ของปมภายใน (internal nodes) ของ $Struct_{wr(n)}(\Omega)$ นอกจากนี้ สำหรับเซต $O \subseteq \Omega$ ที่ถูกแทนด้วยปม v ใด ๆ ใน $Struct_{wr(n)}(\Omega)$ แล้ว การเรียงสับเปลี่ยนบล็อคภายใน O ของ G_O ซึ่งแทนด้วย

$$G_O^v = \{g' \in Sym(O_B) \mid \forall B_i \in O_B \; B_i^{g'} = B_i^g \; \exists g \in G_O\}$$

เมื่อ O_B คือเซตของบล็อคภายใน Oที่ถูกแทนด้วยปมลูกของ v จะไอโซมอร์ฟิกกับกลุ่มย่อย C_p ที่ถูกแทนด้วยปม $\phi(v)$ เมื่อ ϕ คือไอโซมอร์ฟิซึมของกราฟย่อยของปมภายในของ $struct_{wr(n)}(\Omega)$ ไปยัง $struct(wr(n))$

บทตั้ง 4.2.4 *ให้* $wr(n)$ *เป็นกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนบน* Ω *และ* $\Delta \subseteq \Omega$ *เป็นเซตของสมาชิก* m *ตัวแรกใน* Ω *ที่เรียงลำดับโดย* $struct_{wr(n)}(\Omega)$ *แล้ว* $\left|\Delta^{wr(n)}\right| \leq n$

พิสูจน์

ให้ $G = wr(n)$ จากทฤษฎีบทย่อย 2.1.3.14 จะได้ว่า $\frac{|G|}{|G_\Delta|} = |\Delta^G|$

กรณีแรก $\Delta = \emptyset$ หรือ $\Delta = \Omega$ จะได้ $G_\Delta = G$

ดังนั้น $|\Delta^G| = 1 \leq n$

ดังนั้นสมมติให้ $\Delta \subset \Omega$

พิจารณาปมราก r ของ $struct_G(\Omega)$

ให้ Ω_r แทนเซตของบล็อคที่ถูกแทนด้วยปมลูกของ r

และให้ $\Delta_r = \{B \in \Omega_r \mid B \subseteq \Delta\}$

จะได้ว่าถ้า $g \in G_\Delta$ แล้ว $\Delta_r^g = \Delta_r$

แต่เนื่องจากการเรียงสับเปลี่ยนของ Ω_r ด้วย G ไอโซมอร์ฟิกกับ C_{p_1} ที่ถูกแทนด้วยปม $\phi(r)$ ใน $struct(G)$ เมื่อ ϕ เป็นไอโซมอร์ฟิซึมจากกราฟย่อยของปมภายในของ $struct_G(\Omega)$ ไปยังกราฟ $struct(G)$ โดยที่ปม $\phi(v)$ ของปม v ใด ๆ แทนกลุ่มย่อยซึ่งทำการเรียงสับเปลี่ยน $O \subseteq \Omega$ ที่ถูกแทนโดยปม v

ให้ π_r เป็นโฮโมมอร์ฟิซึมจาก G ไป C_{p_1} ที่กำหนดโดยการเรียงสับเปลี่ยน Ω_r

และให้ $G_{\Delta_{\mathrm{r}}} = \{\pi_r(g) \in G_\Delta\}$ ดังนั้นจากจะได้ว่า $G_{\Delta_{\mathrm{r}}} \leq C_{p_1}$
แต่เนื่องจาก $\left|C_{p_1}\right| = p_1$ เป็นจำนวนเฉพาะ
ดังนั้น $G_\Delta \leq \ker(\pi_r)$
ดังนั้น $G_\Delta \leq W = \prod_{0\leq i<p_1} wr(n/p_1)^i$
ดังนั้น $\frac{|G|}{|G_\Delta|} = \frac{|G|}{|W|}\frac{|W|}{|G_\Delta|} = p_1\frac{|W|}{|G_\Delta|}$
พิจารณาปมลูก v_i ใด ๆ ของ r
จะได้ว่า $\phi(v_i)$ เป็นปมรากของ $struct(wr(n/p_1)^i)$ ตามนิยาม 3.3.5
แต่เนื่องจากสำหรับ B_i ที่ถูกแทนด้วย v_i ใด ๆ
ถ้า $B_i \subseteq \Delta$ หรือ $B_i \cap \Delta = \emptyset$ แล้ว $wr(n/p_1)^i \leq G_\Delta$
และเนื่องจากมีอย่างมากหนึ่งบล็อค B_j ที่ $B_j \not\subset \Delta$ และ $B_j \cap \Delta \neq \emptyset$
ให้ $\Delta_{v_j} = B_j \cap \Delta$ และ $G_{\Delta_{v_j}}^{v_j} = wr(n/p)_{\Delta_{v_j}}^j$
จะได้ว่า $G_\Delta = \left(\prod_{0\leq i<p_1, i\neq j} wr(n/p_1)^i\right) wr(n/p_1)_{\Delta_{v_j}}^j$
ดังนั้น $\frac{|G|}{|G_\Delta|} = p_1\frac{|W|}{|G_\Delta|} = p_1\frac{\left|wr(n/p_1)^j\right|}{\left|wr(n/p_1)_{\Delta_{v_j}}^j\right|}$
ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $\frac{|G|}{|G_\Delta|} \leq \prod_{1\leq i\leq d} p_i$ เมื่อ d คือความสูงของต้นไม้ $struct(G)$
ดังนั้น $\frac{|G|}{|G_\Delta|} \leq \mathrm{n}$ ดังนั้น $|\Delta^G| \leq \mathrm{n}$ ■

ทฤษฎีบท 4.2.5 *ให้* $G = wr(n)$ *และ* $|C| = n_C$ *แล้วจำนวนปมในต้นไม้ค้นหาของอัลกอริทึม 3.4.12 มีจำนวนไม่เกิน* n^{n_C+2}

พิสูจน์

ให้ $\Delta \subseteq \Omega$ คือเซตของสมาชิก m ตัวแรกของ Ω
ให้ T แทนเซตของเส้นตัดขวางทางขวาของ $G_{x_1,x_2,\ldots,x_m}$ สำหรับ $x_i \in \Delta$
เนื่องจาก $(G_{C,\Delta} \times e) \leq (G_{C,\Delta} \times G_{A,U,\Delta^g})$ จะได้ว่า
ถ้าให้ $N_1 = \left\{g^{(G_{C,\Delta}\times e)} \mid g \in G\right\}$
และ $N_2 = \left\{g^{\left(G_{C,\Delta}\times G_{A,U,\Delta^g}\right)} \mid g \in G\right\}$

แล้ว $|N_2| \leq |N_1|$

แต่เนื่องจาก $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{G}$ ดังนั้นถ้าให้ $N_3 = \left\{t^{\left(G_{C,\Delta} \times G_{A,U,\Delta^g}\right)} \mid t \in T\right\}$

จะได้ว่า $|N_3| \leq |N_2| \leq |N_1|$

ดังนั้นจำนวนปมที่ความลึก m มีจำนวนไม่เกิน $|N_1|$

แต่เนื่องจากสำหรับ $g \in G$ ใด ๆ $g^{(G_{C,\Delta} \times e)} = G_{C,\Delta} g$

พิจารณา $g_1, g_2 \in G$ ที่ $C^{g_1} = C^{g_2}$ และ $\Delta^{g_1} = \Delta^{g_2}$

จะได้ว่า $g_1 \in G_{C,\Delta} g_2$

ดังนั้น $|N_1| \leq |\mathrm{C}^G||\Delta^G|$

แต่เนื่องจาก $|C^G| \leq n^{n_C}$ และจากบทตั้ง 4.2.4 $|\Delta^G| \leq n$

ดังนั้น $|N_1| \leq n^{n_C+1}$

แต่เนื่องจากต้นไม้ค้นหามีความลึกไม่เกิน n

ดังนั้นต้นไม้ค้นหามีปมทั้งหมดไม่เกิน n^{n_C+2} ■

ผลจากทฤษฎีบท 4.2.5 ทำให้เมื่อทำการจำกัดค่า n_C จะทำให้ อัลกอริทึม 3.4.12 มีจำนวนปมเป็นฟังก์ชันพหุนามของ n และเนื่องจากเวลาที่ใช้ในแต่ละปมเป็นฟังก์ชันพหุนามจึงส่งผลให้เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมเป็นฟังก์ชันพหุนามด้วยในกรณีที่ $G = wr(n)$

ในกรณีที่ $\mathrm{G} = \mathrm{R}'_1 R'_2 \cdots R'_m \cong wr(n_1) \times wr(n_2) \cdots wr(n_m)$ จะสามารถพิสูจน์ได้ไม่ยากว่าในการแจกแจงสมาชิกของแต่ละ R'_i มีจำนวนปมเป็นฟังก์ชันพหุนามของ n โดยการอ้างว่า $\left({R'_i}_{C,\Delta} \times e\right) \leq \left(G_{C,\Delta} \times G_{A,U,\Delta^g}\right)_{g_1,g_2,\ldots,g_{i-1}}$ แล้วจึงทำการพิสูจน์ต่อในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 4.2.5

ทฤษฎีบทย่อย 4.2.6 *ให้* $G = Sym(\Omega)$ *เป็นกลุ่มของการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดของ* Ω *แล้วจำนวนปมในต้นไม้ค้นหาของอัลกอริทึม 3.4.12 มีจำนวนไม่น้อยกว่า* 2^n

พิสูจน์

ให้ Δ_m เป็นเซตของสมาชิก m ตัวแรกของ Ω

ให้ T แทนเซตของเส้นตัดขวางทางขวาของ $G_{x_1,x_{2,\ldots,}x_m}$ สำหรับ $x_i \in \Delta_m$

เนื่องจาก $\left(G_{C,\Delta} \times G_{A,U,\Delta^g}\right) \leq (\mathrm{G}_\Delta \times \mathrm{G}_\Delta\mathrm{g})$ จะได้ว่า

ถ้าให้ $N_1 = \left\{t^{\left(G_{C,\Delta} \times G_{A,U,\Delta^g}\right)} \mid t \in T\right\}$

และ $N_2 = \left\{t^{\left(\mathrm{G}_\Delta \times \mathrm{G}_{\Delta^\mathrm{g}}\right)} \mid t \in T\right\}$

แล้ว $|N_2| \leq |N_1|$

ดังนั้นจำนวนปมที่ความลึก m มีจำนวนไม่น้อยกว่า $|N_2|$

แต่เนื่องจากสำหรับ $g \in G$ ใด ๆ $g^{\left(\mathrm{G}_\Delta \times \mathrm{G}_{\Delta^\mathrm{g}}\right)} = G_\Delta g G_{\Delta^g} g^{-1} g$

และ $g G_{\Delta^g} g^{-1} = G_\Delta$ จะได้ว่า $g^{\left(\mathrm{G}_\Delta \times \mathrm{G}_{\Delta^\mathrm{g}}\right)} = \mathrm{G}_\Delta g$

ดังนั้น $|N_2| = |\Delta^G| = \binom{n}{m}$

ดังนั้นจำนวนปมทั้งหมดจึงมีไม่น้อยกว่า $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ ■

ในทฤษฎีบทย่อย 4.2.6 นั้นได้แสดงให้เห็นว่าในกรณีที่กลุ่ม $G \cong Sym(n)$ นั้น อัลกอริทึม 3.4.12 จะใช้เวลาในการทำงานเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลของ n เป็นอย่างน้อย แสดงให้เห็นว่าความซับซ้อนเชิงเวลาของอัลกอริทึม 3.4.12 นั้นขึ้นอยู่กับโครงสร้างของกลุ่มและการเรียงลำดับสมาชิกใน Ω เป็นอย่างมาก

อย่างไรก็ตามเทคนิคการตัดแต่งต้นไม้ค้นหาอื่น ๆ ดังเช่นที่ได้ถูกนำเสนอใน [14] นั้นยังคงสามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้กับอัลกอริทึม 3.4.12 ซึ่งอาจทำให้ความซับซ้อนเชิงเวลาของอัลกอริทึม 3.4.12 ลดลงและลดการพึ่งพาโครงสร้างของกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนลงได้

บทที่ 5 สรุป

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอการหักล้างความสมมาตรพลวัตในกรณีที่กลุ่มความสมมาตรมีกลุ่มความสมมาตรแบบแถวเป็นกลุ่มย่อยปกติ โดยการประยุกต์ใช้ประพจน์เลือกต่อเติมซึ่งทำให้จำเป็นต้องทำการแก้ปัญหาตัวขนย้ายลำดับที่เคในการทำการเผยแพร่ประพจน์เลือกเดี่ยว ซึ่งงานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาสมบัติของกลุ่มเรียงสับเปลี่ยนที่มีกลุ่มความสมมาตรแบบแถวเป็นกลุ่มย่อยปกติทำให้สามารถสรุปได้ว่า กลุ่มเรียงสับเปลี่ยนดังกล่าวนั้นสามารถแยกตัวประกอบออกได้เป็นผลคูณของกลุ่มความสมมาตรแบบแถวและกลุ่มเศษเหลือ ในส่วนของการแก้ปัญหาตัวขนย้าย ฯ นั้น ในกรณีที่กลุ่มความสมมาตรเป็นกลุ่มความสมมาตรแบบแถวปัญหาตัวขนย้าย ฯ จะสามารถถูกแก้ได้ด้วยการแก้ปัญหาการมอบหมายงานน้อยสุดซึ่งเป็นปัญหาที่สามารถแก้ได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม ในกรณีทั่วไปที่กลุ่มความสมมาตรเป็นผลคูณของกลุ่มความสมมาตรแบบแถวนั้นปัญหาตัวขนย้าย ฯ จะถูกแก้โดยการแจกแจงสมาชิกในกลุ่มโดยการแยกโคเซตแล้วจึงทำการตรวจสอบสมาชิกแต่ละตัวว่าเป็นคำตอบหรือไม่ โดยในระหว่างการแจกแจงสมาชิกนั้นจะทำการตัดแต่งต้นไม้ค้นหาด้วยการเรียงลำดับความสมมาตรตามแบบพจนานุกรมด้วย แต่เนื่องจากการค้นหาสมาชิกน้อยสุดของดับเบิลโคเซตนั้นสามารถทำได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามในกรณีที่กลุ่มเรียงสับเปลี่ยนเป็นกลุ่มที่สามารถหาผลเฉลยได้ งานวิจัยนี้จึงได้เสนอวิธีการสร้างกลุ่มย่อยที่สามารถหาผลเฉลยได้ของกลุ่มความสมมาตรแบบแถว นอกจากนี้ยังได้เสนอวิธีการตัดแต่งต้นไม้ค้นหาโดยการเปรียบเทียบตัวแทนของแต่ละโคเซตและสมาชิกน้อยสุดในดับเบิลโคเซต ซึ่งวิธีการนี้รับรองว่าจะมีเพียงโคเซตที่มีสมาชิกที่น้อยที่สุดในดับเบิลโคเซตเท่านั้นที่ผ่านเงื่อนไขนี้

ในแง่ของประสิทธิภาพของการหักล้างความสมมาตรโดยการใช้ประพจน์เลือกต่อเติมและกลุ่มย่อยที่ถูกนำเสนอนั้นจะสามารถแบ่งออกได้เป็นสองประการได้แก่จำนวนความสมมาตรที่ถูกหักล้างและความซับซ้อนทั้งเชิงพื้นที่และเวลาของการแก้ปัญหาตัวขนย้าย ฯ ในส่วนของจำนวนความสมมาตรที่ถูกหักล้างนั้นจะขึ้นอยู่กับจำนวนสมาชิกของกลุ่มย่อยที่ถูกนำเสนอ ซึ่งงานวิจัยนี้ได้พิสูจน์ว่ากลุ่มย่อยที่นำเสนอนั้นมีสมาชิกอย่างน้อยเป็นเอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชันของรากที่สองของจำนวนแถวเสมอ และในกรณีที่กลุ่มความสมมาตรเป็นกลุ่มความสมมาตรแบบแถวนั้นจะสามารถแก้ได้ด้วยการแปลงปัญหาให้เป็นปัญหาการมอบหมายงานน้อยสุดซึ่งทำให้สามารถกำจัดความสมมาตรทั้งหมดได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามได้ในกรณีนี้ ในส่วนของความซับซ้อนเชิงพื้นที่ของการแก้ปัญหาตัวขนย้าย ฯ นั้นสามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นฟังก์ชันของพหุนามเนื่องจากภาระงานย่อยของการแจกแจงสมาชิกนั้นสามารถทำงานเสร็จในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม ในส่วนของความซับซ้อนเชิงเวลานั้น งานวิจัยนี้ได้

พิสูจน์ว่าเมื่อประพจน์เลือกนำเข้ามีขนาดจำกัดแล้วจะทำให้สามารถแก้ปัญหาได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชันพหุนามเสมอ

รายการอ้างอิง

1. Benhamou, B. and L. Sais, *Tractability through Symmetries in Propositional Calculus.* Journal of Automated Reasoning, 1994. **12**(1): p. 89-102.
2. Crawford, J., et al., *Symmetry-breaking predicates for search problems.* KR, 1996. **96**: p. 148-159.
3. Aloul, F.A., I.L. Markov, and K.A. Sakallah. *Shatter: efficient symmetry-breaking for boolean satisfiability*. in *Proceedings of the 40th annual Design Automation Conference*. 2003. ACM.
4. Devriendt, J., et al. *Improved static symmetry breaking for SAT*. in *International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing*. 2016. Springer.
5. Sabharwal, A., *SymChaff: exploiting symmetry in a structure-aware satisfiability solver.* Constraints, 2009. **14**(4): p. 478-505.
6. Benhamou, B., et al. *Dynamic symmetry breaking in the satisfiability problem*. in *Proceedings of the 16th international conference on Logic for Programming, Artificial intelligence, and Reasoning. LPAR-16, Dakar, Senegal (April 25-may 1, 2010)*. 2010.
7. Devriendt, J., et al. *Symmetry propagation: Improved dynamic symmetry breaking in SAT*. in *Tools with Artificial Intelligence (ICTAI), 2012 IEEE 24th International Conference on*. 2012. IEEE.
8. Schaafsma, B., M.J. Heule, and H. Van Maaren. *Dynamic symmetry breaking by simulating Zykov contraction*. in *International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing*. 2009. Springer.
9. Benhamou, B., et al. *Enhancing clause learning by symmetry in SAT solvers*. in *2010 22nd International Conference on Tools with Artificial Intelligence*. 2010. IEEE.
10. Devriendt, J., B. Bogaerts, and M. Bruynooghe. *Symmetric explanation learning: Effective dynamic symmetry handling for SAT*. in *International*

Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing. 2017. Springer.

11. Dixon, H.E., M.L. Ginsberg, and A.J. Parkes, *Generalizing Boolean satisfiability I: Background and survey of existing work.* Journal of Artificial Intelligence Research, 2004. **21**: p. 193-243.
12. Dixon, H.E., et al., *Generalizing Boolean satisfiability II: Theory.* Journal of Artificial Intelligence Research, 2004. **22**: p. 481-534.
13. Zhang, L., et al. *Efficient conflict driven learning in a boolean satisfiability solver*. in *Proceedings of the 2001 IEEE/ACM international conference on Computer-aided design*. 2001. IEEE Press.
14. Dixon, H.E., et al., *Generalizing Boolean satisfiability III: Implementation.* Journal of Artificial Intelligence Research, 2005. **23**: p. 441-531.
15. Babai, L. and E.M. Luks. *Canonical labeling of graphs*. in *Proceedings of the fifteenth annual ACM symposium on Theory of computing*. 1983. ACM.
16. Eugene, M. *Permutation groups and polynomial-time computation*. in *Groups and Computation: Workshop on Groups and Computation, October 7-10, 1991*. 1993. American Mathematical Soc.
17. Flener, P., et al. *Symmetry in matrix models*. in *Proceedings of SymCon*. 2001. Citeseer.
18. Devriendt, J., B. Bogaerts, and M. Bruynooghe. *BreakIDGlucose: On the importance of row symmetry in SAT*. in *Proceedings 4th International Workshop on the Cross-Fertilization Between CSP and SAT*. 2014.

บรรณานุกรม

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นาย เตวิช ตรีธัญญูพงศ์
วัน เดือน ปี เกิด	9 พฤศจิกายน 2537
สถานที่เกิด	จังหวัดเชียงใหม่ ประเทศไทย
วุฒิการศึกษา	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ที่อยู่ปัจจุบัน	99/109 ตำบลสันนาเม็ง อำเภอสันทราย จังหวัดเชียงใหม่ 50210