ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2

นางสาวยุวรรณดา พรหมนิวาส

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา
คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2553
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

EFFECTS OF ORGANIZING LEARNING ACTIVITIES USING THE VAN HIELE MODEL ON MATHEMATICS LEARNING ACHIEVEMENT AND GEOMETRIC REASONING ABILITY OF EIGHTH GRADE STUDENTS

Miss Yuwanda Phromniwas

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Education Program in Mathematics Education

Department of Curriculum, Instruction and Educational Technology

Faculty of Education

Chulalongkorn University

Academic Year 2010

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2
โดย	นางสาวยุวรรณดา พรหมนิวาส
สาขาวิชา	การศึกษาคณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

..... คณบดีคณะครุศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร. ศิริชัย กาญจนวาสี)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. อัมพร ม้าคนอง)

..... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล)

..... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร. ปรีชา เนาว์เย็นผล)

ยุวรรณดา พรหมนิวาส : ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2. (EFFECTS OF ORGANIZING LEARNING ACTIVITIES USING THE VAN HIELE MODEL ON MATHEMATICS LEARNING ACHIEVEMENT AND GEOMETRIC REASONING ABILITY OF EIGHTH GRADE STUDENTS) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ผศ.ดร.สมยศ ชิดมงคล, 224 หน้า.

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ ดังนี้

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางเรียนคณิตศาสตร์ระหว่างนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีกับกลุ่มที่เรียนแบบปกติ

2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตระหว่างนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลสอนของแวนฮีลีกับกลุ่มที่เรียนแบบปกติ

ประชากรในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษากรุงเทพมหานคร เขต 1 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัย จำนวน 77 คน เป็นนักเรียนกลุ่มทดลอง จำนวน 41 คน และนักเรียนกลุ่มควบคุม จำนวน 36 คน โดยนักเรียนกลุ่มทดลองได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี และนักเรียนกลุ่มควบคุมได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ แบบวัดพื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และแบบวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้ค่ามัชฌิมเลขคณิต ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการทดสอบค่าที (t-test)

ผลการวิจัยพบว่า

1. นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติ ที่ระดับนัยสำคัญ .05

2. นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตสูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติ ที่ระดับนัยสำคัญ .05

ภาควิชา หลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา ลายมือชื่อนิสิต .....

สาขาวิชา การศึกษาคณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก .....

ปีการศึกษา 2553

5083386327 : MAJOR MATHEMATICS EDUCATION
KEYWORDS: THE VAN HIELE MODEL / GEOMETRIC REASONING ABILITY/ MATHEMATICS LEARNING ACHIEVEMENT

YUWANDA PHROMNIWAS: EFFECTS OF ORGANIZING LEARNING ACTIVITIES USING THE VAN HIELE MODEL ON MATHEMATICS LEARNING ACHIEVEMENT AND GEOMETRIC REASONING ABILITY OF EIGHTH GRADE STUDENTS. ADVISOR: ASST. PROF. SOMYOT CHIDMONGKOL, Ph.D., 224 pp.

The purposes of this research were :

1) to compare mathematics learning achievements of eighth grade students between groups being organized learning activities using the Van Hiele model and conventional approach, and

2) to compare geometric reasoning abilities of eighth grade students between groups being organized learning activities using the Van Hiele model and conventional approach.

The population of this research was eighth grade students in Bangkok Education service area office 1 under the office of The Basic Education Commission, Ministry of Education. The subjects were 77 eighth grade students in academic year 2010 at Santiratwitthayalai School. They were divided into two groups, one experimental group with 41 students and the other control group with 36 students. The students in experimental group were organized learning activities using the Van Hiele model and those in control group were organized learning activities using conventional approach. The data collecting instruments were the basic knowledge test in geometric reasoning, the mathematics learning achievement test and geometric reasoning ability test. The experimental instruments were lesson plans being organized learning activities according to the Van Hiele model and the conventional lesson plans. The data were analyzed by means of arithmetic mean, standard deviation, and t-test.

The results of the study revealed that:

1. Mathematics learning achievement of eighth grade students being organized learning activities using the Van Hiele model was higher than that of students being organized learning activities using conventional approach at .05 level of significance.

2. Geometric reasoning ability of eighth grade students being organized learning activities using the Van Hiele model was higher than that of students being organized learning activities using conventional approach at .05 level of significance.

Department : Curriculum, Instruction and Educational Technology Student's Signature .....

Field of Study : Mathematics Education Advisor's Signature .....

Academic Year : 2010 .....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จลุล่วงได้เป็นอย่างดีด้วยความอนุเคราะห์ทุนอุดหนุนการศึกษาจากสมาคมนิสิตเก่าจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในพระบรมราชูปถัมภ์ และทุนอุดหนุนการวิจัยจากบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และด้วยได้รับความเมตตาและความกรุณาอย่างสูงจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ โดยได้ให้แนวคิด ให้คำปรึกษา คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องในการทำวิทยานิพนธ์ตั้งแต่เริ่มต้นจนสิ้นสุดในปัจจุบัน ซึ่งผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความเอาใจใส่ดูแลเป็นอย่างดียิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตรจารย์ ดร. อัมพร ม้าคนอง ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และรองศาสตราจารย์ ดร. ปรีชา เนาว์เย็นผล กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ รวมทั้งคณาจารย์สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ทุกท่าน ที่ได้ให้คำแนะนำ และข้อเสนอแนะในการปรับปรุงวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านเป็นอย่างสูงที่ได้เสียสละเวลาให้ความช่วยเหลือ และให้คำแนะนำในการปรับปรุงแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย จนเป็นเครื่องมือที่สมบูรณ์เป็นประโยชน์ต่อการวิจัยครั้งนี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการ คณะครูอาจารย์ และนักเรียนโรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม ที่ให้ความร่วมมือในการนำเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยไปทดลองใช้ ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ณัฐกิจ บัวขม ผู้อำนวยการโรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัย คณะครูอาจารย์กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ทุกคน ที่คอยดูแลเอาใจใส่ และคอยช่วยเหลือตลอดระยะเวลาในการเก็บรวบรวมข้อมูล นอกจากนี้ขอขอบใจนักเรียนชั้น ม.2/3 และนักเรียนชั้น ม.2/4 ประจำปีการศึกษา 2553 ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ ร่วมมือในการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นอย่างดี

ขอขอบพระคุณรุ่นพี่นิสิตบัณฑิตศึกษาและเพื่อนๆ สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ทุกท่าน ที่ได้ให้กำลังใจ และช่วยเหลือในการทำวิทยานิพนธ์มาโดยตลอด

ขอขอบคุณนางสาวภัคณัฏฐ์ สมพงษ์ธรรม และนางสาวสุนิดตา เรืองสิริเศรษฐ์ เพื่อนที่แสนดีคอยให้กำลังใจ คอยห่วงใย ช่วยเหลือ และให้คำแนะนำในทุกๆ เรื่อง ตลอดระยะเวลาที่ศึกษาในระดับปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต และขอขอบคุณน้องชาย รวมทั้งญาติๆ ที่คอยให้กำลังใจในการเรียนและการทำวิทยานิพนธ์ตลอดมา

ท้ายที่สุดขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อศุภโชค และคุณแม่พัชราพร พรหมนิวาส เป็นอย่างสูง ที่อบรมสั่งสอน ให้กำลังใจตลอดการทำวิทยานิพนธ์และตลอดมา จนกระทั่งประสบความสำเร็จดังเช่นทุกวันนี้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย…… ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ..... จ

กิตติกรรมประกาศ..... ฉ

สารบัญ..... ช

สารบัญตาราง…… ญ

สารบัญภาพ…….……..... ฎ

บทที่

1 **บทนำ**……..…… 1

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา……..…… 1

2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย……..…… 8

3. สมมติฐานการวิจัย……..……... 9

4. ขอบเขตของการวิจัย……..…… 12

5. คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย…….. 12

2 **เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง**……..……... 15

1. ความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลของแวนฮีลี……..…… 17

1.1 ความหมายและประวัติความเป็นมาของเรขาคณิต……..…….. 17

1.2 ความสำคัญของเรขาคณิต……..…… 18

1.3 พัฒนาการของเรขาคณิต……..……..…… 19

1.4 การเรียนการสอนเรขาคณิต.....……..…… 23

1.5 ความเป็นมาของโมเดลของแวนฮีลี (Van Hiele Model)…..…… 27

1.6 ระดับความคิดทางเรขาคณิต…..……..…….. 28

1.7 ลักษณะสำคัญของระดับความคิดทางเรขาคณิต……... 30

1.8 ขั้นตอนการสอนเพื่อพัฒนาความคิดทางเรขาคณิต..……..…….. 30

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์……..…….. 32

2.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน……..…….. 32

บทที่		หน้า
	2.2 องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	33
	2.3 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	34
	2.4 ประเภทของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	38
	3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต	39
	3.1 ความเป็นมาของการให้เหตุผล	39
	3.2 ความหมายและความสำคัญของการให้เหตุผล	40
	3.3 ประโยชน์ของการให้เหตุผล	41
	3.4 วิธีการให้เหตุผล	42
	3.5 ความหมายของการให้เหตุผลทางเรขาคณิต	43
	3.6 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล	45
	3.7 แนวทางการวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต	46
	4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	56
	4.1 งานวิจัยต่างประเทศ	56
	4.2 งานวิจัยในประเทศ	61
3	**วิธีดำเนินการวิจัย**	64
	1. การศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	64
	2. การออกแบบการวิจัย	65
	3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง	65
	4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	67
	5. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล	87
	6. การวิเคราะห์ข้อมูล	88
	7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย	89
4	**ผลการวิเคราะห์ข้อมูล**	90
	1. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ	93
	2. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ	95
5	**สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ**	122
	1. สรุปผลการวิจัย	124
	2. อภิปรายผล	125
	3. ข้อเสนอแนะ	129

บทที่ หน้า

รายการอ้างอิง..... 133

ภาคผนวก..... 141

ภาคผนวก ก..... 142

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย..... 142

ภาคผนวก ข..... 145

หนังสือเชิญผู้ทรงคุณวุฒิ..... 146

หนังสือขอความร่วมมือในการวิจัย..... 151

ภาคผนวก ค..... 154

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง..... 154

ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม..... 155

ตัวอย่างการใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้เกิดการคิดของนักเรียนกลุ่มทดลอง..... 188

ตัวอย่างแบบฝึกหัด จากหนังสือเรียน 190

ภาคผนวก ง..... 192

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล..... 193

ภาคผนวก จ..... 221

ผลทดสอบความแตกต่างก่อนเรียนและหลังเรียน..... 222

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์..... 224

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	แสดงรูปแบบการวิจัย	65
2	แสดงแผนการจัดการเรียนรู้ และสาระการเรียนรู้ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ	69
3	แสดงการเปรียบเทียบขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม.....	71
4	แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และค่าที (t-test) ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี และกลุ่มควบคุมที่เรียนแบบปกติ.....	93
5	แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และที (t-test) ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี และกลุ่มควบคุมที่เรียนแบบปกติ	94
6	แสดงค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต.....	194
7	แสดงการวิเคราะห์จำนวนคาบกับความสอดคล้องของจำนวนข้อสอบในแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ	201
8	แสดงการวิเคราะห์พฤติกรรมที่ต้องการในแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ.....	203
9	แสดงค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนก ของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ.....	205
10	แสดงการวิเคราะห์ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ต้องการวัดและพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัยของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ.....	209
11	แสดงค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต.....	215

ตารางที่ หน้า

12 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ก่อนการทดลอง (คะแนนสอบกลางภาคเรียนที่ 1 สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน ปีการศึกษา 2553) ค่าเอฟ (F-test) และค่าที (t-test)..... 222

13 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนการทดลอง ค่าเอฟ (F-test) และค่าที (t-test)..... 223

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	แสดงกระบวนการการให้เหตุผล…….……	43
2	แสดงโครงสร้างและรายละเอียดของขั้นตอนการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี…….…..…….…..	69
3	แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในใบงานที่ 4.1…….....	97
4	แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในใบงานที่ 4.2……	99
5	แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในใบงานที่ 4.3……	101
6	แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในใบงานที่ 4.2……	104
7	แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในใบงานที่ 4.3……	106
8	แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มควบคุมในใบงานที่ 4.1……..…	109
9	แสดงการตอบคำถามในใบงานที่ 4.1 ของนักเรียนกลุ่มควบคุมที่ยังไม่สามารถสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ……..……..	110
10	แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มควบคุมในใบงานที่ 4.2……..…	112
11	แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มควบคุมในใบงานที่ 4.3……..…	114
12	แสดงการตอบคำถามในใบงานที่ 4.3 ข้อที่ 2 ของนักเรียนกลุ่มควบคุมที่ยังไม่สามารถให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเอง…….....	115
13	แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มควบคุมในใบงานที่ 4.2……..…	117
14	แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มควบคุมในใบงานที่ 4.3……..…	119
15	แสดงการตอบคำถามในใบงานที่ 4.3 ข้อที่ 2 ของนักเรียนกลุ่มควบคุมที่ยังไม่สามารถให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเอง……..	120

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ตามแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติฉบับที่ 10 (พ.ศ.2550 - 2554) มีสาระสำคัญที่มุ่งเน้นการพัฒนาและการเตรียมความพร้อมของคนให้สามารถปรับตัวพร้อมรับการเปลี่ยนแปลงในอนาคตและแสวงหาประโยชน์อย่างรู้เท่าทันโลกาภิวัฒน์และสร้างภูมิคุ้มกันตามหลักปรัชญาของเศรษฐกิจพอเพียง อีกทั้งการเปลี่ยนแปลงทางเทคโนโลยีอย่างก้าวกระโดดและความก้าวหน้าอย่างรวดเร็วของเทคโนโลยี จึงจำเป็นต้องเตรียมพร้อมให้ทันต่อการเปลี่ยนแปลงของเทคโนโลยีในอนาคต สิ่งแรกที่ต้องคำนึงถึงคือ การศึกษา ซึ่งการบริหารจัดการองค์ความรู้อย่างเป็นระบบ ทั้งการพัฒนาหรือสร้างองค์ความรู้ รวมถึงการประยุกต์ใช้เทคโนโลยีที่เหมาะสมมาผสมผสาน ย่อมสร้างและพัฒนากำลังคนที่เป็นเลิศโดยเฉพาะในการสร้างสรรค์นวัตกรรมและองค์ความรู้ อีกทั้งการส่งเสริมให้คนไทยเกิดการเรียนรู้อย่างต่อเนื่องตลอดชีวิต และสามารถจัดการองค์ความรู้ทั้งภูมิปัญญาท้องถิ่นและองค์ความรู้สมัยใหม่ตั้งแต่ระดับชุมชนถึงประเทศได้นั้น ย่อมเป็นการสร้างพลังขับเคลื่อนการพัฒนาประเทศให้เกิดความสมดุล เป็นธรรมและยั่งยืน มุ่งสู่ “สังคมอยู่เย็นเป็นสุขร่วมกัน” (สำนักงานคณะกรรมการพัฒนาการเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ, 2549)

วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับโดยตรงกับการคิด และการใช้สติปัญญาของมนุษย์ (อัมพร ม้าคนอง, 2547: 2) ช่วยพัฒนากระบวนการคิดของคน ช่วยสร้างเสริมคุณลักษณะที่สำคัญ เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดอย่างมีเหตุผล เราใช้คณิตศาสตร์พิสูจน์สิ่งต่างๆ อย่างมีเหตุผล (ฉวีวรรณ เศวตมาลย์, 2545 : 16) วิชาคณิตศาสตร์จึงมีความจำเป็นในการดำรงชีวิต และยังเป็นพื้นฐานในการศึกษาวิทยาการสาขาอื่นต่อไป (ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี, 2542: 1) อีกทั้งวิชาคณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนาศักยภาพของบุคคล ช่วยให้เป็นคนมีเหตุผล คิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีระบบ รู้จักวางแผนในการทำงาน มีความรับผิดชอบในงานที่ได้รับมอบหมายและมีความสามารถในการแก้ปัญหา ช่วยเสริมสร้างให้คิดอย่างมีวิจารณญาณและเป็นระบบ ทำให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วน รอบคอบ สามารถคาดการณ์ วางแผนตัดสินใจและแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม ซึ่งเป็นประโยชน์ในชีวิตประจำวัน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2551: 1) จะเห็นว่าการเรียนคณิตศาสตร์จึงมีความสำคัญต่อการพัฒนาคน ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนามนุษย์ให้สมบูรณ์ มีความสมดุลทั้งทางร่ายกาย จิตใจ สติปัญญา และอารมณ์ สามารถคิดเป็น ทำเป็น

แก้ปัญหาเป็น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข ดังที่ยุพิน พิพิธกุล (2545: 1) ได้กล่าวถึงความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ไว้ว่า “วิชาคณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับความคิด การคิดทางคณิตศาสตร์นั้นต้องมีแบบแผนมีแบบรูป (Pattern) ทุกขั้นตอนจะตอบได้และจำแนกออกมาให้เห็นจริง ช่วยให้เป็นผู้ที่มีเหตุผล เป็นคนใฝ่รู้ตลอดจนพยายามคิดสิ่งที่แปลกใหม่ และนำคณิตศาสตร์ไปแก้ไขปัญหาทางวิทยาศาสตร์ได้ คณิตศาสตร์จึงเป็นรากฐานแห่งความเจริญของเทคโนโลยีด้านต่างๆ”

ในปัจจุบันการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยังไม่ประสบความสำเร็จเท่าที่ควร พิจารณาได้จากรายงานการประเมินผลสัมฤทธิ์ของผู้เรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2544 ปีการศึกษา 2549 ของสำนักทดสอบทางการศึกษา (2549) สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน โดยการสุ่มตัวอย่างนักเรียนครอบคลุมทุกโรงเรียน ทุกเขตพื้นที่การศึกษาทั่วประเทศ ผลการประเมินพบว่าผลการประเมินคุณภาพการศึกษาขั้นพื้นฐาน เพื่อประกันคุณภาพผู้เรียน ปีการศึกษา 2549 นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ได้คะแนนในกลุ่มสาระคณิตศาสตร์ร้อยละ 38.87 และ 31.15 ตามลำดับ ซึ่งเมื่อแยกพิจารณาความรู้ความสามารถด้านโครงสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ และด้านทักษะเฉพาะวิชา นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ได้คะแนนในกลุ่มสาระคณิตศาสตร์ด้านโครงสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ร้อยละ 44.02 และ 33.06 ตามลำดับ ส่วนคะแนนในกลุ่มสาระคณิตศาสตร์ด้านทักษะเฉพาะวิชาได้ร้อยละ 37.2 และ 27.59 ตามลำดับ เมื่อพิจารณาคะแนนเฉลี่ยร้อยละเทียบกับเกณฑ์การประเมินขั้นผ่าน พบว่า วิชาคณิตศาสตร์มีค่าเฉลี่ยร้อยละต่ำกว่าเกณฑ์การประเมินขั้นผ่าน

เมื่อเปรียบเทียบผลการประเมินผลสัมฤทธิ์นักเรียน ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2544 ในปีการศึกษา 2546 กับปีการศึกษา 2549 พบว่า นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ต่างก็มีผลสัมฤทธิ์ในกลุ่มสาระคณิตศาสตร์ต่ำกว่าร้อยละ 50 ซึ่งจัดอยู่ในเกณฑ์ที่ต้องปรับปรุง (สำนักทดสอบทางการศึกษา, 2549) ทั้งนี้ยังพบว่าผลสัมฤทธิ์ในกลุ่มสาระคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในปีการศึกษา 2549 ลดลงต่ำกว่าปีการศึกษา 2546 แทบทั้งสิ้น เมื่อจำแนกผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนเป็นด้านโครงสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ และทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ พบว่านักเรียนมีความรู้ความสามารถด้านโครงสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ และทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับค่อนข้างต่ำ และกว่าร้อยละ 95 ของนักเรียนทั้งหมดอยู่ในเกณฑ์ที่พอใช้และปรับปรุงตามลำดับ

การที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำ อาจมีสาเหตุมาจากทั้งตัวนักเรียน ครู และกระบวนการจัดการเรียนรู้ การที่นักเรียนมีพื้นฐานความรู้เดิมไม่เพียงพอที่จะนำมาใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่ ทำให้เรียนตามเพื่อนไม่ทัน ไม่เข้าใจบทเรียนใหม่ (ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี, 2542: 145) และปัจจัยหนึ่งที่สำคัญคือ วิธีสอน เนื่องจากวิธีสอนมีความสำคัญมาก ถ้าผู้สอนมีความรู้ในเนื้อหาวิชาเป็นอย่างดี แต่ไม่รู้จักวิธีการสอน เทคนิคการสอน หรือกลวิธีการสอน แล้วผู้เรียนจะไม่เข้าใจหรือไม่สามารถเรียนรู้ตามจุดประสงค์ที่กำหนดไว้ได้ เนื่องจากครูส่วนใหญ่เน้นวิธีการสอนแบบบรรยาย เน้นการสอนให้เข้าใจขั้นตอนการหาคำตอบหรือสอนให้นักเรียนท่องจำมากกว่าการทำความเข้าใจ ดังนั้นในการจัดการเรียนการเรียนรู้เพื่อเพิ่มผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ครูจึงต้องจัดกระบวนการเรียนรู้ให้นักเรียนเกิดมโนมติ (concept) ด้วยตนเอง และนำไปสู่ข้อสรุปได้ รวมถึงสามารถนำข้อสรุปนั้นไปใช้ โดยเน้นในขณะที่สอนและแยกแยะให้นักเรียนเห็นองค์ประกอบในเรื่องที่กำลังเรียน ฝึกให้นักเรียนรู้จักบทนิยาม หลักการ กฎ สูตร สัจพจน์ ทฤษฎี จากเรื่องที่เรียนไปแล้วในสถานการณ์ที่มีองค์ประกอบคล้ายคลึงแต่ซับซ้อนยิ่งขึ้น (ยุพิน พิพิธกุล, 2545: 6) ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ก็มีความสำคัญไม่น้อยไปว่าความรู้ทางคณิตศาสตร์ เพราะทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถที่จะนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ เพื่อให้ได้มาซึ่งความรู้และประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ เป็นเครื่องมือของผู้เรียนในการทำให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์มีความหมายและมีคุณค่า นอกจากนี้ยังเป็นส่วนหนึ่งขององค์ประกอบที่สำคัญของทักษะชีวิต (อัมพร ม้าคนอง, 2547: 94)

ดังนั้นการปฏิรูปการศึกษาจึงได้ระบุจุดมุ่งหมายที่ชัดเจนซึ่งถือเป็นมาตรฐานการเรียนรู้ให้ผู้เรียนเกิดคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ดังที่หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ.2544 ได้กล่าวถึงจุดมุ่งหมายไว้ข้อหนึ่งว่า “มีทักษะและกระบวนการ โดยเฉพาะทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ทักษะการคิด การสร้างปัญญา และทักษะในการดำเนินชีวิต” เพื่อมุ่งพัฒนาคนไทยให้เป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์ เป็นคนดี มีปัญญา มีความสุข และมีความเป็นไทย มีศักยภาพในการศึกษาต่อ และประกอบอาชีพ นอกจากนี้ยังระบุจุดมุ่งหมายไว้อีกด้วยว่า “มีความรู้อันเป็นสากล รู้เท่าทันการเปลี่ยนแปลงและความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาการ มีทักษะและศักยภาพในการจัดการ การสื่อสารและการใช้เทคโนโลยี ปรับวิธีการคิด วิธีการทำงานได้เหมาะสมกับสถานการณ์” นั่นแสดงให้เห็นว่าผู้เรียนต้องได้รับการพัฒนาทั้งในด้านความรู้ควบคู่ทักษะและกระบวนการ

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 (กระทรวงศึกษาธิการ, 2544: 20 - 22) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จึงได้กำหนดสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ไว้ 6 สาระ

ซึ่งสาระเรขาคณิตก็เป็นสาระการเรียนรู้ที่สำคัญและจำเป็นที่จะต้องบรรจุไว้ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ในทุกระดับซึ่งได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ไว้ตั้งแต่ช่วงชั้นที่ 1 – 3 (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3) ดังที่ปานทอง กุลนาถศิริ (2541: 3) ได้กล่าวไว้ว่า

> "...หลักสูตรคณิตศาสตร์ไม่ว่าในยุคสมัยใด จะมีการพัฒนาปรับปรุงอย่างไร เรขาคณิตจะต้องเป็นสาขาหนึ่งที่ผู้พัฒนาเห็นสมควรให้บรรจุลงในหลักสูตร...ธรรมชาติของวิชาเรขาคณิตเป็นวิชาที่เอื้อที่จะสอนให้ผู้เรียนเป็นผู้ที่มีวิจารณญาณ ช่างสังเกต ช่างสำรวจ มีเหตุผล ดังนั้นหากผู้สอนได้จัดกิจกรรมที่เหมาะสมและถูกต้องก็จะช่วยให้เยาวชนเป็นเยาวชนที่มีคุณลักษณะดังกล่าว อันเป็นลักษณะที่พึงประสงค์ของชาติ เรขาคณิตจึงเป็นเนื้อหาที่มีความสำคัญและจำเป็นเนื้อหาหนึ่ง ที่จะต้องบรรจุไว้ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ในทุกระดับ..."

ดังที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่า เรขาคณิตเป็นวิชาที่เรียนรู้โดยผ่านทางการมองเห็น (Visual subject) เป็น 1 ใน 3 สาขาของคณิตศาสตร์ (มานะ เอกจริยวงศ์, 2547: 51) เป็นวิชาที่มีบทบาทสำคัญต่อการศึกษาวิทยาการสาขาอื่นๆ อย่างมาก อาทิ วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ สถาปัตยกรรมศาสตร์ และศิลปศาสตร์ สิ่งที่ปรากฏอยู่รอบตัวเราทั้งที่เป็นธรรมชาติและสิ่งสร้างสรรค์ของมนุษย์ ส่วนใหญ่มีรูปแบบทางเรขาคณิตหรือใช้ความรู้ทางเรขาคณิตมาเกี่ยวข้องด้วย อีกทั้งที่สำคัญคือ เรขาคณิตยังเป็นวิชาที่มีการฝึกทักษะความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (Spatial Ability) (Usiskin, 1987: 17 - 31) ทักษะการคิดหาเหตุผล และทักษะการแก้ปัญหา ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการเรียนและชีวิตประจำวัน (DeGuire, 1987: 59 - 68; Milauskas, 1987: 69 - 84 อ้างถึงใน วรรณวิภา สุทธเกียรติ, 2542: 1) เป็นการช่วยพัฒนานักเรียนให้เป็นผู้มีเหตุผล ทำงานเป็นระบบ มีขั้นตอน ลักษณะโจทย์บางรูปแบบยังช่วยพัฒนาความสามารถด้านการสำรวจเพื่อการค้นพบ การตั้งข้อคาดเดา การสืบเสาะหาเหตุผลสนับสนุนข้อคาดเดา ทั้งนี้เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่นำไปใช้แก้ปัญหาในที่สุด ซึ่งจะเห็นจะเห็นได้ว่าสาระการเรียนรู้ที่เป็นหัวใจสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์และจำเป็นต้องมีควบคู่กับการเรียนเรขาคณิต คือ สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ที่ทำให้การเรียนเรขาคณิตมีประสิทธิภาพ ทั้งนี้สังเกตได้ว่าจากหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระเรขาคณิตในช่วงชั้นที่ 3 เน้นด้านการปฏิบัติ การวาด การสร้าง สืบเสาะสังเกต คาดการณ์เกี่ยวกับสมบัติทางเรขาคณิตการพิสูจน์ วิเคราะห์และอธิบายเพื่อหาข้อสรุปและการให้เหตุผล (ชนิศวรา ฉัตรแก้ว, 2549:1 - 5)

จากที่กล่าวมาข้างต้นสะท้อนให้เห็นว่าหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับต่างๆ เห็นว่าเรขาคณิตนั้นมีความสำคัญยิ่ง แต่การจัดการเรียนการสอนก็ไม่ได้ตอบสนองต่อการพัฒนาศักยภาพทางเรขาคณิตของผู้เรียน ยังพบว่าผู้เรียนประสบปัญหาในการเรียนเรขาคณิต อาทิ ไม่เข้าใจความหมายของโจทย์หรือทฤษฎีบท ไม่สามารถแยกแยะโจทย์ได้ว่าข้อความตอนใดเป็นเหตุหรือสิ่งที่กำหนดให้ และตอนใดเป็นผลหรือสิ่งที่ต้องพิสูจน์ ตลอดจนไม่สามารถหาแนวทางการพิสูจน์ได้ (สมพล เล็กสกุล อ้างถึงในสมวงษ์ แปลงประสพโชค) ซึ่งสอดคล้องกับที่ Gonobolin (1954: 61 cited in De Villers, 1999) ได้ยกตัวอย่างปัญหาเกี่ยวกับการเรียนเรขาคณิตไว้ว่า "…นักเรียนไม่เห็นความจำเป็นของการพิสูจน์อย่างมีเหตุผลของทฤษฎีบททางเรขาคณิต โดยเฉพาะเมื่อการพิสูจน์เหล่านี้เป็นคุณลักษณะที่ปรากฏชัดเจนหรือถูกสร้างขึ้นเป็นที่ประจักษ์ชัด" เช่นเดียวกัน วัฒนา มณีวงศ์ (2542 อ้างถึงใน นวลศรี ชำนาญกิจ, 2550: 1) ที่ได้กล่าวไว้ว่า

> "…เนื้อหาเรขาคณิตถือว่ามีความสำคัญแต่ในปัจจุบันพบว่าการเรียนการสอนเรขาคณิตเป็นปัญหามากสำหรับครูสอนคณิตศาสตร์…นักเรียนไม่ชอบการพิสูจน์เรขาคณิต ไม่ทราบแนวทางในการพิสูจน์ นักเรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร ไม่สามารถเชื่อมโยงสิ่งที่มีอยู่หรือสิ่งที่ทราบมาเป็นเหตุผลในการพิสูจน์ นักเรียนขาดทักษะการให้เหตุผล..."

เนื่องจากการสอนเรขาคณิตนั้นเน้นไปที่สัญลักษณ์ที่เป็นทางการ การพิสูจน์ตามรูปแบบ การเรียกชื่อที่ได้จากการท่องจำ ผู้เรียนแทบไม่มีโอกาสได้มีประสบการณ์เกี่ยวกับความเข้าใจในเรขาคณิตอย่างแท้จริง รวมไปถึงไม่ได้มีโอกาสใช้การให้เหตุผลทางเรขาคณิตซึ่งจะทำให้เรียนรู้เรขาคณิตอย่างมีความหมาย (เจนสมุทร แสงพันธ์, 2550: 3 – 16) ส่งผลให้การเรียนรู้เรขาคณิตของนักเรียนไม่เป็นไปตามข้อคาดหวังของผู้เรียนในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ที่ต้องการให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจในคณิตศาสตร์พื้นฐานที่เกี่ยวกับเรขาคณิตพร้อมทั้งสามารถนำความรู้นั้นไปประยุกต์ได้ ทั้งนี้ยังได้กล่าวถึงคุณภาพของผู้เรียน เมื่อเรียนจบในช่วงชั้นที่ 3 ไว้ว่า ผู้เรียนควรมีความสามารถนึกภาพและอธิบายลักษณะของรูปเรขาคณิตสามมิติจากภาพสองมิติ มีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของความเท่ากันทุกประการและนำความคล้ายของรูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน และสามารถนำสมบัติเหล่านั้นไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2544: 4)

การเรียนรู้สาระการเรียนรู้เรขาคณิตที่ถูกกำหนดไว้ในสาระที่ 3 ซึ่งเป็นสาระการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ และนำสมบัติทางเรขาคณิตไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้

นั้น เป็นความยากลำบากของผู้เรียน เนื่องด้วยผู้เรียนขาดประสบการณ์ในการพิสูจน์ ไม่ให้ความสำคัญกับการพิสูจน์เละการเขียนขั้นตอนการพิสูจน์ ส่วนใหญ่จะสนใจการแก้ปัญหาโจทย์โดยมิได้คำนึงถึงการนำสมบัติทางเรขาคณิตให้เหตุผลประกอบการได้มาซึ่งคำตอบ จึงทำให้ขาดทักษะที่สำคัญในการเขียนการพิสูจน์อย่างเป็นขั้นเป็นตอนและสมเหตุสมผล ซึ่งเป็นสาเหตุประการสำคัญประการหนึ่งในการเขียนพิสูจน์เรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาไม่ได้ ซึ่งสอดคล้องกับที่ Carroll (1998: 398 – 403) ได้พบว่านักเรียนระดับมัธยมศึกษามักขาดประสบการณ์ในการให้เหตุผลเกี่ยวกับความคิดทางเรขาคณิต ผู้สอนควรจะหาวิธีการแก้ไขจุดบกพร่องตรงจุดนี้ จุดที่ควรพิจารณาสำหรับผู้สอนไม่ใช่เพียงแต่ให้ผู้เรียนพิสูจน์ได้เท่านั้น แต่ควรสร้างความเคยชินกับเรขาคณิต การนำสมบัติทางเรขาคณิตไปใช้ในการให้เหตุผลประกอบการแก้ปัญหา และการเขียนพิสูจน์เรขาคณิต รวมทั้งสร้างความเข้าใจอย่างลึกซึ้ง เพื่อให้ผู้เรียนสามารถประมวลความคิดของการพิสูจน์ได้ ซึ่งจะเป็นกุญแจสำคัญนำไปสู่การประยุกต์การพิสูจน์และการคิดวิเคราะห์ สอดคล้องกับ สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย (2550: 16 – 20) ที่ได้เขียนบทความถึงวิธีการจัดการเรียนรู้เรขาคณิตไว้ว่า การนำรูปทางเรขาคณิตมานำเสนอในรูปของกิจกรรมเพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกปฏิบัติ ฝึกการสังเกตสามารถช่วยให้ผู้เรียนเกิดการประมวลความคิดและความเข้าใจได้ รวมทั้งช่วยให้ผู้เรียนค่อย ๆ พัฒนาความเข้าใจของตนเองได้ อีกทั้งสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิตในรูปที่นำเสนอนั้นได้ถูกต้อง การสร้างกิจกรรมดังกล่าวนี้ถ้าผู้สอนกระทำได้จะเป็นกิจกรรมที่มีความหมาย และมีคุณค่า เนื่องจากสามารถช่วยให้ผู้เรียนได้เกิดการประยุกต์ใช้ในการพิสูจน์และช่วยให้เกิดความเคยชิน ในการพิสูจน์รูปทางเรขาคณิตอย่างเดียวคงจะไร้ความหมายและไร้คุณค่า ถ้าผู้สอนไม่กระตุ้นผู้เรียนให้เกิดการคิด และการทำความเข้าใจในกิจกรรมที่ผู้สอนนำเสนอ การจัดกิจกรรมการเรียนสอนเรขาคณิตให้ได้ผลดีและก่อให้เกิดเป็นความรู้ที่ยั่งยืนครูควรให้นักเรียนมองเห็นประโยชน์ ความสำคัญ การชื่นชมความงามของเรขาคณิตที่ใกล้ตัวนักเรียนและพยายามเชื่อมโยงประสบการณ์ต่างๆ ของนักเรียนเข้ากับหลักการทางเรขาคณิต โดยใช้วิธีการสอน การใช้สื่อการเรียนรู้และชี้แนะที่เหมาะสม ให้นักเรียนได้พัฒนาตนเองได้อย่างเต็มตามศักยภาพของนักเรียน ซึ่งเรขาคณิตเป็นสาระการเรียนรู้ที่มีสื่อดึงดูดความสนใจและจินตนาการของนักเรียนตั้งแต่ระดับประถมศึกษาตอนต้น จนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ฉะนั้นกิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิต รวมทั้งความรู้และทักษะการสอนของครูจะช่วยทำให้นักเรียนเกิดความรู้ความสนุกสนานในการเรียน เกิดความตั้งใจเรียน อันจะทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ (สิริพร ทิพย์คง, 2545 และฉวีวรรณ เศวตมาลย์, 2543)

จากสภาพปัญหาต่างๆ ของการเรียนการสอนเรขาคณิตดังกล่าวมาข้างต้น การที่นักเรียนจะสามารถเรียนเนื้อหาเกี่ยวกับเรขาคณิตให้มีประสิทธิภาพนั้น ครูผู้สอนต้องจัดการเรียนรู้

ด้วยวิธีการ และสื่อการเรียนที่เหมาะสมกับบริบทของเนื้อหาเรขาคณิต เพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจ เกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมายและคงทน การสอนเรขาคณิตที่มีประสิทธิภาพนั้น ครูควรหากลวิธีให้นักเรียนได้สรุปเนื้อหาด้วยตนเองไม่ใช่ครูบอกเนื้อหาทฤษฎีบท ต้องการให้นักเรียนสามารถค้นพบข้อสรุปด้วยตนเอง และสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ (ยุพิน พิพิธกุล, 2539: 278; ยุพิน พิพิธกุล, 2545: 13) ซึ่งการสอนให้ผู้เรียนรู้จักเสาะแสวงหาความรู้ใหม่ๆ ให้กับตนเองได้ โดยไม่ใช้จากการบอกของครู สอนให้ผู้เรียนรู้จักค้นพบข้อคิดได้ใหม่ๆ ด้วยตนเองนั้น นอกจากจะทำให้ผู้เรียนเกิดความสนุก ความภาคภูมิใจแล้ว ยังจะให้ได้ความรู้ที่ติดทนนาน วิธีการสอนนั้นมีมากมายหลายวิธี หลายกระบวนการ มีผู้เขียนแต่งเป็นตำราไว้มากมาย ความจริงแล้วคนที่เป็นครูก็มักจะได้อ่านพบ หรือมิฉะนั้นก็ได้ผ่านการอบรมเกี่ยวกับวิธีการสอนมาแล้ว แต่ทำอย่างไรจึงจะทำให้ครูสอนคณิตศาสตร์ช่วยกันนำกลยุทธหรือวิธีการต่างๆ เหล่านั้นไปใช้เพื่อเป็นประโยชน์ต่อตัวเด็ก ต่อสังคม ตลอดจนประเทศชาติ (สุวัฒนา เอี่ยมอรพรรณ, 2546: 43) จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรขาคณิต เช่น กุลยา เหมวัสดุกิจ (2545: 62 – 64) พบว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี จะช่วยพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตได้ และ Pusey (2003: a) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับโมเดลของแวนฮีลีในการให้เหตุผลเกี่ยวกับเรขาคณิต โดยศึกษาจากเอกสารที่เกี่ยวข้องซึ่งวัตถุประสงค์ของการวิจัยนั้นเพื่อตรวจสอบโมเดลการเรียนรู้ของแวนฮีลีเพื่ออธิบายว่านักเรียนให้เหตุผลอย่างไรบ้างในเรขาคณิต ข้อสรุปของงานวิจัยคือโมเดลของแวนฮีลีถูกใช้ให้สอดคล้องกับหลักสูตรและพบว่า การใช้วิธีการสอนของแวนฮีลีกับนักเรียน แสดงให้เห็นว่าทฤษฎีการเรียนรู้นั้นสามารถช่วยนักเรียนให้เกิดการเรียนรู้ได้ดี นั่นแสดงให้เห็นว่าการใช้โมเดลของแวน ฮีลีทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลทางเรขาคณิตน่าจะเพิ่มขึ้นเช่นเดียวกัน

โมเดลของแวนฮีลี (Van Hiele model) เกิดจากการค้นคว้าและวิจัยของสองสามี-ภรรยาชาวดัตช์ ปิแอร์ แวนฮีลี และ ไดนา เกลดอฟ-แวนฮีลี (Pierre van Hiele และ Dina Geldof-van Hiele) ซึ่งมีอาชีพเป็นครูและกำลังศึกษาระดับปริญญาเอกอยู่ที่มหาวิทยาลัย Utrecht ประเทศเนเธอแลนด์ เพื่อแก้ปัญหาความไม่เข้าใจในการเรียนวิชาเรขาคณิต ซึ่งเป็นแนวคิดที่จะช่วยให้นักเรียนรู้จักคิดแก้ปัญหาโดยการวิเคราะห์ และการสื่อความหมายด้วยคำพูดของตนเอง เนื่องจากได้เล็งเห็นความยากลำบากของนักเรียนในการเรียนเรขาคณิต โดยเฉพาะการเขียนพิสูจน์ ดังนั้นจึงได้พัฒนาทฤษฎีที่เกี่ยวกับระดับความคิดทางเรขาคณิต เพื่อใช้ประเมินความสามารถของนักเรียนโดยวัดจากระดับความคิดทางเรขาคณิต และได้เสนอขั้นตอนการสอนไว้ 5 ขั้นตอน เพื่อพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตจากระดับหนึ่งไปที่ระดับถัดไป ทฤษฎีแวนฮีลีเชื่อว่าการเขียนพิสูจน์ได้นั้นจำเป็นต้องมีความคิดเทียบเคียงระดับที่สูง และนักเรียนหลายคนจำเป็นต้องมีประสบการณ์

การคิดในระดับที่ต่ำกว่ามาก่อนที่จะมีการเรียนรู้มโนทัศน์เรขาคณิตที่เป็นแบบแผน (Mason and Moore, 1997: 105 – 111; กุลยา เหมวัสดุกิจ, 2545: 14; สิริพร ทิพย์คง, 2547: 55 – 64) แวนฮีลี ได้แบ่งลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตไว้ 5 ขั้น ได้แก่ ขั้นพื้นฐานหรือขั้น 0 เป็นการมองเห็น (Visualization) ขั้น 1 เป็นการวิเคราะห์ (Analysis) ขั้น 2 เป็นการพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction) ขั้น 3 เป็นการพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างมีแบบแผน (Formal Deduction) และขั้น 4 เป็นการคิดขั้นสุดยอด (Rigor) (NCTM, 1987; Fuys et al., 1984 อ้างถึงใน สิริพร ทิพย์คง, 2536: 119 – 120; Clements and Battista,1992: 426 – 431)

การพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งสามารถทำได้โดยการสอนและการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสม ซึ่งปิแอร์ แวนฮีลี และไดน่า แวนฮีลี ได้เสนอขั้นตอนการสอนเพื่อพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิต 5 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นที่ 1 การใช้คำถามเพื่อเข้าสู่บทเรียน (Information) ขั้นที่ 2 การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation) ขั้นที่ 3 การแลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication) ขั้นที่ 4 การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ (Free Orientation) และ ขั้นที่ 5 การสรุปรวม (Integration) (van Hiele - Geldof, 1984: a and van Hiele, 1984b cited in Crowley, 1987: 5 – 6; Teppo, 1999: 1 – 2)

จากเหตุต่างๆ ดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น ผู้วิจัยจึงมีความสนใจนำโมเดลของแวนฮีลีมาทดลองสอน กับนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เพื่อจะได้นำผลการวิจัยครั้งนี้เป็นข้อมูลในการพัฒนาการเรียนการสอนเรขาคณิตให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางเรียนคณิตศาสตร์ระหว่างนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีกับกลุ่มที่เรียนแบบปกติ

2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตระหว่างนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีกับกลุ่มที่เรียนแบบปกติ

สมมติฐานของการวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโมเดลของแวนฮีลี มีรายละเอียดดังนี้

Senk (1989: 309 – 321) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับความคิดตามโมเดลของแวนฮีลี ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต และผลสัมฤทธิ์ในเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นมาตรฐาน จากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา จำนวน 241คน ที่ลงทะเบียนเรียนเรขาคณิตทั้งปี ซึ่งผลการวิจัย พบว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตมีความสัมพันธ์กับระดับความคิดตามโมเดลของแวนฮีลี และผลสัมฤทธิ์ในเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นมาตรฐาน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

นาตยา น้ำจิตตรง (2546: 40 – 43) ได้ทำการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างการสอนที่เน้นลำดับขั้นการเรียนรู้ของแวนฮีลีโมเดลกับการสอนปกติ ศึกษาความเข้าใจทางเรขาคณิตของนักเรียนกับขั้นตอนการเรียนรู้ของแวนฮีลีโมเดล ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตหลังเรียนกับเกณฑ์ 60 % ของนักเรียนกลุ่มที่สอน โดยการเน้นลำดับขั้นการเรียนรู้ของแวนฮีลีโมเดล ผลการวิจัยปรากฏว่า 1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่สอนโดยการเน้นลำดับขั้นการเรียนรู้ของแวนฮีลีโมเดล กับนักเรียนกลุ่มที่สอนโดยวิธีการสอนปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 2) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความเข้าใจทางเรขาคณิตไม่สูงกว่าขั้นที่ 1 ของแวนฮีลีโมเดลอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05 3) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่สอนโดยการเน้นลำดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของแวนฮีลีโมเดลสูงกว่าเกณฑ์ 60% อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

Garabedian (1981: a) ได้ศึกษาวิจัยเรื่องผลของการพิสูจน์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนในวิชาเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 จำนวน 369 คน ที่เรียนวิชาเรขาคณิตในโรงเรียนมัธยมปลาย 3 โรงเรียนในรัฐแมสซาซูเซทส์ โดยทำการสุ่มนักเรียนมา 18 ห้องเรียน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 9 ห้องเรียน และกลุ่มควบคุม 9 ห้องเรียน กลุ่มทดลองถูกกำหนดให้เรียนการพิสูจน์ 50% หรือน้อยกว่าของทฤษฎีทั้งหมดและแบบฝึกหัดในเรื่องเส้นขนานและพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม กลุ่มควบคุมถูกกำหนดให้เรียนการพิสูจน์ 80% - 90% ของทฤษฎีบทและแบบฝึกหัดในเรื่องเดียวกับกลุ่มทดลอง ก่อนการสอนเรื่องเส้นขนานได้ทำการทดสอบ 3 อย่างคือ ทดสอบภาคสนามโดยนักวิจัย ทดสอบเรื่องการให้เหตุผล และ

ทดสอบเรื่องเส้นขนาน และทดสอบเรื่องเส้นขนาน และทดสอบทั้งสามอย่างนี้ในระหว่างสอนเรื่องพื้นที่ วิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติโดยใช้ ANCOVA ผลการวิจัยพบว่า มีความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 ในเรื่องผลสัมฤทธิ์ของการพิสูจน์ และความสามารถในการให้เหตุผลของทั้งสองกลุ่ม เพศหญิงมีความสามารถในการให้เหตุผลดีกว่าเพศชาย มีความสัมพันธ์ทางบวกอย่างมีนัยสำคัญระหว่างคะแนนการให้เหตุผลกับคะแนนการพิสูจน์เรื่องเส้นขนาน และกับคะแนนการพิสูจน์เรื่องพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม

จากงานวิจัยดังกล่าว ผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานของการวิจัยครั้งนี้ว่า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี มีผลสัมฤทธิ์ทางเรียนคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนแบบปกติ

และจากการศึกษางานวิจัยดังต่อไปนี้

Meng and Idris (2007: 242 – 248) ได้ทำการศึกษาการส่งเสริมนักเรียนสร้างการเรียนรู้จากเรขาคณิตสามมิติผ่านการสอนด้วยขั้นตอนเป็นฐาน โดยใช้ The Geometer's Sketchpad เพื่อศึกษาการให้เหตุผล และการเปลี่ยนระดับความคิดแบบแวนฮีลีระหว่างเรียนและหลังเรียนช่วงที่ 1 และ ช่วงที่ 2 ตามลำดับ ผลการวิจัยพบว่า การสอนด้วยขั้นตอนเป็นฐาน โดยใช้ GSP ทำให้การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนเพิ่มขึ้นระหว่างการเรียนรู้ในช่วงที่ 1 และ ช่วงที่ 2 ตามลำดับ และเพิ่มระดับแนวคิดแบบแวนฮีลีของนักเรียนเรื่องลูกบาศก์และทรงสี่เหลี่ยม

Ding and Jones (2007: 1) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการใช้โมเดลขั้นตอนการสอนของแวนฮีลีเพื่อวิเคราะห์บทเรียนการพิสูจน์เกี่ยวกับเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในเซี่ยงไฮ้ โดยเก็บรวบรวมข้อมูลและทำการทดลองในปี ค.ศ. 2006 รายงานการวิจัยในครั้งนี้วิเคราะห์ชุดการสอนเรขาคณิตที่ใช้สอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในเซี่ยงไฮ้ ซึ่งกล่าวถึงความเหมาะสมของโมเดลขั้นตอนการสอนของแวนฮีลีในบริบทของคนจีนไว้ว่าการวิเคราะห์ขั้นตอนการสอนของแวนฮีลีในขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3 มีความเหมาะสมและสามารถบรรจุไว้ในบทเรียน เนื่องจากสามารถขยายความคิดเกี่ยวกับเรขาคณิตและการพิสูจน์ได้

Burger and Shaughnessy (1986: 31 – 48) ได้ศึกษาเพื่อให้คำอธิบายระดับของการให้เหตุผลในเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลี โดยวิเคราะห์ตามคำตอบที่ได้จากชิ้นงานการสัมภาษณ์เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นอนุบาล ถึงนักศึกษาเอกคณิตศาสตร์ชั้นปี 1 จำนวน 45 คน ชิ้นงานเหล่านั้นประกอบด้วยการวาดรูป สร้างสมบัติของ

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และเปรียบเทียบส่วนประกอบของระบบทางคณิตศาสตร์ พฤติกรรมของนักเรียนตรงกับคำอธิบายเดิมของแวนฮีลีที่ได้ให้คำนิยามไว้ก่อนแล้ว

Brown, Jones and Taylor (2003) ได้ศึกษาการพัฒนาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในโรงเรียนมัธยมศึกษา มุ่งเพื่อพัฒนาและทดลองเครื่องมือการเรียนรู้เพื่อนำไปใช้ในหลายๆโรงเรียน โดยให้ความสนใจการพัฒนาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับโรงเรียนมัธยมศึกษา รายงานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นว่าทำอย่างไรที่จะทำให้นักเรียน ซึ่งมีอายุและความคงทนแตกต่างกันในช่วงชั้นที่ 3 สามารถให้เหตุผลทางคณิตได้ นั่นคือครูควรจัดให้นักเรียนได้รับชิ้นงาน การสอน และการพัฒนาในชั้นเรียนที่เหมาะสม การศึกษานี้เสนอแนะว่าครูมุ่งที่จะพัฒนาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนทุกคน

Frerking (1994: a) ได้ศึกษาเรื่องการสร้างข้อความคาดการณ์และการเขียนพิสูจน์ในเรขาคณิตพลวัต โดยศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับความคิดแบบแวนฮีลี ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์และการสร้างข้อความคาดการณ์ของนักเรียนที่เรียนเรขาคณิตระดับมัธยม โดยเน้นศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับความคิดแบบแวนฮีลี และความสามารถในการสร้างข้อความคาดการณ์ หรือระหว่างความสามารถของนักเรียนในการสร้างข้อความคาดการณ์และความสำเร็จในการอ้างเหตุผลหรือเขียนพิสูจน์ ของนักเรียนจำนวน 58 คน ผลปรากฏว่าความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถเขียนพิสูจน์กับผลสัมฤทธิ์ของผลการเรียนรู้ที่คาดหวังเรื่องเรขาคณิต ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์และความสามารถในการเขียนข้อความคาดการณ์หรือการอ้างเหตุผล และความสามารถในการเขียนพิสูจน์กับระดับความคิดแบบแวนฮีลีมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญ การมีระดับความคิดแบบแวนฮีลีเพิ่มขึ้นและการได้ความรู้ทางเรขาคณิต ทั้งๆที่ความแตกต่างในความสามารถของการเขียนพิสูจน์และผลสัมฤทธิ์ของผลการเรียนรู้ที่คาดหวังเรื่องเรขาคณิตไม่มีนัยสำคัญ

จากงานวิจัยดังกล่าว ผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานของการวิจัยครั้งนี้ว่า

2. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่ได้รับการกิจกรรมจัดการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี มีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตสูงกว่านักเรียนที่เรียนแบบปกติ

ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนในสังกัด สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษากรุงเทพมหานคร เขต 1 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ

2. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย เป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ช่วงชั้นที่ 3 (ม. 1- ม. 3) รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

3. ตัวแปรที่ศึกษา มีดังนี้

3.1 ตัวแปรจัดกระทำ คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ซึ่งได้แก่

3.1.1 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี

3.1.2 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

3.2 ตัวแปรตาม ได้แก่

3.2.1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

3.2.2 ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย

1. **การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี** หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิตที่เน้นกระบวนการพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งโดยใช้โมเดลของแวนฮีลี ซึ่งได้จากแนวคิดของปิแอร์ แวนฮีลี และไดน่า แวนฮีลี ซึ่งแบ่งขั้นตอนการจัดกิจกรรมรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี ออกเป็น 5 ขั้น ดังนี้

1.1 ขั้นการใช้คำถามเพื่อเข้าสู่บทเรียน (Information)

ครูทบทวนเรื่องที่จะใช้อ้างอิง ซึ่งเป็นการทบทวนความรู้ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับเรื่องที่จะเรียนรู้ใหม่ โดยร่วมกันอภิปรายเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจที่ถูกต้อง รวมถึงมีการทบทวนคำศัพท์ แจ้งจุดประสงค์ในการเรียนรู้

1.2 ขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation)

ครูให้นักเรียนแต่ละคน ศึกษาและเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างเป็นขั้นตอน โดยการทำกิจกรรมที่ครูจัดตามลำดับการเรียนรู้ เพื่อเป็นแนวทางไปสู่ข้อสรุปที่จะได้จากการเรียนรู้ ครูควรเลือกวัสดุและชิ้นงานที่เหมาะสมเพื่อให้นักเรียนเกิดข้อค้นพบมโนทัศน์และขั้นตอนทางเรขาคณิต

1.3 ขั้นการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication)

นักเรียนนำสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ในขั้นที่ 2 มาร่วมกันอภิปรายและแสดงความคิดเห็นในประเด็นที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ต่างๆ และความรู้ที่ใช้ประกอบการพิจารณา โดยให้มีการแลกเปลี่ยนข้อมูลระหว่างกันซึ่งเป็นข้อมูลที่เป็นผลที่ได้จากการเรียนรู้ในขั้นที่ 2 ทั้งนี้เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่สอดคล้อง ถูกต้อง และตรงกัน โดยครูมีส่วนรวมในการให้คำแนะนำและแก้คำศัพท์ให้อยู่ในรูปที่ถูกต้อง

1.4 ขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ (Free Orientation)

ครูนำเสนอปัญหาที่ท้าทาย เพื่อให้นักเรียนนำความรู้ที่ได้มาใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าวอย่างอิสระ โดยนักเรียนฝึกแสดงการวิเคราะห์เพื่อพิจารณาเหตุและผลต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้นๆ แล้วแสดงการพิสูจน์หรือการให้เหตุผลประกอบด้วย

1.5 ขั้นการสรุปรวม (Integration)

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ โดยเป็นการใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับเรขาคณิตที่ถูกต้อง และให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพื่อเป็นการทบทวนสิ่งที่ได้เรียนรู้ และฝึกการให้เหตุผล

2. **การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ** หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแนวคู่มือครู กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ซึ่งเป็นแนวทางการสอนสำหรับเนื้อหาสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

3. **ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์** หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งวัดจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งเป็นข้อสอบแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก ที่สอดคล้องกับพฤติกรรมด้านความรู้และความคิด (Cognitive Domain) ตามที่ Wilson (1971) จำแนกไว้ 4 ระดับ คือ

3.1 ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ (Computation) หมายถึง ความสามารถในการระลึกถึงความรู้ที่เคยเรียนมาแล้วเกี่ยวกับทักษะการคิดคำนวณ

3.2 ความเข้าใจ (Comprehension) หมายถึง ความสามารถในการนำความรู้ที่มีอยู่แล้วมาสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหาใหม่ ตลอดจนสามารถตีความ แปลความ สรุปความ และขยายความได้

3.3 การนำไปใช้ (Application) หมายถึง การนำความรู้ กฎ หลักการ ข้อเท็จจริง ทฤษฎีบท ฯลฯ ที่ได้เรียนรู้มาแล้วไปแก้ปัญหาใหม่ได้

3.4 การวิเคราะห์ (Analysis) หมายถึง ความสามารถในการพิจารณาหาส่วนที่สำคัญ หาความสัมพันธ์ของส่วนที่สำคัญเหล่านั้นมีความสัมพันธ์กัน เพื่อแก้ปัญหาที่แปลกกว่าธรรมดาหรือปัญหาที่ไม่คุ้นเคยมาก่อน

4. **ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต** หมายถึง ความสามารถในการให้เหตุผลในการเขียนพิสูจน์ โดยเขียนอธิบายกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับเรขาคณิตที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์ นำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็น อนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง มาใช้ประกอบในการให้เหตุผล โดยวัดจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งมีลักษณะเป็นการเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลเกี่ยวกับเรขาคณิต

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้า เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. ความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลของแวนฮีลี
    - 1.1 ความหมายและประวัติความเป็นมาของเรขาคณิต
    - 1.2 ความสำคัญของเรขาคณิต
    - 1.3 พัฒนาการของความคิดทางเรขาคณิต
    - 1.4 การเรียนการสอนเรขาคณิต
    - 1.5 ความเป็นมาของโมเดลของแวนฮีลี (Van Hiele model)
    - 1.6 ระดับความคิดทางเรขาคณิต
    - 1.7 ลักษณะสำคัญของระดับความคิดทางเรขาคณิต
    - 1.8 ขั้นตอนการสอนเพื่อพัฒนาความคิดทางเรขาคณิต

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
    - 2.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
    - 2.2 องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
    - 2.3 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
    - 2.4 ประเภทของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
    - 3.1 ความเป็นมาของการให้เหตุผล
    - 3.2 ความหมายและความสำคัญของการให้เหตุผล
    - 3.3 ประโยชน์ของการให้เหตุผล
    - 3.4 วิธีการให้เหตุผล
    - 3.5 ความหมายของการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

3.6 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล

3.7 แนวทางการวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

4.1 งานวิจัยต่างประเทศ

4.2 งานวิจัยในประเทศ

1. ความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลของแวนฮีลี

1.1 ความหมายและประวัติความเป็นมาของเรขาคณิต

คำว่า “เรขาคณิต” ตรงกับภาษาอังกฤษว่า “Geometry” เป็นคำที่มีรากศัพท์มาจากภาษากรีก 2 คำ คือคำว่า “Geo” ซึ่งแปลว่าพื้นดิน และ “Metri” ซึ่งแปลว่า การวัด ดังนั้น ความหมายตามรากศัพท์ของ Geometry จึงหมายถึง “การวัดพื้นโลก” (สมทรง สุวพานิช 2553: 33) เรขาคณิตเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งซึ่งว่าด้วยเรื่องสมบัติของปริภูมิ (Space) ที่วัตถุตั้งอยู่ ที่วัตถุเคลื่อนไหวและที่เหตุการณ์เกิดขึ้นและยังเกี่ยวข้องกับรูปร่างและรูปแบบของวัตถุในปริภูมิ เรขาคณิตมีต้นกำเนิดมาจากความสัมพันธ์ระหว่างมนุษย์กับธรรมชาติ โดยมนุษย์พยายามปรับตัวให้เข้ากับธรรมชาติเพื่อการอยู่รอด ความจำเป็นต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นเพื่อความอยู่รอดของมนุษย์ทำให้เกิดความรู้ขึ้น เช่น ความจำเป็นในการย้ายที่อยู่อาศัยทำให้มนุษย์เกิดความเข้าใจความหมายของเวลาและระยะทาง คือ มนุษย์เริ่มเข้าใจถึงการเดินทางที่ใกล้และไกลและรู้จักสังเกตเวลาที่ใช้เดินทางว่าใช้มากน้อยเพียงใด ต่อมามนุษย์เริ่มรวมตัวเป็นกลุ่มจึงเกิดความจำเป็นที่จะต้องสร้างที่อยู่อาศัย ได้สังเกตสิ่งแวดล้อมตามธรรมชาติแล้วคิดประดิษฐ์สิ่งต่าง ๆ โดยการเลียนแบบรูปร่างต่าง ๆ ที่ปรากฏอยู่ในธรรมชาติ มนุษย์เริ่มรู้จักการแลกเปลี่ยนอาหารและเครื่องใช้ซึ่งกันและกัน เมื่อมีของเหล่านี้เกินความต้องการจึงทำให้เกิดความคิดเรื่องการวัด

นักประวัติศาสตร์ชาวกรีกชื่อ เฮโรโดตุส (Herodotus) กล่าวว่าการเกิดน้ำท่วมริมฝั่งแม่น้ำไนล์ในอียิปต์เป็นประจำทุกปี ทำให้เกิดความจำเป็นที่จะต้องแสวงหาวิธีการรังวัดที่ดินใหม่เป็นประจำ ความต้องการและความจำเป็นนี่เองเป็นต้นกำเนิดของเรขาคณิต จากหลักฐานทางประวัติศาสตร์แสดงว่าเรขาคณิตเกิดขึ้นในสมัยอียิปต์เมื่อประมาณ 1,700 ปีก่อนคริสต์ศักราช ชาวอียิปต์และชาวบาบิโลนก็สนใจเรขาคณิตในด้านนำไปใช้ให้เป็นประโยชน์ จึงทำให้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตสมัยอียิปต์และบาบิโลนจำกัดอยู่ในวงแคบที่ได้จากการใช้สัญชาตญาณ การทดลอง และการคาดคะเนวิธีการรวบรวมข้อมูลแบบนี้เรียกว่า “เตรียมคณิตศาสตร์” (Premathematical Method) หรือ “คณิตศาสตร์ประสบการณ์” (Empirical Method) และต่อมาถึงสมัยกรีก ชาวกรีกให้ความสนใจแตกต่างไป หันไปศึกษาเรื่องราวของธรรมชาติและปรากฏการณ์ธรรมชาติ นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกมีความต้องการที่จะค้นหารูปแบบของธรรมชาติเพราะเชื่อว่าคณิตเป็นแกนกลางของรูปแบบของธรรมชาติ จึงได้พยายามแสวงหาความจริงที่ซึ่งอยู่ในรูปแบบของการใช้เหตุผล นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกชื่อ ยุคลิด (Euclid) ได้รวบรวมตำราคณิตศาสตร์ขึ้น 13 เล่ม ในจำนวนนี้มีอยู่ถึง 7 เล่มที่ว่าด้วยเรื่องเรขาคณิต เป็นตำราที่มีชื่อเสียงมาก เพราะเป็นตำราที่วางพื้นฐานการเรียนเรขาคณิต เรขาคณิตสมัยกรีกใช้การ

พิสูจน์อย่างมีเหตุผลจากสัจพจน์ (Axiom หรือ Postulate) หลังสมัยกรีกเรขาคณิตมีวิวัฒนาการต่อมาเรื่อย ๆ เรขาคณิตแขนงหนึ่งซึ่งกำลังรุ่งเรืองคือ โทโพโลยี (Topology) ซึ่งเป็นเรขาคณิตที่เอื้อให้รูปเรขาคณิตมีการแปลงรูปแบบได้ เมื่อได้รับการกระทำ เช่น บิด บีบ หรือ ยืด

1.2 ความสำคัญของเรขาคณิต

เรขาคณิตเป็นวิชาที่เรียนรู้ผ่านทางการมองเห็น (Visual Subject) เป็น 1 ใน 3 สาขาคณิตศาสตร์ ที่ประกอบด้วย พีชคณิต เรขาคณิต และการวิเคราะห์ และเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปว่าหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียนจำเป็นต้องมีวิชาเรขาคณิตอยู่ด้วย นักการศึกษาได้กล่าวถึงความสำคัญของเรขาคณิตไว้ดังนี้

เสริมศักดิ์ วิศาลาภรณ์ (2519: 2) ได้กล่าวถึงความสำคัญของเรขาคณิตสรุปได้ว่า เรขาคณิตมีความสำคัญมากในสมัยอดีต ความเจริญของอียิปต์และบาบิโลเนียล้วนแต่ต้องอาศัยเรขาคณิต ดังจะเห็นจากปิรามิดของอียิปต์ การใช้เรขาคณิตของชาวบาบิโลนในการเริ่มต้นการวัดพื้นที่

Ravielli (1957: 10) ได้กล่าวถึงความสำคัญของเรขาคณิตสรุปได้ว่าเรขาคณิตเป็นเครื่องมือที่จำเป็นอย่างมากสำหรับมนุษยชาติ เรขาคณิตเป็นส่วนหนึ่งของคณิตศาสตร์ มีการนำเรขาคณิตไปใช้ประโยชน์มากมาย เช่น ในการก่อสร้าง ในด้านวิศวกรรม ในการสำรวจ ในด้านดาราศาสตร์ เป็นต้น

ปานทอง กุลนาถศิริ (2541: 3 - 5) ได้กล่าวถึงความสำคัญของเรขาคณิตสรุปได้ว่า เรขาคณิตเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการเรียนคณิตศาสตร์ในทุกระดับ เรขาคณิตเป็นศาสตร์ที่มีความหมาย มีคุณค่า มีประโยชน์ และมีความผูกพันกับชีวิตมนุษย์มานับเป็นเวลานาน

สมทรง สุวพานิช (2553: 33 – 37) ได้กล่าวถึงความสำคัญของเรขาคณิตสรุปได้ว่า เรขาคณิตเป็นสิ่งท้าทายความคิดที่ช่วยเพาะความสามารถในการคิดวิเคราะห์ ส่งเสริมความคิดสร้างสรรค์ ปลูกฝังความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (Spatial Ability) และพัฒนาแบบความคิดคณิตศาสตร์ (Mathematical Cast of Mind) เรขาคณิตจัดว่าเป็นตัวช่วยวางรากฐานในการพิสูจน์อย่างมีความหมาย เพราะในเรขาคณิตเองได้บรรจุโครงสร้างที่สมเหตุสมผล (Logical Structure)

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าเรขาคณิตเป็นศาสตร์ที่มีความหมาย ส่งเสริมให้มีความคิดวิเคราะห์ มีเหตุมีผล ทั้งนี้ยังมีสำคัญอย่างมากต่อมนุษย์ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน เรขาคณิตสามารถนำมาประยุกต์ใช้ให้เป็นประโยชน์ได้อย่างมากมาย เช่น ในการก่อสร้าง ในด้านวิศวกรรม ในการสำรวจ ในด้านดาราศาสตร์ เป็นต้น

1.3 พัฒนาการของความคิดทางเรขาคณิต

ความคิดทางเรขาคณิตตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบันได้มีการเปลี่ยนแปลงดังนี้ (สมพร เรืองโชติวิทย์, 2523: 1 – 6)

1. เรขาคณิตสมัยแรกเริ่ม

เรขาคณิตสมัยแรกเริ่มนั้นได้มาจากการสังเกตและประสบการณ์ เช่น สังเกตรูปร่างและขนาดของสิ่งต่าง ๆ ความเข้าใจในรูปทรงเรขาคณิตนั้นมาจากการสังเกตลักษณะธรรมชาติ เช่น วงกลมมาจากพระอาทิตย์ พระจันทร์ เส้นโค้ง ได้จากลักษณะของดอกไม้ ใบไม้ ต้นไม้ เส้นขนาน เส้นตั้งฉากได้จากธรรมชาติ และการก่อสร้างที่พักอาศัย จากการสังเกตความสัมพันธ์และการเปรียบเทียบสิ่งต่าง ๆ ทำให้มนุษย์เกิดความคิดในเรื่องมาตรฐานการวัด เช่น การวัดความยาวและระยะทางอาศัยการเปรียบเทียบความยาวของส่วนต่าง ๆ ของร่างกายเป็นนิ้ว เป็นฟุต เป็นต้น จากแผ่นจารึกที่ทำด้วยดินเหนียวเผาไฟของบาบิโลเนีย ทำให้ทราบว่าประมาณ 4000 B.C. ชาวบาบิโลนสามารถวัดพื้นที่ต่างๆ ได้ และมีวิธีหาพื้นที่รูปทรงเรขาคณิตอย่างง่าย ๆ เช่น รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยมรวมทั้งวงกลมด้วย เขาสมมติว่าสวรรค์หมุนรอบแผ่นดินในเวลา 360 วันหรือ 1 ปี ด้วยเหตุนี้เขาจึงแบ่งวงกลมออกเป็น 360 ส่วน ซึ่งต่อมาได้กลายเป็นระบบองศาในการวัดมุมในสมัยปัจจุบัน

ต่อมาประมาณ 2900 B.C. เป็นสมัยของอียิปต์มีความเจริญทางเรขาคณิตจะเห็นได้จากการสร้างปิรามิด การรังวัดที่ดินตามลุ่มแม่น้ำไนล์ การหาพื้นที่ของรูปทรงต่าง ๆ อียิปต์มีความรู้ว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว 3, 4 และ 5 หน่วย เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เขาได้ใช้เชือกผูกเป็นปม ๆ ความยาวระหว่างปมเท่า ๆ กัน สร้างมุมฉากขึ้น จากหลักฐานต่าง ๆ ที่แสดงถึงความเจริญของบาบิโลเนียและอียิปต์พอจะสรุปได้ว่าเรขาคณิตสมัยนั้นเป็นเรขาคณิตเชิงวิทยาศาสตร์ (Empirical or Scientific Geometry) ยังไม่มีการพิสูจน์ใด ๆ

2. เรขาคณิตและกรีกสมัยแรก

นักปราชญ์และนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกได้มาศึกษาวิชาการต่าง ๆ ที่อียิปต์ประมาณ 600 B.C. ผู้ที่มีชื่อเสียงเด่นทางเรขาคณิต คือ ทาเลสแห่งมิเลตุส (Thales of Miletus, 640 – 550 B.C.) ได้แสดงความเป็นอัจฉริยะหลายอย่าง เช่นสามารถวัดความสูงของปิรามิดได้โดยใช้หลักรูปสามเหลี่ยมคล้ายซึ่งในสมัยนั้นยังไม่มี ทาเลสได้นำวิชาเรขาคณิตกลับไป

ยังกรีกและได้ประยุกต์การให้เหตุผลตามหลักตรรกวิทยามาใช้พิสูจน์เรขาคณิต ทำให้เรขาคณิตเปลี่ยนมาเป็นเรขาคณิตอย่างมีระบบ (Systematic Geometry)

นักเรขาคณิตที่สำคัญอีกท่านหนึ่ง ปีธากอรัส (Pythagoras, 572 – 500B.C.) ซึ่งเป็นลูกศิษย์ของทาเลส ปีธากอรัสได้ตั้งโรงเรียนที่มีชื่อเสียงคือโรงเรียนปีธากอเรียนที่เมืองโครโตนาทางใต้ของอิตาลี สอนวิชาคณิตศาสตร์ ปรัชญา และวิทยาศาสตร์ธรรมชาติ ในสมัยของปีธากอรัสความรู้ใหม่ ๆ ในวิชาเรขาคณิตเกิดขึ้นหลายอย่าง เช่น คุณสมบัติของเส้นขนาน สัดส่วนของรูปเหลี่ยมคล้าย พื้นที่รูปต่าง ๆ และรูปทรงสามมิติ รวมทั้งทฤษฎีที่มีชื่อเสียงคือทฤษฎีปีธากอเรียน (Pythagorean Theorem) ด้วย

ฮิปโปเครเตสแห่งเมืองชิออส (Hippocrates of Chios, 470 B.C.) ได้เขียนตำราเรขาคณิตเล่มแรกขึ้น

พลาโต (Plato, 429 – 348 B.C.) ได้สนใจและคิดค้นหาหลักเกณฑ์การให้เหตุผลในเชิงตรรกวิทยาสำหรับพิสูจน์เรขาคณิต

อริสโตเติล (Aristotle, 384 – 322 B.C.) ศิษย์ของพลาโต ได้เขียนหนังสือเกี่ยวกับเรขาคณิตและฟิสิกส์

ยูโดซุส (Eudoxus, 370 B.C.) ศิษย์ของพลาโต ได้ให้นิยามสัดส่วนและนำ ทฤษฎีของสัดส่วนมาใช้กับเรขาคณิตในระนาบ

หลังจากสมัยของอริสโตเติลแล้ว ความเจริญทางเรขาคณิตได้ย้อนกลับไปสู่อียิปต์อีกครั้งหนึ่งที่มหาวิทยาลัยอเล็กซานเดรีย (Alexandria)

3. เรขาคณิตในสมัยของยูคลิดและอาคิมิดิส (Euclid and Archimedes)

ยูคลิดและอาคิมิดิส เป็นนักคณิตศาสตร์ผู้ยิ่งใหญ่ในสมัยทองของอเล็กซานเดรีย ยูคลิด (330 - 275 B.C.) ได้เขียนตำราทางวิชาการหลายสาขา แต่ที่มีชื่อเสียงมากที่สุดคือ หนังสือเอลิเมนส์ (Elements) เกี่ยวกับเรขาคณิตและพีชคณิต

อาคิมิดิส (287 - 212 B.C.) เป็นนักวิทยาศาสตร์และนักประดิษฐ์ ได้เขียนตำราต่าง ๆ ไว้มากทั้งวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ มีผลงานเด่น ๆ ทางเรขาคณิตหลายชิ้น เช่น การวัดวงกลม เขาเป็นผู้ริเริ่มคำนวณค่า π ว่าอยู่ระหว่าง $\frac{223}{71}$ กับ $\frac{22}{7}$ ซึ่งวิธีการคำนวณค่า π ยังมีผู้ทำอยู่เสมอ ใน ค.ศ. 1961 มีผู้หาค่า π ได้ถึงทศนิยม 100,265 ตำแหน่ง นอกจากนี้อาคิมิดิสยังได้คิดสูตรพื้นที่รูปสามเหลี่ยม $\sqrt{s(s-a)s(s-b)s(s-c)}$ และได้คำนวณหาพื้นที่ ปริมาตรของรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ

4. เรขาคณิตในกรีก

นักคณิตศาสตร์ที่สำคัญหลังจากยูคลิดและอาคิมิดิส ได้แก่ อโปโลนิอุสแห่งเมืองเปอร์กา (Apollonius of Perga, 262 – 200 B.C.) ได้พัฒนาเรขาคณิตขั้นสูง ได้เขียนตำราเกี่ยวกับเส้นโค้งและภาคตัดกรวย เขาได้นำชื่อ เอลลิปส์ พาราโบลา และไฮเปอร์โบลามาใช้

เอราโตสเทเนส (Eratosthenes, 276 – 194 B.C.) เป็นเพื่อนของอาคิมิดิสเขาสามารถคำนวณหาเส้นรอบวงและเส้นผ่านศูนย์กลางของโลกได้ คือได้เส้นรอบวง 24,662 ไมล์ ซึ่งผิดไปเพียง 2 เปอร์เซนต์

ปโตเลมี แห่งอเล็กซานเดรีย (Ptolemy of Alexandria, 85 – 168 A.D.) ได้เขียนหนังสือที่มีชื่อเสียงคือ อัลมาเจสท์ (Almagest) เกี่ยวกับเรขาคณิต ตรีโกณมิติ และดาราศาสตร์

ปัปปุส (Pappus, - 300 A.D.) ได้พัฒนาเรขาคณิตขั้นสูง และภาคตัดกรวยคือพัฒนาผลงานของอโปโลนิอุส ในระยะเวลาห่างกัน 500 ปี เขาได้ค้นพบทฤษฎีที่ใกล้เคียงกับรากฐานของแคลคูลัส

โปรคลุส (Proclus, 414 – 485 A.D.) ได้เขียนประวัติของเรขาคณิต หลังจากสมัยของโปรคลุสก็ถึงวาระสุดท้ายของมหาวิทยาลัยอเล็กซานเดรีย ซึ่งถูกทำลายโดยพวกอาหรับใน ค.ศ. 641

5. เรขาคณิตท่ามกลางพวกอาหรับและฮินดู

นักวิทยาศาสตร์และนักคณิตศาสตร์ ได้ออกจากอเล็กซานเดรียไปยังอาราเบียเพื่อเป็นครูและทำงานอยู่กับพวกอาหรับ ในระหว่างนั้นเป็นสมัยเสื่อมของจักรวรรดิโรมัน (ศตวรรษที่ 5 – 11) และเป็นยุคมืด (Dark Ages) ของยุโรป ศิลปวิทยาการต่าง ๆ หยุดชะงักเพราะขัดกับแนวความคิดทางศาสนาในสมัยนั้น

พวกอาหรับได้เรียนรู้เรขาคณิต ตรีโกณมิติ และดาราศาสตร์ จากพวกกรีกส่วนความรู้ทางเลขคณิต และพีชคณิต (algebra) ชาวอาหรับได้รับจากชาวฮินดู ซึ่งตัวเลขฮินดูอาราบิกริเริ่มโดยชาวฮินดู หนังสือเอลิเมนต์ของยูคลิด และอัลมาเจสท์ของปโตเลมี ก็ได้แปลเป็นภาษาอาหรับ นักคณิตศาสตร์ชาวอินเดียชื่อ อารยภัต (Aryabhata, 476 A.D.) ได้เขียนตำราเกี่ยวกับเรขาคณิตที่นำไปประยุกต์กับวิชาดาราศาสตร์ ชาวอาหรับและฮินดูได้แปลและคัดลอกตำราทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์เพื่อใช้เรียนกันทั่วไป ซึ่งนับว่าเป็นการดีอย่างยิ่งที่อาหรับได้ช่วยเก็บรักษาวิชาความรู้ต่าง ๆ ไว้ตลอดยุคมืดของยุโรป

6. เรขาคณิตในสมัยกลาง (Middle Ages)

ในปลายศตวรรษที่ 11 ได้มีผู้นำวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของกรีกมาเผยแพร่ในยุโรป ในศตวรรษที่ 12 ได้มีการแปลหนังสือจากภาษาอาหรับเป็นภาษาละตินกว่า 90 ฉบับ รวมทั้งเอลิเมนต์ของยูคลิด และอัลมาเจสท์ของปโตเลมีด้วย และในยุโรปได้เริ่มใช้ระบบ

ตัวเลขของฮินดูอาราบิก ศตวรรษที่ 13 มีมหาวิทยาลัยต่าง ๆ เกิดขึ้น เช่น มหาวิทยาลัยปารีส ออกซฟอร์ด แคมบริดจ์ ปาดัว และเนเปิล เป็นต้น มีการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในมหาวิทยาลัย

ศตวรรษที่ 15 เป็นสมัยเริ่มฟื้นฟูศิลปวิทยาการของยุโรป (European Renaisance) ความพินาศของจักรวรรดิไบแซนทีน (Byzantine Empire) และการเสียเมืองคอนสแตนติโนเปิลให้พวกเติร์ก ใน ค.ศ. 1453 ทำให้มีผู้ลี้ภัยมาอยู่อิตาลีมากมาย และได้นำเอาวัฒนธรรมและวิชาการของกรีกมาด้วยจึงได้มีการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ทั้งเลขคณิต พีชคณิต และเรขาคณิต ในโรงเรียนทั่วไป มีการแปลหนังสือตำราต่าง ๆ ของกรีกเป็นภาษาละติน

7. พัฒนาการแนวใหม่ของเรขาคณิต

นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ เจราด์ เดสาร์ก (Geard Desargues,1593 – 1662) เป็นวิศวกรและสถาปนิกได้พัฒนาแนวคิดของยูคลิดเกี่ยวกับระบบตรรกวิทยาของเรขาคณิต ทำให้ค้นพบเรขาคณิตแบบใหม่ที่เรียกว่า เรขาคณิตโปรเจกตีฟ (Projective Geometry) และมีนักคณิตศาสตร์รุ่นต่อมาได้ขยายความรู้ในวิชานี้ให้กว้างขวางขึ้น ได้แก่ แบลซ์ ปาสคาล (Blaise Pascal, 1623 – 1662) และจองวิกเตอร์ปองเซเล (Jean-Victor Poncelet, 1788 – 1867) ต่อมากาสปาด์ มองเย (Gaspard Monge, 1746 – 1818) ได้พัฒนาวิชานี้ไปสู่เรขาคณิตอีกแบบหนึ่งเรียกว่า เรขาคณิตเดสคริปตีฟ (Descriptive Geometry)

เรอเน เดคาต์ (Rene Descartes, 1596 – 1650) ได้นำเอาวิธีการทางพีชคณิตมาใช้กับเรขาคณิตเรียกว่า เรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytic Geometry) ต่อมามีนักคณิตศาสตร์นำเอาวิชาแคลคูลัสมาประยุกต์กับเรขาคณิตเรียกว่า เรขาคณิตดิฟเฟอเรนเชียล(Differential Geometry) และเลโอนาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler, 1707 – 1783) ได้ริเริ่มคิดค้นวิชาเรขาคณิตแบบใหม่ขึ้นอีกเรียกว่า โทโพโลยี (Topology)

8. เรขาคณิต นอน-ยูคลิดเดียน (Non-Euclidean Geometry)

เป็นเวลากว่า 2000 ปีที่นักคณิตศาสตร์ได้พยายามพิสูจน์สัจพจน์ที่ 5 ของยูคลิดว่าเป็นทฤษฎีที่พิสูจน์ได้โดยอาศัยสัจพจน์ข้ออื่น ๆ ของยูคลิด แต่ก็ไม่มีผู้ใดพิสูจน์ได้สำเร็จในที่สุด มีนักคณิตศาสตร์สามคน คือ เกาส์ (Gauss, 1777 – 1855) แห่งเยอรมัน โบลไย (Bolyai,1802 – 1860) แห่งฮังการีและโลบัคเซฟสกี (Lobachevsky, 1793 – 1856) แห่งรัสเซีย ได้คิดเรขาคณิตใหม่โดยใช้สัจพจน์ใหม่ที่เป็นข้อปฏิเสธหรือข้อความตรงกันข้าม (Denial or Contrary)ของสัจพจน์ที่ 5 ของยูคลิด ใช้แทนที่สัจพจน์ที่ 5 นั้น และเรียกชื่อเรขาคณิตใหม่นี้ว่า เรขาคณิตนอน-ยูคลิดเดียน หรือเรขาคณิตไฮเปอร์โบลิก (Hyperbolic Geometry) ต่อมามีเรขาคณิตนอน-ยูคลิดเดียนอีกแบบหนึ่งเรียกว่า เรขาคณิตเอลลิปติก (Elliptic Geometry) ซึ่งได้พัฒนาขึ้นโดยรีมาน (Riemann, 1826 – 1866) และเฟลิกซ์ ไคลน์ (Felix Klein, 1849 – 1925) แห่งเยอรมัน

แนวคิดเกี่ยวกับเรขาคณิตตั้งแต่สมัยแรกเริ่มจนถึงปัจจุบันนี้ได้พัฒนาไปอย่างกว้างขวาง การศึกษาเรขาคณิตก่อนศตวรรษที่ 17 เป็นการศึกษาคุณสมบัติเมตริก (Metric Properties) ซึ่งเป็นการศึกษาเกี่ยวกับระยะทาง การวัดต่าง ๆ เช่น ความยาวของส่วนของเส้นตรง พื้นที่และขนาดของมุม ปริมาตรของรูปทรงทั้งหลาย เรขาคณิตของยูคลิดจัดเป็นพวกเรขาคณิตแบบเมตริก ตั้งแต่ศตวรรษที่ 17 เป็นต้นมา นักคณิตศาสตร์ได้เพิ่มความสนใจในการศึกษาคุณสมบัตินอนเมตริก (Nonmetric Properties) ของรูปทรงต่าง ๆ ทำให้เกิดเรขาคณิตแบบนอนเมตริกขึ้น ได้แก่ เรขาคณิตโปรเจกตีฟ เรขาคณิตแอฟไฟน์ (Affine Geometry) และโทโพโลยี

จากที่กล่าวข้างต้น สรุปได้ว่าเรขาคณิตมีการพัฒนาไปอย่างกว้างขวางตั้งแต่สมัยอดีตจนถึงปัจจุบัน ทำให้เกิดเรขาคณิตสาขาต่างๆ เพิ่มขึ้นอย่างไม่หยุดยั้ง

1.4 การเรียนการสอนเรขาคณิต

ในการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิต ครูเป็นผู้มีบทบาทสำคัญที่เลือกสรรวิธีการสอนและการจัดลำดับขั้นการเสนอเนื้อหาสาระที่สอดคล้องกับระดับของผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนได้มีความรู้ความเข้าใจเนื้อหาสาระเหล่านั้น ได้อย่างถูกต้องและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาเรขาคณิต ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่ครูต้องมีความรู้เกี่ยวกับการเรียนการสอนเรขาคณิต ดังที่นักการศึกษาหลายท่านทั้งไทยและต่างประเทศได้กล่าวถึงความรู้เกี่ยวกับการสอนเรขาคณิตไว้ดังนี้

มานะ เอกจริยวงศ์ (2537 : 4 – 8) ได้กล่าวถึง จุดมุ่งหมายของการสอนเรขาคณิตในโรงเรียนว่าเรขาคณิตเป็นวิชาที่เรียนรู้โดยผ่านทางการมองเห็น (Visual Subject) ดังนั้นการสอนเรขาคณิตควรมีจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้

1. เพื่อให้ตระหนักถึงคุณค่าของเรขาคณิตว่ามีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิตในโลกที่เป็นจริง

2. เพื่อท้าทายความคิด ปลูกฝังความสามารถเชิงปริภูมิ และพัฒนาแบบความคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Cast of Mind) ในส่วนที่เป็นแบบความคิดที่เกิดจากการใช้ภาพและความสามารถในการคิดเชิงนามธรรม โดยอาศัยองค์ประกอบด้านภาษาเพื่อการใช้เหตุผล (Verbal-Logical)

3. เพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ มองเห็นความหมายและความสำคัญของการพิสูจน์

4. เพื่อเชื่อมโยงแนวคิดทางเรขาคณิตกับคณิตศาสตร์แขนงอื่น ๆ อันเป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหา

โกมล ไพศาล (2540: 22) ได้เสนอแนะว่าการเรียนการสอนเรขาคณิตควรดำเนินการดังนี้

1. กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน

2. ทบทวนความรู้ที่เป็นพื้นฐานของสิ่งที่จะเรียนต่อไป

3. การจัดกิจกรรมที่นักเรียนต้องศึกษาโดยการสังเกต และการสำรวจ เพื่อให้เห็นแนวทางในการสรุปมโนมติหรือแก้ปัญหาโจทย์

4. การสอนบทนิยาม ทฤษฎีบท และบทสร้าง ควรให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วม เช่น ใช้วิธีการถามตอบใช้อุปกรณ์การสอนสำเร็จรูปและการเขียนรูปในแต่ละขั้นตอนจนกระทั่งได้ข้อสรุปที่ต้องการ

วรรณวิภา สุทธเกียรติ (2542: 27) กล่าวว่าการเรียนการสอนเรขาคณิตต้องอาศัยบทบาทของครูในการกำหนดกิจกรรม การวางขั้นตอนที่เหมาะสม รวมทั้งบทบาทในการกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความต้องการที่จะเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และให้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเองเพื่อค้นพบสิ่งใหม่ ๆ ซึ่งเป็นสิ่งท้าทายความสามารถ ความอยากรู้อยากเห็นตามลักษณะของวัยของนักเรียน เพื่อทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีขึ้น และยังส่งผลให้นักเรียนเป็นผู้ที่มีจินตนาการพร้อมที่จะแก้ปัญหาต่างๆ

สมเดช บุญประจักษ์ (2544: 2) กล่าวว่า เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจเรขาคณิตสามารถใช้ความรู้และเชื่อมโยงความรู้เรขาคณิตกับความรู้แขนงอื่น ๆ ได้ ผู้เรียนจะต้องได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ โดยเริ่มจากกิจกรรมง่าย ๆ ไปสู่สถานการณ์ปัญหาที่ท้าทายผู้เรียนจะต้องทำการสืบค้น ทดลองและสำรวจสิ่งที่อยู่รอบตัว เช่น ฝึกการมองภาพ สร้างภาพและเปรียบเทียบรูปร่างในตำแหน่งต่าง ๆ กัน

Sidhu (1981: 291) ได้ให้ข้อคิดในการสอนเรขาคณิตว่าในการเริ่มต้นเรียนเรขาคณิต ถ้าผู้เรียนสามารถใช้ตรรกศาสตร์ได้ ครูผู้สอนอย่าไปขัดขวาง ในความเป็นจริงแล้วผู้เรียนสามารถเริ่มให้เหตุผลตั้งแต่วัยเด็ก ถ้าผู้เรียนสามารถมองเห็นการเชื่อมโยง ระหว่างข้อเท็จจริง โดยใช้ตรรกศาสตร์ ครูผู้สอนก็ควรสนับสนุนแต่ต้องไม่ลืมว่าเป้าหมายหลักในการเริ่มเรียนเรขาคณิตก็คือ เพื่อเก็บรวบรวมข้อความที่เป็นข้อเท็จจริง นอกจากนี้ยังได้แนะนำการสอนเรขาคณิตดังนี้คือ

1. งานที่ให้ผู้เรียนฝึกทำควรได้สัดส่วนและชัดเจน

2. ครูควรให้ผู้เรียนสังเกตสิ่งต่าง ๆ ด้วยตัวเอง โดยการทดลองวัดจริงหรือประสบการณ์

3. กระดานดำที่ใช้ควรได้สัดส่วน สะอาดและถูกต้องเพื่อหลีกเลี่ยงความสงสัยและความเข้าใจผิดของผู้เรียน ขณะเดียวกันครูควรใช้ภาษาที่ถูกต้องชัดเจน และใช้ชอล์กสีเพื่อเน้นรายละเอียดที่สำคัญ

4. การให้แบบฝึกหัดผู้เรียน ไม่ควรทิ้งค้างไว้เพื่อให้ทำตอนท้ายของภาคเรียน แต่ควรจะให้ทำพร้อมกับทฤษฎีบทนั้น

5. ควรฝึกผู้เรียนให้เขียนรูปจากทฤษฎีบทและแบบฝึกหัดที่เห็นสมควรแล้วแต่กรณี ในเบื้องต้นการสร้างทั้งหมดควรใช้วงเวียนและไม้บรรทัด

6 ครูควรมีการทบทวน โดยการถามผู้เรียนเกี่ยวกับทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ได้เรียนผ่านมาแล้วเท่าที่สามารถกระทำได้

7. ศัพท์ทางเรขาคณิต ครูผู้สอนต้องนำมาใช้ให้ถูกต้อง

8. ครูผู้สอนควรสนับสนุนผู้เรียนให้แสดงเนื้อหาสาระ โดยการเขียนรูป การสร้างและถ้อยคำเท่าที่เป็นไปได้

9. ครูผู้สอนควรให้ผู้เรียนสรุปผลลัพธ์สุดท้ายด้วยตนเอง

Simmons (1992: 41) ได้เสนอกิจกรรมซึ่งสามารถนำมาใช้ประโยชน์สำหรับการเริ่มต้นบทเรียน ดังนี้

1. การกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน

2. การเสนอเค้าโครงย่อประเด็นหลักของบทเรียน

3. ใช้การอุปมาอุปมัย เป็นการสร้างสถานการณ์ของหัวข้อเรื่องใหม่ให้สัมพันธ์กับประสบการณ์ของผู้เรียน ตลอดจนบางสิ่งที่คุ้นเคยกับผู้เรียน

4. การทบทวนสิ่งที่เกี่ยวข้องกับงานก่อนหน้า เช่น การทบทวนที่เกี่ยวกับความรู้โดยตรงทักษะ หรือความเข้าใจ

ทั้งนี้การเรียนการสอนเรขาคณิตยังต้องครอบคลุมถึงการอ้างเหตุผลดังที่หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น ม.1 – 3 ใน

สาระที่ 3: เรขาคณิต ไว้ข้อหนึ่งว่า “นักเรียนช่วง ม. 1 – 3 สามารถเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของความเท่ากันทุกประการและความคล้ายของรูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน ทฤษฎีบทปีทาโกรัส และบทกลับ และนำไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้”

ยุพิน พิพิธกุล (2530 : 75-77) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตหรือการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้ว่า วิธีการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยแยกเป็น 3 ลักษณะคือ

1. การสอนทฤษฎีบท มีขั้นตอนดังนี้

1.1 ให้ผู้เรียนค้นพบเนื้อหาทฤษฎีบทด้วยตนเอง ซึ่งอาจจะใช้การสาธิตของครู การทดลอง การสร้าง การใช้เหตุผลและการใช้สื่อการเรียนการสอนสำเร็จรูป

1.2 ให้ผู้เรียนแยกเหตุและผล

1.3 ให้ผู้เรียนบอกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

1.4 เลือกวิธีการพิสูจน์ โดยมากใช้การวิเคราะห์จากผลไปสู่เหตุแล้วเรียบเรียงจากเหตุไปสู่ผล แต่บางข้ออาจใช้การสังเคราะห์ หรือบางข้ออาจจะใช้การวิเคราะห์และการสังเคราะห์ร่วมกันทั้งนี้ขึ้นอยู่กับโจทย์

2. การพิสูจน์แบบฝึกหัด มีขั้นตอนดังนี้

2.1 ให้ผู้เรียนอ่านโจทย์ให้เข้าใจ แยกเหตุและผลหรือแยกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ถ้าผู้เรียนไม่เข้าใจและไม่สามารถแยกแยะได้ จะต้องพยายามฝึกจนกว่าจะแยกได้

2.2 เขียนรูปประกอบ

2.3 การพิสูจน์ จะเลือกวิธีวิเคราะห์หรือสังเคราะห์หรือใช้วิธีวิเคราะห์ร่วมกับสังเคราะห์ ซึ่งต้องพิจารณาให้เหมาะสมกับเนื้อหา

3. การสอนบทสร้าง มีขั้นตอนดังนี้

3.1 ผู้สอนใช้คำถามและแสดงการสร้างตามลำดับผู้เรียนก็สร้างตาม ผู้สอนจะเขียนกระดานดำ แสดงวิธีสร้างทีละขั้นตอนไปพร้อม ๆ กัน อย่าสอนจนจบแล้วก็มาถามผู้เรียนอีกว่าสร้างอย่างไรเป็นการเสียเวลา

3.2 การพิสูจน์จะใช้วิธีวิเคราะห์หรือสังเคราะห์อยู่ในดุลพินิจของผู้สอน

สิริพร ทิพย์คง (2545: 136) ได้กล่าวว่าวิธีการสอนแบบวิเคราะห์-สังเคราะห์ เป็นวิธีที่นำมาใช้อย่างมากในการพิสูจน์เรขาคณิต ใช้ทั้งการวิเคราะห์และการสังเคราะห์ พิจารณาจากผลไปหาเหตุโดยศึกษาว่า โจทย์ต้องการทราบอะไร หรือสิ่งใดที่โจทย์ถามแล้วเชื่อมโยงจากสิ่งที่โจทย์ถามไปยังสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แล้วจึงใช้วิธีการสังเคราะห์โดยการพิจารณาจากเหตุไปหาผล ซึ่งเป็นการนำข้อสรุปย่อยๆ ที่จำเป็นต่างๆ มารวมกัน เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ต้องการหรืออาจกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่าเป็นการเริ่มจากสิ่งที่กำหนดให้ที่เราทราบแล้วนำมาใช้ช่วยในการหาสิ่งที่เราต้องการทราบ ซึ่งมีข้อดี คือ ช่วยทำให้นักเรียนรู้จักคิดไปตามลำดับขั้นตอนและมีเหตุผล ทำให้นักเรียนมีความสามารถในการคิดอย่างพินิจพิเคราะห์

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่าในการเรียนการสอนเรขาคณิต ครูจะมีบทบาทสำคัญในการเตรียมกิจกรรมให้เหมาะสมกับเนื้อหาที่เรียน กระตุ้นให้นักเรียนได้เรียนรู้สิ่งต่างๆ ด้วยการลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง การเรียนเรขาคณิตจึงสามารถส่งเสริมให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผล

1.5 **ความเป็นมาของโมเดลของแวนฮีลี** (Van Hiele model)

จากสภาพปัญหาต่างๆ ของการเรียนการสอนเรขาคณิต ครู และนักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายท่านจึงได้พยายามศึกษาและค้นคว้าเพื่อแก้ปัญหา และรูปแบบการสอนเรขาคณิตที่เป็นที่รู้จักและยอมรับกันอย่างแพร่หลาย คือ โมเดลของแวนฮีลี (Van Hiele model) ซึ่งเกิดจากการค้นคว้าและวิจัยของสองสามี-ภรรยาชาวดัตช์ ปิแอร์ แวนฮีลี และ ไดนา เกลดอฟ-แวนฮีลี (Pierre van Hiele และ Dina Geldof-van Hiele) ซึ่งมีอาชีพเป็นครูและกำลังศึกษาระดับปริญญาเอกอยู่ที่มหาวิทยาลัย Utrecht ประเทศเนเธอแลนด์ เพื่อแก้ปัญหาความไม่เข้าใจในการเรียนวิชาเรขาคณิต ซึ่งเป็นแนวคิดที่จะช่วยให้นักเรียนรู้จักคิดแก้ปัญหาโดยการวิเคราะห์ และการสื่อความหมายด้วยคำพูดของตนเอง เนื่องจากได้เล็งเห็นความยากลำบากของนักเรียนในการเรียนเรขาคณิต โดยเฉพาะการเขียนพิสูจน์ ดังนั้นพวกเขาจึงพัฒนาทฤษฎีที่เกี่ยวกับระดับความคิดทางเรขาคณิต เพื่อใช้ประเมินความสามารถของนักเรียนโดยวัดจากระดับความคิดทางเรขาคณิต และเสนอขั้นตอนการสอน 5 ขั้นตอน เพื่อพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตจากระดับหนึ่งไปที่ระดับถัดไป ทฤษฎีแวนฮีลีเชื่อว่าการเขียนพิสูจน์ได้นั้นจำเป็นต้องมีความคิดเทียบเคียงระดับที่สูง และนักเรียนหลายคนจำเป็นต้องมีประสบการณ์การคิดในระดับที่ต่ำกว่าก่อนที่จะมีการเรียนรู้มโนทัศน์เรขาคณิตที่เป็นแบบแผน (Mason and Moore, 1997: 105 - 111; กุลยา เหมวัสดุกิจ, 2545: 14; สิริพร ทิพย์คง, 2547: 55 – 64) โดยปิแอร์ แวนฮีลีคิดค้นโครงสร้างของระดับความคิดทางเรขาคณิตและออกแบบขั้นตอนการสอน (Van Hiele model) เพื่อช่วยให้นักเรียนเพิ่มความเข้าใจในการเรียนวิชาเรขาคณิต ส่วนไดน่า แวนฮีลี เป็นผู้พัฒนาบทเรียนและการสอนที่สอดคล้องกับแนวทางของโมเดล แล้วนำไปใช้กับนักเรียนจนได้ผลเป็นที่ยอมรับ ปิแอร์ แวนฮีลี และไดน่า แวนฮีลี จึงเสนอเป็นวิทยานิพนธ์ปริญญาเอกต่อมหาวิทยาลัยยูเทรชท์ (Utrecht) ที่พวกเขากำลังศึกษาอยู่ในปี ค.ศ. 1954

ในปีต่อมาไดน่า แวนฮีลีได้เสียชีวิตลง ส่วนงานวิจัยของพวกเขาได้รับการเผยแพร่เป็นภาษาดัชในปี ค.ศ. 1957 ต่อมาประมาณปี ค.ศ. 1960 – 1969 ประเทศรัสเซียได้ปรับปรุงหลักสูตรเรขาคณิตให้สอดคล้องกับโมเดลแวนฮีลี (Van Hiele model) แต่ในประเทศอื่น ๆ งานวิจัยของปิแอร์ แวนฮีลี และไดน่าแวนฮีลี ได้รับความสนใจไม่มากนัก จนกระทั่งในปี ค.ศ.1973

ฮานส์ ฟรูเด็นแธล (Hans Freudenthal) ซึ่งเป็นอาจารย์ของปิแอร์ แวนฮีลี และไดน่า แวนฮีลี ที่มหาวิทยาลัยยูเทรชท์(Utrecht) ได้แปลผลงานของพวกเขาเป็นภาษาอังกฤษลงในหนังสือชื่อ คณิตศาสตร์ดูประหนึ่งเรื่องที่ยากทางการศึกษา (Mathematics as an Educational Tasks) หลังจากนั้น ในปี ค.ศ. 1970 – 1979 งานวิจัยของพวกเขาได้รับความสนใจเพิ่มมากขึ้นโดยเฉพาะในอเมริกาเหนือ ในระหว่างปีค.ศ. 1980 – 1989 ประเทศสหรัฐอเมริกาได้ให้ความสนใจในการตีพิมพ์เกี่ยวกับโมเดลของแวนฮีลี (Van Hiele model) โดยในปี 1989 สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (NCTM) โมเดลของแวนฮีลี (Van Hiele model) ไปใช้โดยเน้นที่ความสำคัญของการเรียนรู้อย่างเป็นลำดับและกิจกรรมการแก้ปัญหา

1.6 ระดับความคิดทางเรขาคณิต

แวนฮีลีได้แบ่งลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตไว้ 5 ขั้น ได้แก่ ขั้นพื้นฐานหรือขั้น 0 เป็นการมองเห็น (Visualization) ขั้น 1 เป็นการวิเคราะห์ (Analysis) ขั้น 2 เป็นการพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction) ขั้น 3 เป็นการพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างมีแบบแผน (Formal Deduction) และขั้น 4 เป็นการคิดขั้นสุดยอด (Rigor) (NCTM, 1987; Fuys et al., 1984 อ้างถึงใน สิริพร ทิพย์คง, 2536: 119 – 120; Clements and Battista,1992: 426 – 431)

มีรายละเอียดในแต่ละระดับดังนี้

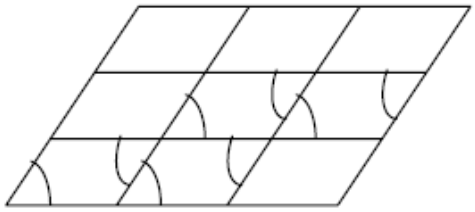
ระดับ 0 : ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก (Visualization)

ในระดับนี้นักเรียนรู้เพียงรูปร่างภายนอกของรูปเรขาคณิต มีการแสดงความคิดรวบยอดทางเรขาคณิตออกมาเป็นรูปธรรมภายนอกมากกว่าองค์ประกอบหรือคุณลักษณะของรูป เช่น ถ้ากำหนดรูปเรขาคณิตให้ นักเรียนบอกรูปร่างภายนอกได้แต่บอกสมบัติต่าง ๆ ของรูปไม่ได้ ในระดับนี้สามารถเรียนรู้ศัพท์ทางเรขาคณิต จำแนกรูปร่าง วาดรูป และจำลองรูป ตัวอย่างเช่น ดังรูป นักเรียนในระดับนี้สามารถจำได้ว่า กลุ่ม a คือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และกลุ่ม b คือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยนักเรียนจำรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้เพราะว่ามันดูเหมือนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและบอกได้ว่ารูปทั้งสองกลุ่มคล้ายกัน ยิ่งไปกว่านั้นเมื่อให้ geoboard หรือกระดาษ นักเรียนสามารถคัดลอกรูปร่างได้ แต่ในขั้นนี้นักเรียนจะไม่จำว่ารูปสี่เหลี่ยมมีมุมเป็นมุมฉากหรือมีด้านตรงข้ามขนานกัน

(a) (b)

ระดับ 1 : ระดับการวิเคราะห์ (Analysis)

ในระดับนี้นักเรียนเริ่มต้นการวิเคราะห์ความคิดรวบยอดทางเรขาคณิตผ่านการสังเกตและการทดลอง นักเรียนเริ่มเห็นคุณลักษณะของรูป เห็นสมบัติของรูป สามารถแบ่งรูปออกเป็นกลุ่มๆ ได้ เมื่อให้ช่องที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานดังรูป นักเรียนบอกได้ว่ามุมที่วาดนั้นเป็นมุมที่เท่ากัน เป็นมุมตรงข้ามของด้านคู่ขนาน ถ้าให้ตัวอย่างที่หลากหลาย นักเรียนสามารถบอกสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้ แต่ไม่สามารถอธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างรูปที่เห็นกับรูปที่ยังมองไม่เห็นได้ ถึงบรรยายได้แต่ก็ไม่เข้าใจ



ระดับ 2 : ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction)

ในระดับนี้นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ในสมบัติต่างๆ ของรูปได้ทั้งสมบัติภายในของรูป เช่น ในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านตรงข้ามขนานกัน มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน และสมบัติท่ามกลางรูปต่างๆ และสามารถแยกรูปต่างๆ ออกเป็นกลุ่มๆ ได้ตามสมบัติอย่างเข้าใจ บอกความหมายได้ สามารถสรุปอย่างไม่เป็นแบบแผนจากสิ่งที่กำหนดให้ได้ แต่ไม่สามารถสรุปโดยใช้อนิยาม นิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทได้ ไม่สามารถให้เหตุผลในลักษณะที่เป็นโครงสร้างได้ ไม่สามารถพัฒนาการพิสูจน์ทฤษฎีบทได้

ระดับ 3 : ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน (Formal Deduction)

ในระดับนี้นักเรียนสามารถสรุปเรขาคณิตภายใต้อนิยาม นิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ ได้อย่างเข้าใจ สามารถพิสูจน์โดยมีความเป็นไปได้ในการพัฒนาการพิสูจน์ได้หลายรูปแบบ สามารถเข้าใจเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทกลับได้

ระดับ 4 : ระดับการคิดสุดยอด (Rigor)

ในระดับนี้นักเรียนต้องสามารถทำในระบบสัจพจน์ที่หลากหลาย ซึ่งไม่ใช่เรขาคณิตของยูคลิดได้ สามารถนำเรขาคณิตไปสัมพันธ์กับวิชาอื่น สามารถมองเรขาคณิตในลักษณะที่เป็นนามธรรม โดยปราศจากตัวอย่างที่เป็นรูปธรรม สามารถพิสูจน์แบบขัดแย้ง และพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ได้

1.7 ลักษณะสำคัญของความคิดทางเรขาคณิต

ระดับความคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลี่มีลักษณะสำคัญดังนี้ (van Hiele - Geldof, 1984a and van Hiele, 1984b cited in Crowley, 1987: 4; Mason, 2009: 3)

1. การมีลำดับขั้น (Sequential)

เหมือนกับทฤษฎีทางการพัฒนาส่วนใหญ่ คือ ต้องดำเนินการโดยเรียงลำดับระดับความคิดทางเรขาคณิตทีละระดับ การที่จะมีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับสูงได้จะต้องมีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับต่ำกว่ามาก่อน

2. ความก้าวหน้า (Advancement)

ความก้าวหน้าจากระดับหนึ่งไปอีกระดับหนึ่งขึ้นอยู่กับเนื้อหาและวิธีการสอนที่ได้รับมากกว่าขึ้นอยู่กับอายุ ไม่มีวิธีการสอนใดที่จะทำให้นักเรียนกระโดดข้ามระดับได้

3. สิ่งที่ไม่ชัดแจ้งในระดับหนึ่งจะชัดแจ้งในระดับต่อไป(Intrinsic and Extrinsic)

ตัวอย่างเช่น นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 จะรู้เพียงรูปร่างของรูป แต่ไม่เข้าใจสมบัติของรูป จนกระทั่งมีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 จึงสามารถเข้าใจองค์ประกอบและสมบัติของรูป

4. การมีภาษาประจำในแต่ละระดับ (Linguistics)

ในแต่ละระดับมีภาษาประจำระดับ และมีระบบของความสัมพันธ์ในการเชื่อมโยงภาษา ความคิดรวบยอดและภาษาในระดับที่ต่ำกว่าจะเป็นพื้นฐานในระดับที่สูงกว่าต่อไป

5. ความไม่เหมาะสมกับระดับ (Mismatch)

ถ้านักเรียนมีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับหนึ่ง แต่ครูสอนในระดับที่แตกต่างกันนักเรียนอาจจะไม่เข้าใจเนื้อหาที่ครูสอน โดยปกตินักเรียนจะพยายามจำเนื้อหา แต่นักเรียนไม่เข้าใจเนื้อหานั้นโดยแท้จริง ซึ่งนักเรียนอาจจะลืมเนื้อหาเหล่านั้นได้ง่าย ๆ หรือไม่สามารถที่จะประยุกต์เนื้อหาเหล่านั้นได้โดยเฉพาะในสถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคย

1.8 ขั้นตอนการสอนเพื่อพัฒนาความคิดทางเรขาคณิต

การพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งสามารถทำได้โดยการสอนและการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสม ซึ่งปิแอร์ แวนฮีลี และไดน่า แวนฮีลี ได้เสนอขั้นตอนการสอนเพื่อพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิต 5 ขั้นตอน (van Hiele - Geldof, 1984a and van Hiele, 1984b cited in Crowley, 1987: 5 – 6; Teppo, 1999: 1 – 2) ดังนี้

ขั้นที่ 1 การใช้คำถามเพื่อเข้าสู่บทเรียน (Information): ครูและนักเรียนมีส่วนร่วมในการสนทนาและมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมเกี่ยวกับจุดมุ่งหมายของการเรียน โดยการสังเกตและใช้คำถาม เช่น ครูถามนักเรียนว่า รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนคืออะไร รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคืออะไร รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคืออะไร และรูปสี่เหลี่ยมพวกนี้มีความคล้ายกันอย่างไร แตกต่างกันอย่างไร ทำไมถึงตอบอย่างนั้น จุดมุ่งหมายของกิจกรรมนี้มี 2 ด้าน คือ (1) ครูได้เรียนรู้สิ่งที่เป็นความรู้ดั้งเดิมของนักเรียนเกี่ยวกับหัวข้อนี้ และ (2) นักเรียนได้เรียนรู้สิ่งที่เป็นแนวทางการศึกษาเพิ่มเติม

ขั้นที่ 2 การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation): นักเรียนสำรวจหัวข้อของการศึกษาผ่านสื่อที่ครูจัดให้เป็นลำดับขั้นกิจกรรมนี้ควรจะแสดงให้นักเรียนเห็นลักษณะโครงสร้างอย่างค่อยเป็นค่อยไป ดังนั้นสื่อจะเป็นงานสั้น ๆ ที่ออกแบบมาเพื่อดึงคำ ตอบเฉพาะ เช่น ครูอาจจะถามนักเรียนโดยใช้กระดานตะปู (geoboard) เพื่อสร้างสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน และสร้างรูปที่มีขนาดใหญ่ขึ้นหรือเล็กลง

ขั้นที่ 3 การแลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication): สร้างจากประสบการณ์เดิมของนักเรียน โดยให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับสิ่งที่ได้จากการสังเกต ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนใช้ภาษาที่ถูกต้องและเหมาะสมบทบาทของครูลดลง นักเรียนจะได้อภิปรายซึ่งกันและกันและกับครู

ขั้นที่ 4 การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ (Free Orientation): นักเรียนต้องเผชิญกับงานที่ยุ่งยากมากขึ้น เช่น งานที่มีหลายขั้นตอน งานที่สามารถทำให้สมบูรณ์ได้หลายวิธี และงานปลายเปิด พวกเขาจะได้ประสบการณ์ในการค้นพบวิธีแก้ปัญหาด้วยตัวของพวกเขาเอง ทำให้นักเรียนมีความชัดเจนเกี่ยวกับสิ่งที่ศึกษามากขึ้น

ขั้นที่ 5 การสรุปรวม (Integration): นักเรียนสรุปสิ่งที่ได้เรียนมาทั้งหมด โดยเป็นการทบทวนสิ่งที่ได้เรียนรู้ในการทำกิจกรรมตั้งแต่เริ่มต้น เช่น สรุปสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนทั้งหมดจากที่กล่าวมาข้างต้น

จากการที่หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กำหนดให้นักเรียนในช่วงชั้น ม. 1 – 3 จะต้องมีความสามารถเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของความเท่ากันทุกประการและความคล้ายของรูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน ทฤษฎีบทปีทาโกรัส และบทกลับ และนำไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้ ซึ่งตรงกับ ลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิต ในขั้นที่ 3 การพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างมีแบบแผน (Formal Deduction) ในระดับขั้นนี้นักเรียนสามารถสรุปเรขาคณิตภายใต้อนิยาม นิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่าง ๆ ได้อย่างเข้าใจ สามารถพิสูจน์โดยมีความเป็นไปได้ในการพัฒนาการพิสูจน์ได้หลายรูปแบบ สามารถเข้าใจเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ สามารถพิสูจน์

ทฤษฎีบทกลับได้ ผู้วิจัยจึงมีความสนใจในการนำขั้นตอนการสอนตามโมเดลของแวนฮีลีมาใช้สอนเรขาคณิตแก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

นักการศึกษาได้กล่าวถึงความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไว้ดังนี้

ไพศาล หวังพานิช (2526: 9) ได้ให้ความหมายของผลสัมฤทธิ์ (Achievement) หรือผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (Academic Achievment) ว่าหมายถึงคุณลักษณะและความสามารถของบุคคลอันเกิดจากการสอน เป็นการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม และประสบการณ์การเรียนรู้ที่เกิดจากการฝึกฝน อบรม หรือจากการสอน

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช (2537: 286) ได้ให้ความหมายว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหรือผลการเรียนรู้ หมายถึง ความรู้หรือทักษะที่ได้จากการเรียนรู้ในรายวิชาต่างๆ ที่กำหนดไว้ในหลักสูตร เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความสามารถและนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ได้

Wilson (1971: 643-696) ได้กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์นั้น หมายถึง ความสามารถทางสติปัญญา (Cognitive Domain) ในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ได้จำแนกพฤติกรรมที่พึงประสงค์ทางพุทธิพิสัย ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาโดยอ้างอิงลำดับชั้นของพฤติกรรมพุทธิพิสัย ตามกรอบแนวคิดของบลูม (Bloom ‘s Taxonomy) ไว้เป็น 4 ระดับ คือ 1. ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ (Computation) พฤติกรรมในระดับนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมที่อยู่ในระดับต่ำที่สุด 2. ความเข้าใจ (Comprehension) เป็นพฤติกรรมที่ใกล้เคียงกับพฤติกรรมระดับความรู้ ความจำเกี่ยวกับการคิดคำนวณแต่ซับซ้อนกว่า 3. การนำไปใช้ (Application) เป็นความสามารถในการติดสินใจแก้ปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย เพราะคล้ายกับปัญหาที่นักเรียนประสบอยู่ในระหว่างเรียน 4. การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาที่นักเรียนไม่เคยเห็นหรือไม่เคยทำแบบฝึกหัดมาก่อน ซึ่งส่วนใหญ่เป็นโจทย์พลิกแพลง แต่ก็อยู่ในขอบเขตเนื้อหาวิชาที่เรียน

Eysenck (1981: 29) ได้ให้ความหมายไว้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึงขนาดความสำเร็จที่ได้จากการทำงานที่อาศัยความพยายามจำนวนหนึ่ง ซึ่งอาจเป็นผลมาจากการกระทำที่อาศัยความสามารถทางร่างกายหรือสมอง โดยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน อาจได้มาจาก

กระบวนการที่ไม่ต้องอาศัยการทดสอบ เช่น การสังเกต การตรวจการบ้าน หรืออาจอยู่ในรูปของเกรดที่ได้จากโรงเรียน ซึ่งอาศัยวิธีการที่ซับซ้อน หรืออาจได้จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ดังนั้นผู้วิจัยกล่าวโดยสรุปได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หลังจากการได้รับการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งสอดคล้องกับพฤติกรรมด้านความรู้และความคิด (Cognitive Domain) ตามที่ Wilson (1971) จำแนกไว้ 4 ระดับ คือ ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ ความเข้าใจ การนำไปใช้ และการวิเคราะห์

2.2 **องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน**

Prescott (1961: 14 – 16) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเรียนของนักเรียน และสรุปผลการศึกษาว่า องค์ประกอบที่มีอิทธิต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งในและนอกห้องเรียนมีดังต่อไปนี้

1. องค์ประกอบทางด้านร่างกาย ได้แก่ อัตราการเจริญเติบโตของร่างกาย สุขภาพทางกาย ข้อบกพร่องทางร่างกายและบุคลิกท่าทาง

2. องค์ประกอบทางความรัก ได้แก่ความสัมพันธ์ของบิดามารดา ความสัมพันธ์ของบิดามารดากับลูก ความสัมพันธ์ระหว่างลูก ๆ ด้วยกัน และความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกทั้งหมดในครอบครัว

3. องค์ประกอบทางวัฒนธรรมและสังคม ได้แก่ ขนบธรรมเนียมประเพณี ความเป็นอยู่ของครอบครัว สภาพแวดล้อมทางบ้าน การอบรมทางบ้านและฐานะทางบ้าน

4. องค์ประกอบทางความสัมพันธ์ในเพื่อนวัยเดียวกัน ได้แก่ ความสัมพันธ์ของนักเรียนกับเพื่อนวัยเดียวกัน ทั้งที่บ้านและที่โรงเรียน

5. องค์ประกอบทางการพัฒนาแห่งตน ได้แก่ สติปัญญา ความสนใจ เจตคติของนักเรียน

6. องค์ประกอบทางการปรับตัว ได้แก่ ปัญหาการปรับตัว การแสดงออกทางอารมณ์

Carroll (1963: 723 – 733) ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับอิทธิพลขององค์ประกอบต่างๆ ที่มีต่อระดับผลสัมฤทธิ์ของนักเรียน โดยการนำเอาครู นักเรียน และหลักสูตรมาเป็นองค์ประกอบที่สำคัญ โดยเชื่อว่าเวลาและคุณภาพของการสอนมีอิทธิพลโดยตรงต่อปริมาณความรู้ที่นักเรียนจะได้รับ

Maddox (1965: 9) ได้ทำการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของแต่ละบุคคลขึ้นอยู่กับองค์ประกอบทางสติปัญญา และความสามารถทางสมองร้อยละ 50 – 60 ขึ้นอยู่กับความพยายามและวิธีการเรียนที่มีประสิทธิภาพร้อยละ 30 – 40 และขึ้นอยู่กับโอกาสและสิ่งแวดล้อมร้อยละ 10 – 15

พิริยพงศ์ เตชะศิริยืนยง (2552: 72 – 73) ได้ทำการศึกษาพบว่าความสัมพันธ์ที่เกิดจากปฏิสัมพันธ์ในกลุ่ม ทำให้เกิดการระดมความคิด เป็นปฏิกิริยาที่ตอบสนองสิ่งเร้าจากปัญหาที่พบ ทำให้เกิดความรวดเร็วต่อการเรียนรู้ ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตของนักเรียนผ่านเกณฑ์ทั้งหมด

จากการศึกษาแนวความคิดที่กล่าวมา สรุปว่า องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จะเกิดจากสภาพความพร้อมของร่างกายและจิตใจที่มาจากผู้เรียนโดยตรงโดยมีส่วนประกอบ ดังนี้

1. ร่างกายเป็นสิ่งที่แสดงออกทางภายนอก โดยพฤติกรรมและความคิดโดยการใช้เหตุผลที่มาจากสติปัญญา

2. สิ่งแวดล้อมส่งผลให้เกิดเจตคติของผู้เรียนที่จะแสดงออกมาด้านอารมณ์

3. ความสามารถการแสดงออกด้านความพึงพอใจมีผลต่อกระบวนการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ และเกิดผลสัมฤทธิ์ในด้านบวก

4. ความสัมพันธ์ในห้องกับเพื่อนเป็นส่วนหนึ่งของการเรียนรู้ที่อยู่ในทางบวก

2.3 **แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน**

แบบสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นเครื่องมือที่ครูผู้สอนใช้ทดสอบผลการเรียนรู้ของนักเรียน เพื่อตรวจสอบความรู้ ความสามารถของนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ ความสามารถในเรื่องที่เรียนไปแล้วมากน้อยเพียงใด มีจุดเด่น จุดด้อยในเรื่องใดบ้างหลังจากที่ได้เรียนไปแล้ว และทำให้ทราบพัฒนาการในการเรียนรู้ของนักเรียน และยังเป็นข้อมูลที่สำคัญในการปรับปรุงการเรียนการสอนของครูให้ดียิ่งขึ้น ได้มีผู้ให้ความหมายของแบบสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ไว้ดังนี้

สมนึก ภัททิยธนี (2541: 40) ให้ความหมายของแบบสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนว่า แบบสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง แบบทดสอบที่วัดสมรรถภาพสมองด้านต่างๆ ที่นักเรียนได้รับการเรียนรู้ผ่านมาแล้วว่ามีอยู่เท่าใด

ศิริชัย กาญจนวาสี (2544: 31) ให้ความหมายของแบบสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนว่า แบบสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง เครื่องมืออย่างหนึ่งที่ออกแบบไว้สำหรับวัดความรู้ หรือทักษะที่เกิดขึ้นกับผู้เรียนในช่วงเวลาหนึ่ง อันเป็นผลการเรียนการสอนที่กำหนดไว้ในวัตถุประสงค์และขอบเขตของเนื้อหาสาระอย่างชัดเจน

เยาวดี วิบูลย์ศรี (2545: 7) ได้ให้ความหมายของแบบสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนว่า แบบสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เป็นแบบทดสอบวัดความรู้เชิงวิชาการ มักใช้วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เน้นการวัดความรู้ ความสามารถจากการเรียนรู้ในอดีต หรือในสภาพปัจจุบันของแต่ละบุคคล

จากความหมายของแบบสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดังกล่าวข้างต้น สรุปได้ว่า แบบสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง แบบทดสอบที่ใช้วัดความรู้ ทักษะ และสมรรถภาพด้านต่างๆ ของนักเรียนในเชิงวิชาการ เป็นการวัดความก้าวหน้าของนักเรียน ในเรื่องที่นักเรียนได้เรียนไปแล้ว มักจะใช้เป็นคำถามให้นักเรียนตอบหรือให้นักเรียนปฏิบัติจริง เพื่อต้องการวัดความสามารถของนักเรียน

จะเห็นได้ว่าแบบทดสอบเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งที่นิยมใช้ในการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซึ่งจะใช้วัดพฤติกรรมที่พึงประสงค์ ซึ่งจะเรียกแบบทดสอบนั้นว่าแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้พัฒนาแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยจำแนกพฤติกรรมที่พึงประสงค์ทางพุทธิพิสัย (Cognitive Domain) ตามที่ Wilson (อ้างถึงในพร้อมพรรณ อุดมสิน 2538: 60 – 75) ได้จำแนกพฤติกรรมที่พึงประสงค์ทางพุทธิพิสัย ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา โดยอิงลำดับขั้นพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัยตามกรอบแนวคิดของบลูม (Blooms Taxonomy) ไว้เป็น 4 ระดับ คือ

1. ความรู้ความจำเกี่ยวกับการคิดคำนวณ (Computation) เป็นการวัดทักษะเกี่ยวกับการคิดคำนวณ พฤติกรรมในระดับนี้ แบ่งออกได้เป็น 3 ขั้น คือ

1.1 ความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง (Knowledge of Specific Facts) เป็นการถามเพื่อจะวัดความรู้ ความจำเกี่ยวกับเนื้อหาวิชา ในรูปแบบเดียวกับที่ผู้เรียนได้รับจากการเรียนการสอนมารวมถึงความรู้พื้นฐานซึ่งผู้เรียนจะต้องนำมาใช้

1.2 ความรู้ความจำเกี่ยวกับศัพท์และนิยาม (Knowledge of Terminology) เป็นการถามให้ผู้เรียนบอกความหมายของคำศัพท์และนิยามต่าง ๆ ตามที่เคยเรียนมาแล้วโดยไม่ต้องอาศัยการคิดคำนวณ และไม่ต้องการหาความรู้อื่นมาช่วย

1.3 ความรู้ความจำเกี่ยวกับการใช้กระบวนการคิดคำนวณ (Ability to Carry out Algorithms) เป็นการวัดความสามารถของผู้เรียนในการนำสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้โดยใช้ข้อเท็จจริงหรือนิยามและกระบวนการที่ได้เรียนมาแล้วมาคิดคำนวณตามลำดับขั้นตอนที่เคยเรียนรู้มาแล้วข้อสอบวัดความสามารถด้านนี้ต้องเป็นโจทย์ง่ายคล้ายคลึงกับตัวอย่าง นักเรียนไม่ต้องพบกับความยุ่งยากในการตัดสินใจเลือกใช้กระบวนการ

2. ความเข้าใจ (Comprehension) เป็นการวัดความสามารถในการนำความรู้ที่รู้มาแล้วมาสัมพันธ์กับโจทย์หรือปัญหาใหม่ การวัดพฤติกรรมในระดับนี้แบ่งได้เป็น 6 ขั้นตอน คือ

2.1 ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนมติ (Knowledge of Concept) หมายถึงความสามารถในการสรุปความหมายของสิ่งที่ได้เรียนมาตามความเข้าในของตนเอง นำข้อเท็จจริงของเนื้อหาต่าง ๆ ที่เรียนรู้มาสัมพันธ์กันโดยการนำมาสรุปความหมายของสิ่งนั้นอีกครั้งหนึ่ง

2.2 ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการ กฎ และการทำให้เป็นกรณีทั่วไป (Knowledge of Princples and Generalization) ความสามารถในการเอาหลักการกฎ และ ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนมติไปสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหา จนได้แนวทางในการแก้ปัญหาได้ถ้าคำถามนั้นเป็นคำถามเกี่ยวกับหลักการและกฎที่นักเรียนเพิ่งเคยพบเป็นครั้งแรกอาจจัดเป็นพฤติกรรมในระดับการวิเคราะห์ก็ได้

2.3 ความเข้าใจในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Knowledge of Mathematical Structure) เป็นการถามเพื่อวัดความสามารถในการมองเห็น ส่วนประกอบย่อยของข้อความทางด้านคณิตศาสตร์ตามลักษณะที่มุ่งหวัง ส่วนใหญ่จะเป็นคำถามเกี่ยวกับศัพท์และนิยามในคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

2.4 ความสามารถในการแปลงส่วนประกอบของปัญหา จากแบบหนึ่งไปเป็นอีกแบบหนึ่ง (Ability of Transsform Problem Elements from One Mode to Another) เป็นความสามารถ ในการเปลี่ยนข้อความกำหนดให้เป็นสัญลักษณ์หรือสมการในขั้นนี้ไม่ได้รวมถึงการคิดคำนวณหาคำตอบ

2.5 ความสามารถในการดำเนินตามผล (Ability to Follow Aline of Reasoning) คณิตศาสตร์ส่วนมากอยู่ในรูปของการอนุมาน (Deductive Format) ดังนั้น การที่จะเข้าใจบทความหรือผลงานทางคณิตศาสตร์ จึงต้องอาศัยความสามารถในการดำเนินตามแนวเหตุผลขณะที่อ่าน

2.6 ความสามารถในการอ่านและตีความโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ (Ability to Read and Interpret a Mathematics Problem) เป็นความสามารถในการอ่านและตีความจากโจทย์ความสามารถระดับนี้รวมทั้งการแปลความหมายจากกราฟ หรือข้อมูลทางสถิติตลอดจนการแปลสมการ หรือตัวเลขให้เป็นรูปภาพ

3. การนำไปใช้ (Application) เป็นการนำความรู้ กฎ หลักการ ข้อเท็จจริง ทฤษฎี ต่าง ๆ ที่เคยเรียนรู้มาแล้วไปแก้ปัญหาใหม่ให้สำเร็จ ซึ่งโจทย์ปัญหาที่ใช้ต้องไม่ใช่โจทย์ที่อยู่ในแบบฝึกหัดการวัดพฤติกรรมในระดับนี้ แบ่งออกเป็น 4 ขั้นคือ

3.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาธรรมดา (Ability to Solve Routine Problems) เป็นการแก้ปัญหาที่คล้ายกับปัญหาที่เคยเรียนมาแล้ว โดยที่ผู้เรียนจะต้องจัดรูปของพฤติกรรมขั้นความเข้าใจและการใช้กระบวนการเพื่อแก้ปัญหา

3.2 ความสามารถในการเปรียบเทียบ (Ability to Solve Comparisons) เป็นความสามารถในการตัดสินใจค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด เพื่อสรุปการตัดสินใจซึ่งในการแก้ปัญหา อาจจะต้องใช้วิธีการคิดคำนวณและอาศัยความรู้ที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งใช้ความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล

3.3 ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูล (Ability to Analyze Data) เป็นความสามารถในการแยกแยะ จำแนกปัญหาโจทย์ออกเป็นส่วนย่อยว่ามีความจำเป็นหรือไม่ในการนำไปใช้แก้ปัญหาโจทย์

3.4 ความสามารถในการมองเห็นรูปแบบลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกันและการสมมาตร (Ability to Recognize Patterns Isomorphisms and Symmetries) พฤติกรรมในขั้นนี้จะเกี่ยวกับการระลึกถึงข้อมูล แปลงปัญหา การจัดกระทำกับข้อมูล และ การระลึกถึงความสัมพันธ์จะเป็นการถามให้ผู้เรียนหาสิ่งที่คุ้นเคยกับข้อมูลที่กำหนดให้หรือจากปัญหาที่กำหนดให้

4. การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาที่นักเรียนไม่เคยเห็นหรือไม่เคยทำแบบฝึกหัดมาก่อน ซึ่งส่วนใหญ่เป็นโจทย์พลิกแพลง แต่อยู่ในขอบเขตเนื้อหาวิธีที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าวต้องอาศัยความรู้ที่ได้เรียนมารวมกับความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกันเพื่อแก้ปัญหาพฤติกรรมในระดับนี้ถือว่า เป็นพฤติกรรมขั้นสูงสุดของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งต้องใช้สมรรถภาพสมองระดับสูง แบ่งเป็น 5 ขั้นตอน ดังนี้

4.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาที่แปลกกว่าธรรมดา (Ability to Solve Nonrogtine Problems) เป็นความสามารถในการถ่ายโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้มาแล้วไปสู่เนื้อหาใหม่ ซึ่งผู้เรียนจะต้องแยกปัญหาออกเป็นส่วนย่อย ๆ แล้วสำรวจดูว่า รู้อะไรบ้างแล้วในแต่ละตอน รวมทั้งการเขียนสัญลักษณ์ใหม่ เพื่อนำไปสู่คำตอบ การแก้ปัญหาในลักษณะนี้จะเป็นการแก้ปัญหาสถานการณ์ด้วย จึงต้องหาวิธีการใหม่ ๆ มาช่วยในการแก้ปัญหา

4.2 ความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ (Ability to Discover Relationships) เป็นความสามารถในการค้นพบความสัมพันธ์ใหม่ หรือนำสัญลักษณ์จากสิ่งที่กำหนดให้มาสร้างสูตรใหม่ด้วยตนเอง หรือเพื่อนำมาใช้ประโยชน์ในการหาคำตอบ

4.3 ความสามารถในการสร้างข้อพิสูจน์ (Ability to Construct Proofs) ความสามารถในการพิสูจน์ด้วยตนเองซึ่งไม่เหมือนกับความสามารถในการพิสูจน์ขั้นนำไปใช้โดยผู้ตอบจะต้องอาศัยนิยามและทฤษฎีต่าง ๆ เข้ามาช่วยแก้ปัญหา

4.4 ความสามารถในการวิพากษ์วิจารณ์ (Ability to Criticize Proofs) เป็นความสามารถในการวิพากษ์วิจารณ์ การพิสูจน์ เป็นการใช้เหตุผลที่ควบคู่กับความสามารถในการเขียน พิสูจน์ แต่เป็นความสามารถที่ยุ่งยากซับซ้อนกว่าการเขียนการพิสูจน์ เพราะจะต้องใช้เหตุผลง่าย ๆ การพิสูจน์นั้นถูกต้องหรือไม่ มีตอนใดผิดพลาดบ้าง

4.5 ความสามารถในการสร้างและแสดงความสมเหตุสมผลของการทำให้เป็นกรณีทั่วไป (Ability to Formulate and Validate Generalizations) เป็นความสามารถในการค้นพบความสัมพันธ์และเขียนการพิสูจน์ความสัมพันธ์ที่ค้นพบ ข้อคำถามจะให้แสดงความสมเหตุสมผล

2.4 ประเภทของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน อาจแบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ แบบทดสอบที่ครูสร้างขึ้นเอง และ แบบทดสอบมาตรฐาน แต่เนื่องจากครูผู้สอนต้องทำหน้าที่วัดผลนักเรียน คือ ออกข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในวิชาที่สอน ซึ่งผูกพันหรือใกล้ชิดกับข้อสอบที่ครูสร้างขึ้นอยู่แล้ว ดังนั้นผู้วิจัยจึงกล่าวถึงรายละเอียดเฉพาะแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ประเภทที่ครูสร้างขึ้น โดยได้มีนักการศึกษาได้แบ่งข้อสอบที่นิยมใช้ออกเป็น 6 แบบ คือ ข้อสอบแบบความเรียงหรือเขียนตอบข้อสอบแบบกาถูก – ผิด ข้อสอบแบบเติมคำ ข้อสอบแบบตอบสั้น ๆ ข้อสอบแบบจับคู่ และข้อสอบแบบเลือกตอบ ซึ่งข้อสอบแบบเลือกตอบเป็นข้อสอบที่ผู้วิจัยสนใจในการนำมาเป็นแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยมีนักการศึกษากล่าวถึง ดังนี้

ล้วน สายยศและอังคณา สายยศ (2539: 93 – 108) กล่าวว่า ข้อสอบแบบเลือกตอบ เป็นแบบทดสอบที่นิยมใช้กันมากกว่าแบบทดสอบ ปรนัยแบบอื่น ข้อสอบประเภทนี้มีส่วนประกอบที่สำคัญอยู่ 2 ส่วนคือ ตอนนำหรือตัวคำถาม และตัวเลือก ซึ่งแบ่งออกเป็น ตัวถูกและตัวลวง

สมนึก ภัททิยธนี (2541: 63 - 84) กล่าวว่า ข้อสอบแบบเลือกตอบ เป็นคำถามที่ประกอบด้วย 2 ตอน คือ ตอนนำหรือคำถาม กับตอนเลือกในตอนเลือกนี้จะประกอบด้วยตัวเลือกที่เป็นคำตอบถูกและตัวเลือกที่เป็นตัวลวง ปกติจะมีคำถามที่กำหนดให้นักเรียนพิจารณาแล้วหาตัวเลือกที่ถูกต้องมากที่สุดเพียงตัวเดียวจากตัวลวงอื่น ๆ

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน อาจแบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือแบบทดสอบที่ครูสร้างขึ้นเอง และ แบบทดสอบมาตรฐาน ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้สร้างแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนขึ้นเองโดยได้วิเคราะห์พฤติกรรมด้านพุทธิพิสัยตามที่ Wilson (1971) ได้จำแนกไว้ 4 ด้านดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น

3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

3.1 ความเป็นมาของการให้เหตุผล

นักปรัชญาให้ความสำคัญกับเหตุผลมากเป็นพิเศษเพราะถือว่าเป็นเครื่องมือสำคัญในการแสวงหาความรู้ของมนุษย์ Aristotle (384 – 322 B.C) นักปรัชญาคนสำคัญ ชาวกรีกโบราณได้นิยามว่า “มนุษย์ คือ สัตว์ที่มีเหตุผล” (Man is rational animal) มนุษย์รู้จักใช้เหตุผลตั้งแต่เริ่มเป็นมนุษย์ และกิจกรรมการให้เหตุผลนี้เองที่ทำให้มนุษย์สามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้สูงกว่าสัตว์ชนิดใดในโลก อริสโตเติลได้เขียนหนังสือแสดงหลักเกณฑ์ในการพิจารณาความถูกต้องของการให้เหตุผลโดยให้ชื่อหนังสือเล่มนี้ว่า Organum ซึ่งแปลว่า เครื่องมือ เพราะเขาเชื่อว่าเหตุผลเป็นเครื่องมือแสวงหาความจริงของมนุษย์ หลักเกณฑ์การให้เหตุผลที่อริสโตเติลแสดงไว้ในหนังสือเล่มนี้คือ การอ้างเหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) ซึ่งมีอิทธิพลแผ่คลุมโลกตะวันตกในสมัยนั้นและต่อมาถึงสมัยกลางจนกระทั่งถึงสมัยใหม่เมื่อประมาณคริสต์ศตวรรษที่ 16 ซึ่งนับว่าเป็นระยะเวลาที่ยาวนานมากถึงเกือบ 2000 ปี

ในคริสต์ศตวรรษที่ 16 นักปราชญ์ชาวอังกฤษคนหนึ่ง ชื่อ Francis Bacon (ค.ศ. 1561 –1626) ได้หันเหความสนใจไปสู่การอ้างเหตุผลอีกแบบหนึ่ง คือ การอ้างเหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เขาเขียนหนังสือ ชื่อ Novum Organum ซึ่งแปลว่าเครื่องมือใหม่ เพราะเขาเห็นว่าวิธีการอุปนัยนี้จะเป็นเครื่องมือใหม่ของมนุษย์ในการที่จะแสวงหาความรู้ใหม่ๆ ความคิดของเบคอนได้รับอิทธิพลจากวิชาวิทยาศาสตร์ซึ่งสมัยนั้นกำลังประสบความสำเร็จและได้รับความสนใจอย่างมาก เขาเห็นว่าการอ้างเหตุผลแบบนิรนัยนั้นมีจุดอ่อนตรงที่เป็นลักษณะการอ้างเหตุผลที่วกวนเหมือนกับพายเรือในอ่าง ไม่ก่อให้เกิดความรู้ใหม่จึงไม่มีประโยชน์ ความรู้ที่แท้จริงของมนุษย์จึงน่าจะได้มาด้วยวิธีการอุปนัยมากกว่า การอ้างเหตุผลแบบอุปนัยของเบคอนได้รับการจัดให้เข้ารูปสมบูรณ์ขึ้นโดย John Stuart Mill (ค.ศ.1806 – 1873) เกิดเป็นวิธีอุปนัยที่มีชื่อเรียกว่าวิธีการของมิลล์ (Mill’s methods) ซึ่งเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย

ต่อมา Bertrand Russell (ค.ศ.1872-1970) กับ Alfred Whitehead (ค.ศ.1861 – 1947) ได้ร่วมกันเขียนหนังสือ ชื่อ Principia Mathematica ซึ่งถือกันว่าเป็นแม่บทของตรรกวิทยาแนวใหม่ที่เรียกว่า ตรรกวิทยาสัญลักษณ์ (Symbolic Logic) เป็นการผสมผสาน

กฎเกณฑ์ของตรรกวิทยานิรนัยกับกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกันเป็นการศึกษาความสัมพันธ์ของความคิดที่เป็นระบบโดยเน้นที่โครงสร้างหรือรูปแบบเป็นหลักจึงเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า Formal Logic ในขณะเดียวกันได้มีการศึกษาตรรกวิทยาอีกแนวหนึ่งที่เรียกว่า Informal Logic หรือ Critical Reasoning ที่ไม่ยึดถือแบบแผนมากนักแต่จะเป็นตรรกวิทยาเชิงปฏิบัติคือให้ความสำคัญกับการนำกฎเกณฑ์ทางตรรกวิทยามาใช้ได้จริงในการวิเคราะห์การอ้างเหตุผลในชีวิตประจำวัน (กิตติศักดิ์ แก้งทอง, 2547: 12 – 14)

3.2 ความหมายและความสำคัญของการให้เหตุผล

การให้เหตุผล หมายถึง ความสามารถในการคิดหรือตรึกตรองหาเหตุผล เพื่อพิจารณาหาแนวทางในการแก้ปัญหา โดยอาศัยองค์ประกอบพื้นฐานต่างๆ เช่น การสังเกต ความรู้และประสบการณ์เดิม ซึ่งการให้เหตุผลสามารถแสดงออกมาให้รับรู้โดยใช้ภาษา จะเป็นการพูดหรือภาษาเขียนก็ได้

การให้เหตุผลเป็นกิจกรรมในชีวิตประจำวันของมนุษย์ เหตุผลคือหลักฐานหรือสิ่งที่ยืนยันความเชื่ออย่างใดอย่างหนึ่งว่าเป็นจริง เมื่อจะทำอะไรก็ตามเราต้องคิดก่อนว่าเราควรทำหรือไม่เพราะเหตุใด นี่คือการถามหาเหตุผลมาสนับสนุนความคิดและการกระทำของตัวเอง การให้เหตุผล (Reasoning) เป็นกระบวนการทางความคิดที่พยายามแสดงว่าข้อสรุปควรเป็นที่ยอมรับเพราะมี เหตุผลหรือหลักฐานที่ดีมาสนับสนุน นอกจากนี้ เรายังต้องอธิบายเหตุผลนี้ให้คนอื่นเข้าใจและยอมรับด้วย เมื่อได้ฟังเรื่องราวบางอย่างเราอาจไม่เชื่อทั้งหมดในการเลือกว่าเรื่องใดควรเชื่อหรือไม่ควรเชื่อ เราก็ต้องใช้เหตุผลในการพิจารณาการตัดสิน เมื่อเรามีความคิดเห็นไม่ตรงกันหรือมีปัญหาขัดแย้ง เราก็สามารถยุติความขัดแย้งนี้ได้โดยใช้เหตุผล ใครมีเหตุผลดีกว่า

ข้อสรุปของเขาก็จะเป็นที่ยอมรับได้มากกว่า ยิ่งไปกว่านั้นมนุษย์ประสบความสำเร็จยิ่งใหญ่ในการให้เหตุผลเป็นเครื่องมือแสวงหาความรู้ จนกลายเป็นความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาการด้านต่างๆ อย่างที่เราเห็นกันอยู่ในโลกยุคปัจจุบัน เหตุผลจึงมีบทบาทสำคัญยิ่งในการดำเนินชีวิตของมนุษย์แม้เราจะใช้เหตุผลกันอยู่ทุกวัน แต่เหตุผลที่เราใช้อาจไม่ใช่เหตุผลที่ถูกต้องเสมอไป เนื่องจากเรามักใช้เหตุผลตามความเคยชินโดยขาดหลักเกณฑ์และการพิจารณาไตร่ตรองอย่างรอบคอบเป็นเหตุให้เกิดความสับสนระหว่างผู้พูดกับผู้ฟัง ในเมื่อเหตุผลที่เราใช้มีทั้งที่ดีและไม่ดี เราจึงควรเชื่อเฉพาะเหตุผลที่ดีเท่านั้น เราต้องมีวิจารณญาณที่จะแยกแยะเหตุผลที่ดีออกจากเหตุผลที่ ไม่ดีได้ แต่บางครั้งการวิเคราะห์การอ้างเหตุผลเพื่อตัดสินว่าถูกต้องหรือดีพอที่จะยอมรับได้หรือไม่นั้นไม่ใช่สิ่งที่จะทำได้โดยง่ายถ้าปราศจากหลักเกณฑ์มาช่วยในการพิจารณา การหากฎเกณฑ์มาวินิจฉัยการให้เหตุผลว่าถูกหรือผิดอย่างไรเป็นเรื่องของตรรกวิทยา

(Logic) ตรรกวิทยา คือ การศึกษา กฎเกณฑ์การให้เหตุผล ตรรกวิทยาจึงเป็นความรู้พื้นฐานที่สำคัญอย่างยิ่งของการให้เหตุผลที่เราจะต้องทำความเข้าใจและฝึกฝนอย่างจริงจังต่อไป

นอกจากนี้ยังมีนักการศึกษาได้ให้ความหมายของการให้เหตุผล ดังนี้

ชัชชัย คุ้มทวีพร (2534: 121) กล่าวว่า การใช้เหตุผล หมายถึง ลักษณะหนึ่งของการคิดที่พยายามอธิบายเหตุการณ์บางอย่าง ไม่ว่าจะเป็นการใช้หลักฐานการสังเกตหรือข้อความต่าง ๆ ที่ได้รับการยอมรับ

ทิศนา แขมมณี (2542: 14) ได้ให้ความหมายของการคิดอย่างมีเหตุผลว่า เป็นการคิดที่มีจุดมุ่งหมาย เพื่อเข้าใจความคิดที่สามารถอธิบายได้ด้วยหลักเหตุผล โดยสามารถจำแนกข้อมูลที่เป็นข้อเท็จจริงและพิจารณาเรื่องที่คิดบนพื้นฐานของข้อเท็จจริงโดยใช้หลักเหตุผลแบบนิรนัย และอุปนัยซึ่งประกอบด้วยทักษะย่อย ๆ ดังนี้

1. สามารถแยกข้อเท็จจริงและความคิดเห็นออกจากกันได้
2. สามารถใช้เหตุผลแบบนิรนัยหรืออุปนัย พิจารณาข้อเท็จจริงได้
3. สามารถใช้เหตุผลทั้งแบบนิรนัยและอุปนัย พิจารณาข้อเท็จจริงได้

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปเป็นความหมายของความสามารถในการให้เหตุผล ได้ดังนี้ ความสามารถในการให้เหตุผล หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการใช้ทักษะการคิดวิเคราะห์ เพื่อหาแนวทางในการแก้ปัญหาโดยอาศัยองค์ประกอบพื้นฐานต่างๆ

3.3 ประโยชน์ของการให้เหตุผล

การให้เหตุผลเป็นเรื่องของระบบความคิดที่อาจจะเข้าใจได้ยากและมองไม่เห็นชัดเจนว่าเรียนแล้วจะได้ประโยชน์อะไรบ้าง ถึงแม้ไม่เรียนการให้เหตุผล เราก็ใช้เหตุผลกันอยู่แล้วในการตัดสินใจเลือกว่าควรเชื่ออะไร หรือไม่ควรเชื่ออะไร และเพราะเหตุใด แม้จะใช้เหตุผลกันเป็นประจำแต่เรากลับไม่ค่อยสนใจว่าเหตุผลของเราถูกต้องหรือไม่หรือเป็นเหตุผลที่ดีหรือไม่ การให้เหตุผลโดยขาดวิจารณญาณเช่นนี้เป็นสาเหตุให้เกิดความสับสนและความขัดแย้งโดยไม่จำเป็น

นอกจากจะเป็นความสับสนในด้านระบบความคิดที่ไม่ถูกต้องตามกฎเกณฑ์ทางตรรกวิทยาแล้วยังมีความสับสนทางภาษาที่ไม่ชัดเจนและรัดกุมพอ จุดมุ่งหมายหลักในการศึกษาการให้เหตุผลคือทำให้เกิดความถูกต้องชัดเจนในการให้เหตุผล อย่างน้อยที่สุดเมื่อรู้จักการให้เหตุผลแล้วผู้เรียนน่าจะใช้เหตุผลได้ดีขึ้น และสามารถวิเคราะห์การอ้างเหตุผลได้ การวิเคราะห์การ

อ้างเหตุผลไม่ใช่การจับผิดหรือการ โต้แย้งเหตุผลของคนอื่นเสมอไปหากแต่เป็นการประเมินการให้เหตุผลทั้งในส่วนที่ดีและไม่ดีพร้อมๆ กัน เพื่อนำมาปรับปรุงการให้เหตุผลของตัวเอง

3.4 วิธีการให้เหตุผล

โดยทั่วไป มนุษย์มักจะใช้ความรู้ที่มีมาแต่กำเนิดหรือสามัญสำนึก ซึ่งแต่ละคนอาจมีอยู่มากน้อยแตกต่างกัน มาช่วยแก้ปัญหา เช่น ในวันที่ฝนตกตอนเช้า คนในเมืองมักจะออกจากบ้านเร็วกว่าปกติ เพราะคิดว่าการจราจรน่าจะติดขัดมากกว่าในวันที่ฝนไม่ตกตอนเช้าเป็นต้น ในทางคณิตศาสตร์เรียกการให้เหตุผลที่มาจากการใช้ความรู้ที่มีมาแต่กำเนิดหรือสามัญสำนึกนี้ว่า การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ มนุษย์จะมีการให้เหตุผลแบบสหัชญาณมากหรือน้อยนั้นขึ้นอยู่กับประสบการณ์ที่ตนมีอยู่ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2551: 46 – 62)

นอกจากการให้เหตุผลแบบสหัชญาณแล้ว ในทางวิชาการนักการศึกษาได้จำแนกการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 แบบ ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)

การให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นกระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปนั้นว่า ข้อความคาดการณ์

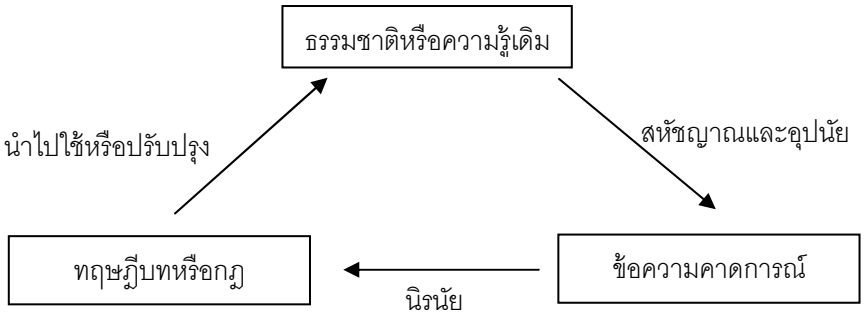
2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning)

การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นกระบวนการที่ยกเอาสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ แล้วใช้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์ อ้างจากความรู้ที่เป็นจริงนั้น เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปหรือผลสรุปที่เพิ่มขึ้นมาใหม่ การให้เหตุผลแบบนิรนัย ประกอบด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วน คือ

2.1 เหตุหรือสมมติฐาน ซึ่งหมายถึง สิ่งที่เป็นจริงหรือยิมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ ได้แก่ คำอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทที่พิสูจน์แล้ว กฎหรือสมบัติต่างๆ

2.2 ผลหรือผลสรุป ซึ่งหมายถึง ข้อสรุปที่ได้จากเหตุหรือสมมติฐาน

อย่างไรก็ตาม การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ การให้เหตุผลปบบอุปนัย และการให้เหตุผลแบบนิรนัย อาจเป็นกระบวนการที่สืบเนื่องกัน โดยเฉพาะในการสร้างองค์ความรู้ใหม่ๆ ได้ดังแสดงในแผนภูมิต่อไปนี้



ภาพที่ 1 แสดงกระบวนการการให้เหตุผล

นอกจากนี้ สมวงษ์ แปลงประสพโชค(2544: 1 – 2) ได้กล่าวถึงวิธีการให้เหตุผลไว้ว่า เหตุผลหรือหลักฐานที่นำมาใช้ยืนยันความเชื่อ แบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ ความรู้เดิมซึ่งเป็นหลักฐานจากสิ่งที่ยอมรับกันอยู่แล้วว่าจริงกับประสบการณ์ซึ่งเป็นหลักฐานจากสิ่งที่เรารับรู้และตรวจสอบโดยประสาทสัมผัส จากหลักฐานที่แตกต่างกัน 2 ประเภทนี้เมื่อนำมาใช้จึงเกิดเป็นการอ้างเหตุผลที่แตกต่างกัน 2 วิธี คือ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยอ้างจากตัวอย่างหรือประสบการณ์ย่อยหลายๆ ตัวอย่าง หลายแง่ หลายมุมและสรุปเป็นความรู้ทั่วไป

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) การให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นการอ้างเหตุผลจากความรู้พื้นฐานชุดหนึ่งที่ยอมรับมาก่อน ความรู้พื้นฐานที่ต้องยอมรับมาใช้อ้างเหตุผลนี้มีชื่อเรียกต่างๆ กัน เช่น เหตุ (premise) สมมติฐาน (Hypothesis) หรือสัจพจน์ (Axiom หรือ Postulate) วิธีการสรุปความรู้มาจากความรู้พื้นฐานที่ยอมรับมาก่อนนี้ เป็นที่นิยมใช้มาตั้งแต่สมัยกรีกโบราณกว่า 2,000 ปี มาแล้ว เช่น เทลีส ใช้วิธีนิรนัยพิสูจน์ความรู้ทางเรขาคณิตให้เป็นระบบเป็นเหตุผลต่อเนื่องกัน

จะเห็นได้ว่าวิธีการให้เหตุผลสามารถจำแนกเป็น 2 วิธี คือ การให้เหตุผลแบบอุปนัย และการให้เหตุผลแบบนิรนัย ขึ้นอยู่กับบริบทของเหตุการ ซึ่งการให้เหตุผลทางเรขาคณิตนั้นเป็นส่วนหนึ่งของการให้เหตุผลแบบนิรนัย เนื่องจากเป็นกระบวนการที่ยกเอาสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ แล้วใช้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์ อ้างจากความรู้ที่เป็นจริงนั้น เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปหรือผลสรุป

3.5 ความหมายของการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

Jacobs and Meyer (1972: 89) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิต (Geometric Reasoning) ไว้ว่า การเรียนเรขาคณิตได้นำโอกาสอันดีที่นักเรียนจะเกิดความเข้าใจ

ในการเขียนพิสูจน์ ได้เริ่มการศึกษาลำดับขั้นของเรขาคณิตซึ่งจะช่วยพัฒนาทักษะในการให้เหตุผลเชิงตรรกะ

Evans (2007: 201) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิต(Geometric Reasoning) ไว้ว่า การจัดการเรียนเรขาคณิตโดยมีลักษณะของการพิจารณามุมที่เกี่ยวกับเส้นขนานและมุมในรูปสามเหลี่ยมเหล่านี้เรียกได้ว่าเป็นการให้เหตุผลทางเรขาคณิต(Geometric Reasoning)

ณรงค์ ปั้นนิ่ม, (2549: 58) ได้ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไว้ว่า การให้เหตุผลทางเรขาคณิต เป็นการพิสูจน์ข้อเท็จจริงที่ประกอบด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วน คือ สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ (เหตุ) กับสิ่งที่เราต้องพิสูจน์ (ผล) ในการพิสูจน์ต่างๆ ทางเรขาคณิตมีสิ่งที่นำมาเป็นข้ออ้างในการให้เหตุผล ต่อไปนี้

1. สิ่งที่เห็นจริงแล้ว (Axoims) เป็นข้อความที่ยอมรับกันทั่วไปว่าเป็นจริงแล้ว โดยไม่ต้องพิสูจน์

2. สัจพจน์ (Postulates) เป็นข้อตกลงเบื้องต้นที่ยอมรับว่าเป็นจริง เช่น “เราสามารถลากเส้นตรงผ่านจุด 2 จุดได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น”

3. บทนิยาม (Definition) เป็นข้อตกลงทางคณิตศาสตร์ซึ่งสามารถนำไปใช้อ้างได้โดยไม่ต้องพิสูจน์ เช่น “เส้นตรงสองเส้นขนานกันก็ต่อเมื่อเส้นตรงสองเส้นนั้นอยู่บนระนาบเดียวกันและไม่ตัดกัน”

4. ทฤษฎีบท (Theorem) เป็นข้อความที่เป็นจริง ทราบได้โดยการพิสูจน์ ซึ่งอาศัยสิ่งที่เห็นจริงแล้ว สัจพจน์ บทนิยาม และทฤษฎีบทช่วยในการพิสูจน์

เจนสมุทร แสงพันธ์ (2550: 3 - 16) ได้ให้ความหมายเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไว้ว่าการให้เหตุผลทางเรขาคณิต (Geometrical Reasoning) หมายถึง กระบวนการเชิงการรู้ (Cognitive Processes)ต่างๆ ตามแนวคิดของ Duval(1998) ซึ่งประกอบด้วย กระบวนการนึกภาพ (Visualisation Processes)เป็นกระบวนการที่นักเรียนนึกภาพเกี่ยวกับข้อความทางเรขาคณิต กระบวนการสร้าง (Construction Processes)กระบวนการนี้เกี่ยวข้องกับการใช้เครื่องมือต่างๆ และกระบวนให้การเหตุผล(Reasoning Processes) เป็นกระบวนการอย่างอ้อมๆ สำหรับการขยายของความรู้ การอธิบาย และการพิสูจน์

ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า การให้เหตุผลทางเรขาคณิต หมายถึง การใช้กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับเรขาคณิตที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์ นำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ มาใช้ประกอบในการให้เหตุผล

3.6 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล

จากที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น จะเห็นได้ว่าการคิดกับการให้เหตุผลมีส่วนสัมพันธ์กันอย่างมาก และเป็นพื้นฐานสำคัญของการเรียนรู้ ด้วยเหตุนี้ นักการศึกษาจึงให้ความสำคัญเกี่ยวกับการสอนเพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดการคิดอย่างมีระบบเหตุผลมากขึ้น ซึ่งได้มีการกล่าวถึงการสอนไว้ 3 แนวทาง คือแนวทางการสอนเพื่อให้คิด (teaching for thinking) แนวทางการสอนการคิด (teaching of thinking) และแนวทางการสอนที่เกี่ยวกับการคิด (teaching about thinking) (Brandt, 1984: 3 อ้างถึงใน สมเดช บุญประจักษ์, 2540: 39) โดยมีรายละเอียดพอสังเขปดังนี้

1. การสอนเพื่อให้คิด การสอนตามแนวทางนี้เน้นในด้านการสอนเนื้อหาวิชา โดยมีการปรับเปลี่ยนกระบวนการสอนเพื่อเพิ่มความสามารถในด้านการคิดของผู้เรียน

2. การสอนการคิด การสอนตามแนวทางนี้มีจุดเน้นเกี่ยวกับกระบวนการทางสมองที่นำมาใช้ในการคิดโดยเฉพาะ โดยเน้นไปที่ทักษะการคิดหรือเป็นแนวทางที่สอนทักษะการคิดโดยตรง แนวทางในการสอนนั้นจะมีลักษณะที่แตกต่างกันหลายแนวทาง ตามความเชื่อพื้นฐานของผู้ที่จัดสร้างแนวทางการสอน

3. การสอนเกี่ยวกับการคิด การสอนตามแนวทางนี้เป็นแนวทางที่ใช้การคิดเป็นเนื้อหาสาระของการสอน โดยมุ่งให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ถึงสิ่งที่เป็นความคิดของตนเอง โดยรู้ว่าตนกำลังคิดอะไร ต้องการรู้อะไร และในขณะที่กำลังคิดอยู่นั้นตนเองรู้อะไรและไม่รู้อะไร ซึ่งสิ่งดังกล่าวนี้จะช่วยให้ผู้เรียนได้เข้าใจถึงกระบวนการคิดของตนเอง อันก่อให้เกิดทักษะที่เรียกว่า การสังเคราะห์ความคิด(metacognition) ของตนเอง แนวทางการสอนเกี่ยวกับการคิดนี้เริ่มเป็นที่สนใจของนักการศึกษาทั่วไปเพิ่มขึ้น โดยเชื่อว่าเป็นแนวทางที่ทำให้ผู้เรียนสามารถควบคุมและตรวจสอบการคิดของตนเองได้ในขณะที่ทำการคิด ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนสามารถค้นหาข้อบกพร่องของตนได้เพื่อหาแนวทางแก้ไขได้ตรงจุด

เนื่องจากความสามารถในการคิดและการให้เหตุผล เป็นความสามารถที่ต้องใช้การฝึก และฝึกจากประสบการณ์ที่หลากหลาย และควรได้รับการฝึกอย่างต่อเนื่อง จากบรรยากาศของชั้นเรียนที่สนับสนุนให้มีการอธิบายแลกเปลี่ยนความคิด ชี้แจงเหตุผลและแก้ปัญหาร่วมกัน ดังนั้น ในการพัฒนาทักษะในการคิดและการให้เหตุผล ควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้มีส่วนร่วม

และแสดงพฤติกรรมในการสืบค้น คาดการณ์ ค้นหาวิธีการพิสูจน์ สังเกตแบบรูป ชี้แจงเหตุผลของแนวคิดโดยการอธิบายแบบรูปแสดงด้วยภาพหรือแบบจำลองและตอบคำถามต่าง ๆ การสร้างข้อความคาดการณ์ การกำหนดแบบจำลอง (modeling) และการอธิบาย ซึ่งเป็นลักษณะของการให้เหตุผลเกี่ยวกับสถานการณ์ (Lappan and Schram. 1989: 18 – 19)

สำหรับการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล Guilford and Hoepfner (1971: 28– 32) ได้ให้ความเห็นว่าการพัฒนาบุคคลให้มีความสามารถในการให้เหตุผลนั้นต้องเริ่มจากการส่งเสริมให้บุคคลได้คิดอย่างมีเหตุผล ความสามารถในการให้เหตุผลดังกล่าวนี้เป็นสิ่งจำเป็นที่โรงเรียนควรจัดทำ และเป็นสิ่งที่สามารถฝึกได้โดยสอนควบคู่กับเนื้อหาวิชาปกติ หรือสถานการณ์ต่าง ๆ ที่เหมาะสม สอดคล้องกับ สสวท. (2544: 194 – 195) ที่กล่าวถึงแนวทางในการพัฒนาทักษะการให้เหตุผลว่า การฝึกให้ผู้เรียนรู้จักคิดและให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผลนั้นสามารถสอดแทรกได้ในการเรียนรู้ทุกเนื้อหาวิชาของคณิตศาสตร์และวิชาอื่น ๆ ด้วย นอกจากนี้ยังได้เสนอแนะองค์ประกอบหลักที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถคิดอย่างมีเหตุผลและรู้จักการให้เหตุผล ดังนี้

1. ควรให้ผู้เรียนได้พบกับโจทย์หรือปัญหาที่ผู้เรียนสนใจ เป็นปัญหาที่ไม่ยากเกินความสามารถของผู้เรียนที่จะคิดและให้เหตุผล

2. ให้ผู้เรียนมีโอกาสและเป็นอิสระที่จะแสดงออกถึงความคิดเห็นในการให้เหตุผลของตัวเอง

3. ผู้สอนช่วยสรุปและชี้แจงให้ผู้เรียนเข้าใจว่า เหตุผลของผู้เรียนถูกต้องตามหลักเกณฑ์หรือไม่ บกพร่องอย่างไร

ดังนั้นสรุปได้ว่า การพัฒนาทักษะการให้เหตุผล ควรเริ่มจากการส่งเสริมให้ผู้เรียนได้คิดอย่างมีเหตุผล จากบรรยากาศที่สนับสนุนให้มีการแสดงการให้เหตุผลของตนเอง แลกเปลี่ยนความคิดเห็น และอภิปรายร่วมกัน ความสามารถในการเหตุผลสามารถพัฒนาได้โดยใช้กิจกรรมที่เป็นการผสมผสานการฝึกการคิดและให้เหตุผลควบคู่ไปกับการสอนเนื้อหาวิชาตามปกติ

3.7 แนวทางการวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

การวัดผลประเมินผลเป็นกระบวนการตรวจสอบคุณภาพของผู้เรียนด้วยวิธีการที่หลากหลาย เช่นการประเมินตามสภาพจริง การใช้แบบทดสอบ ซึ่งเครื่องมือทางการวัดผล แต่ละวิธีก็มีจุดเด่น และข้อจำกัดที่แตกต่างกัน ดังนั้นในการเลือกใช้เครื่องมือ หรือวิธีในการวัดผลประเมินผลในแต่ละครั้งควรคำนึงถึงความเหมาะสม

ความสามารถในด้านเหตุผลจะช่วยให้ผู้เรียนมีสมรรถนะของการรับรู้ในทางคณิตศาสตร์มีตรรกะในการคิดและสามารถอธิบายให้เหตุผลต่าง ๆ ให้ผู้อื่นรับรู้ข้อเท็จจริงได้ซึ่งการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงตรรกะขึ้นอยู่กับการพัฒนาการด้านเชาวน์ปัญญาและการใช้ภาษาของผู้เรียน ผู้เรียนในชั้นประถมศึกษาในฐานะนักคิดเชิงรูปธรรมซึ่งใช้บริบทเชิงรูปธรรม และกายภาพสนับสนุนเหตุผลของตน และพัฒนาขึ้นเรื่อย ๆ เมื่ออยู่ชั้นมัธยมศึกษาด้วยการถ่ายโยง การให้เหตุผลที่เป็นรูปธรรมและนามธรรม แม้ผู้เรียนที่อยู่ในระดับสูงแล้ว ก็ยังมีความจำเป็นในการใช้สิ่งที่เป็นรูปธรรมเพื่อการสนับสนุนการให้เหตุผล (กระทรวงศึกษาธิการ, 2544: 13)

จุดมุ่งหมายการวัดเหตุผลทางคณิตศาสตร์ เพื่อดูความสามารถทางด้านหลักการ วิธีการ การแปลความ การตีความ การขยายความ การไล่เลียงหาเหตุผล การเปรียบเทียบขั้นตอนการพิสูจน์ และการประเมินค่า (สมศักดิ์ สินธุรเวชญ์, 2529: 50)

จากการศึกษาเอกสารเกี่ยวกับการสร้างเครื่องมือในการวัดผลประเมินผลวิชาคณิตศาสตร์ เอกสารหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และ คู่มือวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ผู้วิจัยเลือกใช้วิธีในการวัดความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์โดยใช้แบบทดสอบอัตนัย

3.7.1 **แบบทดสอบอัตนัย**

Mehrens and Lehmann (1969: 206 – 277) กล่าวถึงแบบทดสอบอัตนัยว่ามีลักษณะของคำถามที่แตกต่างจากคำถามชนิดอื่น ดังนี้

1. ไม่มีคำตอบเพียงคำตอบเดียวที่สมบูรณ์และถูกต้อง
2. ผู้สอบได้ตอบอย่างอิสระ
3. คุณภาพของคำตอบมีระดับต่างกัน

ได้แบ่งแบบทดสอบอัตนัยออกเป็น 2 ประเภท ตามลักษณะของความมีอิสระในการตอบ ดังนี้

1. แบบตอบขยาย (Extended Response) หรือแบบไม่จำกัดคำตอบ (Unrestricted Response) ข้อสอบแบบนี้จะถามความรู้ความสามารถต่างๆ โดยให้อิสระในการตอบแก่นักเรียนหรือผู้สอบมาก เปิดโอกาสให้เขียนแสดงความคิดเห็น อธิบาย อภิปรายได้อย่างเต็มที่ทุกแง่ทุกมุมตามที่ต้องการไม่จำกัด ลักษณะคำถามจึงกว้างขวาง เหมาะกับการวัดความสามารถด้านความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ทัศนคติ และการประเมินค่า (Evaluation) เพราะข้อสอบแบบนี้ส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักรวบรวมความคิดต่างๆ การประเมินคุณค่าของสิ่งเหล่านั้นและการใช้วิธีการต่างๆ ในการแก้ปัญหา ด้วยเหตุผลนี้ ปริมาณคำตอบของข้อสอบแบบนี้จึงขึ้นอยู่

กับคำถามและความรู้ที่สั่งสมไว้ว่ามีมากน้อยเพียงใด ประกอบกับความสามารถในการจัดระบบการตอบ และความสามารถในการใช้ภาษาของนักเรียนแต่ละคนเป็นสำคัญ จุดอ่อนของการถามแบบนี้อยู่ที่ การให้คะแนน เพราะยากที่จะหาเกณฑ์ในการให้คะแนนที่ถูกต้องเที่ยงตรงได้ คำถามที่ใช้มักจะเป็นคำถามประเภท “จงอภิปราย , เปรียบเทียบ, แสดงความคิดเห็น” เป็นส่วนใหญ่

2. แบบทดสอบจำกัด (Restricted Response หรือ Short – Essay Item) ข้อสอบแบบนี้จะสามารถอุดจุดอ่อนของคำถามแบบแรกได้ ทั้งนี้เนื่องจากข้อสอบแบบขยายคำตอบเป็นแบบทดสอบที่ให้อิสระในการตอบโดยไม่จำกัด ทำให้ได้คำตอบที่แตกต่างกันมาก จึงมักมีปัญหาในการตรวจให้คะแนน โดยเฉพาะในแง่ของการเปรียบเทียบกันในกลุ่ม ข้อสอบแบบนี้จึงถามแบบเจาะจง ผู้เขียนข้อสอบจะกำหนดขอบเขต ลักษณะการตอบตลอดจนเนื้อหา ทิศทางการตอบและความยาวในการตอบไว้ด้วยคำตอบจึงสั้นและอยู่ภายใต้ขอบเขตที่กำหนดไว้ ผู้ตอบต้องจัดเรียบเรียงความคิดเห็นให้เป็นระเบียบแล้วตอบให้ตรงประเด็นของคำถามเพียงสั้นๆ โดยไม่มีโอกาสอภิปรายแสดงความคิดเห็นนอกเหนือจากที่กำหนดไว้ให้ ข้อสอบแบบนี้จึงมีความสะดวกในการให้คะแนนมากกว่าแบบแรก เพราะมีเกณฑ์ต่างๆ ที่จะตัดสินให้คะแนนมากขึ้น ผู้เขียนข้อสอบจึงจำเป็นต้องระมัดระวังในเรื่องคำสั่งโจทย์ ขอบเขตเนื้อหา และเวลาที่กำหนดให้นักเรียนตอบคำถามที่ใช้มักอยู่ในรูป “จงนิยาม, ตอบสั้นๆ, อธิบายสั้นๆ” อย่างไรก็ดี ข้อสอบแบบนี้ให้โอกาสแก่นักเรียนน้อยมากในการแสดงความสามารถเกี่ยวกับการจัด การรวบรวม การแสดงความคิดเห็น และการจัดหาสิ่งต่างๆ ที่จำเป็นเกี่ยวกับการตอบ จึงมีประโยชน์สำหรับการวัดผลการเรียนรู้ระดับความเข้าใจ การนำไปใช้ และการวิเคราะห์แต่จะมีคุณค่าน้อยมากถ้าจะนำไปใช้ในระดับการสังเคราะห์และการประเมินค่า

Hopkins and Antes (1990: 231-232) ได้เสนอรูปแบบของแบบทดสอบอัตนัยว่าข้อสอบประเภทนี้ต้องการคำตอบที่เป็นประโยคหลายประโยคต่อเนื่องกัน ซึ่งแสดงความสมเหตุสมผล ผู้ตรวจความถูกต้องและคุณภาพของข้อสอบแบบนี้ ต้องเป็นผู้ที่มีความรู้ในวิชาที่สอบ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ

1. แบบที่มีขอบเขตกว้างแต่ให้เวลาจำกัด (Extended-Response) ข้อสอบลักษณะนี้จะทดสอบทักษะของผู้เขียนในการเลือกว่าเขียนอะไรและจะเขียนมากน้อยแค่ไหนในแต่ละส่วน รวมทั้งความสามารถในการจัดระเบียบและแสดงความคิดในเชิงตรรกะ ข้อสอบเขียนบรรยายแบบขยายความนี้เป็นข้อสอบประเภทปลายเปิด (Open-Ended) และไม่ได้จำกัดความคิดของนักเรียน ข้อสอบแบบนี้มีประโยชน์ในการประเมินการเขียน โดยเฉพาะศิลปะเกี่ยวกับการใช้ภาษา

2. แบบจำกัดคำตอบ (Limited-Response) จะมีของเขตกว้างหรือแคบก็ได้ แต่นักเรียนควรจะรู้อย่างแน่ชัดว่าขีดจำกัดนั้นคืออะไรข้อสอบแบบนี้จะให้ขีดจำกัดที่ระบุได้อย่างชัดเจนเพื่อสร้างขอบเขตในการตอบให้นักเรียน กล่าวคือนักเรียนต้องตอบในกรอบเนื้อหา ที่จำกัด ข้อสอบแบบนี้มีประโยชน์ต่อครูผู้สอนที่ต้องการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซึ่งต่างจากแบบทดสอบอัตนัยแบบที่มีขอบเขตกว้างที่ต้องการวัดด้านทักษะการเขียนผู้ออกข้อสอบควรพิจารณาถึงจุดมุ่งหมายในการวัดผลก่อนตัดสินใจเลือกว่าจะใช้รูปแบบใด

พวงรัตน์ ทวีรัตน์ (2530: 108) ได้กล่าวว่าข้อสอบอัตนัย มี 2 ประเภท คือ

1. แบบไม่กำหนดขอบเขตของการตอบหรือการตอบยาว (Extended Response) ข้อสอบอัตนัยแบบนี้จะเปิดโอกาสให้ผู้ตอบแสดงความรู้ ความคิดเห็นในสิ่งที่ถามอย่างเต็มที่และอย่างอิสระ เป็นข้อสอบอัตนัยที่สามารถวัดสมรรถภาพสมองด้านคิดสร้างสรรค์ การประเมินค่าตลอดจนความคิดเห็นและทัศนคติได้อย่างกว้างขวาง ปริมาณคำตอบขึ้นอยู่กับความรู้ความสามารถและความคุ้นเคยในสิ่งที่ถามของผู้ตอบว่า มีมากน้อยเพียงใด การกำหนดเวลาในการตอบจึงต้องกำหนดให้เหมาะสม ข้อสอบอัตนัยแบบนี้เป็นการวัดผู้สอบในคุณลักษณะ 4 อย่าง คือ

1) ความสามารถในการระลึกได้ถึงความรู้ที่ได้เรียนไปแล้ว

2) ความสามารถในการประเมินค่าความรู้ที่จำได้

3) ความสามารถในการรวบรวมความรู้ และความคิดให้เป็นระบบ

4) ความสามารถในการนำความรู้ ความคิดที่ได้จัดระบบแล้วมาใช้แก้ปัญหา หรือตอบคำถามในสิ่งที่ถามอย่างมีเหตุผล

2. แบบกำหนดของเขตของการตอบ (Restricted Response) ข้อสอบแบบนี้ลักษณะการถามจะเฉพาะเจาะจง และต้องการคำตอบที่เฉพาะเจาะจง ภายในขอบเขตที่ถาม ดังนั้น ผู้ตอบต้องจัดเรียงความคิดให้เป็นระเบียบ เพื่อตอบให้ตรงกับประเด็นที่ถาม และไม่จำเป็นต้องตอบยาว ความสำคัญอยู่ที่ว่าต้องเข้าใจคำถามและตอบตามประเด็นที่ถามข้อสอบอัตนัยแบบนี้ให้คะแนนง่ายกว่าแบบแรก ข้อสอบอัตนัยแบบกำหนดของเขตของคำตอบนี้ใช้วัดความสามารถของนักเรียนในการสังเคราะห์ความคิด และบรรยายความคิดนั้น ออกมาอย่างมีเหตุมีผลดังนั้นจึงเหมาะที่ใช้วัดความสามารถของสมองด้านความเข้าใจ การนำไปใช้ การวิเคราะห์การสังเคราะห์ และการประเมินค่า เป็นอย่างดี

หลักสำคัญในการสร้างข้อคำถามแบบอัตนัย คือ

1. ต้องดูจุดประสงค์ของการสอบก่อน แล้วจึงเขียนข้อคำถาม เพื่อให้ตรงจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัด

2. ควรใช้คำถามที่มีความกระจ่างชัด ด้วยหลักการถามและหลักภาษา

3. คำถามหนึ่งๆ ควรเป็นเรื่องเดียว เพื่อให้ผู้ตอบตอบได้ตรงเป้าหมายที่ผู้ถามต้องการ

4. คำถามควรคำนึงถึงเวลาที่ให้ผู้ตอบทำการตอบ

5. คำถามทุกคำถามผู้สอบควรทำเฉลยไว้ และวางแผนการให้คะแนนแต่ละส่วนว่าเป็นเท่าไร เพื่อใช้เปรียบเทียบ นอกจากนั้นต้องพิจารณาคำตอบที่มีโอกาสเป็นไปได้ที่ไม่จำเป็นจะต้องตรงกับเฉลยทุกตัว แต่ก็จะถูกสามารถได้คะแนนได้ด้วย

จากลักษณะของแบบทดสอบอัตนัยดังกล่าว พอสรุปได้ดังนี้ คือ แบบทดสอบอัตนัย เป็นแบบทดสอบที่กำหนดปัญหาหรือเรื่องราวให้ โดยให้ผู้ตอบอธิบาย หรือบรรยายแสดงความคิดเห็น หรือวิพากษ์วิจารณ์อย่างอิสระภายในเวลาที่กำหนดให้ ในการวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตนี้ ผู้วิจัยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัย โดยใช้ 2 ประเภท คือ แบบทดสอบอัตนัยแบบตอบยาว และแบบทดสอบอัตนัยแบบตอบสั้น ซึ่งแบบทดสอบอัตนัยแบบตอบยาวมีลักษณะเป็นข้อสอบที่นักเรียนแสดงการให้เหตุผลทางเรขาคณิตโดยการเขียนพิสูจน์เองทั้งหมด ส่วนแบบทดสอบอัตนัยแบบตอบสั้นมีลักษณะเป็นข้อสอบที่เว้นช่องว่างให้นักเรียนเติมข้อความพิสูจน์ หรือเติมเหตุผลทางเรขาคณิต

3.7.2 **เกณฑ์การให้คะแนน** (Scoring Rubric)

Goodrich (1997: 14 – 17) กล่าวว่า รูบริค (Rubric) เป็นเครื่องมือการให้คะแนนซึ่งจะแสดงเกณฑ์สำหรับชิ้นงานจะเป็นการเชื่อมต่อกัน ในการแบ่งลำดับของคุณลักษณะแต่ละเกณฑ์จากดีมากจนถึงต้องปรับปรุงแก้ไข และ กู๊ดริชยังได้กล่าวถึงประโยชน์ของรูบริค ไว้ดังนี้

1. รูบริคสามารถจะพัฒนาการปฏิบัติงานของนักเรียนคล้ายกับเป็นการกำกับติดตาม โดยทำให้ความคาดหมายของครูมีความชัดเจน และเป็นการแสดงว่านักเรียนจะพบกับสิ่งที่คาดหมายได้อย่างไร ผลที่ได้จะเป็นการบอกการปรับปรุงแก้ไขในคุณลักษณะของงานนักเรียนและในการเรียนรู้

2. รูบริคสามารถช่วยตัดสินเกี่ยวกับคุณลักษณะงานของนักเรียนด้วยตนเอง และงานอื่นๆ เมื่อรูบริคนำมาใช้ประเมินตนเองและกลุ่ม จะทำให้เพิ่มความสามารถในการแก้ปัญหานั้น

3. รูบริคจะช่วยลดเวลาของครูที่ใช้ในการประเมินงานของนักเรียนได้

4. รูบริคใช้ง่าย และมีการอธิบายที่ชัดเจน

Ronis (2000: 48) กล่าวว่า รูบริคเป็นแนวทางการให้คะแนนผลงานหรือการปฏิบัติของนักเรียน รูบริคจะเป็นตัวแทนคุณลักษณะที่สังเกตได้จากผลงาน กระบวนการ หรือการปฏิบัติ รูบริคจะช่วยให้ระบบการให้คะแนนมีความง่ายในการเรียนรู้และนำ ไปใช้ และปรับปรุงผลงานการปฏิบัติ และโรนิสได้กล่าวว่า รูบริคจะเป็นส่วนสำคัญที่จะช่วยให้ครูตอบคำถามต่อไปนี้

1. เป้าหมายการปฏิบัติของนักเรียนคืออะไร
2. อะไรเป็นสิ่งที่นักเรียนต้องรู้อย่างแท้จริง โดยขึ้นอยู่กับเกณฑ์มาตรฐาน
3. อะไรจะเป็นหลักฐานประกอบความเข้าใจของนักเรียน
4. ผลงานจะต้องมีลักษณะอย่างไรบ้าง
5. อะไรเป็นสิ่งที่ผิดพลาดแสดงถึงคะแนนที่น้อยลง

กรมวิชาการ (2539: 54) กล่าวถึง “รูบริค” (Rubrics) คือ แนวทางการให้คะแนน (Scoring Guide) ซึ่งจะต้องกำหนดมาตรวัด (Scale) และรายการคุณลักษณะที่บรรยายถึงความสามารถในการแสดงออกของแต่ละจุดในมาตรวัดไว้อย่างชัดเจน การให้คะแนนของรูบริค ก็คือ การตอบคำถามว่านักเรียนทำอะไรได้สำเร็จหรือว่ามีระดับความสำเร็จในขั้นต่างๆกันหรือมีผลงานเป็นอย่างไร

เสาวนีย์ เกรียร์ (2540: 159) กล่าวว่า เป็นเครื่องมือในการให้คะแนนที่ประกอบด้วยประเด็นต่างๆ ที่จะใช้พิจารณางานหนึ่ง และคำอธิบายระดับคุณภาพของแต่ละประเด็นประเมิน ซึ่งอาจเรียงลำดับตั้งแต่ดีเลิศไปจนถึงต้องปรับปรุง หรือให้เป็นระดับตัวเลขตั้งแต่มากที่สุด ประเด็นประเมินอาจกำหนดเพิ่มเติมได้หลายข้อ คำอธิบายระดับคุณภาพควรอธิบายให้ชัดเจน กระชับที่สุด เป็นคำอธิบายที่สามารถบอกได้ว่า ทำไมต้องดีเลิศ ดี ต้องปรับปรุง

สมศักดิ์ ภู่วิภาดาวรรธน์ (2544: 137-152) ให้ความหมายของรูบริคส์ (Rubrics) ว่าเป็นเครื่องมือในการให้คะแนน (Scoring Tool) ที่มีการระบุเกณฑ์(Criteria)ประเมินชิ้นงาน และคุณภาพ (Quality) ของชิ้นงานในแต่ละเกณฑ์

บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์ (2547: 89) กล่าวว่า กฎเกณฑ์การให้คะแนน คือ ชุดของแนวทางให้คะแนนผลการปฏิบัติเรื่องใดเรื่องหนึ่งสำหรับใช้ประเมินคุณภาพของการปฏิบัติของผู้เรียน แนวทางในการให้คะแนนอาจทำ ในรูปของมาตราประมาณค่าหรือแบบตรวจสอบรายการ โดยปกติกฎเกณฑ์การให้คะแนนชุดหนึ่งสำหรับประเมินจุดหมายการเรียนรู้ข้อหนึ่งหรือส่วนหนึ่งของการปฏิบัติ ในกรณีที่การปฏิบัติมีความสลับซับซ้อนมากขึ้นจำเป็นต้องทำการประเมินหลายๆ

จุดหมายการเรียนรู้ หรือการปฏิบัติหลายๆอย่าง ดังนั้นจึงต้องใช้กฎเกณฑ์การให้คะแนนหลายชุดในการประเมินการปฏิบัติจากหลายๆ จุดหมายการเรียนรู้

กฎเกณฑ์การให้คะแนนแต่ละชุดประกอบด้วยตัวเลขที่สะท้อนระดับคุณภาพของการปฏิบัติ เช่น 1 ถึง 4 เมื่อ 4หมายถึง คุณภาพระดับสูงสุด, 3 หมายถึง คุณภาพระดับสูง, 2 หมายถึง คุณภาพระดับพอใช้ และ 1 หมายถึง คุณภาพยังไม่เป็นที่น่าพอใจ ซึ่งจากความหมายและคำกล่าวของนักวิชาการสรุปได้ว่า รูบริคมีประโยชน์หลายประการ ดังนี้

1. ช่วยพัฒนาผลงานของนักเรียน ขณะเดียวกันก็เป็นเครื่องมือในการติดตามพัฒนาผลงานของนักเรียนเองด้วย เพราะรูบริคบอกไว้ชัดเจนว่าครูคาดหวังอะไรและนักเรียนจะได้รู้ว่าจะก้าวไปถึงความคาดหวังนั้นได้อย่างไร

2. ช่วยให้นักเรียนหัดใช้ความคิดในการพิจารณาคุณภาพงานของตนเองและผู้อื่นจากการใช้รูบริคประเมินผลงานของตนเอง และเพื่อน การฝึกให้ทำงานหลายๆครั้ง จะช่วยให้นักเรียนเป็นคนที่มีความรับผิดชอบต่องานตนเอง

3. ช่วยลดเวลาที่ครูต้องใช้สำหรับการประเมินผลงานนักเรียน เพราะหลังจากนักเรียนประเมินตนเอง และให้นักเรียนประเมินโดยใช้รูบริคแล้ว ครูมักพบว่าสิ่งที่ครูต้องปรับปรุงมีไม่มาก

4. ครูสามารถปรับรูบริคให้เหมาะสมกับการประเมินผลงานนักเรียนกลุ่มต่างๆ ที่ต่างกันมาก

5. เป็นสิ่งที่ง่ายและอธิบายให้คนอื่นเข้าใจได้ง่าย เช่น การอธิบายให้ผู้ปกครองทราบ

3.7.3 วิธีการตรวจ ให้คะแนนแบบทดสอบอัตนัย

วิธีการตรวจให้คะแนนแบบทดสอบอัตนัย ทำได้ 2 วิธี (Stenmark. 1991: 20)

1. วิธีการวิเคราะห์ (Analytical Method หรือ Point Method) ใช้การวิเคราะห์ด้วยประเด็นที่มีลักษณะแตกต่างกันของคำตอบ

2. วิธีประเมินรวม (Holistic Method) เป็นวิธีที่ผู้ประเมินพิจารณาคำตอบโดยรวมมากกว่าตรวจสอบรายละเอียดปลีกย่อยเฉพาะ

นักวัดผลการศึกษาหลายท่าน ได้ให้ความหมายเกี่ยวกับวิธีการตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบทั้ง 2 วิธีนี้ไว้

Mehrens and Lehmann (1984: 229 – 238) ได้อธิบายถึงการตรวจให้คะแนนวิธีวิเคราะห์และวิธีประเมินรวมไว้ ดังนี้

1. วิธีการวิเคราะห์ (Analytical Method หรือ Point Method) เป็นวิธีที่มีรูปแบบคำตอบประกอบด้วยประเด็นเฉพาะที่กำหนดไว้ก่อนแล้ว คะแนนของนักเรียนที่ได้จะขึ้นอยู่กับจำนวนประเด็นที่เขาตอบ รวมไปถึงส่วนอื่นๆ เช่น แสดงความคิดเห็นได้ชัดเจนการให้เหตุผลและการยกตัวอย่างสนับสนุนในประเด็นคำตอบ และการกำหนดคะแนนในแต่ละประเด็นจะขึ้นอยู่กับเวลาที่ใช้ในการตอบ ความซับซ้อนของคำถาม และเนื้อหาที่ครูสอน

2. วิธีประเมินรวม (Global Scoring หรือ Holistic หรือ Rating Method) วิธีนี้คำตอบจะไม่ถูกแบ่งเป็นส่วนๆ เป็นประเด็นเฉพาะ แต่ผู้ตรวจจะอ่านคำตอบอย่างรวดเร็วแล้วใช้ความประทับใจและใช้มาตรฐานบางอย่าง กำหนดระดับของคำตอบ การตรวจคำตอบจะขึ้นอยู่กับระดับของการแบ่ง อาจจะแบ่งข้อสอบเป็น 2 กลุ่ม คือ “กลุ่มที่ยอมรับได้-กลุ่มที่ยอมรับไม่ได้” หรือ 5 กลุ่ม คือ “ดีมากจนถึงต่ำกว่ามาตรฐาน” โดยมากจะแบ่งประมาณ 4 หรือ 5 กลุ่ม

สำหรับกรณีที่แบ่งเป็น 5 กลุ่ม ประกอบด้วย

1. คุณภาพดีมาก
2. คุณภาพดีกว่าปานกลาง
3. คุณภาพปานกลาง
4. คุณภาพต่ำกว่าปานกลาง
5. คุณภาพต่ำกว่ามาตรฐาน

ในการอ่านคำตอบอย่างรวดเร็วนั้น ผู้ตรวจจะกำหนดคุณภาพของคำตอบให้อยู่ 1 ใน 5 กลุ่มนี้ แต่ละคำตอบจะต้องอ่านอย่างน้อยที่สุด 2 ครั้งเพื่อจัดอันดับคุณภาพ วิธีนี้จะไม่ลำบากและไม่เสียเวลามากไป จึงทำได้เร็วกว่าวิธีการวิเคราะห์ซึ่งวิธีประเมินรวมจะมีประสิทธิภาพมากเมื่อแบบทดสอบมีจำนวนมากข้อเสนอแนะสำหรับการตรวจให้คะแนน ซึ่งเป็นข้อเสนอแนะเพื่อให้การตรวจให้คะแนนมีความเชื่อมั่นเพิ่มขึ้น

1. ตรวจให้คะแนนที่ให้ไปแล้วอีกครั้งกับระดับคะแนนที่กำหนดให้
2. พยายามให้การตรวจให้คะแนนคงที่ สม่ำเสมอ
3. ตรวจให้คะแนนทีละคำถามให้ครบทุกคนก่อน
4. ตรวจให้คะแนนคำตอบโดยไม่บอกชื่อผู้ทำ
5. การพิจารณาต้องแยกกันระหว่างเนื้อหากับความสามารถในการเขียนของนักเรียน
6. พยายามให้คะแนนคำตอบทั้งหมดในแต่ละคำถามโดยไม่มีการหยุดชะงัก
7. ถ้าเป็นไปได้ ควรมีผู้ตรวจ 2 คนที่เป็นอิสระจากกัน ในการตรวจแบบทดสอบ 1 ฉบับและใช้ค่าเฉลี่ยเป็นคะแนนสรุป
8. จัดให้มีข้อคิดเห็นและการแก้ไขข้อผิดพลาด

9. จัดชุดคำตอบมาตรฐานที่เป็นไปได้จริง

ส. วาสนา ประวาลพฤกษ์ (2533: 39 – 42) ได้เสนอวิธีการกำหนดระดับคะแนน ทั้งแบบองค์ประกอบ ที่มีคะแนนเดียวสำหรับงานหรือข้อเขียนนั้น และแบบองค์ประกอบ ที่มีคะแนนหลายคะแนนสำหรับงานหรือข้อเขียนนั้นโดยเสนอวิธีกำหนดเกณฑ์ 5 วิธี เพื่อใช้ในการตรวจให้คะแนน ดังนี้

1. แยกประเด็นพิจารณาออกเป็นประเด็นย่อย แล้วทำเป็นตารางพิจารณาความถูกต้องในแต่ละประเด็น กำหนดระดับคะแนนตามจำนวนที่ปฏิบัติถูกต้องในประเด็นเหล่านั้น

2. กำหนดระดับความสมบูรณ์ตามเส้นแสดงความต่อเนื่องของความสามารถ (Continuous Ability)

3. กำหนดระดับความผิดพลาด พิจารณาความบกพร่องจากคำตอบว่ามีมากน้อยเท่าใดโดยจะหักจากระดับคะแนนสูงสุดลงมาทีละระดับ

4. กำหนดระดับการยอมรับและคำอธิบาย

5. ใช้หลักการจัดกลุ่มแบบอิงกลุ่ม

กรมวิชาการ (2539: 54-59) กล่าวถึงเกณฑ์การให้คะแนนทั้ง 2 วิธีว่า

1. เกณฑ์การให้คะแนนเป็นภาพรวม หรือเกณฑ์รวม (Holistic Scoring Rubric) คือ เกณฑ์การให้คะแนนงานชิ้นใดชิ้นหนึ่งโดยดูภาพรวมของชิ้นงานว่า มีความเข้าใจในความคิดรวบยอด การสื่อความหมายกระบวนการที่ใช้และผลงานเป็นอย่างไร แล้วเขียนอธิบายคุณภาพของงาน หรือความสำเร็จของงานเป็นชิ้นๆ โดยอาจจะแบ่งระดับคุณภาพ ตั้งแต่ 0 – 4 หรือ 0 – 6 สำหรับในขั้นต้นการให้คะแนนรูบริค อาจแบ่งวิธีการให้คะแนนหลายวิธี เช่น

วิธีที่ 1 แบ่งงานตามคุณภาพเป็น 3 กอง คือ

กองที่ 1 ได้แก่ งานที่มีคุณภาพเป็นพิเศษและเขียนอธิบายลักษณะของงานที่มีคุณลักษณะเป็นพิเศษ

กองที่ 2 ได้แก่ งานที่ยอมรับได้และเขียนอธิบายลักษณะของงานที่ยอมรับได้

กองที่ 3 ได้แก่ งานที่ยอมรับได้น้อย หรือยอมรับไม่ได้ และเขียนอธิบายลักษณะของงานที่ยอมรับได้น้อย

จากนั้นก็นำงานแต่ละกองมาให้คะแนนเป็น 2 ระดับ คือ

งานกองที่ 1 จะให้คะแนน 6 หรือ 5

งานกองที่ 2 จะให้คะแนน 4 หรือ 3

งานกองที่ 3 จะให้คะแนน 2 หรือ 1

วิธีที่ 2 กำหนดตามระดับความผิดพลาด คือ พิจารณาความบกพร่องจากคำตอบว่ามีมากน้อยเพียงใด โดยจะหักจากระดับคะแนนสูงสุดลงมาทีละระดับ ดังนี้

คะแนน 4 หมายถึง คำตอบถูก แสดงเหตุผลถูก แนวคิดชัดเจน

คะแนน 3 หมายถึง คำตอบถูกเหตุผลถูกแต่มีข้อผิดพลาดเล็กน้อย

คะแนน 2 หมายถึง เหตุผลหรือการคำนวณผิดพลาด แต่มีแนวทางที่จะนำไปสู่คำตอบ

คะแนน 1 หมายถึง แสดงวิธีคิดเล็กน้อยแต่ไม่ได้คำตอบ

คะแนน 0 หมายถึง ไม่ตอบหรือตอบไม่ถูกเลย

วิธีที่ 3 กำหนดระดับการยอมรับและคำอธิบาย เช่น กฎเกณฑ์การให้คะแนนของความเข้าใจเนื้อหาสาระ เขียนได้เป็น 4 ระดับ ดังนี้

4 หมายถึง การสาธิตหรือแสดงออกให้เห็นถึงการเข้าใจที่สมบูรณ์ ครบถ้วน ถูกต้องในหลักการ ความคิดรวบยอด ข้อเท็จจริงของงานหรือสถานการณ์ที่กำหนดรวมทั้งเสนอแนวคิดใหม่ที่แสดงถึงความเข้าใจอย่างลึกซึ้งถึงกฎเกณฑ์ หรือลักษณะของข้อมูล

3 หมายถึง การแสดงออกให้เห็นถึงการเข้าใจที่สมบูรณ์ ครบถ้วนถูกต้องในหลักการ ความคิดรวบยอด ข้อเท็จจริงของงานหรือสถานการณ์ที่กำหนด

2 หมายถึง การแสดงออกให้เห็นถึงการเข้าใจที่ไม่สมบูรณ์ครบถ้วน ถูกต้องในหลักการ ความคิดรวบยอด ข้อเท็จจริงของงานหรือสถานการณ์ที่กำหนดในบางส่วน

1 หมายถึง การแสดงออกให้เห็นถึงการเข้าใจในหลักการความคิดรวบยอด ข้อเท็จจริงของงาน หรือ สถานการณ์ที่กำหนดได้น้อยมาก และเข้าใจไม่ถูกต้องบางส่วน

0 หมายถึง ไม่แสดงความคิดเห็นใดๆ

ซึ่งทั้ง 3 วิธีดังกล่าวนั้น พอที่จะสรุปได้ว่า มีส่วนที่เหมือนกันก็คือเป็นการตรวจให้คะแนนที่มองภาพรวมของผลงาน (ในที่นี้หมายถึง การตอบในกระดาษคำตอบของนักเรียน)แล้วแยกออกเป็นกองๆ ส่วนที่แตกต่างกันของทั้ง 3วิธี ก็คือการแยกออกเป็นกองๆ นั้น ใช้คุณสมบัติในการแยกต่างกัน กล่าวคือ

วิธีที่ 1 แยกโดยใช้คุณภาพของผลงานเป็นหลัก

วิธีที่ 2 แยกโดยใช้ความผิดพลาดของผลงานเป็นหลัก

วิธีที่ 3 แยกโดยใช้ความสามารถในการอธิบายหรือการแสดงออกให้เห็นถึงการเข้าใจเป็นหลัก

2. เกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกองค์ประกอบ หรือเกณฑ์ย่อย (Analytic Scoring Rubric) เพื่อให้การมองคุณภาพงานหรือความสามารถของนักเรียนได้อย่างชัดเจน จึงได้มีการแยก

องค์ประกอบของการให้คะแนน และการอธิบายคุณภาพของงานในแต่ละองค์ประกอบเป็นระดับ โดยทั่วไปแล้วจะมีการแยกประกอบของงานเป็น 4 ด้านคือ

1. ความเข้าใจในความคิดรวบยอด ข้อเท็จจริง เป็นการแสดงให้เห็นว่านักเรียนเข้าใจในความคิดรวบยอด หลักการในแก้ปัญหาที่ถามอย่างกระจ่างชัด

2. การสื่อความหมาย สื่อสาร คือ ความสามารถในการอธิบายนำเสนอ การบรรยาย เหตุผล แนวคิด ให้ผู้อื่นเข้าใจได้ดี มีความคิดสร้างสรรค์

3. การใช้กระบวนการและยุทธวิธี สามารถเลือกใช้ยุทธวิธีกระบวนการนำไปสู่ความสำเร็จอย่างมีประสิทธิภาพ

4. ผลสำเร็จของงาน ความถูกต้องแม่นยำในผลสำเร็จของงาน หรือ อธิบายที่มาและตรวจสอบผลงาน

จากศึกษาเอกสารการวัดและประเมินผลทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยจึงได้สร้างเกณฑ์การให้คะแนนแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตโดยแยกองค์ประกอบ หรือเกณฑ์ย่อย (Analytic Scoring Rubric) เพื่อให้การมองคุณภาพงานหรือความสามารถของนักเรียนในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตได้อย่างชัดเจน มีการแยกองค์ประกอบของการให้คะแนนออกเป็น 3 หมวด คือ ข้อความพิสูจน์ การอธิบายเหตุผลกับข้อความพิสูจน์ และลำดับการเขียนข้อความพิสูจน์ และกำหนดคะแนนตามระดับความผิดพลาด คือ พิจารณาความบกพร่องจากคำตอบว่ามีมากน้อยเพียงใด โดยจะหักจากระดับคะแนนสูงสุดลงมาทีละระดับ กล่าวคือ ระดับคะแนน 4 หมายถึง คำตอบถูก แสดงเหตุผลถูก แนวคิดชัดเจน จนถึงระดับคะแนน 0 หมายถึง ไม่ตอบหรือตอบไม่ถูกเลย

4. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยต่างประเทศ

Garabedian (1981: a) ได้ศึกษาวิจัยเรื่องผลของการพิสูจน์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนในวิชาเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 จำนวน 369 คน ที่เรียนวิชาเรขาคณิตในโรงเรียนมัธยมปลาย 3 โรงเรียนในรัฐแมสซาซูเซทส์ โดยทำการสุ่มนักเรียนมา 18 ห้องเรียน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 9 ห้องเรียน และกลุ่มควบคุม 9 ห้องเรียน กลุ่มทดลองถูกกำหนดให้เรียนการพิสูจน์ 50% หรือน้อยกว่าของทฤษฎีทั้งหมดและแบบฝึกหัดในเรื่องเส้นขนานและพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม กลุ่มควบคุมถูกกำหนดให้เรียนการพิสูจน์ร้อยละ 80 - 90 ของทฤษฎีบทและแบบฝึกหัดในเรื่องเดียวกับกลุ่มทดลอง ก่อนการสอนเรื่องเส้น

ขนานได้ทำการทดสอบ 3 อย่างคือ ทดสอบภาคสนามโดยนักวิจัย ทดสอบเรื่องการให้เหตุผล และทดสอบเรื่องเส้นขนาน และทดสอบเรื่องเส้นขนาน และทดสอบทั้งสามอย่างนี้ในระหว่างสอนเรื่องพื้นที่ วิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติโดยใช้ ANCOVA ผลการวิจัยพบว่า มีความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 ในเรื่องผลสัมฤทธิ์ของการพิสูจน์ และความสามารถในการให้เหตุผลของทั้งสองกลุ่ม เพศหญิงมีความสามารถในการให้เหตุผลดีกว่าเพศชาย มีความสัมพันธ์ทางบวกอย่างมีนัยสำคัญระหว่างคะแนนการให้เหตุผลกับคะแนนการพิสูจน์เรื่องเส้นขนาน และกับคะแนนการพิสูจน์เรื่องพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม

Assaf (1986: a) ได้ศึกษาเรื่อง ผลของการใช้ภาพการ์ตูนในการสอนเรขาคณิตที่มีต่อระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 เจตคติต่อวิชาเรขาคณิต และความรู้ในวิชาเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 2 ห้องเรียน รวม 48 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองโดยใช้ภาพการ์ตูนที่สร้างโดยโปรแกรม Logo กลุ่มควบคุมให้เรียนเรขาคณิตจากหนังสือเรียนตามปกติ ใช้เวลาทดลอง 4 สัปดาห์ ก่อนและหลังการทดลอง ทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตของแวนฮีลี แบบทดสอบวัดเจตคติต่อวิชาเรขาคณิต แบบทดสอบความรู้ในวิชาเรขาคณิต และสัมภาษณ์นักเรียนในกลุ่มทดลอง 7 คนและกลุ่มควบคุม 8 คน ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนกลุ่มทดลองมีแนวโน้มในการแสดงปฏิกิริยาตอบสนองมีความสัมพันธ์สูงกับระดับความคิดทางเรขาคณิตของแวนฮีลี 2) นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสัมพันธ์น้อยกับลักษณะที่ไม่เกี่ยวข้องกับรูปเรขาคณิต นักเรียนมีความสามารถมากขึ้นในการแยกคุณสมบัติรูปเรขาคณิต การสร้างภาพในโปรแกรมLogoทำให้สะดวกในการสร้างภาพเรขาคณิตและเห็นความสัมพันธ์ระหว่างรูปชัดเจนยิ่งกว่าการนิยามรูปเรขาคณิตด้วยคำพูด 3) การใช้ภาพการ์ตูนมีผลทางบวกกับความเชื่อมั่นและความคิดในการประยุกต์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน 4) วิธีการสอนทั้ง 2 วิธีไม่มีผลต่อความรู้ทางเรขาคณิต

Burger and Shaughnessy (1986: 31 – 48) ได้ศึกษาเพื่อให้คำอธิบายระดับของการให้เหตุผลในเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลี โดยวิเคราะห์ตามคำตอบที่ได้จากชิ้นงานการสัมภาษณ์เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นอนุบาล ถึงนักศึกษาเอกคณิตศาสตร์ชั้นปี 1 จำนวน 45 คน ชิ้นงานเหล่านั้นประกอบด้วยการวาดรูป สร้างสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และเปรียบเทียบส่วนประกอบของระบบทางคณิตศาสตร์ พฤติกรรมของนักเรียนตรงกับคำอธิบายเดิมของแวนฮีลีที่ได้ให้คำนิยามไว้ก่อนแล้ว

Bobango (1987: 2566 - A) ได้ศึกษาระดับความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลแวนฮีลีและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ซึ่งเป็นผลจากการสอนโดยใช้โมเดลของแวนฮีลีใช้เวลาทดลอง 20 วัน โดยใช้กลุ่มตัวอย่าง 72 คน มีการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตและระดับความคิดทางเรขาคณิตก่อนและหลังการสอน โดยเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ได้แก่ คอมพิวเตอร์และโปรแกรมทางเรขาคณิตรวมทั้งบทเรียนที่ออกแบบโดยผู้วิจัย ผลการวิจัยพบว่า การสอนโดยใช้โมเดลของแวนฮีลีทำให้ระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนเพิ่มขึ้น โดยเป็นการเพิ่มระดับความคิดทางเรขาคณิตจากระดับขั้น 1 เป็นการวิเคราะห์ (Analysis) ไปยังระดับขั้น 2 เป็นการพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction) มากกว่าการเพิ่มระดับความคิดทางเรขาคณิตในระดับอื่น ๆ

Chaiyasang (1987: 2137 - A) ได้ศึกษาระดับความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนในประเทศไทย ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนประถมศึกษาปีที่ 6 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 จาก 12 โรงเรียนในภาคตะวันออกของประเทศไทย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ แบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลของแวนฮีลี และแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ในแต่ละชั้นจากชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 1 และ 2 ไม่สามารถทำการพิสูจน์อย่างสมบูรณ์ได้ แต่นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 3 สามารถพิสูจน์อย่างง่ายได้บางส่วน ส่วนนักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4 สามารถพิสูจน์ได้อย่างสมบูรณ์ยกเว้นการพิสูจน์ที่ซับซ้อนมาก

Han (1987: 3690 - A) ได้ศึกษาผลของตำราเรียนเรขาคณิตมาตรฐานและตำราเรียนตามทฤษฎีของแวนฮีลีที่มีต่อระดับความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลแบบแวนฮีลี ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์ และทัศนคติต่อวิชาเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย 2 โรงเรียน จำนวน 478 คน แบ่งออกเป็น 2 กลุ่มคือ กลุ่มที่เรียนตำราเรียนมาตรฐาน และกลุ่มที่เรียนตำราเรียนตามทฤษฎีของแวนฮีลี เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ แบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลของแวนฮีลีซึ่งใช้วัดในเดือนกันยายน มกราคม และพฤษภาคม แบบทดสอบการพิสูจน์ใช้วัดในเดือนพฤษภาคม แบบวัดทัศนคติที่มีต่อวิชาเรขาคณิตซึ่งประกอบการวัดด้านความสนใจ ประโยชน์ และความยากของวิชาเรขาคณิตซึ่งใช้วัดในเดือนมกราคมและเดือนพฤษภาคม นอกจากนี้ในเดือนพฤษภาคมจะวัดทัศนคติด้านการพิสูจน์อีกด้วย ผลการวิจัยพบว่า ระดับความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลแวนฮีลีของนักเรียนกลุ่มที่เรียนตำราเรียนมาตรฐาน

และนักเรียนกลุ่มที่เรียนตำราเรียนตามทฤษฎีของแวนฮีลีไม่มีความแตกต่างกัน ไม่มีความสัมพันธ์ภายในระหว่างระดับความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลของแวนฮีลีกับผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์และทัศนคติต่อวิชาเรขาคณิต มีความแตกต่างระหว่าง 2 กลุ่มในด้านผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์และทัศนคติด้านการพิสูจน์ โดยนักเรียนกลุ่มที่เรียนตำรามาตรฐานมีผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์และทัศนคติด้านการพิสูจน์ดีกว่านักเรียนกลุ่มที่เรียนตำราเรียนตามทฤษฎีของแวนฮีลี กลุ่มที่เรียนตำราเรียนตามทฤษฎีของแวนฮีลีพบว่าเรขาคณิตตอนสิ้นปียากกว่าตอนกลางปี ขณะที่นักเรียนกลุ่มที่เรียนตำรามาตรฐานพบว่าเรขาคณิตง่าย เมื่อรวมนักเรียนทั้ง 2 กลุ่มพบว่าทัศนคติที่มีต่อวิชาเรขาคณิตลดลงในครึ่งหลังของการเรียน

Lowry (1987: 1971 - A) ได้ศึกษาความคิดทางเรขาคณิตเรื่องพื้นที่และเส้นรอบรูปของเด็กอายุ 9 ปี กลุ่มตัวอย่างคือเด็กอายุ 9 ขวบจำนวน 18 คน เด็กแต่ละคนจะได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีซึ่งประกอบด้วยขั้นการสอน 5 ขั้น ใช้เวลาสอนประมาณ 3 ชั่วโมงโดยสอน 2 ครั้ง ต่อ 1 สัปดาห์ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 จะได้รับการสอนซึ่งไม่ได้เน้นเรื่องพื้นที่และเส้นรอบรูป ส่วนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จะได้รับการสอนโดยเน้นให้จำกฎ ผลการวิจัยพบว่า จากการสัมภาษณ์นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ทุกคนมีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 ส่วนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 2 คน มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 2 ในเรื่องพื้นที่และเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยม หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีพบว่ามีการเพิ่มระดับความคิดทางเรขาคณิตไปสู่ระดับที่สูงกว่า

Senk (1989: 309 – 321) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับความคิดตามโมเดลของแวนฮีลี ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต และผลสัมฤทธิ์ในเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นมาตรฐาน จากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา จำนวน 241คน ที่ลงทะเบียนเรียนเรขาคณิตทั้งปี ซึ่งผลการวิจัย พบว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตมีความสัมพันธ์กับระดับความคิดตามโมเดลของแวนฮีลี และผลสัมฤทธิ์ในเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นมาตรฐาน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

Frerking (1994: a) ได้ศึกษาเรื่องการสร้างข้อความคาดการณ์และการเขียนพิสูจน์ในเรขาคณิตพลวัต โดยศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับความคิดแบบแวนฮีลี ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์และการสร้างข้อความคาดการณ์ของนักเรียนที่เรียนเรขาคณิตระดับมัธยม โดยเน้นศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับความคิดแบบแวนฮีลี และความสามารถในการสร้างข้อความคาดการณ์ หรือระหว่างความสามารถของนักเรียนในการสร้างข้อความคาดการณ์และ

ความสำเร็จในการอ้างเหตุผลหรือเขียนพิสูจน์ ของนักเรียนจำนวน 58 คน ผลปรากฏว่า ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถเขียนพิสูจน์กับผลสัมฤทธิ์ของผลการเรียนรู้ที่คาดหวังเรื่องเรขาคณิต ผลสัมฤทธิ์ในการเขียนพิสูจน์และความสามารถในการเขียนข้อความคาดการณ์หรือการอ้างเหตุผล และความสามารถในการเขียนพิสูจน์กับระดับความคิดแบบแวนฮีลีมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญ การมีระดับความคิดแบบแวนฮีลีเพิ่มขึ้นและการได้ความรู้ทางเรขาคณิต ทั้งๆที่ความแตกต่างในความสามารถของการเขียนพิสูจน์และผลสัมฤทธิ์ของผลการเรียนรู้ที่คาดหวังเรื่องเรขาคณิตไม่มีนัยสำคัญ

Brown, Jones and Taylor (2003: a) ได้ศึกษาการพัฒนาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในโรงเรียนมัธยมศึกษา มุ่งเพื่อพัฒนาและทดลองเครื่องมือการเรียนรู้เพื่อนำไปใช้ในหลายๆโรงเรียน โดยให้ความสนใจการพัฒนาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับโรงเรียนมัธยมศึกษา รายงานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นว่าเป็นไปได้อย่างไรที่จะทำให้นักเรียน ซึ่งมีอายุและความคงทนแตกต่างกันในช่วงชั้นที่ 3 สามารถให้เหตุผลทางคณิตซึ่งได้รับชิ้นงาน การสอน และวัฒนธรรมในชั้นเรียนที่เหมาะสม การศึกษานี้เสนอแนะว่าครูต้องประสงค์ที่จะพัฒนาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนทุกคน

Pusey (2003: a) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับโมเดลของแวนฮีลีในการให้เหตุผลเกี่ยวกับเรขาคณิตโดยศึกษาจากเอกสารที่เกี่ยวข้องซึ่งวัตถุประสงค์ของการวิจัยนั้นเพื่อตรวจสอบโมเดลการเรียนรู้ของแวนฮีลีเพื่ออธิบายว่านักเรียนให้เหตุผลอย่างไรบ้างในเรขาคณิต จากเอกสารที่ศึกษาพบว่ามีงานวิจัยอยู่หลายชิ้นที่ใช้ทฤษฎีนี้ และหลายชิ้นเกี่ยวข้องกับทฤษฎีการเรียนรู้ และการใช้ทฤษฎีของแวนฮีลีในด้านหลักสูตร การฝึกหัดครูและการฝึกสอน ในเริ่มแรกได้อธิบายรายละเอียดและความหมายของระดับต่างๆ ของทฤษฎีแวนฮีลี งานวิจัยนี้ได้เน้นการศึกษาใน 4 ประเด็นคือ 1) การประเมินระดับของการใช้เหตุผลเกี่ยวกับเรขาคณิตของนักเรียน และผลของการประเมิน 2) ประเมินระดับของการให้เหตุผลของครูประจำการและนักศึกษาฝึกสอน 3) กระบวนการสอนโดยใช้ทฤษฎีของแวนฮีลี 4) การสอนทั้งครูประจำการและนักศึกษาฝึกสอนเพื่อตระหนักถึงทฤษฎีนี้และส่งเสริมความรู้ของเนื้อหาเรื่องเรขาคณิตให้ดีขึ้น ข้อสรุปของงานวิจัยคือโมเดลของแวนฮีลีถูกใช้ให้สอดคล้องกับหลักสูตรและพบว่า การใช้วิธีการสอนของแวนฮีลีกับนักเรียนแสดงให้เห็นว่าทฤษฎีการเรียนรู้นั้นสามารถช่วยนักเรียนให้เกิดการเรียนรู้ได้ดี

Ding and Jones (2007: 1) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการใช้โมเดลขั้นตอนการสอนของแวนฮีลีเพื่อวิเคราะห์บทเรียนการพิสูจน์เกี่ยวกับเรขาคณิต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ 2 ในเซี่ยงไฮ้ โดยเก็บรวบรวมข้อมูลและทำการทดลองในปี ค.ศ. 2006 รายงานการวิจัยในครั้งนี้วิเคราะห์ชุดการสอนเรขาคณิตที่ใช้สอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในเซี่ยงไฮ้ ซึ่งกล่าวถึงความเหมาะสมของโมเดลขั้นตอนการสอนของแวนฮีลีในบริบทของคนจีนไว้ว่า ขั้นตอนการสอนของแวนฮีลีในขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3 มีความเหมาะสมและสามารถบรรจุไว้ในบทเรียน เนื่องจากสามารถขยายความคิดเกี่ยวกับเรขาคณิตและการพิสูจน์ได้

Meng and Idris (2007: 242 – 248) ได้ทำการศึกษาการส่งเสริมนักเรียนสร้างการเรียนรู้จากเรขาคณิตสามมิติผ่านการสอนด้วยขั้นตอนการสอนตามโมเดลของแวนฮีลี โดยใช้ The Geometer's Sketchpad เพื่อศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิต (geometric reasoning) และการเปลี่ยนระดับความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลของแวนฮีลีระหว่างเรียนและหลังเรียนด้วยการจัดการเรียนรู้ตามขั้นตอนการสอนตามโมเดลของแวนฮีลีช่วงที่ 1 และ ช่วงที่ 2 ตามลำดับ ผลการวิจัยพบว่า การสอนด้วยขั้นตอนการสอนตามโมเดลของแวนฮีลี โดยใช้ร่วมกับ GSP ทำให้การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนเพิ่มขึ้นระหว่างการเรียนรู้ในช่วงที่ 1 และ ช่วงที่ 2 ตามลำดับ และเพิ่มระดับความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลของแวนฮีลีของนักเรียนเรื่องลูกบาศก์และทรงสี่เหลี่ยม

งานวิจัยในประเทศ

เยาวเรศ สิงหนันท์ (2533: 67 - 69) ได้เปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตระหว่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนรัฐบาลและโรงเรียนเอกชน เขตการศึกษา 6 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากโรงเรียนรัฐบาลจำนวน 273 คน และโรงเรียนเอกชนจำนวน 251 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตที่ผู้วิจัยใช้แนวคิดของแวนฮีลีในการสร้าง ผลการวิจัยพบว่า คะแนนความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนรัฐบาลและโรงเรียนเอกชนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 โดยนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนรัฐบาลมีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตเฉลี่ยสูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนเอกชน

พนิดา กองเกตุใหญ่ (2542: 70 - 75) ได้ศึกษาระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแบบแวนฮีลีของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้นในจังหวัดกาญจนบุรี กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นสังกัดกรมสามัญศึกษาจังหวัดกาญจนบุรีจำนวน 590 คน เป็นชาย 260 คน

หญิง 330 คน โดยเลือกแบบเจาะจงจาก 4 โรงเรียน ซึ่งเป็นตัวแทนของ 4 สหวิทยาเขต เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ แบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และแบบสอบถามข้อมูลพื้นฐาน ผลการวิจัยพบว่า (1) ระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแบบแวนฮีลี่ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 2 และ 3 กระจายอยู่ในระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์ ระดับ 2 ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน และระดับ 3 ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีแนวโน้มที่จะมีความคิดในระดับ 3 ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน สูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 (2) นักเรียนเกือบครึ่ง (ร้อยละ 40.7) ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแบบแวนฮีลีอยู่ในระดับ 3 (ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน)

กุลยา เหมวัสดุกิจ (2545: 62 – 64) ได้ศึกษาระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มตัวอย่างคือ นักเรียนโรงเรียนสตรีสมุทรปราการ จำนวน 98 คน ได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี เรื่องเส้นขนานและความคล้าย เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ แบบวัดระดับความคิดทางเรขาคณิต ผลการวิจัยพบว่า

1. หลังได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตคงที่มีจำนวนมากที่สุด รองลงมาคือมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 1 ระดับและเพิ่มขึ้น 2 ระดับตามลำดับ และเมื่อจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ พบว่า

1.1 นักเรียนกลุ่มสูงที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตคงที่มีจำนวนมากที่สุด รองลงมาคือมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 2 ระดับและเพิ่มขึ้น 1 ระดับ ตามลำดับ

1.2 นักเรียนกลุ่มปานกลางและต่ำที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตคงที่มีจำนวนมากที่สุด รองลงมาคือมีระดับความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น 1 ระดับและเพิ่มขึ้น 2 ระดับตามลำดับ

2. หลังได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี นักเรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 3 และ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้น โดยนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้นมากที่สุด ส่วนนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 และ 2 มีจำนวนลดลง โดยนักเรียนที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 มีจำนวนลดลงมากที่สุด และเมื่อจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ พบว่า

2.1 นักเรียนกลุ่มสูงที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้นมากที่สุดและอยู่ในระดับ 2 มีจำนวนลดลงมากที่สุด

2.2 นักเรียนกลุ่มปานกลางที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 4 มีจำนวนเพิ่มขึ้นมากที่สุดและอยู่ในระดับ 0 มีจำนวนลดลงมากที่สุด

2.3 นักเรียนกลุ่มต่ำที่มีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 1 มีจำนวนเพิ่มขึ้นมากที่สุดและอยู่ในระดับ 0 มีจำนวนลดลงมากที่สุด

นาตยา น้ำจิตตรง (2546: 40 – 43) ได้ทำการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างการสอนที่เน้นลำดับขั้นการเรียนรู้ของแวนฮีลีโมเดลกับการสอนปกติ ศึกษาความเข้าใจทางเรขาคณิตของนักเรียนกับขั้นตอนการเรียนรู้ของแวนฮีลีโมเดล ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตหลังเรียนกับเกณฑ์ 60 % ของนักเรียนกลุ่มที่สอน โดยการเน้นลำดับขั้นการเรียนรู้ของแวนฮีลีโมเดล ผลการวิจัยปรากฏว่า 1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่สอนโดยการเน้นลำดับขั้นการเรียนรู้ของแวนฮีลีโมเดล กับนักเรียนกลุ่มที่สอนโดยวิธีการสอนปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 2) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความเข้าใจทางเรขาคณิตไม่สูงกว่าขั้นที่ 1 ของแวนฮีลีโมเดลอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05 3) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่สอนโดยการเน้นลำดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของแวนฮีลีโมเดลสูงกว่าเกณฑ์ 60% อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรขาคณิต ทั้งงานวิจัยในประเทศ และ งานวิจัยต่างประเทศส่วนใหญ่จะพบว่า นักเรียนที่ได้รับการเรียนการสอนโดยโมเดลของแวนฮีลีมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการเรียนการสอนแบบปกติ อีกทั้งยังมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต หรืออ้างเหตุผลในการเขียนพิสูจน์ได้ดีกว่า

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2

ผู้วิจัยมีวิธีการดำเนินการวิจัยดังนี้

1. การศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. การออกแบบการวิจัย
3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
5. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล
6. การวิเคราะห์ข้อมูล
7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

1. การศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยต่างๆ ทั้งในประเทศและต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย ดังต่อไปนี้

1. ศึกษาเอกสาร บทความ วารสาร และงานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับโมเดลของแวนฮีลี ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

2. ศึกษาหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 3 (ม.1-ม.3) สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

3. ศึกษาเนื้อหาเรื่องความเท่ากันทุกประการ จากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 คู่มือครู และหนังสืออ่านประกอบอื่นๆ เพื่อเป็นแนวทางในการจัดทำแผนการจัดการเรียนรู้

4. ศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเกี่ยวกับหลักการและวิธีการสร้างแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต รวมทั้งหลักการวัดและประเมินผลการศึกษา

2. การออกแบบการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง (Quasi Experimental Research) ซึ่งประกอบด้วยกลุ่มทดลอง 1 กลุ่ม และกลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม โดยมีรูปแบบของการทดลองปรากฏดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 รูปแบบการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง	คะแนนก่อนการทดลอง	การทดลอง	คะแนนหลังการทดลอง
E	- ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ - ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต	X	- ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ - ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
C	- ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ - ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต	~X	- ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ - ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

สัญลักษณ์ที่ใช้ในรูปแบบการวิจัย

E แทน กลุ่มทดลอง (Experimental Group)

C แทน กลุ่มควบคุม (Control Group)

X แทน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี

~X แทน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนในสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษากรุงเทพมหานคร เขต 1 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกกลุ่มตัวอย่างด้วยเทคนิคการสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (Purposive sampling) เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 โรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัย สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ มีนักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันมากพอสำหรับการทดลอง

และจากการสำรวจพบว่า ในปีการศึกษา 2553 โรงเรียนมีนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 12 ห้องเรียน จำนวน 444 คน ทางโรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัย ได้จัดห้องเรียนไว้ให้ผู้วิจัยเพื่อทดลองสอน 2 ห้อง คือ ม.2/3 และ ม.2/4 โดยผู้วิจัยนำคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์จากการสอบกลางภาคเรียนที่ 1 วิชาคณิตศาสตรพื้นฐาน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ปีการศึกษา 2553 ของนักเรียนทั้ง 2 ห้องเรียน มาหาค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ได้แก่ ห้อง ม.2/3 และ ห้อง ม.2/4 ซึ่งมีค่ามัชฌิมเลขคณิต เท่ากับ 34.35 และ 32.95 ตามลำดับ นำมาทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่า ความแปรปรวนของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 จากนั้นทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ด้วยค่าที (t-test) พบว่าคะแนนสอบกลางภาคเรียนที่ 1 วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 แสดงว่า นักเรียนทั้งสองห้องมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน ผู้วิจัยให้นักเรียนทั้ง 2 ห้องทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ซึ่ง ห้อง ม.2/3 และ ห้อง ม.2/4 มีค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เท่ากับ 23.47 และ 19.59 ตามลำดับ จากนั้นนำคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ของนักเรียนทั้ง 2 ห้องไปทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่า ความแปรปรวนของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 จึงทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้วยค่าที (t-test) พบว่าคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 แสดงว่า นักเรียนทั้งสองห้องมีความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไม่แตกต่างกัน หลังจากนั้นผู้วิจัยได้จับสลากเพื่อกำหนดกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ผลปรากฏว่านักเรียนชั้น ม.2/3 เป็นกลุ่มทดลอง ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี และนักเรียนชั้น ม.2/4 เป็นกลุ่มควบคุม ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ ซึ่งนักเรียนแต่ละกลุ่มมีพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไม่แตกต่างกัน ดังแสดงรายละเอียดในภาคผนวก จ หน้า 221

4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย แบ่งเป็น 2 ชนิด คือ เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง และเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ซึ่งมีรายละเอียดการสร้างดังต่อไปนี้

4.1 เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี ที่ใช้สำหรับกลุ่มทดลอง และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติสำหรับกลุ่มควบคุม ซึ่งครอบคลุมสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ จำนวน 11 แผน ใช้ในการทดลองสอน 15 ชั่วโมง ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ขึ้นเองทั้ง 2 แบบ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

4.1.1 ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และผลการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลีจากวารสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยใช้แนวคิดของ ปิแอร์ แวนฮีลี่ และไดน่า แวนฮีลี ซึ่งแบ่งขั้นตอนการสอนเพื่อพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตออกเป็น 5 ขั้น (van Hiele - Geldof, 1984a and van Hiele, 1984b cited in Crowley, 1987: 5 – 6; Teppo, 1999: 1 – 2) ดังนี้

ขั้นการใช้คำถามเพื่อเข้าสู่บทเรียน (Information) เป็นขั้นที่ครูจะทบทวนเรื่องที่จะใช้อ้างอิง ซึ่งเป็นการทบทวนความรู้ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับเรื่องที่จะเรียนรู้ใหม่ โดยร่วมกันอภิปรายเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจที่ถูกต้อง รวมถึงมีการทบทวนคำศัพท์ แจ้งจุดประสงค์ในการเรียนรู้

ขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation) ขั้นนี้ครูจะให้นักเรียนแต่ละคน ศึกษาและเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างเป็นขั้นตอน โดยการทำกิจกรรมที่ครูจัดตามลำดับการเรียนรู้ เพื่อเป็นแนวทางไปสู่ข้อสรุปที่จะได้จากการเรียนรู้ ครูควรเลือกวัสดุและชิ้นงานที่เหมาะสมเพื่อให้นักเรียนเกิดข้อค้นพบมโนทัศน์และขั้นตอนทางเรขาคณิต

ขั้นการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication) เป็นขั้นที่นักเรียนจะนำสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ในขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation) มาร่วมกันอภิปรายและแสดงความคิดเห็นในประเด็นที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ต่างๆ และความรู้ที่ใช้ประกอบการพิจารณา โดยให้มีการแลกเปลี่ยนข้อมูลระหว่างกันซึ่งเป็นข้อมูลที่เป็นผลที่ได้จากการเรียนรู้ในขั้นที่ 2 ทั้งนี้เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่สอดคล้อง ถูกต้อง และตรงกัน โดยครูมีส่วนรวมในการให้คำแนะนำและแก้คำศัพท์ให้อยู่ในรูปที่ถูกต้อง

ขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ (Free Orientation) เป็นขั้นที่ครูได้นำเสนอปัญหาที่ท้าทาย เพื่อให้นักเรียนนำความรู้ที่ได้มาใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าวอย่างอิสระ

โดยนักเรียนฝึกแสดงการวิเคราะห์เพื่อพิจารณาเหตุและผลต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้นๆ แล้วแสดงการพิสูจน์หรือการให้เหตุผลประกอบด้วย

ขั้นการสรุปรวม (Integration) ในขั้นนี้ครูและนักเรียนจะร่วมกันสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ โดยเป็นการใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับเรขาคณิตที่ถูกต้อง และให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพื่อเป็นการทบทวนสิ่งที่ได้เรียนรู้ และฝึกการให้เหตุผล

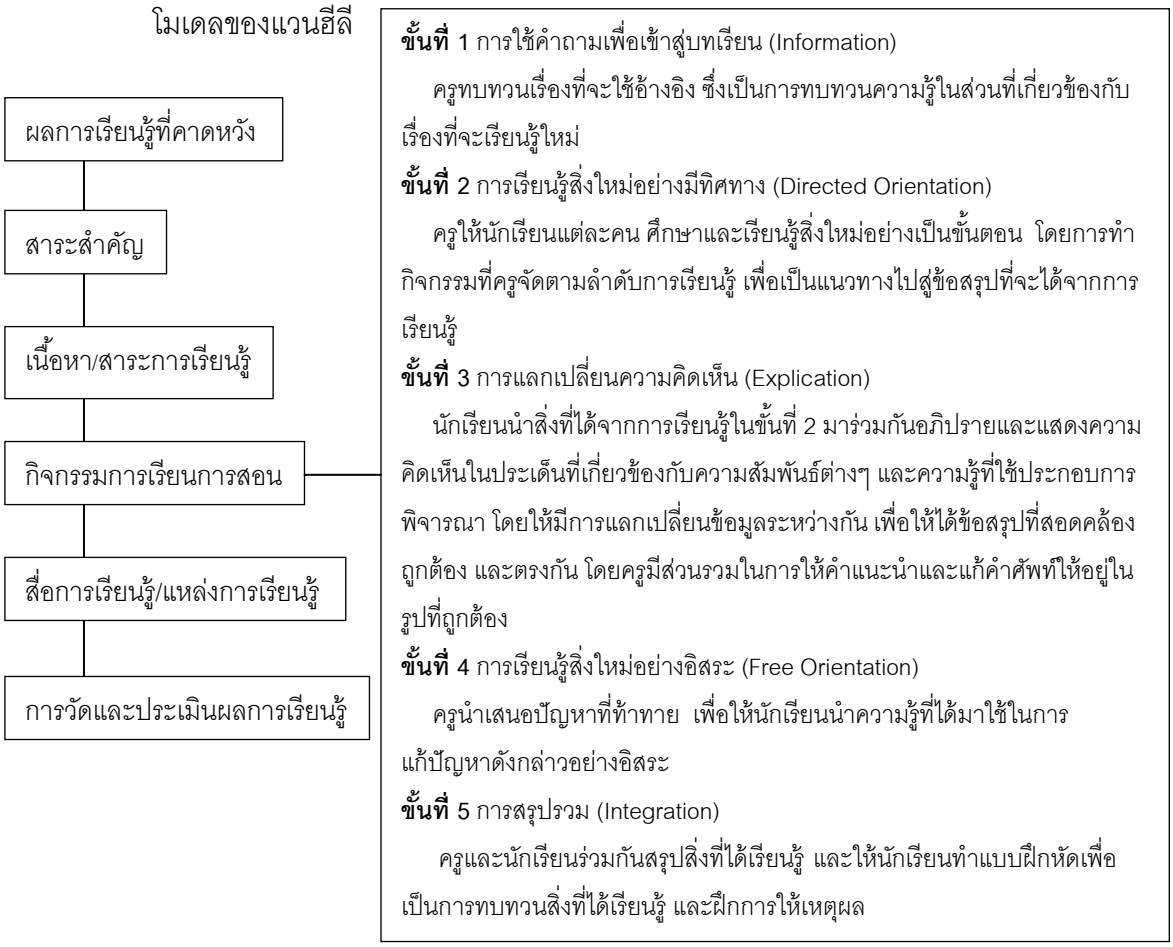
4.1.2 ศึกษาหลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัย ที่อิงตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

4.1.3 ศึกษามาตรฐานการเรียนรู้ ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง รายละเอียดของสาระการเรียนรู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ การวัดและประเมินผล และแบ่งเนื้อหาให้เหมาะสมกับเวลาที่จะดำเนินการสอน

4.1.4 วิเคราะห์ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังของเนื้อหาที่ใช้ทดลอง เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

4.1.5 สร้างแผนการจัดการเรียนรู้ทั้ง 2 แบบ ให้สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง โดยแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละแผนประกอบด้วย หัวข้อเรื่องสาระการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ย่อย ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง สาระสำคัญ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ และการวัดและการประเมินผลการเรียนรู้ ซึ่งแผนการจัดการเรียนรู้ทั้งสองแบบมีความแตกต่างกันที่กิจกรรมการเรียนรู้ โดยกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มทดลอง ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้ คือ ขั้นการใช้คำถามเพื่อเข้าสู่บทเรียน ขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง ขั้นการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น ขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ และขั้นการสรุปรวม ดังแสดงในแผนภูมิที่ 2

ภาพที่ 2 โครงสร้างและรายละเอียดของขั้นตอนการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี



ส่วนกลุ่มควบคุมได้เรียนรู้ด้วยวิธีการต่างๆ ตามแนวทางการจัดการเรียนการสอนที่แนะนำไว้ในคู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 และเป็นไปตามแนวการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง สำหรับรายละเอียดสาระการเรียนรู้ในแผนการจัดการเรียนรู้ทั้ง 11 แผน ดังได้แสดงในตารางที่ 2 ดังนี้

ตารางที่ 2 แสดงแผนการจัดการเรียนรู้ และสาระการเรียนรู้ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

แผนการจัดการเรียนรู้ที่	เนื้อหาสาระการเรียนรู้	จำนวนคาบ
1	ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิตและความเท่ากันของส่วนของเส้นตรง	1
2	ความเท่ากันทุกประการของมุมและสมบัติอื่นๆของความเท่ากันทุกประการ	1

แผนการจัดการเรียนรู้ที่	เนื้อหาสาระการเรียนรู้	จำนวนคาบ
3	ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูป	1
4	รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน	2
5	ฝึกหัด ด้าน – มุม – ด้าน	1
6	รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม	2
7	ฝึกหัด มุม – ด้าน – มุม	1
8	รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน	2
9	ฝึกหัด ด้าน – ด้าน – ด้าน	1
10	การนำไปใช้	2
11	ฝึกหัดการนำไปใช้	1

4.1.6 นำแผนการจัดการเรียนรู้จำนวน 11 แผน ไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจพิจารณาความถูกต้องเหมาะสม และให้ข้อเสนอแนะเพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไข ซึ่งผลจากการพิจารณาแล้วอาจารย์ที่ปรึกษาได้ให้ข้อเสนอแนะดังนี้

ก. ควรเขียนอธิบายรายละเอียดของกิจกรรมการเรียนรู้ให้ชัดเจน

ข. ใบงานทุกฉบับต้องสอดคล้องกับตัวอย่างและเนื้อหาของแต่ละแผน และต้องให้ใบงานเดียวกันนั้นกับกลุ่มที่เรียนแบบปกติ

4.1.7 นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ได้ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป (รายละเอียดแสดงในภาคผนวก ค หน้า 154)

สำหรับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยโมเดลของแวนฮีลีของกลุ่มทดลอง และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติของกลุ่มควบคุม ผู้วิจัยได้แสดงการเปรียบเทียบขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 การเปรียบเทียบขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง (สอนโดยใช้โมเดลของแวนฮีลี)	**กลุ่มควบคุม (สอนแบบปกติ)**
ขั้นนำ ***ขั้นการใช้คำถามเพื่อเข้าสู่บทเรียน*** *(Information)* ครูทบทวนเรื่องที่จะใช้อ้างอิง ซึ่งเป็นการทบทวนความรู้ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับเรื่องที่จะเรียนรู้ใหม่ โดยร่วมกันอภิปรายเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจที่ถูกต้อง รวมถึงมีการทบทวนคำศัพท์ แจ้งจุดประสงค์ในการเรียนรู้ *ขั้นสอน* ***ขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง*** *(Directed Orientation)* ครูให้นักเรียนแต่ละคน ศึกษาและเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างเป็นขั้นตอน โดยการทำกิจกรรมที่ครูจัดตามลำดับการเรียนรู้ เพื่อเป็นแนวทางไปสู่ข้อสรุปที่จะได้จากการเรียนรู้ ครูควรเลือกวัสดุและชิ้นงานที่เหมาะสมเพื่อให้นักเรียนเกิดข้อค้นพบมโนทัศน์และขั้นตอนทางเรขาคณิต ***ขั้นการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น*** *(Explication)* นักเรียนนำสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ในขั้นที่ 2 มาร่วมกันอภิปรายและแสดงความคิดเห็นในประเด็นที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ต่างๆ และความรู้ที่ใช้ประกอบการพิจารณา โดยให้มีการแลกเปลี่ยนข้อมูลระหว่างกันซึ่งเป็นข้อมูลที่เป็นผลที่ได้จากการเรียนรู้ในขั้นที่ 2 ทั้งนี้เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่สอดคล้อง ถูกต้อง และตรงกัน โดยครูมี	*ขั้นนำ* กระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจที่จะเรียนโดยใช้เทคนิคต่างๆ เช่น การถามตอบที่เชื่อมโยงกับชีวิตประจำวัน ทบทวนความรู้เดิมที่ได้เรียนและเรื่องที่จะใช้อ้างอิงมาเพื่อเป็นการสรุปเนื้อหาของคาบที่ผ่านมา และสามารถนำมาเชื่อมโยงการเรียนรู้ในคาบนี้ได้ *ขั้นสอน* จัดกิจกรรม ตามคู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เพื่อให้นักเรียนสามารถอธิบายมโนทัศน์ และการนำสมบัติของความเท่ากันทุกประการไปใช้ในการอ้างเหตุผลและแก้ปัญหา ลักษณะกิจกรรมที่ใช้ เช่น การสำรวจรูปเรขาคณิตเพื่อสรุปมโนทัศน์เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต การสอนแบบใช้คำถาม การสอนแบบวิเคราะห์-สังเคราะห์ การอภิปราย และการบรรยาย เป็นต้น

กลุ่มทดลอง (สอนโดยใช้โมเดลของแวนฮีลี)	กลุ่มควบคุม (สอนแบบปกติ)
ส่วนรวมในการให้คำแนะนำและแก้คำศัพท์ให้อยู่ในรูปที่ถูกต้อง ***ขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ*** *(Free Orientation)* ครูนำเสนอปัญหาที่ท้าทาย เพื่อให้นักเรียนนำความรู้ที่ได้มาใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าวอย่างอิสระ โดยนักเรียนฝึกแสดงการวิเคราะห์เพื่อพิจารณาเหตุและผลต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้นๆ แล้วแสดงการพิสูจน์หรือการให้เหตุผลประกอบด้วย *<u>ขั้นสรุป</u>* ***ขั้นการสรุปรวม*** *(Integration)* ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ โดยเป็นการใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับเรขาคณิตที่ถูกต้อง และให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพื่อเป็นการทบทวนสิ่งที่ได้เรียนรู้ และฝึกการให้เหตุผล	*<u>ขั้นสรุป</u>* ครูถามเพื่อให้นักเรียนนำความรู้ที่ได้เรียนมาสรุปเนื้อหาประจำคาบ ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเนื้อหาที่ได้เรียนเพื่อเป็นการตรวจสอบความเข้าใจของตนเอง

4.2 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลครั้งนี้ประกอบด้วย แบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเองตามขั้นตอนการสร้างต่อไปนี้

4.2.1 เครื่องมือที่ใช้ในการวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 5 ข้อ ดำเนินการสร้างตามขั้นตอนต่อไปนี้

4.2.1.1 ผู้วิจัยศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์ เรื่อง การเตรียมความพร้อมในการให้เหตุผล จากหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

4.2.1.2 ศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต การอ้างเหตุผลในการพิสูจน์ เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างแบบวัด

4.2.1.3 สร้างแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยแบ่งแบบทดสอบออกเป็น 2 ตอน รวม 8 ข้อ ดังนี้

ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น จำนวน 5 ข้อ ซึ่งเกณฑ์การตรวจให้คะแนนแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น คือ เติมคำตอบได้ถูกต้อง จะได้ 1 คะแนน เติมคำตอบผิด หรือไม่เติมคำตอบ ได้ 0 คะแนน

ตอนที่ 2 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบยาว จำนวน 3 ข้อ ซึ่งมีเกณฑ์ในการให้คะแนนดังนี้

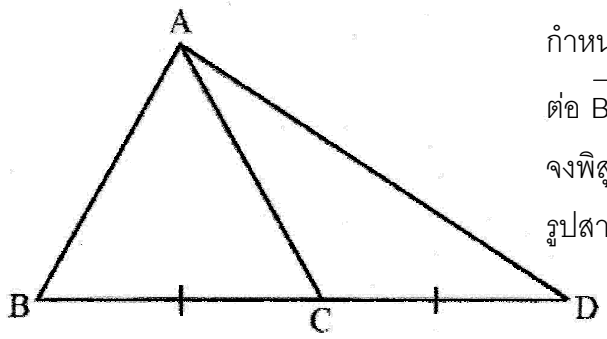
หมวด	ระดับคะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
ข้อความพิสูจน์	0	ให้เหตุผลโดยไม่เขียนการพิสูจน์เลย เขียนเฉพาะสิ่งที่กำหนดให้หรือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว หรือเขียนสิ่งที่ไม่เกี่ยวข้อง
	1	ให้เหตุผลโดยเขียนข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักได้อย่างน้อย 1 ข้อแต่เขียนได้ไม่ถึง 2 ใน 4 ของข้อความพิสูจน์หลักที่นำไปสู่ผลที่ต้องการพิสูจน์
	2	ให้เหตุผลโดยเขียนข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักได้ครึ่งหนึ่งของข้อความพิสูจน์หลักที่นำไปสู่ผลที่ต้องการพิสูจน์
	3	ให้เหตุผลโดยเขียนข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักได้ 3 ใน 4 ของข้อความพิสูจน์หลักที่นำไปสู่ผลที่ต้องการพิสูจน์
	4	ให้เหตุผลโดยเขียนข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักซึ่งนำไปสู่ผลที่ต้องการพิสูจน์ได้ครบถ้วน
การอธิบายการให้เหตุผลกับข้อความพิสูจน์	0	ไม่ให้เหตุผลเลย หรือให้เหตุผลที่ไม่เกี่ยวข้องกับข้อความพิสูจน์
	1	ให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผลกับข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักได้อย่างน้อย 1 ข้อแต่ให้เหตุผลได้ไม่ถึง 2 ใน 4 ของเหตุผลที่ต้องใช้อ้างอิงทั้งหมด

หมวด	ระดับคะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
การอธิบายการให้เหตุผลกับข้อความพิสูจน์ (ต่อ)	2	ให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผลกับข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักได้ครึ่งหนึ่งของเหตุผลที่ต้องใช้อ้างอิงทั้งหมด
	3	ให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผลกับข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักได้ 3 ใน 4 ของเหตุผลที่ต้องใช้อ้างอิงทั้งหมด
	4	ให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผลกับข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักได้ครบถ้วน
ลำดับขั้นการเขียนข้อความพิสูจน์	0	ไม่เขียนการพิสูจน์และการอ้างเหตุผลเลย
	1	ให้เหตุผลโดยเริ่มการเขียนพิสูจน์ด้วยสิ่งที่กำหนดให้ หรือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์อย่างใดอย่างหนึ่ง หรือเขียนข้อความพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์นี้เพียง 1 ข้อ
	2	ให้เหตุผลโดยเชื่อมโยงข้อความพิสูจน์ตามลำดับได้อย่างต่อเนื่องและสมเหตุสมผลได้ครึ่งหนึ่งของการพิสูจน์ทั้งหมด
	3	ให้เหตุผลโดยเชื่อมโยงข้อความพิสูจน์ตามลำดับได้อย่างต่อเนื่องและสมเหตุสมผลได้ 3 ใน 4 ของการพิสูจน์ทั้งหมด แต่ยังไม่เชื่อมโยงไปสู่ข้อสรุปของสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
	4	ให้เหตุผลโดยเชื่อมโยงข้อความพิสูจน์ทั้งหมดตามลำดับได้อย่างอย่างต่อเนื่องและสมเหตุสมผลจนได้ข้อสรุปของสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

4.2.1.4 นำแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจความถูกต้องของเนื้อหา ความเหมาะสมของเวลา ความสอดคล้องระหว่างเนื้อหากับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง ความชัดเจนของสำนวนภาษา ตลอดจนให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ซึ่งผลจากการตรวจพิจารณาแล้วอาจารย์ที่ปรึกษาได้ให้เสนอแนะดังนี้

ก. ควรปรับปรุงรูปให้มีความสอดคล้องกับโจทย์ เช่น

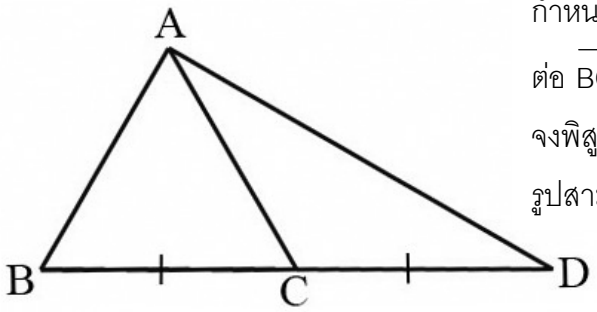
“



กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ต่อ $\overline{BC}$ ออกไปถึง D จงพิสูจน์ว่า ถ้า BC = CD แล้ว ΔACD เป็นรูปสามแหลี่ยมหน้าจั่ว ”

จากโจทย์จะทำให้สรุปได้ว่า AC = CD ด้วย แต่จากรูปข้างต้นยังไม่สอดคล้อง จึงแก้ไขเป็น

“



กำหนดให้ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ต่อ $\overline{BC}$ ออกไปถึง D จงพิสูจน์ว่า ถ้า BC = CD แล้ว ΔACD เป็นรูปสามแหลี่ยมหน้าจั่ว ”

ข. ปรับปรุงภาษาที่ใช้ในคำชี้แจงให้ชัดเจน และเหมาะสมยิ่งขึ้น เช่น “จงเติมข้อความพิสูจน์ละการอธิบายเหตุผลในช่องว่างให้สมบูรณ์” แก้เป็น “จงเติมข้อความพิสูจน์ในช่องว่างและการอธิบายเหตุผลในวงเล็บให้สมบูรณ์” พร้อมทั้งได้เพิ่มคำชี้แจงการเขียนตอบในแผ่นแรก

4.2.1.5 นำแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ที่ปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของอาจารย์ที่ปรึกษาแล้ว ไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่าน ตรวจความตรงตามเนื้อหา ข้อคำถาม ความเหมาะสมของสำนวนภาษา พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ซึ่งผลจากการตรวจพิจารณาแล้ว ผู้ทรงคุณวุฒิได้ให้เสนอแนะดังนี้

ก. ปรับปรุงรูปแบบการพิมพ์ให้เป็นแบบเดียวกัน เช่น “จากรูป กำหนดให้ B เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BD}$ จงพิสูจน์ว่า AC = BD” แก้ไขเป็น “จากรูป กำหนดให้ B เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BD}$ จงพิสูจน์ว่า AC = BD”

ข. ปรับปรุงการใช้สัญลักษณ์ควรมีความชัดเจนมากขึ้น เช่น

$B\hat{A}D = D\hat{A}C$ แก้ไขเป็น $B\hat{A}D = D\hat{A}C$

ค. ปรับปรุงภาษาในโจทย์ให้มีความเหมาะสมมากขึ้น เช่น “จากข้อ 5 นำ BC มาบวกทั้งสองข้างของสมการ” แก้ไขเป็น “จากข้อ 5 นำ BC มาบวกทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ”

4.2.1.6 นำแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ที่ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิไปทดลองใช้ครั้งที่ 1 กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 40 คน เหตุผลที่นำแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ไปทดลองกับนักเรียนโรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม เนื่องจากนักเรียนโรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม และนักเรียนโรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัย มีคะแนนเฉลี่ยแบบสอบทางการศึกษาแห่งชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET : Ordinary National Education Test) วิชาคณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2552 ใกล้เคียงกัน ซึ่งต่ำกว่า 50 % (สำนักทดสอบทางการศึกษา, 2552) และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ได้เรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์ เรื่อง การเตรียมความพร้อมในการให้เหตุผล มาแล้ว

4.2.1.7 นำแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนทั้ง 40 คน มาตรวจให้คะแนน จากนั้นนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาค่าความเที่ยง (Reliability) ของแบบวัดโดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (Alpha Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) ซึ่งมีเกณฑ์ว่า ค่าความเที่ยงต้องมีค่าตั้งแต่ 0.60 ขึ้นไป รวมทั้งหาค่าความยาก (Difficulty) และค่าอำนาจจำแนก (Discrimination) ของแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยมีเกณฑ์ว่า ค่าความยาก (p) ต้องอยู่ระหว่าง 0.20 – 0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) มีค่า 0.20 ขึ้นไป ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบดังนี้

ค่าความเที่ยง	มีค่า	0.75
ค่าความยาก	มีค่า	0.25 – 0.62
ค่าอำนาจจำแนก	มีค่า	0.14 – 0.47

โดยได้ข้อสอบที่มีค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกเป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนด จำนวน 6 ข้อ ซึ่งประกอบด้วย ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น จำนวน 3 ข้อ และตอนที่ 2 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบยาว จำนวน 3 ข้อ และไม่เป็นไปตามเกณฑ์ จำนวน 2 ข้อ ผู้วิจัยได้คัดเลือกข้อสอบที่มีค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกเป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนด จำนวน 5 ข้อ ซึ่งเป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น 3 ข้อ และ ข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบยาว จำนวน 2 ข้อ แล้วนำไปทดลองใช้ครั้งที่ 2

4.2.1.8 นำแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่เป็นไปตามเกณฑ์ และครอบคลุมการให้เหตุผลทางเรขาคณิตทั้งแบบตอบสั้นและแบบตอบยาว ไปทดลองใช้ครั้งที่ 2 กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัยที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง

จำนวน 37 คน ซึ่งนักเรียนได้เรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์ เรื่อง การเตรียมความพร้อมในการให้เหตุผล มาแล้ว ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบดังนี้

ค่าความเที่ยง มีค่า 0.82

ค่าความยาก มีค่า 0.21 – 0.57

ค่าอำนาจจำแนก มีค่า 0.40 – 0.58

ซึ่งข้อสอบมีค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกเป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนด ซึ่งประกอบด้วย ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น จำนวน 3 ข้อ และตอนที่ 2 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบยาว จำนวน 2 ข้อ (รายละเอียดแสดงในภาคผนวก ง หน้า 194)

4.2.1.9 นำแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนด จำนวน 5 ข้อ ซึ่งประกอบด้วย ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น จำนวน 3 ข้อ และตอนที่ 2 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบยาว จำนวน 2 ข้อ ไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง (รายละเอียดแสดงแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ในภาคผนวก ง หน้า 195)

4.2.2 **แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์** เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 30 ข้อ ดำเนินการสร้างตามขั้นตอนต่อไปนี้

4.2.2.1 ผู้วิจัยกำหนดจุดมุ่งหมายของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

4.2.2.2 ศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ จากหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

4.2.2.3 สร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตรและกำหนดจำนวนข้อของแบบวัด พิจารณาให้สอดคล้องกับสาระการเรียนรู้ (รายละเอียดแสดงในภาคผนวก ง หน้า 201)

4.2.2.4 สร้างแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ เป็นข้อสอบชนิดเลือกตอบมี 4 ตัวเลือก จำนวน 49 ข้อ ตามตารางวิเคราะห์พฤติกรรมในการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ (รายละเอียดแสดงในภาคผนวก ง หน้า 203) ซึ่งสอดคล้องกับการวัดประเมินผลของ Wilson (1971: 643-685) ได้จำแนกไว้ 4 ระดับ คือ

ความรู้ ความจำด้านการคิดคำนวณ (Computation) หมายถึง ความสามารถในการระลึกถึง ความรู้ที่เคยเรียนมาแล้วเกี่ยวกับทักษะการคิดคำนวณ

ความเข้าใจ (Comprehension) หมายถึง ความสามารถในการนำความรู้ที่รู้อยู่แล้วมาสัมพันธ์กับโจทย์หรือปัญหาใหม่ ตลอดจนสามารถตีความ แปลความ สรุปความ และขยายความได้

การนำไปใช้ (Application) หมายถึง การคิดแก้ปัญหาโดยการนำความรู้ กฎ สูตร ทฤษฎี หลักการ วิธีการ ตลอดจนเทคนิคต่างๆ ที่ได้เรียนรู้มาแล้วไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ที่แปลกใหม่ออกไป

การวิเคราะห์ (Analysis) หมายถึง ความสามารถในการพิจารณาหาส่วนที่สำคัญ หาความสัมพันธ์ของส่วนที่สำคัญ และหลักการที่ส่วนสำคัญเหล่านั้นมีความสัมพันธ์กัน เพื่อแก้ปัญหาที่แปลกกว่าปัญหาธรรมดาหรือปัญหาที่ไม่คุ้นเคยมาก่อนได้

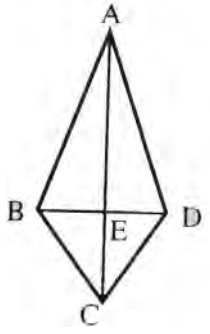
เกณฑ์การตรวจให้คะแนนแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ชนิดเลือกตอบ คือ คำตอบที่ถูกต้องให้ข้อละ 1 คะแนน และคำตอบที่ไม่ถูกต้องหรือไม่ตอบให้ข้อละ 0 คะแนน

4.2.2.5 นำแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจความถูกต้องของเนื้อหา ความเหมาะสมของเวลา ความสอดคล้องระหว่างเนื้อหากับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง ความชัดเจนของสำนวนภาษา ตลอดจนให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ซึ่งผลจากการตรวจพิจารณาแล้วอาจารย์ที่ปรึกษาได้ให้เสนอแนะดังนี้

ก. สัญลักษณ์ที่ใช้ในคำถามต้องมีความชัดเจน เช่น “$\hat{m}$ มีขนาดเท่าใด” แก้ไขเป็น “$\hat{m}$ มีขนาดเท่าใด”

ข. ตัดข้อความที่แสดงว่าคำถามข้อใดครอบคลุมพฤติกรรมด้านความรู้ และความคิด(Cognitive domain)ระดับใด ออกไป

“ จากรูป กำหนดให้ ΔABD และ ΔCBD เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมี $\overline{BD}$ เป็นฐาน ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง (การวิเคราะห์)



ก. $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

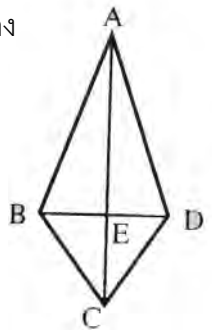
ข. ไม่สามารถสรุปได้ว่า $\Delta ABE \cong \Delta ADE$

ค. $B\hat{C}E = D\hat{C}E$

ง. $BE = DE$ ”

แก้ไขเป็น

“ จากรูป กำหนดให้ ΔABD และ ΔCBD เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมี $\overline{BD}$ เป็นฐาน ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง



ก. $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

ข. ไม่สามารถสรุปได้ว่า $\Delta ABE \cong \Delta ADE$

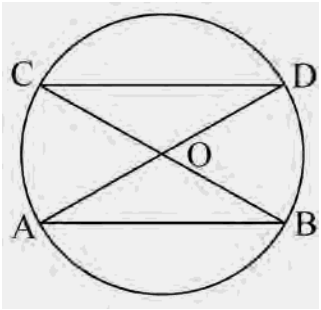
ค. $B\hat{C}E = D\hat{C}E$

ง. BE = DE ”

ค. ข้อสอบส่วนใหญ่มีทั้งคำถามและรูปควรจัดให้อยู่ในพื้นที่ที่กะทัดรัดและมีความชัดเจน เพื่อลดจำนวนหน้าของแบบทดสอบ จะทำให้นักเรียนมีกำลังใจในการทำแบบวัดมากขึ้น

ง. แบบสอบต้องมีคำถามทุกข้อ เช่น

“ จากข้อมูลดังต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 28 – 30



จากรูป กำหนด AD และ BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ $\overline{AO} = \overline{DO}$

พิจารณาการพิสูจน์ว่า $\Delta ABO \cong \Delta CDO$

แล้วเติมการพิสูจน์ให้ถูกต้อง ดังต่อไปนี้

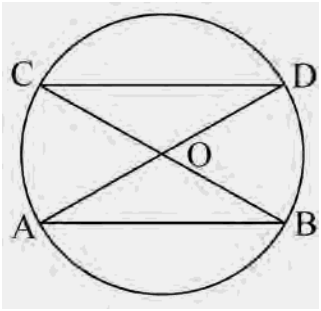
ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\overline{AO} = \overline{DO}$	กำหนดให้
2. $A\hat{O}B = C\hat{O}D$	.....(28).....
3. $\overline{BO} = \overline{CO}$	.....(29).....
…	...

28. ก. กำหนดให้ ข. เป็นมุมตรงข้าม

ค. เป็นมุมแย้ง ง. เพราะ $\Delta ABO \cong \Delta CDO$ ”

แก้ไขเป็น

“ จากข้อมูลดังต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 28 – 30



จากรูป กำหนด AD และ BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ $\overline{AO} = \overline{DO}$
พิจารณาการพิสูจน์ว่า $\Delta ABO \cong \Delta CDO$
แล้วเติมการพิสูจน์ให้ถูกต้อง ดังต่อไปนี้

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\overline{AO} = \overline{DO}$	กำหนดให้
2. $A\hat{O}B = C\hat{O}D$	.....(a).....
3. $\overline{BO} = \overline{CO}$	.....(b).....
…	...

28. ควรให้เหตุผลตรงช่องว่าง a ว่า $A\hat{O}B = C\hat{O}D$ เพราะเหตุใด

ก. กำหนดให้ ข. เป็นมุมตรงข้าม

ค. เป็นมุมแย้ง ง. เพราะ $\Delta ABO \cong \Delta CDO$ ”

4.2.2.6 นำแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของอาจารย์ที่ปรึกษาแล้ว ไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่าน ตรวจความตรงตามเนื้อหา ความสอดคล้องกับระดับพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย ข้อคำถาม ตัวเลือก ความเหมาะสมของสำนวนภาษา พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งผลจากการตรวจพิจารณาแล้วผู้ทรงคุณวุฒิได้ให้เสนอแนะดังนี้

ก. ปรับปรุงภาษาใช้ในคำถามและตัวเลือกให้ชัดเจนยิ่งขึ้น เช่น

“ Δ AFD $\cong$ Δ CED เพราะเหตุใด

ก. ด.ด.ด. ข. ม.ด.ม.

ค. ด.ม.ด. ง. ถูกทุกข้อ ”

ตัวเลือก ง เป็นตัวเลือกที่ตอบไม่ตรงกับคำถาม เนื่องจาก คำถามไม่ได้ถามว่าตัวเลือกใดถูกต้อง จึงแก้ไขเป็น

" Δ AFD $\cong$ Δ CED เพราะเหตุใด

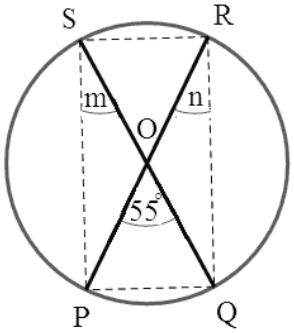
ก. ด.ด.ด. ข. ม.ด.ม.

ค. ด.ม.ด. ง. ม.ม.ด. "

ข. รูปที่ใช้ในคำถามหลายข้อควรมีข้อความที่กำหนดให้กำกับ

เช่น

" จากข้อมูลที่กำหนดให้ใช้ตอบคำถามข้อ 35 – 36



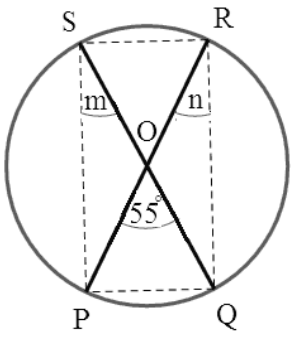
35. $\hat{m}$ มีขนาดเท่าใด

ก. 27.5 องศา ข. 35 องศา

ค. 55 องศา ง. 62.5 องศา "

แก้ไขเป็น

" จากข้อมูลที่กำหนดให้ใช้ตอบคำถามข้อ 35 – 36



จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

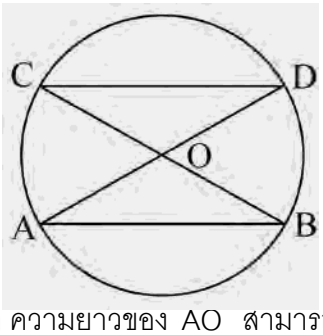
และ $P\hat{O}Q = 55^\circ$

$\hat{m}$ มีขนาดเท่าใด

ก. 27.5 องศา ข. 35 องศา

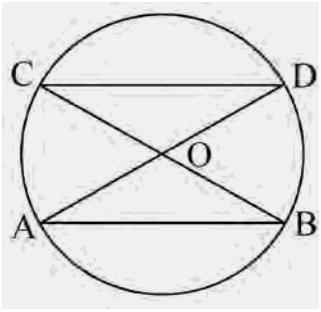
ค. 55 องศา ง. 62.5 องศา "

ค. ควรปรับปรุงการใช้สัญลักษณ์ เช่น

“ 

จากรูป กำหนด AD และ BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ $\overline{AO} = \overline{DO}$
พิจารณาการพิสูจน์ว่า $\Delta ABO \cong \Delta CDO$
แล้วเติมการพิสูจน์ให้ถูกต้อง ดังต่อไปนี้ ”

จาก ความยาวของ AO สามารถเขียนแทนได้เป็น AO แก้ไขเป็น

“ 

จากรูป กำหนด AD และ BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ $AO = DO$
พิจารณาการพิสูจน์ว่า $\Delta ABO \cong \Delta CDO$
แล้วเติมการพิสูจน์ให้ถูกต้อง ดังต่อไปนี้ ”

4.2.2.7 นำแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิไปทดลองใช้ครั้งที่ 1 กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 43 คน เหตุผลที่นำแบบวัดวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ไปทดลองกับนักเรียนโรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม เนื่องจากนักเรียนโรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม และนักเรียนโรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัย มีคะแนนเฉลี่ย แบบสอบทางการศึกษาแห่งชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET : Ordinary National Education Test) วิชาคณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2552 ใกล้เคียงกัน ซึ่งต่ำกว่า 50 % (สำนักทดสอบทางการศึกษา, 2552) และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ได้เรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ มาแล้ว

4.2.2.8 นำแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้ง 43 คน มาตรวจให้คะแนน จากนั้นนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาค่าความเที่ยง (Reliability) ของแบบวัดโดยใช้สูตรของคูเดอร์-ริชาร์ดสัน (Kuder-Richardson Method: KR-20) ซึ่งมีเกณฑ์ว่า ค่าความเที่ยงต้องมีค่าตั้งแต่ 0.60 ขึ้นไป รวมทั้งหาค่าความยาก (Difficulty) และค่าอำนาจจำแนก (Discrimination) ของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยมีเกณฑ์ว่า ค่าความยาก (p) ต้องอยู่ระหว่าง 0.20 – 0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) มีค่า 0.20 ขึ้นไป ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบดังนี้

ค่าความเที่ยง มีค่า 0.69

ค่าความยาก มีค่า 0.24 – 0.93

ค่าอำนาจจำแนก มีค่า -0.45 – 0.86

โดยได้ข้อสอบที่มีค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกเป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนด จำนวน 37 ข้อ และไม่เป็นไปตามเกณฑ์ จำนวน 12 ข้อ ผู้วิจัยได้คัดเลือกข้อสอบที่มีค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกเป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนด และสอดคล้องกับตารางวิเคราะห์พฤติกรรมในการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้คัดเลือกข้อสอบที่เป็นไปตามเกณฑ์ จำนวน 30 ข้อ แล้วนำไปทดลองใช้ครั้งที่ 2

4.2.2.9 นำแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ที่เป็นไปตามเกณฑ์ และครอบคลุมตารางวิเคราะห์พฤติกรรมในการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ จำนวน 30 ข้อไปทดลองใช้ครั้งที่ 2 กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัย ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 39 คน ซึ่งนักเรียนได้เรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ มาแล้ว ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบดังนี้

ค่าความเที่ยง มีค่า 0.64

ค่าความยาก มีค่า 0.25 – 0.77

ค่าอำนาจจำแนกมีค่า 0.27 – 0.50

ซึ่งข้อสอบมีค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกเป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนด (รายละเอียดแสดง ในภาคผนวก ง หน้า 205)

4.2.2.10 นำแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนด จำนวน 30 ข้อ ไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง (รายละเอียดแสดงแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ในภาคผนวก ง หน้า 210)

4.2.3 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 5 ข้อ ดำเนินการสร้างตามขั้นตอนต่อไปนี้

4.2.3.1 ผู้วิจัยศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ จากหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

4.2.3.2 ศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต การอ้างเหตุผลในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างแบบวัด

4.2.3.3 สร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ โดยแบ่งแบบทดสอบออกเป็น 2 ตอน รวม 12 ข้อ ดังนี้

ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น จำนวน 6 ข้อ ซึ่ง

เกณฑ์การตรวจให้คะแนนแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น คือ เติมคำตอบได้ถูกต้อง จะได้ 1 คะแนน เติมคำตอบผิด หรือไม่เติมคำตอบ ได้ 0 คะแนน

ตอนที่ 2 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบยาว จำนวน 6 ข้อ ซึ่งมีเกณฑ์ในการให้คะแนนดังนี้

หมวด	ระดับคะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
ข้อความพิสูจน์	0	ให้เหตุผลโดยไม่เขียนการพิสูจน์เลย เขียนเฉพาะสิ่งที่กำหนดให้หรือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว หรือเขียนสิ่งที่ไม่เกี่ยวข้อง
	1	ให้เหตุผลโดยเขียนข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักได้อย่างน้อย 1 ข้อแต่เขียนได้ไม่ถึง 2 ใน 4 ของข้อความพิสูจน์หลักที่นำไปสู่ผลที่ต้องการพิสูจน์
	2	ให้เหตุผลโดยเขียนข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักได้ครึ่งหนึ่งของข้อความพิสูจน์หลักที่นำไปสู่ผลที่ต้องการพิสูจน์
	3	ให้เหตุผลโดยเขียนข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักได้ 3 ใน 4 ของข้อความพิสูจน์หลักที่นำไปสู่ผลที่ต้องการพิสูจน์
	4	ให้เหตุผลโดยเขียนข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักซึ่งนำไปสู่ผลที่ต้องการพิสูจน์ได้ครบถ้วน
การอธิบายการให้เหตุผลกับข้อความพิสูจน์	0	ไม่ให้เหตุผลเลย หรือให้เหตุผลที่ไม่เกี่ยวข้องกับข้อความพิสูจน์
	1	ให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผลกับข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักได้อย่างน้อย 1 ข้อแต่ให้เหตุผลได้ไม่ถึง 2 ใน 4 ของเหตุผลที่ต้องใช้อ้างอิงทั้งหมด
	2	ให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผลกับข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักได้ครึ่งหนึ่งของเหตุผลที่ต้องใช้อ้างอิงทั้งหมด
	3	ให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผลกับข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักได้ 3 ใน 4 ของเหตุผลที่ต้องใช้อ้างอิงทั้งหมด

หมวด	ระดับคะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
การอธิบายการให้เหตุผลกับข้อความพิสูจน์ (ต่อ)	4	ให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผลกับข้อความพิสูจน์ที่เป็นเหตุหลักได้ครบถ้วน
ลำดับขั้นการเขียนข้อความพิสูจน์	0	ไม่เขียนการพิสูจน์และการอ้างเหตุผลเลย
	1	ให้เหตุผลโดยเริ่มการเขียนพิสูจน์ด้วยสิ่งที่กำหนดให้ หรือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์อย่างใดอย่างหนึ่ง หรือเขียนข้อความพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์นี้เพียง 1 ข้อ
	2	ให้เหตุผลโดยเชื่อมโยงข้อความพิสูจน์ตามลำดับได้อย่างต่อเนื่องและสมเหตุสมผลได้ครึ่งหนึ่งของการพิสูจน์ทั้งหมด
	3	ให้เหตุผลโดยเชื่อมโยงข้อความพิสูจน์ตามลำดับได้อย่างต่อเนื่องและสมเหตุสมผลได้ 3 ใน 4 ของการพิสูจน์ทั้งหมด แต่ยังไม่เชื่อมโยงไปสู่ข้อสรุปของสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
	4	ให้เหตุผลโดยเชื่อมโยงข้อความพิสูจน์ทั้งหมดตามลำดับได้อย่างอย่างต่อเนื่องและสมเหตุสมผลจนได้ข้อสรุปของสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

4.2.3.4 นำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจความถูกต้องของเนื้อหา ความเหมาะสมของเวลา ความสอดคล้องระหว่างเนื้อหากับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง ความชัดเจนของสำนวนภาษา ตลอดจนให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ ซึ่งผลจากการตรวจพิจารณาแล้วอาจารย์ที่ปรึกษาได้ให้เสนอแนะดังนี้

ก. ปรับปรุงภาษาที่ใช้ในคำชี้แจงให้ชัดเจน และเหมาะสมยิ่งขึ้น เช่น “จงเติมข้อความพิสูจน์ละการอธิบายเหตุผลในช่องว่างให้สมบูรณ์” แก้เป็น “จงเติมข้อความพิสูจน์ในช่องว่างและการอธิบายเหตุผลในวงเล็บให้สมบูรณ์” พร้อมทั้งได้เพิ่มคำชี้แจงการเขียนตอบในแผ่นแรก

ข. ปรับปรุงภาษาและการใช้สัญลักษณ์ที่ใช้ในคำถามให้ชัดเจนยิ่งขึ้น เช่น “ $\square$ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมใดๆ มี AD=BC, AB=CD และ $\overline{BE}$ กับ $\overline{DF}$ ตั้งฉากกับเส้น

ทแยงมุม AC จงพิสูจน์ว่า $\overline{BE} = \overline{DF}$ " แก้ไขเป็น " □ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมใดๆ มี AD=BC, AB=CD และ $\overline{BE}$ กับ $\overline{DF}$ ตั้งฉากกับเส้นทแยงมุม AC

4.2.3.5 นำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของอาจารย์ที่ปรึกษาแล้ว ไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่าน ตรวจความตรงตามเนื้อหา ข้อคำถาม ตัวเลือก ความเหมาะสมของสำนวนภาษา พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผลจากการตรวจพิจารณาแล้วผู้ทรงคุรวุฒิได้ให้เสนอแนะดังนี้

ก. ปรับปรุงการใช้สัญลักษณ์ควรมีความชัดเจนมากขึ้น เช่น " จากรูป กำหนดให้ □ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ $D\hat{A}F = B\hat{A}E$ จงพิสูจน์ว่า AF = AE " แก้ไขเป็น "จากรูป กำหนดให้ □ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ $D\hat{A}F = B\hat{A}E$ จงพิสูจน์ว่า AF = AE "

4.2.3.6 นำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิไปทดลองใช้ครั้งที่ 1 กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 45 คน เหตุผลที่นำแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ไปทดลองกับนักเรียนโรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม เนื่องจากนักเรียนโรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม และนักเรียนโรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัย มีคะแนนเฉลี่ยแบบสอบทางการศึกษาแห่งชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET : Ordinary National Education Test) วิชาคณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2552 ใกล้เคียงกัน ซึ่งต่ำกว่า 50 % (สำนักทดสอบทางการศึกษา, 2552) และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ได้เรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการมาแล้ว

4.2.3.7 นำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนทั้ง 45 คน มาตรวจให้คะแนน จากนั้นนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาค่าความเที่ยง (Reliability) ของแบบวัดโดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (Alpha Coefficient)ของครอนบาค (Cronbach) ซึ่งมีเกณฑ์ว่า ค่าความเที่ยงต้องมีค่าตั้งแต่ 0.60 ขึ้นไป รวมทั้งหาค่าความยาก (Difficulty) และค่าอำนาจจำแนก (Discrimination) ของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยมีเกณฑ์ว่า ค่าความยาก (p) ต้องอยู่ระหว่าง 0.20 – 0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) มีค่า 0.20 ขึ้นไป ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบดังนี้

ค่าความเที่ยง	มีค่า	0.79
ค่าความยาก	มีค่า	0.29 – 0.83
ค่าอำนาจจำแนก	มีค่า	0.28 – 0.62

โดยได้ข้อสอบที่มีค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกเป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนด จำนวน 11 ข้อ ซึ่งประกอบด้วย ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น จำนวน 5 ข้อ และตอนที่ 2 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบยาว จำนวน 6 ข้อ และไม่เป็นไปตามเกณฑ์ จำนวน 1 ข้อ ผู้วิจัยได้คัดเลือกข้อสอบที่มีค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกเป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนด จำนวน 5 ข้อ ซึ่งเป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น 3 ข้อ และ ข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบยาว จำนวน 2 ข้อ แล้วนำไปทดลองใช้ครั้งที่ 2

4.2.3.8 นำแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่เป็นไปตามเกณฑ์ และครอบคลุมการให้เหตุผลทางเรขาคณิตทั้งแบบตอบสั้นและแบบตอบยาว ไปทดลองใช้ครั้งที่ 2 กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัยที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 39 คน ซึ่งนักเรียนได้เรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ มาแล้ว ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบดังนี้

ค่าความเที่ยง	มีค่า	0.67
ค่าความยาก	มีค่า	0.37 – 0.52
ค่าอำนาจจำแนก	มีค่า	0.36 – 0.54

ซึ่งข้อสอบมีค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกเป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนด ซึ่งประกอบด้วย ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น จำนวน 3 ข้อ และตอนที่ 2 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบยาว จำนวน 2 ข้อ (รายละเอียดแสดงในภาคผนวก ง หน้า 214)

4.2.3.9 นำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนด จำนวน 5 ข้อ ซึ่งประกอบด้วย ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น จำนวน 3 ข้อ และตอนที่ 2 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบยาว จำนวน 2 ข้อ ไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง (รายละเอียดแสดงแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ในภาคผนวก ง หน้า 216)

5. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มด้วยตนเอง โดยผู้วิจัยได้ดำเนินการขั้นเตรียมการ ขั้นดำเนินการทดลอง และเก็บรวบรวมข้อมูล ดังนี้

5.1 ขั้นเตรียมการ

5.1.1 ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีสำหรับกลุ่มทดลอง และแผนการจัดการเรียนรู้แบบปกติสำหรับกลุ่มควบคุม

5.1.2 ผู้วิจัยจัดเตรียมสื่อ อุปกรณ์ เอกสารที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแผนการจัดการเรียนรู้

5.1.3 ผู้วิจัยนำหนังสือขออนุญาตดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลจากบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถึงผู้อำนวยการโรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัย โรงเรียนในสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษากรุงเทพมหานคร สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ

5.2 ขั้นดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

5.2.1 ผู้วิจัยดำเนินการสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มตามแผนการจัดการเรียนรู้ทั้งสองชนิดที่เตรียมไว้

5.2.2 ผู้วิจัยทำการทดลองสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม กลุ่มละ 3 คาบต่อสัปดาห์ เป็นเวลา 5 สัปดาห์ ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 โดยสอนตามชั่วโมงปกติที่ทางโรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัย ได้จัดไว้สำหรับการเรียนการสอนในเนื้อหา เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

5.2.3 ระหว่างการทดลองสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มผู้วิจัยได้สังเกตพฤติกรรมการเรียนของนักเรียนทั้งสองกลุ่ม ตลอดจนการทำใบงานและการทำแบบฝึกหัด

5.2.4 เมื่อดำเนินการทดลองสอนตามเนื้อหาที่กำหนดไว้ในแผนการจัดการเรียนรู้ครบ 15 คาบแล้ว ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบทันทีหลังจากเสร็จสิ้นการทดลอง โดยใช้แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม แล้วนำคะแนนจากแบบวัดมาวิเคราะห์ข้อมูล

6. การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลแบ่งเป็น 2 ประเภท ได้แก่

6.1 ข้อมูลเชิงปริมาณ

ข้อมูลที่ได้จากแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตได้ถูกมาวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for the Social Sciences: SPSS) ดังนี้

6.1.1 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้คะแนนสอบหลังการทดลองจากแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยคำนวณหาค่ามัชฌิมเลขคณิต ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิต ด้วยการทดสอบค่าที (t- independent) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

6.1.2 เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้คะแนนสอบหลังการทดลองจากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต โดยคำนวณหาค่ามัชฌิมเลขคณิต ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิต ด้วยการทดสอบค่าที (t- independent) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

6.2 ข้อมูลเชิงคุณภาพ

ผู้วิจัยได้สังเกตพฤติกรรมการเรียนของนักเรียนทั้งสองกลุ่ม ตลอดจนการทำใบงานและการทำแบบฝึกหัดเพื่อวิเคราะห์ความสามารถในการเรียนรู้ของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ต่างกัน

7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

สถิติที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ประกอบด้วยสถิติที่ใช้ในการหาคุณภาพของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต รวมทั้งสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังรายละเอียดต่อไปนี้

7.1 สถิติที่ใช้ในการหาคุณภาพของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

การหาค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนก ของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ผู้วิจัยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for the Social Sciences: SPSS)

7.2 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การคำนวณหาค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และการทดสอบค่าที (t-test) ของคะแนนแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for the Social Sciences: SPSS)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางเรียนคณิตศาสตร์ระหว่างนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีกับกลุ่มที่เรียนแบบปกติ 2) เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตระหว่างนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีกับกลุ่มที่เรียนแบบปกติ โดยผู้วิจัยนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็น 3 ส่วน ดังนี้

ส่วนที่ 1 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียน ครู และนักเรียน

1. ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียน
2. ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับครู
3. ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับนักเรียน

ส่วนที่ 2 การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

ผลการศึกษาวิจัยนำเสนอ ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี และกลุ่มที่เรียนแบบปกติ แสดงผลดังตารางที่ 5

ตอนที่ 2 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี และกลุ่มที่เรียนแบบปกติ แสดงผลดังตารางที่ 6

ส่วนที่ 3 การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

ผลการศึกษาวิจัยนำเสนอ ดังนี้

1. พฤติกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง
   1.1 การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง
   1.2 การพัฒนาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง

2. พฤติกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มควบคุม

2.1 การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มควบคุม

2.2 การพัฒนาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มควบคุม

ดังมีรายละเอียดของการนำเสนอในแต่ละส่วน ดังต่อไปนี้

ส่วนที่ 1 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียน ครู และนักเรียน

1. ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียน

โรงเรียนที่ผู้วิจัยเลือกทำการทดลอง ตั้งอยู่ริมถนนศรีอยุธยา แขวงทุ่งพญาไท เขตราชเทวี กรุงเทพมหานคร โรงเรียนอยู่ใกล้สถานีตำรวจ โรงเรียนประถมศึกษา และใกล้สถานีรถไฟฟ้า (BTS) นอกจากนี้โรงเรียนยังอยู่ใกล้ชุมชน และสถานที่ราชการทางการศึกษา โรงเรียนที่ใช้เป็นกลุ่มตัวอย่างนี้เป็นโรงเรียนสหศึกษาขนาดใหญ่พิเศษ สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ ซึ่งอยู่ในเขตพื้นที่การศึกษากรุงเทพมหานครเขต 1 โรงเรียนเปิดสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึง มัธยมศึกษาชั้นปีที่ 6 (ช่วงชั้นที่ 3 และ 4) มีห้องเรียนทั้งหมด 63 ห้องเรียน ซึ่งช่วงชั้นที่ 3 (ม. 1 – 3) มีห้องเรียนระดับชั้นละ 12 ห้องเรียน ช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4 – 6) มีห้องเรียนระดับชั้นละ 9 ห้องเรียน ซึ่งชั้นมัธยมศึกษาต้น ทางโรงเรียนจัดให้ห้องเรียนห้องที่ 12 เป็นนักเรียนที่มีความเป็นเลิศทางด้านคณิตศาสตร์-วิทยาศาสตร์ ซึ่งจ่ายค่าธรรมเนียมแพงกว่าห้องอื่นๆ และจะได้รับสิทธิพิเศษมากกว่าห้องเรียนห้องอื่นๆ ในการจัดชั้นเรียนห้องเรียนห้องที่ 1 ถึงห้องที่ 9 จะจัดนักเรียนเข้าชั้นตามความสามารถ คือ นักเรียนในห้องเรียนที่ 1 ถึงห้องเรียนที่ 3 เป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่อยู่ในเกณฑ์ดี ส่วนห้องเรียนที่ 4 ถึงห้องเรียนที่ 11 เป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่อยู่ในเกณฑ์ปานกลางถึงอ่อน ตามลำดับ เมื่อพิจารณาคะแนนแบบสอบทางการศึกษาแห่งชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET : Ordinary National Education Test) ของปีการศึกษา 2552 ทั้งประเทศมีค่าเฉลี่ยเป็น 26.05 และมีค่าเฉลี่ยในระดับเขตพื้นที่เป็น 32.63 แต่ค่าเฉลี่ยคะแนนแบบสอบทางการศึกษาแห่งชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET : Ordinary National Education Test) ปีการศึกษา 2552 ของโรงเรียนนี้เป็น 27.01 ซึ่งควรได้รับการพัฒนาในเรื่องการจัดการเรียนการสอนทางคณิตศาสตร์

2. **ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับครู**

ในปีการศึกษา 2553 โรงเรียนนี้มีจำนวนครูทั้งหมด 103 คน เป็นครูคณิตศาสตร์จำนวน 12 คน ซึ่งครูส่วนใหญ่จบการศึกษาระดับปริญาตรี ทางการสอนคณิตศาสตร์โดยตรง ในด้านภาระงานในการสอนของครูคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ได้รับมอบหมายให้สอนโดยเฉลี่ยประมาณ 18 คาบต่อสัปดาห์ และมีภาระงานอื่นที่นอกเหนือจากงานสอน เช่น งานวัดผล งานสหกรณ์ ฯลฯ ทำให้ไม่มีเวลาในการเตรียมการสอนเท่าที่ควร และยังใช้วิธีการสอนที่ไม่หลากหลาย อีกทั้งการใช้สื่อการเรียนรู้ที่เป็นรูปธรรมยังไม่มากพอจึงดำเนินการสอนโดยวิธีการบรรยายเป็นส่วนใหญ่

3. **ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับนักเรียน**

ในปีการศึกษา 2553 โรงเรียนนี้มีจำนวนนักเรียนประมาณ 2,600 คน เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีทั้งหมด 12 ห้องเรียน มีจำนวนนักเรียนทั้งสิ้น 444 คน ซึ่งชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในหนึ่งห้องเรียนมีจำนวนนักเรียนระหว่าง 32 – 41 คน โดยห้องเรียนห้องที่ 12 เป็นนักเรียนที่มีความเป็นเลิศทางด้านคณิตศาสตร์-วิทยาศาสตร์ ในการจัดชั้นเรียนห้องเรียนห้องที่ 1 ถึงห้องที่ 9 จะจัดนักเรียนเข้าชั้นตามความสามารถ คือ นักเรียนในห้องเรียนที่ 1 ถึงห้องเรียนที่ 3 เป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่อยู่ในเกณฑ์ดี ส่วนห้องเรียนที่ 4 ถึงห้องเรียนที่ 11 เป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่อยู่ในเกณฑ์ปานกลาง ถึงอ่อน ตามลำดับ นักเรียนในกลุ่มทดลองมีจำนวน 41 คน และนักเรียนในกลุ่มควบคุมมีจำนวน 36 คน มีเพศหญิงมากกว่าเพศชาย นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับปานกลาง นักเรียนในกลุ่มทดลองส่วนใหญ่มีความกระตือรือร้นในการเรียนการสอน ชอบซักถาม มีความสนใจและให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมเป็นอย่างดี และนักเรียนในกลุ่มควบคุมส่วนใหญ่มีการโต้ตอบกับครูผู้สอนค่อนข้างน้อย และชอบพูดคุยกันในระหว่างการเรียนการสอน นักเรียนส่วนใหญ่อาศัยอยู่กับบิดามารดา ผู้ปกครองของนักเรียนในโรงเรียนนี้ ส่วนใหญ่ประกอบอาชีพรับจ้าง ค้าขาย ธุรกิจส่วนตัว และตำรวจ สำหรับผู้ปกครองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในกลุ่มทดลองส่วนใหญ่ประกอบอาชีพค้าขาย และรับจ้าง และผู้ปกครองของนักเรียนกลุ่มควบคุมส่วนใหญ่ประกอบอาชีพรับจ้างทั่วไป

ส่วนที่ 2 การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

ผลการศึกษาวิจัยนำเสนอ ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี และกลุ่มที่เรียนแบบปกติ แสดงผล ดังตารางที่ 5

ตารางที่ 4 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และค่าที (t-test) ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี และกลุ่มควบคุมที่เรียนแบบปกติ (คะแนนเต็ม 30 คะแนน)

กลุ่ม	n	$\bar{x}$	s	t
ทดลอง	41	19.14	2.87	9.518*
ควบคุม	36	13.06	2.92	

*$p < .05$

จากตารางที่ 5 ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี และกลุ่มที่เรียนแบบปกติ มีค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เท่ากับ 19.14 และ 13.06 ตามลำดับ และจากการทดสอบค่าที (t-independent) พบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตอนที่ 2 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ ของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี และกลุ่มที่เรียนแบบปกติ แสดงผลดังตารางที่ 6

ตารางที่ 5 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และที (t-test) ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี และกลุ่มควบคุมที่เรียนแบบปกติ (คะแนนเต็ม 45 คะแนน)

กลุ่ม	n	$\bar{x}$	s	t
ทดลอง	41	37.08	5.23	6.651*
ควบคุม	36	27.53	6.83	

*$p < .05$

จากตารางที่ 6 ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี และกลุ่มที่เรียนแบบปกติ มีค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เท่ากับ 37.08 และ 27.53 ตามลำดับ และจากการทดสอบค่าที (t-independent) พบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตสูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ส่วนที่ 3 การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

พฤติกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน

การจัดการเรียนเรียนรู้ในวิชาคณิตศาสตร์สำหรับกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุมได้เรียนรู้เนื้อหาเรื่อง ความเท่ากันทุกประการ ซึ่งนักเรียนทั้งสองกลุ่มได้เรียนรู้เนื้อหา/สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้ และการวัดและประเมินผลเช่นเดียวกัน แตกต่างกันเพียงวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เท่านั้น ซึ่งนักเรียนแต่ละกลุ่มมีพฤติกรรมการเรียนรู้ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. **พฤติกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง**

การจัดการเรียนรู้ในวิชาคณิตศาสตร์ของครูสำหรับกลุ่มทดลอง ครูใช้โมเดลของแวนฮีลี ซึ่งดำเนินการสอนตามขั้นตอนสอนของแวนฮีลี มีอยู่ 5 ขั้นตอน ดังนี้ คือ คือ ขั้นการใช้คำถามเพื่อเข้าสู่บทเรียน ขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง ขั้นการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น ขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ และขั้นการสรุปรวม ซึ่งนักเรียนมีการพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตดังต่อไปนี้

1.1 การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง

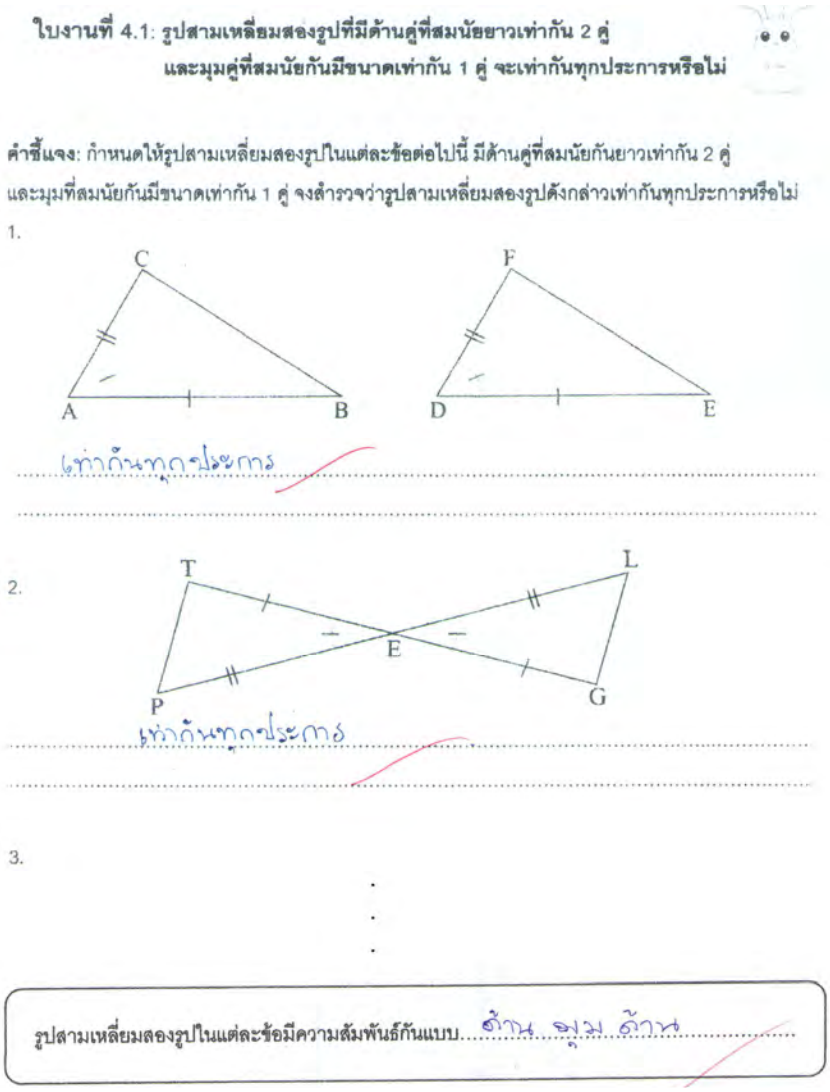
จากการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และการทำใบงาน พบว่า ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีส่งผลให้นักเรียนส่วนใหญ่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น สังเกตได้จากนักเรียนเข้าใจมโนทัศน์ของความเท่ากันทุกประการ และสามารถนำความรู้ไปใช้อธิบายรูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ ว่าเท่ากันทุกประการหรือไม่ เพราะเหตุใดได้ นำความรู้หรือทฤษฎีบทที่ได้เรียนรู้มาแล้วไปแก้ปัญหาใหม่ได้ ตลอดจนพิจารณาหาข้อมูลที่สำคัญ หาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่สำคัญเหล่านั้น เพื่อนำไปแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยมาก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน ครูเริ่มต้นบทเรียนโดยการทบทวนความรู้เดิมโดยใช้สื่อการเรียนรู้ประกอบการใช้คำถามเพื่อเข้าสู่บทเรียน(Information) ซึ่งเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจ คิดหาคำตอบที่ครูถาม จากนั้นจึงแจ้งหัวข้อที่จะเรียนและวัตถุประสงค์การเรียน ครูดำเนินการสอนโดยใช้ใบงานประกอบการสอน เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation) นักเรียนในกลุ่มทดลองได้ศึกษาตามใบงานที่ได้รับมอบหมาย โดยใบงานที่ 4.1 นักเรียนได้สำรวจเพื่อให้เข้าใจมโนทัศน์เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการแบบ

ด้าน – มุม – ด้าน ใบงานที่ 4.2 นักเรียนได้เรียนรู้การให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ ทั้งนี้ยังได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication) โดยร่วมกันอภิปรายทั้งภายในกลุ่มย่อย และอภิปรายร่วมกันทั้งห้องเพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ถูกต้องและตรงกัน จากนั้นนักเรียนจึงเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ (Free Orientation) โดยทำใบงานที่ 4.3 นักเรียนได้ฝึกการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองเพื่อให้เกิดความชำนาญ ก่อนที่นักเรียนสรุปรวม (Integration) เนื้อหาที่ได้เรียนรู้ทั้งหมด เพื่อเป็นการประมวลความคิดทั้งหมดในการเรียนในแต่ละคาบ ทำให้นักเรียนได้ประมวลความคิดเกี่ยวกับสิ่งที่ได้เรียนผ่านมาและสามารถอธิบายได้โดยอาศัยความเข้าใจของนักเรียนเอง ทำให้เห็นภาพรวมของการทำงานของตนเอง ในการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีส่งผลให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ดังรายละเอียดของการเรียนรู้ในแต่ละใบงานดังนี้

ใบงานที่ 4.1 นักเรียนได้สำรวจรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน โดยใช้ ไม้บรรทัด ไม้โปรแทคเตอร์ หรือกระดาษลอกลาย จนได้ข้อสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการหรือไม่ ซึ่งพบว่าจากการที่นักเรียนทุกคนได้สำรวจรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน ทำให้นักเรียนได้สังเกต วิเคราะห์ และประมวลความคิดด้วยตนเอง เกิดการเรียนรู้และก่อให้เกิดความเข้าใจมโนทัศน์ จนสามารถสรุปมโนทัศน์ของความเท่ากันทุกประการแบบด้าน – มุม – ด้าน ได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ ส่งผลให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น ดังภาพที่ 3

ภาพที่ 3 แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในใบงานที่ 4.1



ใบงานที่ 4.1: รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านคู่ที่สมนัยยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จะเท่ากันทุกประการหรือไม่

คำชี้แจง: กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จงสำรวจว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปดังกล่าวเท่ากันทุกประการหรือไม่

1.

เท่ากันทุกประการ

2.

เท่ากันทุกประการ

3.

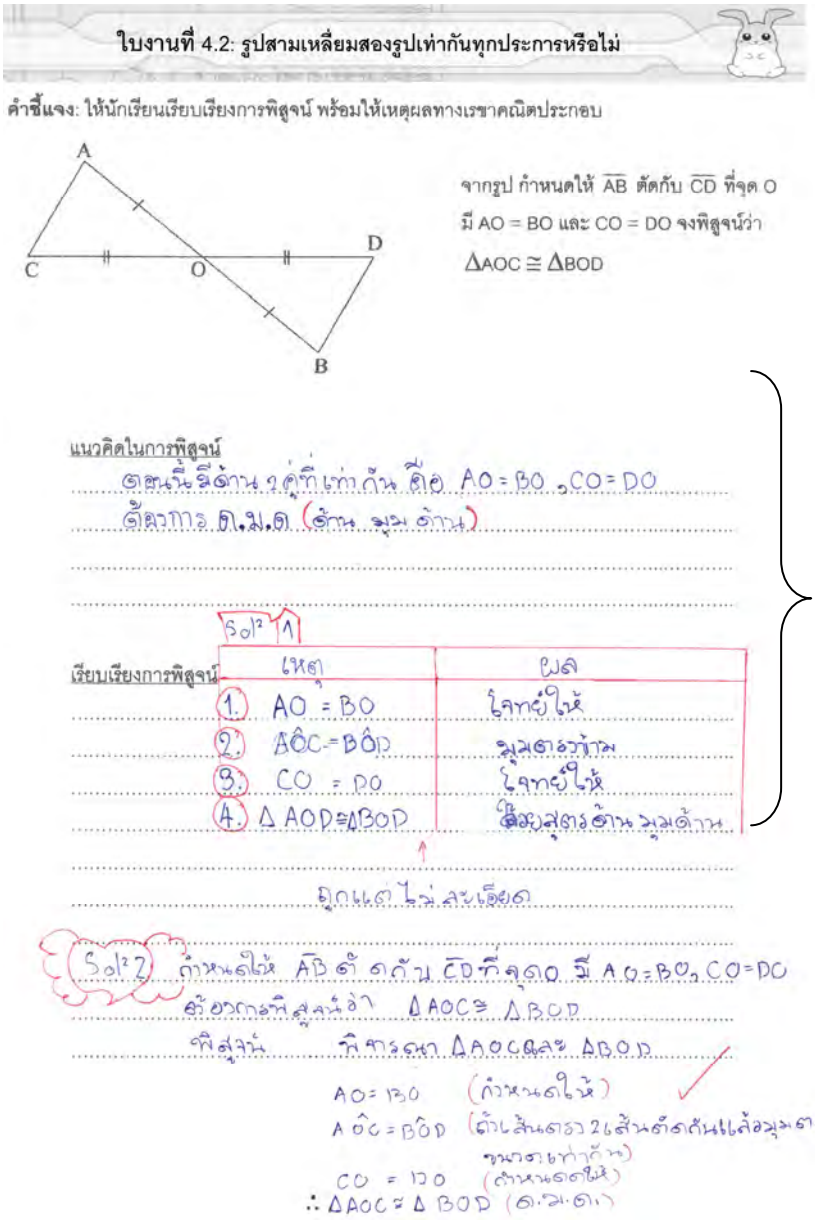
รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน มุม ด้าน

จากภาพที่ 3 นักเรียนได้เรียนรู้อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation) โดยทำการสำรวจรูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อโดยใช้ไม้บรรทัดวัดความยาวของด้านแต่ละด้าน และใช้ไม้โปรแทร็คเตอร์วัดมุมแต่ละมุม หรือใช้กระดาษลอกลายรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งแล้วเคลื่อนไปทับรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งได้สนิท ซึ่งพบว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ ในแต่ละข้อ มีคู่ที่สมนัยกัน 3 คู่ แต่ละคู่ยาวเท่ากัน และมีมุมคู่ที่สมนัยกัน 3 คู่แต่ละคู่มีขนาดเท่ากัน เช่น ในข้อ 1 นักเรียนสังเกตได้ว่า $AB = DE$, $AC = DF$ ซึ่งโจทย์กำหนดให้ (นักเรียนบางคนตรวจสอบด้วยการวัดความยาวอีกครั้ง) $C\hat{A}B = F\hat{D}E$ ซึ่งโจทย์กำหนดให้ (นักเรียนบางคนตรวจสอบด้วยการวัดขนาดของมุม) $A\hat{B}C = D\hat{E}F$ และ $B\hat{C}A = E\hat{F}D$ จากการสังเกตรูปสามเหลี่ยมในแต่ละข้อ นักเรียนจึงสรุปได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อเท่ากันทุกประการ และจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อมีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน

1 คู่ ซึ่งเป็นมุมคู่ที่อยู่ระหว่างด้านที่ดท่ากัน นักเรียนจึงประมวลคิดแล้วสรุปมโนทัศน์ได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ ซึ่งเป็นความสามารถในการนำความรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการที่ได้เรียนมาแล้วมาสัมพันธ์กับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อมีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ มาสรุปมโนทัศน์ความเท่ากันทุกประการแบบด้าน – มุม – ด้าน

ใบงานที่ 4.2 นักเรียนได้นำความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมแบบด้าน – มุม – ด้าน ไปใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในการเขียนพิสูจน์ โดยนักเรียนได้นำข้อมูลต่างๆ ที่ร่วมกันอภิปรายมาเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลด้วยตนเองก่อน ซึ่งทำให้นักเรียนได้ฝึกวิเคราะห์ ประมวลข้อมูลที่มี แล้วเขียนเรียบเรียงการให้เหตุผลประกอบการเขียนข้อความพิสูจน์ด้วยตนเอง จากนั้นครูให้นักเรียนในกลุ่มย่อยช่วยกันปรับแก้ไขการเขียนพร้อมทั้งให้เหตุผลให้สมบูรณ์มากขึ้น ก่อนร่วมกันอภิปรายการเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลที่ถูกต้อง เพื่อเป็นแนวทางให้นักเรียนสามารถให้เหตุผลได้ประกอบการเขียนพิสูจน์ได้อย่างถูกต้อง พบว่า นักเรียนสามารถนำความรู้ไปใช้อธิบายรูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ ว่าเท่ากันทุกประการหรือไม่ ร่วมกันพิจารณาหาข้อมูลที่สำคัญ หาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่สำคัญเหล่านั้น และนำไปเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลซึ่งไม่คุ้นเคยมาก่อนได้ สังเกตว่าตอนแรกที่ให้นักเรียนนำข้อมูลต่างๆ มาเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลเอง นักเรียนส่วนใหญ่ยังเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ได้บ้างแต่ยังไม่ดีมากนัก แต่เมื่อนักเรียนได้อภิปรายในกลุ่มย่อยทำให้มีโอกาสร่วมกันปรับการเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลให้ดียิ่งขึ้น ส่งผลให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น จากการเรียนรู้ว่าสิ่งที่ตนเข้าใจและเขียนในตอนแรกนั้นสมบูรณ์เพียงพอหรือไม่ และควรต้องปรับแก้ไขในครั้งต่อไปอย่างไร ดังแผนภาพที่ 4

ภาพที่ 4 แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในใบงานที่ 4.2



นักเรียนเขียนข้อมูลที่สำคัญต่างๆ ที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ที่ได้ร่วมกันอภิปรายลงใน “แนวคิดในการพิสูจน์” จากนั้นจึงเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลด้วยตนเองก่อน

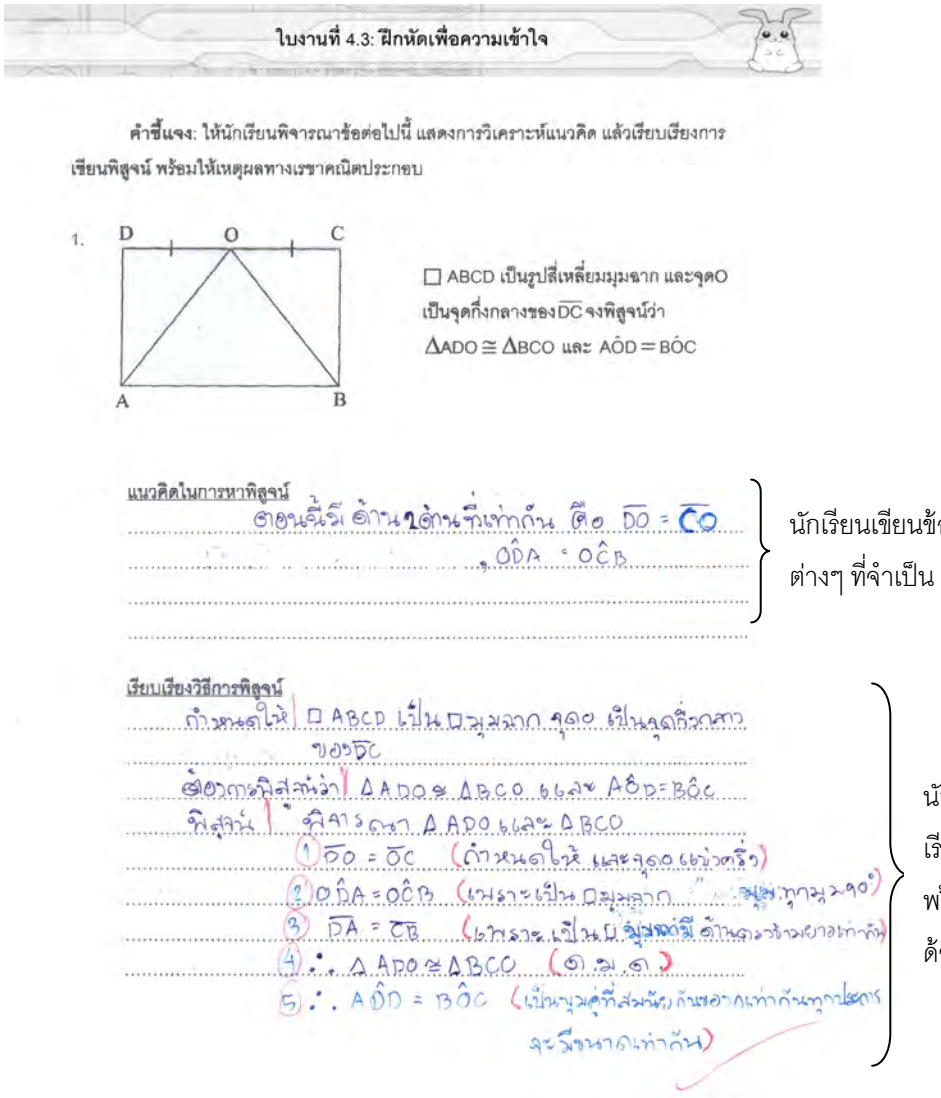
นักเรียนในกลุ่มย่อยร่วมกันอภิปรายและปรับแก้ไขการเขียนพิสูจน์พร้อมทั้งให้เหตุผล

จากภาพที่ 4 นักเรียนเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation) โดยร่วมกันวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้โดยการนำอภิปรายของครู ทำให้นักเรียนทราบว่าการจะสรุปว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ต้องทราบก่อนว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ โดยนักเรียนสังเกตพบว่าโจทย์กำหนดให้ $AO = BO$ และ $CO = DO$ และต้องการให้มุมคู่ที่สมนัยกันที่เป็นมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน นักเรียนจึงคิดทบทวนความรู้ที่จะใช้อ้างอิงซึ่งสามารถระลึกถึงความรู้ที่เคยเรียนมาแล้วได้ว่า $A\hat{O}C = B\hat{O}D$ เนื่องจาก “ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากัน” แล้วสรุปข้อมูลที่วิเคราะห์ได้ลงในแนวคิดในการพิสูจน์ แล้วเขียนพิสูจน์สิ่งที่โจทย์ต้องการลงในเรียบเรียงการพิสูจน์ด้วยตนเอง (ซึ่ง

นักเรียนเขียนใน Sol^{n} 1) จากนั้นนักเรียนจึงได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication) ระหว่างเพื่อนที่นั่งใกล้กันว่าสิ่งที่ตนเองได้เขียนลงไปนั้นสมบูรณ์หรือยัง และแก้ไขในใบงานของตน หากทั้งคู่เห็นว่าสิ่งที่ตนเขียนยังไม่สมบูรณ์ (ซึ่งนักเรียนเขียนใน Sol^{n} 2) ครูให้นักเรียนเขียนชื่อของนักเรียนทั้งคู่ลงในใบงานแล้วส่งให้ครู 1 ชุดเพื่อให้ครูพิจารณาผลงานที่นักเรียนช่วยกันปรับแก้ไข และนักเรียนเก็บ 1 ชุดที่เหลือไว้ทำการตรวจสอบเมื่อครูนำอภิปรายเฉลยใบงานพร้อมกัน จากภาพจะเห็นว่านักเรียนได้อภิปรายปรับการเขียนของตนเองให้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น (ใน Sol^{n} 2) ก่อนมีการอภิปรายร่วมกันทั้งห้องเพื่อเฉลย แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจมากขึ้นเนื่องจากสามารถขยายความสิ่งที่ตนเองเข้าใจจากการพูดคุยแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน จากนั้นครูตรวจสอบใบงานที่นักเรียนแต่ละคู่ส่งอย่างคร่าวๆ เพื่อดูข้อบกพร่องที่ต้องเน้นย้ำแก่นักเรียนในการนำอภิปรายเฉลยแล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขใบงานที่นักเรียนได้เก็บไว้

ใบงานที่ 4.3 นักเรียนได้ฝึกการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองเพื่อให้เกิดความชำนาญ พบว่า นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์ของความเท่ากันทุกประการแบบด้าน – มุม – ด้าน จึงทำให้สามารถวิเคราะห์ว่าสิ่งที่โจทย์ให้พิสูจน์จะต้องมีข้อมูลที่จำเป็นอะไรบ้าง และโจทย์ให้อะไรมาแล้วบ้าง ควรเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ และนำความรู้หรือทฤษฎีบทที่ได้เรียนรู้มาแล้วไปใช้อ้างเหตุผลอย่างไร ซึ่งในใบงานนี้นักเรียนได้สังเกตและเกิดการเรียนรู้จากในงานที่ 4.2 มาแล้ว ทำให้สามารถประมวลความรู้ที่เคยเรียนรู้มาแล้ว คิดวิเคราะห์ แล้วนำมาเขียนพิสูจน์ ซึ่งนักเรียนส่วนใหญ่สามารถเรียบเรียงการเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลประกอบด้วยตนเองได้ดี ส่งผลให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น ดังแผนภาพที่ 5

ภาพที่ 5 แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในใบงานที่ 4.3



จากภาพที่ 5 นักเรียนเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ (Free Orientation) โดยการวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์และสิ่งที่กำหนดให้ แล้วเขียนข้อมูลต่างๆ ลงในแนวคิดในการพิสูจน์ด้วยตนเอง จะเห็นได้ว่านักเรียนทราบว่าจะต้องพิสูจน์ $\Delta ADO \cong \Delta BCO$ โดยหาว่าจากโจทย์กำหนดให้มีด้านและมุมคู่ใดที่เท่ากันบ้าง นั่นคือ นักเรียนทราบว่า $DO = CO$ และ $O\hat{D}A \cong O\hat{C}B$ จากนั้นจึงเรียบเรียงการพิสูจน์ จะเห็นได้ว่านักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน และสังเกตการเขียนพิสูจน์จากการเรียนรู้ที่ได้จากใบงานที่ 4.2 นำมาประมวลความคิด และวิเคราะห์การเขียนพิสูจน์ จนสามารถการนำทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตมาอธิบายข้อความพิสูจน์ด้วยตนเองได้ดีขึ้น และส่วนใหญ่สามารถพิจารณาความสัมพันธ์ได้ว่า $A\hat{O}C = B\hat{O}C$ เพราะเป็นมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน แต่ก็มีบางส่วนให้เหตุผลไม่ได้ว่า $A\hat{O}C = B\hat{O}C$ เนื่องจากเป็นโจทย์ที่แปลกกว่าที่เคยทำมา

1.2 การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง

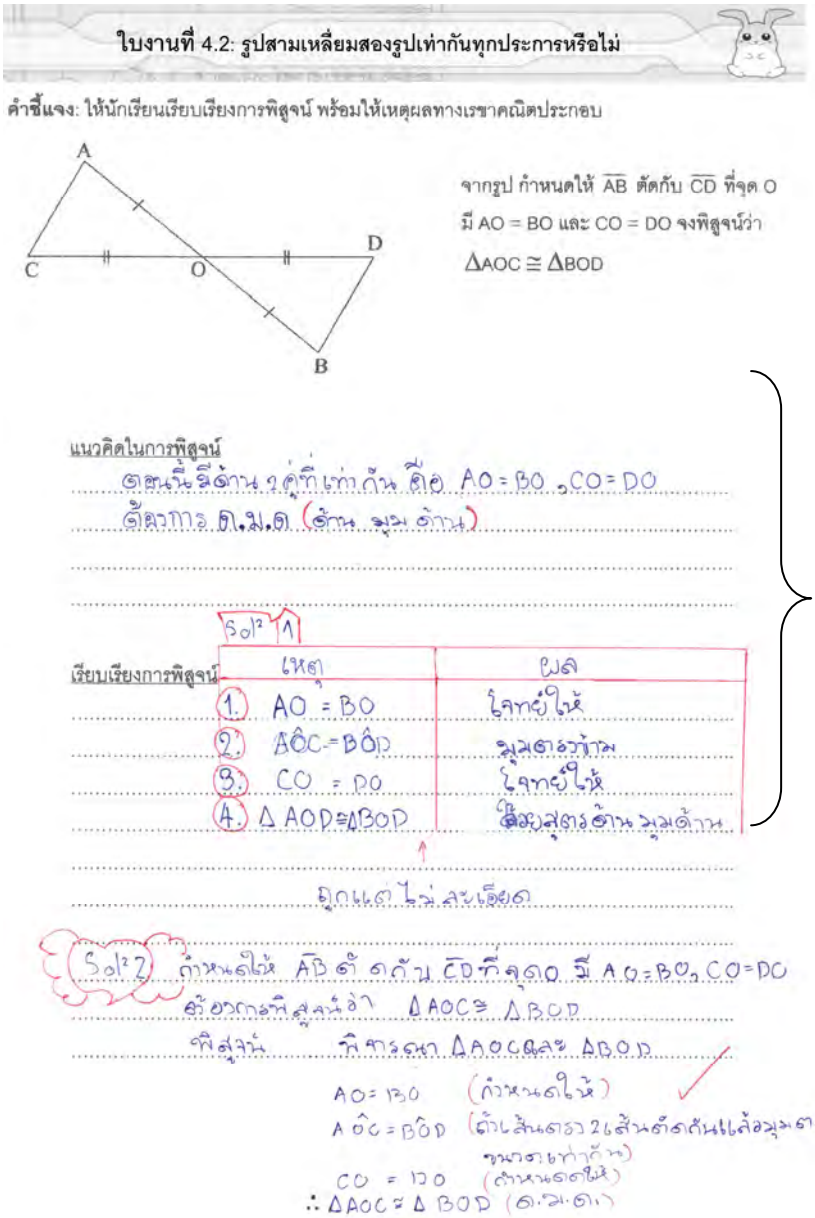
จากการศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ การทำใบงาน พบว่า ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีส่งผลให้นักเรียนส่วนใหญ่มีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ดีขึ้น สังเกตได้จากนักเรียนสามารถเขียนเหตุผลทางเรขาคณิตประกอบข้อความพิสูจน์ได้อย่างชำนาญก่อนนักเรียนในกลุ่มควบคุม และเกิดความเข้าใจการนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ มาใช้ประกอบในการให้เหตุผลในการเขียนพิสูจน์ และสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ มาใช้ประกอบในการให้เหตุผลในการเขียนพิสูจน์ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน ครูเริ่มต้นบทเรียนโดยการทบทวนความรู้เดิมโดยใช้สื่อการเรียนรู้ประกอบการใช้คำถามเพื่อเข้าสู่บทเรียน (Information) ซึ่งเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจ คิดหาคำตอบที่ครูถาม จากนั้นจึงแจ้งหัวข้อที่จะเรียนและวัตถุประสงค์การเรียน ครูดำเนินการสอนโดยใช้ใบงานประกอบการสอน เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation) นักเรียนในกลุ่มทดลองได้ศึกษาตามใบงานที่ได้รับมอบหมาย โดยใบงานที่ 4.1 นักเรียนได้สำรวจเพื่อให้เข้าใจมโนทัศน์เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการแบบด้าน – มุม – ด้าน ใบงานที่ 4.2 นักเรียนได้เรียนรู้การให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ ทั้งนี้ยังได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication) โดยร่วมกันอภิปรายทั้งภายในกลุ่มย่อย และอภิปรายร่วมกันทั้งห้องเพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ถูกต้องและตรงกัน จากนั้นนักเรียนจึงเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ (Free Orientation) โดยทำใบงานที่ 4.3 นักเรียนได้ฝึกการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองเพื่อให้เกิดความชำนาญ ก่อนที่นักเรียนสรุปรวม (Integration) เนื้อหาที่ได้เรียนรู้ทั้งหมด เพื่อเป็นการประมวลความคิดทั้งหมดในการเรียนในแต่ละคาบ ทำให้นักเรียนได้คิดเกี่ยวกับสิ่งที่ได้เรียนผ่านมาและสามารถอธิบายได้โดยอาศัยความเข้าใจของนักเรียนเองทำให้เห็นภาพรวมของการทำงานของตนเอง ในการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ดังรายละเอียดของการเรียนรู้ในแต่ละใบงานดังนี้

ใบงานที่ 4.2 นักเรียนได้นำความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมแบบด้าน – มุม – ด้าน ไปใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในการเขียนพิสูจน์ โดยนักเรียนได้นำข้อมูลต่างๆ ที่ร่วมกันอภิปรายมาเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลด้วยตนเองก่อน จากนั้นครูให้นักเรียนในกลุ่มย่อยช่วยกันปรับแก้ไขการเขียนพร้อมทั้งให้เหตุผลให้สมบูรณ์มากขึ้น ก่อนร่วมกันอภิปราย

การเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลที่ถูกต้อง เพื่อเป็นแนวทางให้นักเรียนสามารถให้เหตุผลได้ประกอบการเขียนพิสูจน์ได้อย่างถูกต้อง พบว่า นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่ได้เรียนรู้มาใช้ประกอบในการให้เหตุผลในการเขียนพิสูจน์ได้ สังเกตว่าตอนแรกที่ให้นักเรียนนำข้อมูลต่างๆ มาเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลเอง นักเรียนส่วนใหญ่ยังเขียนเรียบเรียงได้บ้างแต่ยังไม่ดีมาก แต่เมื่อนักเรียนได้อภิปรายในกลุ่มย่อยทำให้ได้ร่วมกันปรับการเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลให้ดียิ่งขึ้น และในคาบต่อๆ ไปในขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation) นักเรียนสามารถสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่ได้เรียนรู้มาใช้ประกอบในการให้เหตุผลในการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองได้ดีและค่อนข้างสมบูรณ์มากขึ้น และในขั้นการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication) ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนที่เข้าใจการนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่ได้เรียนรู้มาใช้ประกอบในการให้เหตุผลในการเขียนพิสูจน์แล้วช่วยอธิบายแก่เพื่อนนักเรียนที่ยังไม่ค่อยใจ เมื่อครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายสรุปใบงานจึงทำให้นักเรียนได้ตรวจสอบและย้ำความเข้าใจอีกครั้ง ซึ่งส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น ดังแผนภาพที่ 6

ภาพที่ 6 แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในใบงานที่ 4.2



นักเรียนเขียนข้อมูลที่สำคัญต่างๆ ที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งที่ต้องกการพิสูจน์ที่ได้ร่วมกันอภิปรายลงใน “แนวคิดในการพิสูจน์” จากนั้นจึงเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลด้วยตนเองก่อน

นักเรียนในกลุ่มย่อยร่วมกันอภิปรายและปรับแก้ไขการเขียนพิสูจน์พร้อมทั้งให้เหตุผล

จากภาพที่ 6 นักเรียนเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation) โดยร่วมกันวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้โดยการนำอภิปรายของครู ทำให้นักเรียนทราบว่าการจะสรุปว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ต้องทราบก่อนว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ โดยนักเรียนสังเกตพบว่าโจทย์กำหนดให้ $AO = BO$ และ $CO = DO$ และต้องการให้มุมคู่ที่สมนัยกันที่เป็นมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน ซึ่งนักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่ได้เรียนรู้มาใช้ประกอบในการให้เหตุผลในการเขียนพิสูจน์ได้นั่นคือ นักเรียนทราบว่า“ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากัน” จึงได้ว่า $A\hat{O}C = B\hat{O}D$ แล้วสรุปข้อมูลที่

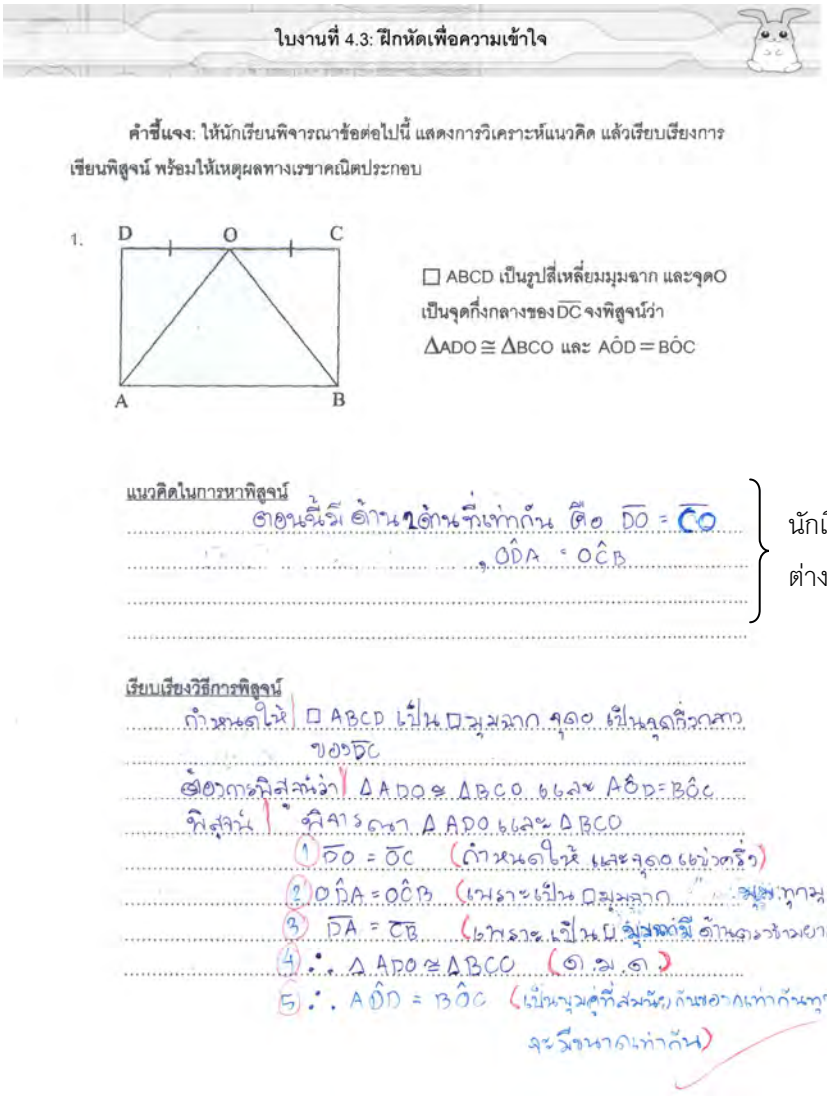
วิเคราะห์ได้ลงในแนวคิดในการพิสูจน์ แล้วเขียนพิสูจน์สิ่งที่โจทย์ต้องการลงในเรียบเรียงการพิสูจน์ด้วยตนเอง (ซึ่งนักเรียนเขียนใน Sol^n 1 จะเห็นว่าการเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ที่นักเรียนเขียนด้วยตนเองจะเป็นเหตุผลสั้นๆ และภาษาที่ใช้เขียนยังไม่เป็นสมบูรณ์มากนัก) จากนั้นให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication) ระหว่างเพื่อนที่นั่งใกล้กันว่าสิ่งที่ตนเองได้เขียนลงไปนั้นสมบูรณ์หรือยัง และแก้ไขในใบงานของตนหากทั้งคู่เห็นว่าสิ่งที่ตนเขียนยังไม่สมบูรณ์ (ซึ่งนักเรียนเขียนใน Sol^n 2) ครูให้นักเรียนเขียนชื่อของนักเรียนทั้งคู่ลงในใบงานแล้วส่งให้ครู 1 ชุดเพื่อให้ครูพิจารณาผลงานที่นักเรียนช่วยกันปรับแก้ไข และนักเรียนเก็บ 1 ชุดที่เหลือไว้ทำการตรวจสอบเมื่อครูนำอภิปรายเฉลยใบงานพร้อมกัน จากภาพจะเห็นว่านักเรียนร่วมกันอภิปรายและปรับการให้เหตุผลประกอบข้อความพิสูจน์ได้ดีมากขึ้น และค่อนข้างเป็นภาษาทางคณิตศาสตร์ยิ่งขึ้นก่อนมีการอภิปรายร่วมกันทั้งห้องเพื่อเฉลย นั่นแสดงว่านักเรียนสามารถให้เหตุผลทางเรขาคณิตได้ดีขึ้นเนื่องจากสามารถเขียนอธิบายเหตุผลได้ชัดเจนมากยิ่งขึ้นจากการพูดคุยแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน จากนั้นครูตรวจสอบใบงานที่นักเรียนแต่ละคู่ส่งอย่างคร่าวๆ เพื่อดูข้อบกพร่องที่ต้องเน้นย้ำแก่นักเรียนในการนำอภิปรายเฉลย แล้วให้นักเรียนตรวจและแก้ไขใบงานที่นักเรียนได้เก็บไว้

โดยภาพรวม จะเห็นว่านักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่ได้เรียนรู้มาใช้ประกอบในการให้เหตุผลในการเขียนพิสูจน์ได้ ตลอดจนประมวลความคิด และวิเคราะห์การเขียนพิสูจน์ และให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองได้ แต่ยังไม่ดีมาก และได้รับการพัฒนาการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้นเมื่อได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็น และอภิปรายร่วมกัน

ใบงานที่ 4.3 นักเรียนได้ฝึกการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองเพื่อให้เกิดความชำนาญ พบว่า นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่ได้เรียนรู้มาใช้ในการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ได้ สังเกตจากการที่นักเรียนเข้าใจข้อความหรือโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ โดยการพิจารณาว่าโจทย์กำหนดอะไรบ้างและต้องการให้พิสูจน์อะไร สามารถวิเคราะห์ย้อนกลับจากผลหรือสิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์ไปหาเหตุหรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แล้วเขียนข้อมูลลงในช่องแนวคิดในการพิสูจน์ โดยพิจารณาว่าในแต่ละขั้นที่เป็นผลย่อย ๆ ก่อนผลสุดท้ายนั้นต้องเกิดจากเหตุอันใดบ้างและจากเหตุนั้นต้องอาศัยบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทหรือสมบัติทางคณิตศาสตร์ใดบ้างมาประกอบเพื่ออ้างอิงไปสู่ผลย่อย ๆ เหล่านั้น ทำเช่นนี้เรื่อย ๆ จนกว่าผลย่อย ๆ นั้นมาจากเหตุที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ซึ่งนำไปเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อม

ให้เหตุผลควบคู่ นักเรียนส่วนใหญ่สามารถให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองได้ดี ส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ดีขึ้น ดังแผนภาพที่ 7

ภาพที่ 7 แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มทดลองในใบงานที่ 4.3



จากภาพที่ 7 นักเรียนเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ (Free Orientation) โดยฝึกการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเอง วิเคราะห์สิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์และโจทย์กำหนดให้ ซึ่งนักเรียนทราบว่าการจะสรุปว่า $A\hat{O}D = B\hat{O}C$ ต้องสรุปให้ได้ก่อนว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ($\Delta ADO \cong \Delta BCO$) โดยต้องทราบก่อนว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ นั่นคือต้องมี $DO = CO$ $AD = BC$ และ $O\hat{D}A \cong O\hat{C}B$ จากการสังเกตนักเรียนพบว่าโจทย์กำหนดให้ $DO = CO$ และ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้นจึงได้ว่า $AD = BC$ และ $O\hat{D}A \cong O\hat{C}B$ นั่นแสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิต ที่ได้เรียนรู้มาหา

ความสัมพันธ์ของด้านและมุมแต่ละคู่ที่ต้องการได้ นั่นคือ นักเรียนทราบว่า “รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน และมีมุมทุกมุมมีขนาด 90 องศา” จากนั้นจึงสรุปข้อมูลที่วิเคราะห์ได้ลงในแนวคิดในการพิสูจน์ แล้วให้เหตุผลประกอบการเขียนข้อความพิสูจน์พิสูจน์สิ่งที่โจทย์ต้องการลงในเรียบเรียงการพิสูจน์ด้วยตนเอง แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่ได้เรียนรู้มาใช้ประกอบในการให้เหตุผลในการเขียนพิสูจน์ได้ดีขึ้น สามารถประมวลความคิด และวิเคราะห์การเขียนพิสูจน์ และให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองได้ดีขึ้น

1.3 พฤติกรรมอื่น ๆ ของนักเรียนกลุ่มทดลอง

เมื่อนักเรียนได้เรียนโดยใช้โมเดลของแวนฮีลี นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความร่วมมือดี มีความกระตือรือร้นในการเรียนการสอน เนื่องจากได้ทำกิจกรรมจนเกิดองค์ความรู้ด้วยตนเอง แต่มีส่วนน้อยที่ไม่ค่อยให้ความร่วมมือเนื่องจากไม่คุ้นเคยกับการคิดวิเคราะห์ด้วยตนเอง คุ้นเคยกับการสอนแบบบรรยายมากกว่าการสอนแบบให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติเอง ทำให้การดำเนินกิจกรรมเป็นไปอย่างล่าช้าบ้าง แต่เมื่อได้เรียนโดยใช้ขั้นตอนการสอนโดยโมเดลของแวนฮีลีไปเป็นระยะหนึ่งนักเรียนจึงมีความคุ้นเคย สามารถคิดวิเคราะห์ เรียงเรียงการพิสูจน์พร้อมการให้เหตุผลได้ และให้ความร่วมมือเป็นอย่างดี ทำให้ใช้เวลาในการทำกิจกรรมได้เร็วขึ้น

นอกจากนี้การให้นักเรียนได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นในกลุ่มย่อยทำให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นและร่วมกันอภิปรายอย่างเต็มที่ โดยใช้ความรู้และเหตุผล ทั้งนี้ยังมีการร่วมกันอภิปรายหาข้อสรุปที่ถูกต้อง จนทำให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอดเกี่ยวกับลำดับขั้นการคิดวิเคราะห์โจทย์ จนสามารถเรียบเรียงการเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผล ตลอดจนการแก้ปัญหาต่างๆ ได้

จากการสังเกตโดยภาพรวม นักเรียนมีความสนใจและให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมแต่ละกิจกรรมเป็นอย่างดี ภายในกลุ่มย่อยได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็น ร่วมกันอภิปรายจนเกิดความเข้าใจภายในกลุ่ม จากนั้นจึงได้มีการทบทวนความเข้าใจโดยร่วมกันอภิปรายภายในชั้นเรียนเพื่อหาข้อสรุปร่วมกัน

2. พฤติกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มควบคุม

การจัดการเรียนเรียนรู้ในวิชาคณิตศาสตร์ของครูสำหรับกลุ่มควบคุม ครูใช้วิธีการสอนตามแนวคู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เอกสารที่ใช้ในการประกอบการเรียนการสอนส่วนใหญ่มีลักษณะเป็นใบงาน ใบกิจกรรม และแบบฝึกหัดเพิ่มเติม ส่วนการบ้านที่ให้นักเรียนกลับไปฝึกทักษะก็ยึดตามหนังสือของสสวท. เช่นเดียวกับกลุ่มทดลอง ซึ่ง

นักเรียนมีการพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตดังต่อไปนี้

2.1 การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มควบคุม

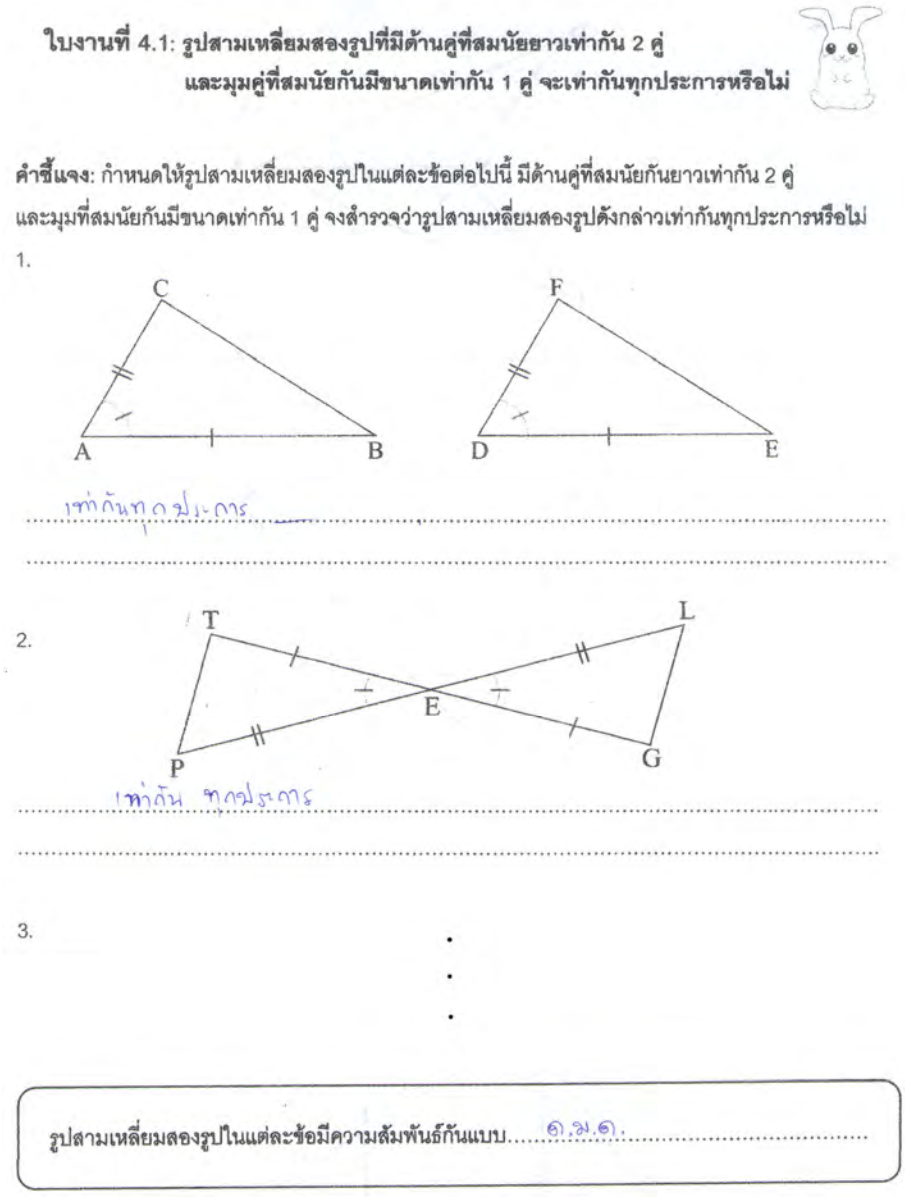
จากการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ การทำใบงาน พบว่า ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ นักเรียนส่วนใหญ่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ดี แต่ก็มีนักเรียนบางส่วนที่ใช้เวลาในการเรียนรู้ค่อนข้างมากกว่าจะเข้าใจมโนทัศน์ของความเท่ากันทุกประการ และสามารถนำความรู้ไปใช้อธิบายรูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ ว่าเท่ากันทุกประการหรือไม่ เพราะเหตุใดได้ นำความรู้หรือทฤษฎีบทที่ได้เรียนรู้มาแล้วไปแก้ปัญหาใหม่ได้ ตลอดจนพิจารณาหาข้อมูลที่สำคัญ หาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่สำคัญเหล่านั้น เพื่อนำไปแก้ปัญหาที่ที่ไม่คุ้นเคยมาก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน ครูเริ่มต้นบทเรียนโดยการทบทวนความรู้เดิมโดยใช้สื่อการเรียนรู้ประกอบการใช้คำถามเพื่อเข้าสู่บทเรียน ซึ่งเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจ คิดหาคำตอบที่ครูถาม จากนั้นจึงแจ้งหัวข้อที่จะเรียนและวัตถุประสงค์การเรียน ครูดำเนินการสอนโดยใช้ใบงานประกอบการสอน เพื่อให้นักเรียนเห็นแนวทางในการเรียนรู้ และใช้สื่อการเรียนรู้ เช่นแผนภาพต่างๆ ประกอบการสอนบ้าง โดยนักเรียนในกลุ่มควบคุมได้ศึกษาตามใบงานที่ได้รับมอบหมาย โดยใบงานที่ 4.1 นักเรียนได้สำรวจเพื่อให้เข้าใจมโนทัศน์เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน – มุม – ด้าน ใบงานที่ 4.2 นักเรียนได้เรียนรู้การให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ ใบงานที่ 4.3 นักเรียนได้ฝึกการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ ซึ่งมีรายละเอียดของการเรียนรู้ในแต่ละใบงานดังนี้

ใบงานที่ 4.1 นักเรียนได้สำรวจรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน โดยใช้กระดาษลอกลาย ไม้บรรทัด หรือไม้โปรแทคเตอร์ จนได้ข้อสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการหรือไม่ ซึ่งพบว่านักเรียนได้สำรวจรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน ทำให้นักเรียนได้สังเกต วิเคราะห์ และประมวลความคิดด้วยตนเอง เกิดการเรียนรู้และก่อให้เกิดความเข้าใจมโนทัศน์ จนสามารถสรุปมโนทัศน์ของความเท่ากันทุกประการแบบด้าน – มุม – ด้าน ได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น ดังแสดงในภาพที่ 8 แต่ก็มีบางส่วนที่ยังไม่

สามารถสรุปได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ นั่นแสดงให้เห็นว่ามีนักเรียนบางส่วนยังไม่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น ดังจะเห็นได้จากภาพที่ 9

ภาพที่ 8 แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มควบคุมในใบงานที่ 4.1



ใบงานที่ 4.1: รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านคู่ที่สมนัยยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จะเท่ากันทุกประการหรือไม่

คำชี้แจง: กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จงสำรวจว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปดังกล่าวเท่ากันทุกประการหรือไม่

1.

เท่ากันทุกประการ

2.

เท่ากัน ทุกประการ

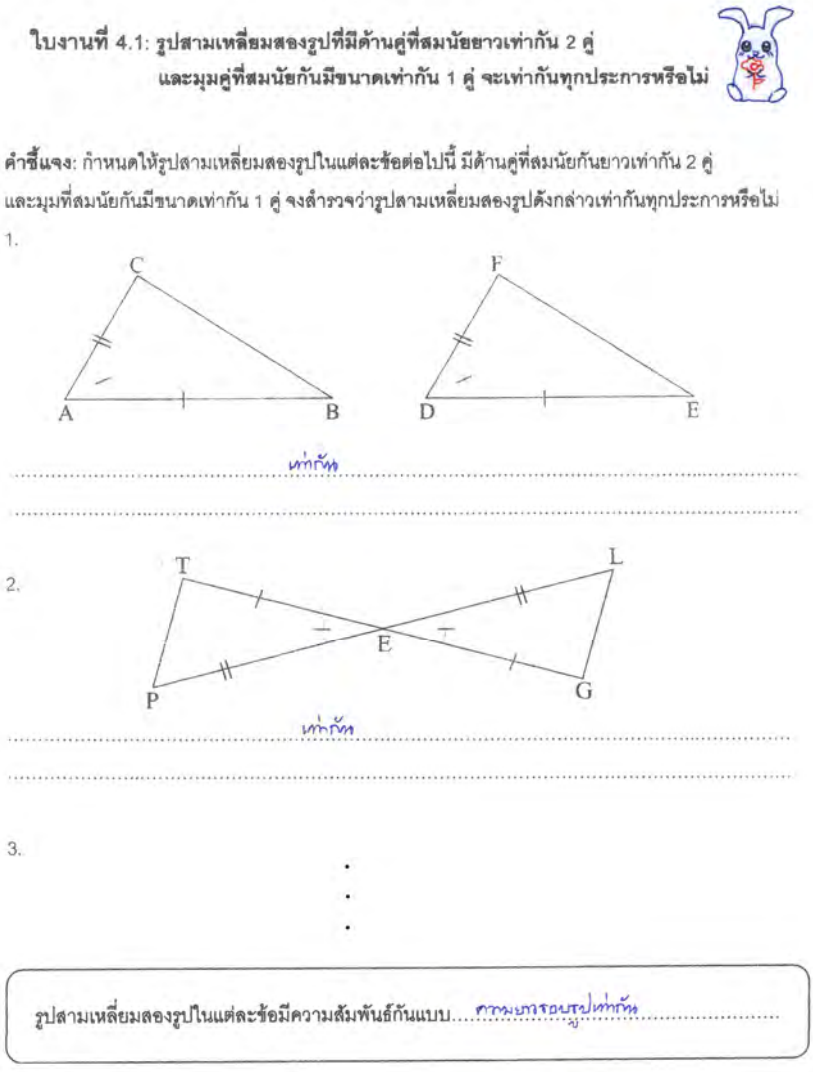
3.

รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อมีความสัมพันธ์กันแบบ ด.ม.ด.

จากภาพที่ 8 นักเรียนได้สำรวจรูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อโดยการใช้ไม้บรรทัด ไม้โปรแทร็คเตอร์ หรือกระดาษลอกลาย และสังเกตว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จนได้ข้อค้นพบว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ ในแต่ละข้อ มีด้านคู่ที่สมนัยกัน 3 คู่ แต่ละคู่ยาวเท่ากัน และมีมุมคู่ที่สมนัยกัน 3 คู่แต่ละคู่มีขนาดเท่ากัน นั่นคือ มี $AB = DE$, $AC = DF$ ซึ่งโจทย์กำหนดให้ (นักเรียนบางคนตรวจสอบด้วยการวัดความยาวอีกครั้ง) $C\hat{A}B = F\hat{D}E$ ซึ่งโจทย์กำหนดให้ (นักเรียนบางคนตรวจสอบด้วยการวัดขนาดของมุม) $A\hat{B}C = D\hat{E}F$ และ $B\hat{C}A = E\hat{F}D$ นักเรียนจึงทราบว่ารูป

สามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ และจากที่โจทย์กำหนดเงื่อนไขให้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อมีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ นักเรียนจึงสรุปมโนทัศน์ได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อมีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน และประมวลความคิดได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน จะเท่ากันทุกประการ

ภาพที่ 9 แสดงการตอบคำถามในใบงานที่ 4.1 ของนักเรียนกลุ่มควบคุมที่ยังไม่สามารถสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ



ใบงานที่ 4.1: รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านคู่ที่สมนัยยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จะเท่ากันทุกประการหรือไม่

คำชี้แจง: กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จงสำรวจว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปดังกล่าวเท่ากันทุกประการหรือไม่

1.

เท่ากัน

2.

เท่ากัน

3.

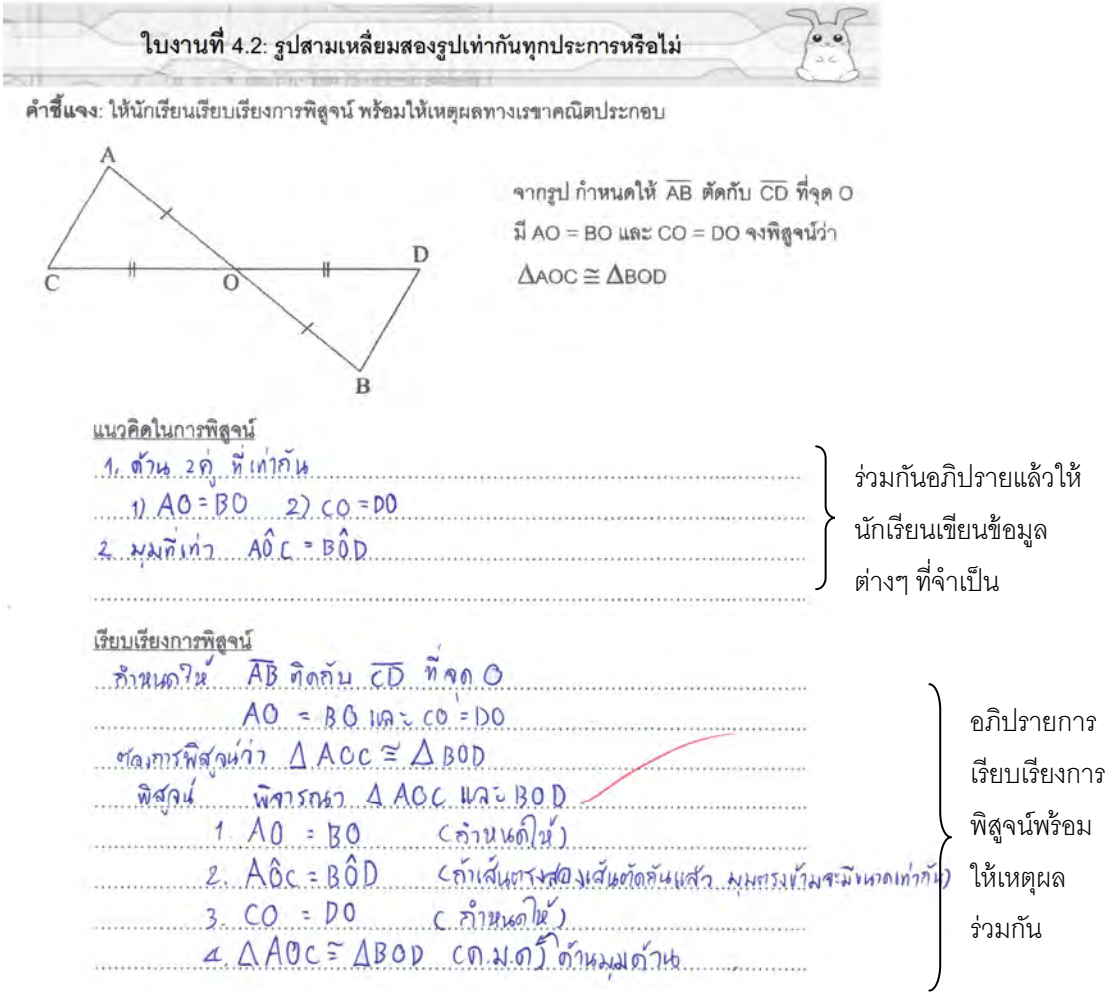
รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อมีความสัมพันธ์กันแบบ ความยาวรอบรูปเท่ากัน

จากภาพที่ 9 แสดงให้เห็นว่านักเรียนบางส่วนที่ได้สำรวจรูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อโดยการใช้ไม้บรรทัด ไม้โปรแทร็คเตอร์ หรือกระดาษลอกลายเช่นเดียวกับนักเรียนคนอื่น นักเรียนสังเกตได้ว่าเมื่อลอกลายรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งแล้วเคลื่อนไปทับรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งได้ จึงสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากัน แต่ยังไม่ค้นพบมโนทัศน์ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่โจทย์กำหนดเงื่อนไขให้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อมีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่

สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ เท่ากันทุกประการ สังเกตได้จากการเติมคำว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูป ในแต่ละข้อมีความสัมพันธ์กันแบบใด นักเรียนตอบว่าความยาวรอบรูปเท่ากันซึ่งไม่ใช่คำตอบที่ครูคาดหวังให้นักเรียนพบข้อสังกตและสรุปความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากัน

ใบงานที่ 4.2 นักเรียนได้นำความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมแบบด้าน – มุม – ด้าน ไปใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในการเขียนพิสูจน์ โดยนักเรียนได้นำข้อมูลต่างๆ ที่ร่วมกันอภิปรายมาเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลด้วย จากนั้นร่วมกันอภิปรายการเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลที่ถูกต้อง เพื่อเป็นแนวทางให้นักเรียนสามารถให้เหตุผลได้ประกอบการเขียนพิสูจน์ได้อย่างถูกต้อง พบว่า นักเรียนสามารถนำความรู้ไปใช้อธิบายรูปสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ ว่าเท่ากันทุกประการหรือไม่ ร่วมกันพิจารณาหาข้อมูลที่สำคัญ หาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่สำคัญเหล่านั้น และนำไปเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลซึ่งไม่คุ้นเคยมาก่อนได้ สังเกตว่าตอนแรกที่ให้นักเรียนนำข้อมูลต่างๆ มาเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลเอง นักเรียนบางส่วนเขียนเรียบเรียงได้ แต่นักเรียนส่วนมากยังไม่สามารถนำความรู้ กฎ หลักการ ข้อเท็จจริง ทฤษฎีบท ฯลฯ ที่ได้เรียนรู้มาแล้วไปพิสูจน์สิ่งที่โจทย์ต้องการได้ ยังเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลไม่ได้ จึงต้องร่วมกันอภิปราย ใช้การถามตอบและเรียบเรียงการพิสูจน์ไปพร้อมๆ กันจนสมบูรณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนบางส่วนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น แต่ก็มีนักเรียนส่วนมากมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ยังไม่ดีขึ้น ต้องรอให้ครูชี้แนะ ดังแผนภาพที่ 10

ภาพที่ 10 แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มควบคุมในใบงานที่ 4.2

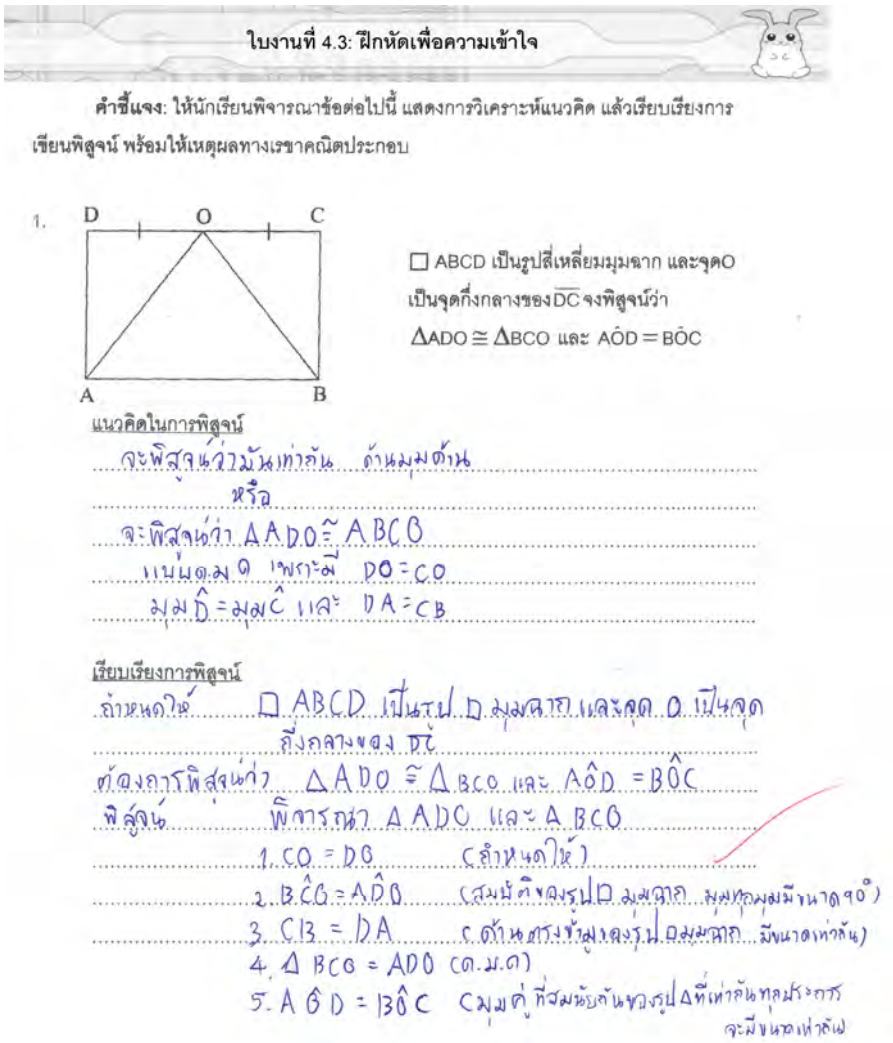


จากภาพที่ 10 นักเรียนร่วมกันวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้โดยการนำอภิปรายของครู ซึ่งทำให้ทราบว่าการจะสรุปว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ต้องทราบก่อนว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ โดยนักเรียนสังเกตพบว่าโจทย์กำหนดให้ $AO = BO$ และ $CO = DO$ และต้องการให้มุมคู่ที่สมนัยกันที่เป็นมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน มุมคู่นั้นคือ $A\hat{O}C = B\hat{O}D$ ด้วยความสัมพันธ์ที่ว่า “ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกันแล้ว มุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นจะมีขนาดท่ากัน” จากนั้นนักเรียนจึงสรุปข้อมูลที่วิเคราะห์ได้ลงในแนวคิดในการพิสูจน์ แล้วเขียนพิสูจน์สิ่งที่โจทย์ต้องการลงในเรียบเรียงการพิสูจน์ด้วยตนเอง จากการสังเกตการทำใบงานของนักเรียนพบว่ามีนักเรียนบางส่วนที่พยามเรียบเรียงการพิสูจน์ข้อมูลที่อภิปรายร่วมกัน โดยสามารถบอกได้ว่าโจทย์กำหนดอะไร ต้องการพิสูจน์อะไร และเขียนข้อความพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลประกอบได้บ้างแต่ยังไม่สมบูรณ์ แต่นักเรียนส่วนมากยังไม่สามารถเริ่มการเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ได้แม้ว่าครูจะพยามชี้แนะให้เห็นว่าต้องเอาข้อมูลที่สรุปไว้ในแนวคิดการพิสูจน์ซึ่งได้ร่วมกันอภิปรายไว้แล้วมาเรียบเรียง เมื่อหมดเวลาที่ได้กำหนด ครูจึงนำอภิปรายการเขียนเรียบเรียงการ

พิสูจน์โดยให้นักเรียนช่วยตอบคำถามไปพร้อมๆ กับการที่ครูเขียนสรุปลงบนกระดานจนเสร็จสมบูรณ์

ใบงานที่ 4.3 นักเรียนได้ฝึกการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองเพื่อให้เกิดความชำนาญ พบว่า นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์ของความเท่ากันทุกประการแบบด้าน – มุม – ด้าน จึงทำให้สามารถวิเคราะห์ว่าสิ่งที่โจทย์ให้พิสูจน์จะต้องมีข้อมูลที่จำเป็นอะไรบ้าง และโจทย์ให้อะไรมาแล้วบ้าง ควรเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ และนำความรู้หรือทฤษฎีบทที่ได้เรียนรู้มาแล้วไปใช้อ้างเหตุผลอย่างไร นักเรียนบางส่วนสามารถให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองได้ดีเนื่องจากเกิดการเรียนรู้ตั้งแต่กิจกรรมในใบงานที่ 4.2 แต่ก็มีบางส่วนที่นำข้อมูลเหล่านั้นไปเรียบเรียงการเขียนพิสูจน์พร้อมทั้งให้เหตุผลไม่ได้ จึงต้องอภิปรายร่วมกันและเขียนเขียนพิสูจน์พร้อมทั้งให้เหตุผลไปพร้อมๆ กันในข้อ 1 และให้นักเรียนฝึกการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองในข้อ 2 ซึ่งส่วนใหญ่ก็ให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ได้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนบางส่วนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น สามารถนำความรู้ กฎ หลักการ ข้อเท็จจริง ทฤษฎีบท ฯลฯ ที่ได้เรียนรู้มาแล้วไปแก้ปัญหาได้เอง ดังแผนภาพที่ 11 แต่ก็มีนักเรียนบางส่วนที่ไม่สามารถนำความรู้ กฎ หลักการ ข้อเท็จจริง ทฤษฎีบท ฯลฯ ที่ได้เรียนรู้มาแล้วให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองได้จนสมบูรณ์ในข้อ 2 นั่นก็แสดงให้เห็นว่านักเรียนบางส่วนที่ยังไม่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น ดังแสดงในภาพที่ 12

ภาพที่ 11 แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มควบคุมในใบงานที่ 4.3



ใบงานที่ 4.3: ฝึกหัดเพื่อความเข้าใจ

คำชี้แจง: ให้นักเรียนพิจารณาข้อต่อไปนี้ แสดงการวิเคราะห์แนวคิด แล้วเรียบเรียงการเขียนพิสูจน์ พร้อมให้เหตุผลทางเรขาคณิตประกอบ

1. D O C

A B

□ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และจุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$ จงพิสูจน์ว่า $\Delta ADO \cong \Delta BCO$ และ $A\hat{O}D = B\hat{O}C$

แนวคิดในการพิสูจน์

จะพิสูจน์ว่ามันเท่ากัน ด้านมุมด้าน

หรือ

จะพิสูจน์ว่า $\Delta ADO \cong \Delta BCO$

เนื่องจาก เพราะว่า $DO = CO$

มุม $\hat{D}$ = มุม $\hat{C}$ และ $DA = CB$

เรียบเรียงการพิสูจน์

กำหนดให้ □ ABCD เป็นรูป D มุมฉาก และจุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\Delta ADO \cong \Delta BCO$ และ $A\hat{O}D = B\hat{O}C$

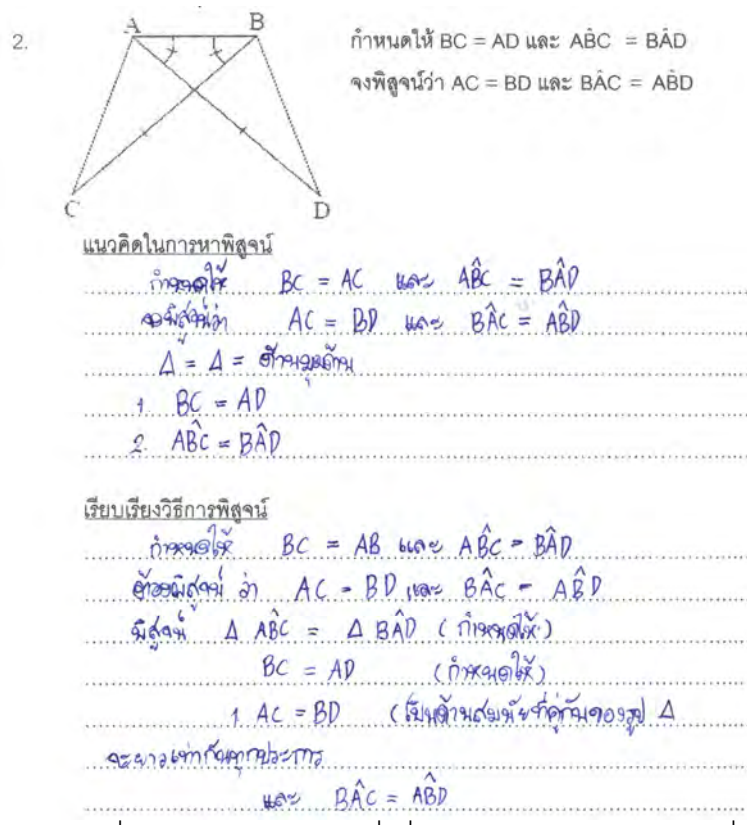
พิสูจน์ พิจารณา ΔADO และ ΔBCO

1. $CO = DO$ (กำหนดให้)
2. $B\hat{C}O = A\hat{D}O$ (สมบัติของรูป □ มุมฉาก มุมทุกมุมมีขนาด 90°)
3. $CB = DA$ (ด้านตรงข้ามมุมของรูป □ มุมฉาก มีขนาดเท่ากัน)
4. $\Delta BCO = ADO$ (ด.ม.ด)
5. $A\hat{O}D = B\hat{O}C$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูป Δ ที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

ภาพที่ 11 นักเรียนวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์และสิ่งที่กำหนดให้ แล้วเขียนข้อมูลต่างๆ ลงในแนวคิดในการพิสูจน์ จะเห็นได้ว่านักเรียนทราบว่าจะต้องพิสูจน์ $\Delta ADO \cong \Delta BCO$ แบบด้าน – มุม – ด้าน ก่อนจะสรุปว่า $A\hat{O}C = B\hat{O}C$ เพราะเป็นมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน ซึ่งนักเรียนพิจารณาโจทย์แล้วพบว่ามี $DO = CO$, $O\hat{D}A \cong O\hat{C}B$ และ $DA = CB$ จากนั้นจึงเรียบเรียงการพิสูจน์ จะเห็นได้ว่านักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กัน และสังเกตการเขียนพิสูจน์จากการเรียนรู้ที่ได้จากใบงานที่ 4.2 นำมาประมวลความคิด และวิเคราะห์การเขียนพิสูจน์ จนสามารถการนำทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตมาอธิบายข้อความพิสูจน์ด้วยตนเองได้ดีขึ้น แสดงให้เห็นว่านักเรียนบางส่วนสังเกต และเกิดการเรียนรู้จากการทำใบงานที่ 4.2 สามารถนำความรู้ที่ได้เรียนรู้มาแล้วมาวิเคราะห์ และประมวลความคิดในการให้เหตุผล

ประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองได้ดี แต่ก็มีบางส่วนให้เหตุผลไม่ได้ว่า $A\hat{O}C = B\hat{O}C$ เนื่องจากเป็นโจทย์ที่แปลกกว่าที่เคยทำมา

ภาพที่ 12 แสดงการตอบคำถามในใบงานที่ 4.3 ข้อที่ 2 ของนักเรียนกลุ่มควบคุมที่ยังไม่สามารถให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเอง



ภาพที่ 12 นักเรียนวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์และสิ่งที่กำหนดให้ แล้วเขียนข้อมูลต่างๆ ลงในแนวคิดในการพิสูจน์ จะเห็นได้ว่านักเรียนทราบว่าจะต้องพิสูจน์รูปสามเหลี่ยมสองรูปให้เท่ากันทุกประการแบบด้าน – มุม – ด้าน ซึ่งนักเรียนพิจารณาโจทย์แล้วพบว่ามี $BC = AD$ และ $A\hat{B}C \cong B\hat{A}D$ จากนั้นจึงเรียบเรียงการพิสูจน์ จะเห็นได้ว่า นักเรียนยังไม่เข้าใจโจทย์ และแนวทางในการเรียบเรียงการพิสูจน์ สังเกตได้จากนักเรียนสรุปว่า AC = BD เพราะเป็นด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมจะยาวเท่ากันทุกประการ ก่อนที่จะสรุปได้ว่า $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ แสดงให้เห็นว่านักเรียนไม่เข้าใจว่าการจะอ้างว่า AC = BD จะต้องทราบว่า $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ มาก่อน กล่าวคือนักเรียนบางส่วนยังไม่สังเกตเห็นความเชื่อมโยง และยังไม่เกิดการเรียนรู้จากการทำใบงานที่ 4.2 จึงไม่สามารถนำความรู้ที่ได้เรียนรู้มาแล้วมาวิเคราะห์ และประมวลความคิดในการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองได้จนสมบูรณ์

1.2 การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มควบคุม

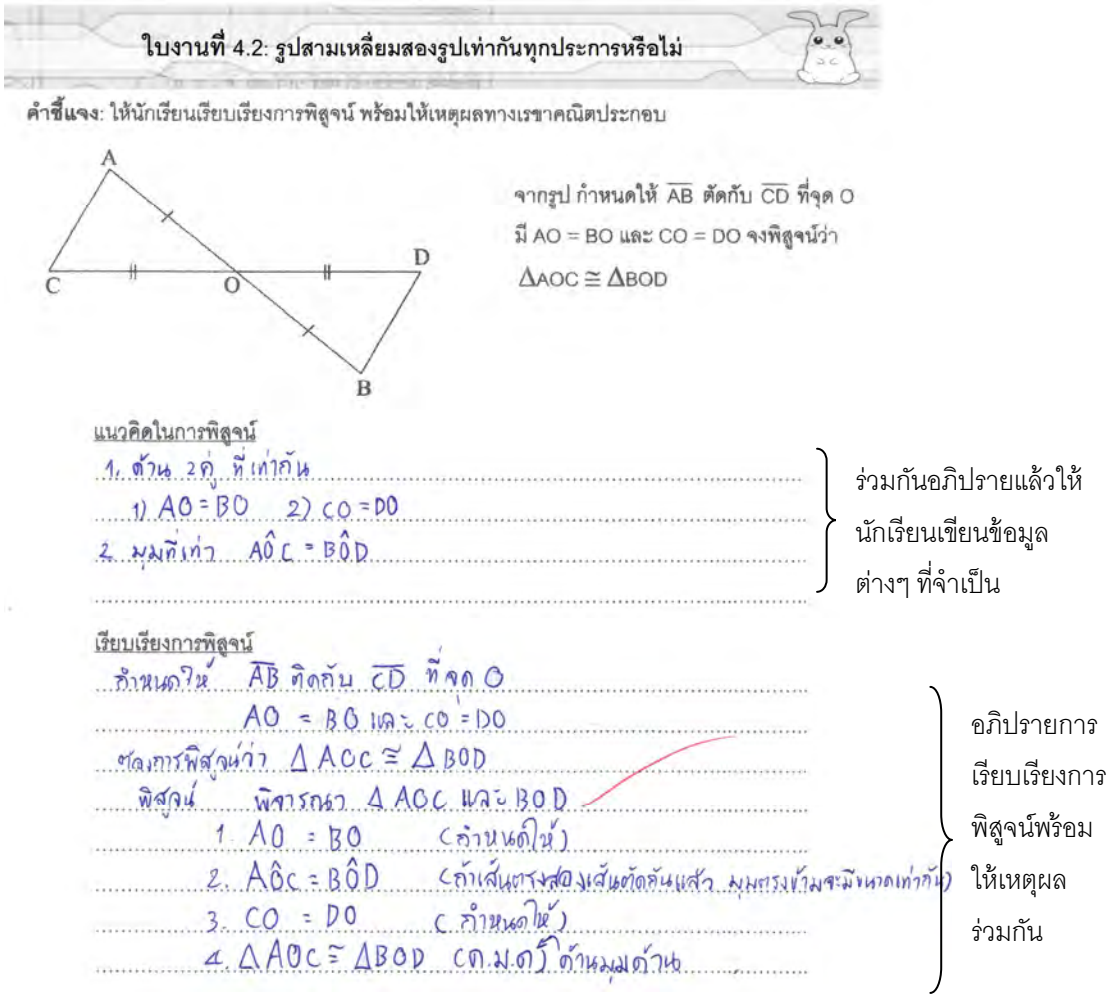
จากการศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ การทำใบงาน พบว่า ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ ส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ดีขึ้นแต่ต้องใช้เวลาในการเรียนรู้ค่อนข้างมาก สังเกตได้จากนักเรียนสามารถเขียนเหตุผลทางเรขาคณิตประกอบข้อความพิสูจน์กว่าจะเกิดความชำนาญและเกิดความเข้าใจการนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ มาใช้ประกอบในการให้เหตุผลในการเขียนพิสูจน์ และสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ มาใช้ประกอบในการให้เหตุผลในการเขียนพิสูจน์ได้ต้องใช้เวลาในการเรียนรู้มากกว่านักเรียนในกลุ่มทดลอง ครูต้องคอยใช้คำถามกระตุ้นให้เกิดการคิดเสมอ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน ครูเริ่มต้นบทเรียนโดยการทบทวนความรู้เดิมโดยใช้สื่อการเรียนรู้ประกอบการใช้คำถามเพื่อเข้าสู่บทเรียน ซึ่งเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจ คิดหาคำตอบที่ครูถาม จากนั้นจึงแจ้งหัวข้อที่จะเรียนและวัตถุประสงค์การเรียน ครูดำเนินการสอนโดยใช้ใบงานประกอบการสอน เพื่อให้นักเรียนเห็นแนวทางในการเรียนรู้ นักเรียนในกลุ่มควบคุมได้ศึกษาตามใบงานที่ได้รับมอบหมาย โดยใบงานที่ 4.1 นักเรียนได้สำรวจเพื่อให้เข้าใจมโนทัศน์เกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน – มุม – ด้าน ใบงานที่ 4.2 นักเรียนได้เรียนรู้การให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ ใบงานที่ 4.3 นักเรียนได้ฝึกการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ ซึ่งมีรายละเอียดของการเรียนรู้ในแต่ละใบงานดังนี้

ใบงานที่ 4.2 นักเรียนได้นำความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมแบบด้าน – มุม – ด้าน ไปใช้ในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในการเขียนพิสูจน์ โดยนักเรียนได้นำข้อมูลต่างๆ ที่ร่วมกันอภิปรายมาเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลด้วยตนเอง จากนั้นจึงร่วมกันอภิปรายการเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลที่ถูกต้อง เพื่อเป็นแนวทางให้นักเรียนสามารถให้เหตุผลได้ประกอบการเขียนพิสูจน์ได้อย่างถูกต้อง พบว่า นักเรียนบางส่วนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่ได้เรียนรู้มาใช้ประกอบในการให้เหตุผลในการเขียนพิสูจน์ได้ สังเกตว่าตอนแรกที่ให้นักเรียนนำข้อมูลต่างๆ มาเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลเอง มีนักเรียนบางส่วนยังเขียนเรียบเรียงได้บ้างแต่ยังไม่ดีมาก แต่นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถให้เหตุผลพร้อมข้อความพิสูจน์ในการเขียนเรียบ

เรียงการพิสูจน์ได้ ต้องร่วมกันอภิปรายและเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ไปพร้อมกัน แสดงให้เห็นว่านักเรียนบางส่วนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้นบ้าง ดังแผนภาพที่ 13

ภาพที่ 13 แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มควบคุมในใบงานที่ 4.2

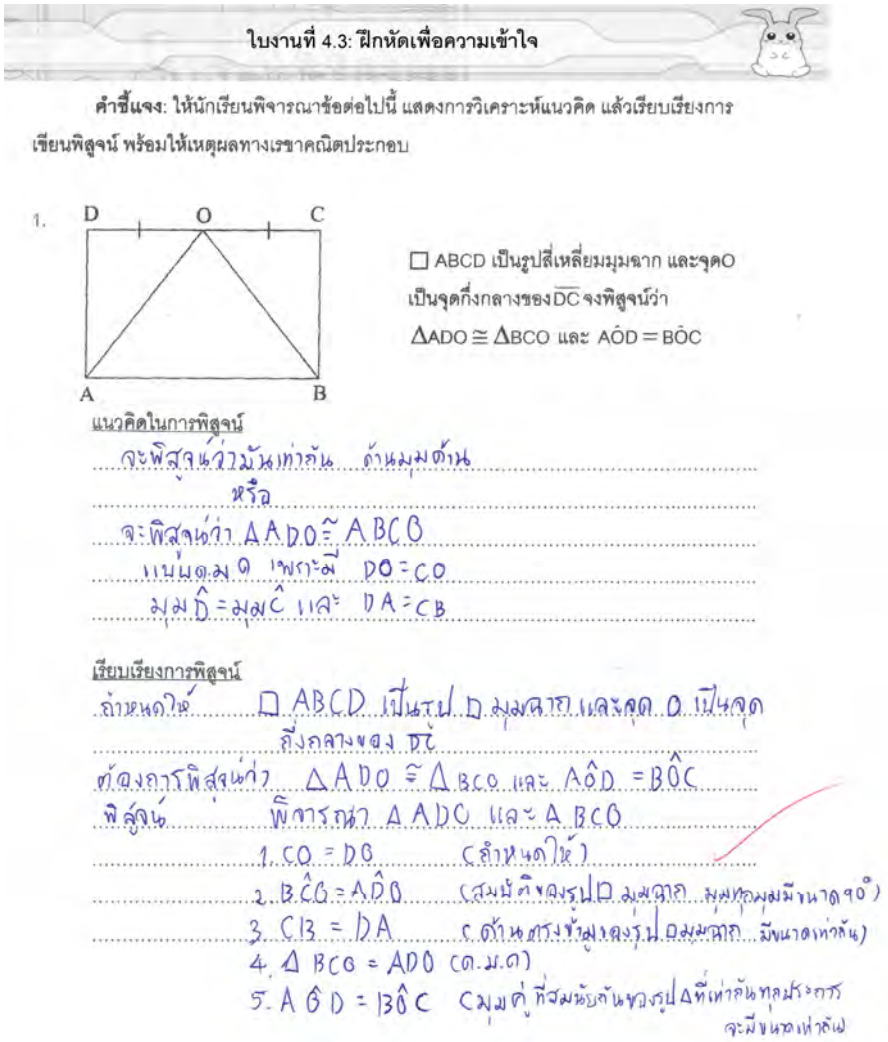


ภาพที่ 13 นักเรียนร่วมกันวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์ต้องการพิสูจน์และสิ่งที่โจทย์กำหนดให้โดยการนำอภิปรายของครู ซึ่งทำให้ทราบว่าการจะสรุปว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ต้องทราบก่อนว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ โดยนักเรียนสังเกตพบว่าโจทย์กำหนดให้ $AO = BO$ และ $CO = DO$ และต้องการให้มุมคู่ที่สมนัยกันที่เป็นมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน มุมคู่นั้นคือ $A\hat{O}C = B\hat{O}D$ จากนั้นนักเรียนจึงสรุปข้อมูลที่วิเคราะห์ได้ลงในแนวคิดในการพิสูจน์ แล้วเขียนพิสูจน์สิ่งที่โจทย์ต้องการลงในเรียบเรียงการพิสูจน์ด้วยตนเอง จากการสังเกตการทำใบงานของนักเรียนพบว่ามีนักเรียนบางส่วนที่พยามเขียนอธิบายเหตุผลข้อมูลที่อภิปรายร่วมกันในการเรียบเรียงการพิสูจน์แต่เขียนอธิบายเหตุผลยังไม่สมบูรณ์มากนัก แต่นักเรียนส่วนมากยังไม่สามารถเริ่มการเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ ไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทาง

เรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่ได้เรียนรู้มาใช้ในการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ได้ แม้ว่าครูจะพยามชี้แนะให้เห็นว่าต้องเอาข้อมูลที่สรุปไว้ในแนวคิดการพิสูจน์ซึ่งได้ร่วมกันอภิปรายไว้แล้วมาเรียบเรียงและอธิบายเหตุผลประกอบ เมื่อหมดเวลาที่ได้กำหนด ครูจึงนำอภิปรายการเขียนอธิบายเหตุผลในการเรียบเรียงการพิสูจน์โดยให้นักเรียนช่วยตอบคำถามไปพร้อมๆ กับการที่ครูเขียนสรุปลงบนกระดานจนเสร็จสมบูรณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถให้เหตุผลพร้อมข้อความพิสูจน์ในการเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง ต้องร่วมกันอภิปรายและเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ไปพร้อมกัน

ใบงานที่ 4.3 นักเรียนได้ฝึกการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองเพื่อให้เกิดความชำนาญ พบว่า นักเรียนบางส่วนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่ได้เรียนรู้มาใช้ในการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ได้ สังเกตจากการที่นักเรียนเข้าใจข้อความหรือโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ โดยการพิจารณาว่าโจทย์กำหนดอะไรบ้างและต้องการให้พิสูจน์อะไร สามารถวิเคราะห์ย้อนกลับจากผลหรือสิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์ไปหาเหตุหรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แล้วเขียนข้อมูลลงในช่องแนวคิดในการพิสูจน์ โดยพิจารณาว่าในแต่ละขั้นที่เป็นผลย่อย ๆ ก่อนผลสุดท้ายนั้นต้องเกิดจากเหตุอันใดบ้างและจากเหตุนั้นต้องอาศัยบทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทหรือสมบัติทางคณิตศาสตร์ใดบ้างมาประกอบเพื่ออ้างอิงไปสู่ผลย่อยๆ เหล่านั้น ทำเช่นนี้เรื่อยๆ จนกว่าผลย่อยๆ นั้นมาจากเหตุที่เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ซึ่งนำไปเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลควบคู่ แต่ในคาบนี้ยังพบว่านักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่สามารถให้เหตุผลทางเรขาคณิตประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองได้ รอให้ครูนำอภิปรายและให้เหตุผลประกอบการเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ไปพร้อมกันในข้อที่ 1 ดังแผนภาพที่ 14 และจากนั้นครูจึงให้นักเรียนฝึกการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองในข้อ 2 ซึ่งนักเรียนก็สามารถให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ได้ นั่นแสดงให้เห็นว่า นักเรียนบางส่วนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ดีขึ้น จากการสังเกตการเรียนรู้ที่ได้จากใบงานที่ 4.2 และการร่วมกันอภิปรายการให้เหตุผลประกอบการเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ไปพร้อมกันก่อนในข้อที่ 1 ก่อน แต่ก็มีบางส่วนที่ไม่สามารถอธิบายการให้เหตุผลประกอบการเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ได้ หรือเรียบเรียงการเขียนพิสูจน์พร้อมทั้งให้เหตุผลไม่สมบูรณ์ ดังแผนภาพที่ 15 จึงต้องร่วมกันอภิปรายและเรียบเรียงการพิสูจน์ไปพร้อมกันอีกครั้ง

ภาพที่ 14 แสดงการตอบคำถามของนักเรียนกลุ่มควบคุมในใบงานที่ 4.3



ใบงานที่ 4.3: ฝึกหัดเพื่อความเข้าใจ

คำชี้แจง: ให้นักเรียนพิจารณาข้อต่อไปนี้ แสดงการวิเคราะห์แนวคิด แล้วเรียบเรียงการเขียนพิสูจน์ พร้อมให้เหตุผลทางเรขาคณิตประกอบ

1. D O C A B

□ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และจุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$ จงพิสูจน์ว่า $\Delta ADO \cong \Delta BCO$ และ $A\hat{O}D = B\hat{O}C$

แนวคิดในการพิสูจน์

จะพิสูจน์ว่ามันเท่ากัน ด้านมุมด้าน

หรือ

จะพิสูจน์ว่า $\Delta ADO \cong \Delta BCO$

เนื่องจาก เพราะว่า $DO = CO$

มุม $\hat{D}$ = มุม $\hat{C}$ และ $DA = CB$

เรียบเรียงการพิสูจน์

ถ้ากำหนดให้ □ ABCD เป็นรูป □ มุมฉาก และจุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$

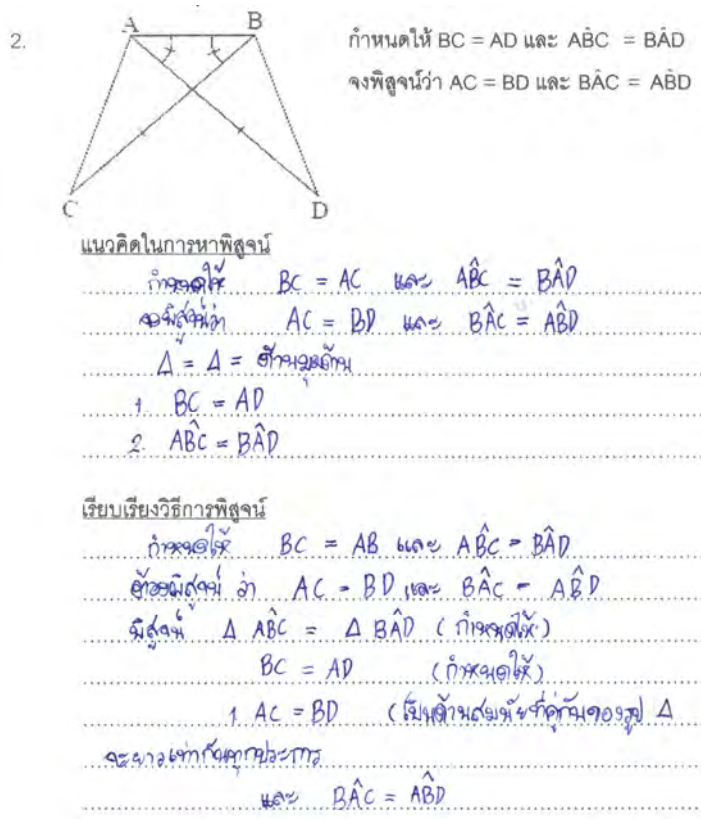
ต้องการพิสูจน์ว่า $\Delta ADO \cong \Delta BCO$ และ $A\hat{O}D = B\hat{O}C$

พิสูจน์ พิจารณา ΔADO และ ΔBCO

1. $CO = DO$ (กำหนดให้)
2. $B\hat{C}O = A\hat{D}O$ (สมบัติของรูป □ มุมฉาก มุมทุกมุมมีขนาด 90°)
3. $CB = DA$ (ด้านตรงข้ามของรูป □ มุมฉาก มีขนาดเท่ากัน)
4. $\Delta BCO = ADO$ (ด.ม.ด)
5. $A\hat{O}D = B\hat{O}C$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูป Δ ที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

ภาพที่ 14 นักเรียนวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์และสิ่งที่กำหนดให้ แล้วเขียนข้อมูลต่างๆ ลงในแนวคิดในการพิสูจน์ จะเห็นได้ว่านักเรียนทราบว่าจะต้องพิสูจน์ $\Delta ADO \cong \Delta BCO$ แบบด้าน – มุม – ด้าน ก่อนจะสรุปว่า $A\hat{O}C = B\hat{O}C$ เพราะเป็นมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน ซึ่งนักเรียนพิจารณาโจทย์แล้วพบว่ามี $DO = CO$, $O\hat{D}A \cong O\hat{C}B$ และ $DA = CB$ จากนั้นจึงเรียบเรียงการพิสูจน์ ซึ่งนักเรียนบางส่วนสามารถให้เหตุผลในการเขียนพิสูจน์ โดย นำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิต ที่เกี่ยวข้อง มาใช้ประกอบการให้เหตุผลในการเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ ได้ด้วยตนเอง แต่ต้องสังเกตการเรียนรู้ที่ได้จากใบงานที่ 4.2 และร่วมกันอภิปรายและเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ไปพร้อมกันก่อน จึงแสดงการให้เหตุผลได้อย่างชำนาญในข้อที่ 2 แสดงให้เห็นว่านักเรียนบางส่วนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตที่ดีขึ้น

ภาพที่ 15 แสดงการตอบคำถามในใบงานที่ 4.3 ข้อที่ 2 ของนักเรียนกลุ่มควบคุมที่ยังไม่สามารถให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเอง



ภาพที่ 15 นักเรียนวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์และสิ่งที่กำหนดให้ แล้วเขียนข้อมูลต่างๆ ลงในแนวคิดในการพิสูจน์ จะเห็นได้ว่านักเรียนทราบว่าจะต้องพิสูจน์รูปสามเหลี่ยมสองรูปให้เท่ากันทุกประการแบบด้าน – มุม – ด้าน ซึ่งนักเรียนพิจารณาโจทย์แล้วพบว่ามี $BC = AD$ และ $A\hat{B}C \cong B\hat{A}D$ จากนั้นจึงเรียบเรียงการพิสูจน์ จะเห็นได้ว่า นักเรียนยังไม่เข้าใจโจทย์ และแนวทางในการให้เหตุผลประกอบการเรียบเรียงการพิสูจน์ สังเกตได้จากนักเรียนสรุปว่า AC = BD และให้เหตุผลว่าเป็นด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมจะยาวเท่ากันทุกประการ ก่อนที่จะสรุปได้ว่า $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ แสดงให้เห็นว่านักเรียนไม่เข้าใจว่าการจะอ้างว่า AC = BD จะต้องทราบว่า $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ มาก่อน แสดงให้เห็นว่านักเรียนบางส่วนยังไม่สามารถให้เหตุผลพร้อมข้อความพิสูจน์ในการเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง กล่าวคือ นักเรียนบางส่วนยังไม่สังเกตเห็นความเชื่อมโยง และยังไม่เกิดการเรียนรู้จากการทำใบงานที่ 4.2 จึงไม่สามารถให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองได้จนสมบูรณ์

2.3 พฤติกรรมอื่น ๆ ของนักเรียนกลุ่มควบคุม

นักเรียนที่เรียนโดยวิธีการสอนแบบปกติ ส่วนใหญ่มีการโต้ตอบคำถามกับผู้สอนค่อนข้างน้อย ไม่ค่อยมีการถามคำถามหรือแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับการเรียนการสอน รอให้ครูบอกเป็นส่วนมาก

นักเรียนที่นั่งเรียนแถวหน้าโดยเฉพาะนักเรียนผู้หญิงมีความตั้งใจเรียนเป็นอย่างดี แต่นักเรียนที่นั่งแถวหลังให้ความสนใจกิจกรรมหน้าชั้นเรียนน้อยมาก ไม่ค่อยตั้งใจเรียน มีการคุยกันเป็นระยะๆ ครูจึงกระตุ้นโดยการถามคำถามเพื่อให้นักเรียนตอบ แต่นักเรียนตอบไม่ค่อยได้ ครูจึงต้องเป็นลักษณะคำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้คิดตาม แล้วตอบคำถาม ครูต้องอธิบายซ้ำหลายครั้ง ยกตัวอย่างโจทย์หลายๆ ตัวอย่างเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจลำดับการคิด จนสามารถเรียบเรียงการเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผล และสามารถการแก้ปัญหาต่างๆได้ โดยครูและนักเรียนได้ร่วมกันอภิปราย ถามตอบ หรือสุ่มให้นักเรียนลองออกมาทำหน้าชั้นเรียน จนได้ข้อสรุปร่วมกัน

โดยภาพรวม นักเรียนมีความสนใจและให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมแต่ละกิจกรรมบ้าง ครูจึงต้องพยายามกระตุ้นให้นักเรียนคิด ร่วมกันอภิปรายจนเกิดความเข้าใจ

จากการศึกษาพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มทดลองและนักเรียนกลุ่มควบคุม พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองเกิดการเรียนรู้ได้ดีและเรียนรู้ได้เร็วกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม โดยเฉพาะเมื่อนักเรียนกลุ่มทดลองเรียนรู้ในขั้นการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication) ซึ่งขั้นที่ 3 ของโมเดลแวนฮีลี กล่าวคือ ในการทำใบงานที่ 4.2 ซึ่งเป็นการเรียนรู้การให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ นักเรียนกลุ่มทดลองได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความรู้ และความเข้าใจระหว่างกัน ทำให้ได้เกิดความคิดรวบยอด ก่อนจะมีการอภิปรายสรุปร่วมกันและการได้ฝึกการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ ซึ่งเป็นการเน้นย้ำความเข้าใจให้เกิดแก่นักเรียน ส่วนนักเรียนกลุ่มควบคุมส่วนใหญ่ยังรอการชี้แนะ หรืออธิบายจากครู นักเรียนไม่ลองฝึกคิดวิเคราะห์ และเขียนแสดงการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองก่อน เลือกที่จะรอครูเฉลยใบงานนั้นๆ แล้วจึงจดตาม

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีวัตถุประสงค์ของการวิจัยดังนี้

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางเรียนคณิตศาสตร์ระหว่างนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ขั้นตอนการสอนของแวนฮีลีกับกลุ่มที่เรียนแบบปกติ
2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตระหว่างนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ขั้นตอนการสอนของแวนฮีลีกับกลุ่มที่เรียนแบบปกติ

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษากรุงเทพมหานคร เขต 1 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ ผู้วิจัยสุ่มตัวอย่างโดยใช้เทคนิคการสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (Purposive Sampling) เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ประจำปีการศึกษา 2553 โรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัย กรุงเทพมหานคร ซึ่งมีทั้งหมด 12 ห้อง แล้วเลือกนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มา 2 ห้องซึ่งมีค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน กลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 ใกล้เคียงกัน ได้กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน ห้อง ม.2/3 มีจำนวนนักเรียน 41 คน และห้อง ม.2/4 มีจำนวนนักเรียน 36 คน แล้วทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิตของนักเรียนทั้ง 2 ห้อง ด้วยการทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) พบว่าความแปรปรวนของนักเรียนทั้งสองห้อง ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 จากนั้นจึงทดสอบค่าที (t- independent) พบว่าค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน กลางภาคเรียนที่ 1 ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนทั้ง 2 ห้องทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ซึ่ง ห้อง ม.2/3 และ ห้อง ม.2/4 มีค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เท่ากับ 23.47 และ 19.59 ตามลำดับ จากนั้นนำคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ของนักเรียนทั้ง 2 ห้องไปทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่า ความแปรปรวนของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 จากนั้นทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนจากการทำ

แบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้วยค่าที (t- independent) พบว่า คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 แสดงว่า นักเรียนทั้งสองห้องมีความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไม่แตกต่างกัน จากนั้นผู้วิจัยได้จับสลากเพื่อกำหนดกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ผลปรากฏว่า นักเรียนชั้น ม.2/3 เป็นกลุ่มทดลอง ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยโมเดลของแวนฮีลี และนักเรียนชั้น ม.2/4 เป็นกลุ่มควบคุม ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย

1. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองคือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ ซึ่งเขียนแยกเป็น 2 ฉบับ ดังนั้นมีแผนการจัดการเรียนรู้ทั้งหมด 22 แผน แบ่งเป็นแผนสำหรับกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมอย่างละ 11 แผน โดยใช้เวลาในการสอนทั้งหมด 15 คาบ ผู้วิจัยได้สร้างแผนการจัดการเรียนรู้ทั้งหมดให้ครอบคลุมเนื้อหาเรื่อง ความเท่ากันทุกประการ สาระการเรียนรู้พื้นฐานในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 นำไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสมของเนื้อหา การลำดับเนื้อหา และความสอดคล้องขององค์ประกอบต่างๆ ในแผนการจัดการเรียนรู้ แล้วนำมาปรับปรุง และนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

2. เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย

2.1 เครื่องมือที่ใช้ในการวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต คือ แบบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง การเตรียมความพร้อมในการให้เหตุผล แบ่งเป็น ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น จำนวน 3 ข้อ และตอนที่ 2 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบยาว 2 ข้อ ใช้เวลาในการทำ 60 นาที ซึ่งมีค่าความเที่ยงเป็น 0.82 ค่าความยากเป็น 0.21 – 0.57 และค่าอำนาจจำแนกเป็น 0.40 – 0.58

2.2 แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ เป็นข้อสอบชนิดเลือกตอบมี 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ ใช้เวลาในการทำ 60 นาที ซึ่งมีค่าความเที่ยงเป็น 0.64 ค่าความยากเป็น 0.25 – 0.77 และค่าอำนาจจำแนกเป็น 0.27 – 0.50

2.3 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ แบ่งเป็น ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น จำนวน 3 ข้อ และตอนที่ 2 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบยาว 2 ข้อ ใช้เวลาในการทำ 60 นาที ซึ่งมีค่าความเที่ยงเป็น 0.67 ค่าความยากเป็น 0.37 – 0.52 และค่าอำนาจจำแนกเป็น 0.36 – 0.54

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตก่อนการทดลองของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มด้วยแบบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต แล้วดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นสำหรับนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ซึ่งกลุ่มทดลองใช้แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี ส่วนกลุ่มควบคุมใช้แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ ใช้เวลาสอนสัปดาห์ละ 3 คาบ เป็นเวลา 5 สัปดาห์ รวม 15 คาบ เมื่อดำเนินการทดลองสอนครบตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่กำหนดแล้ว ผู้วิจัยใช้แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ จำนวน 30 ข้อ โดยใช้เวลาในการทดสอบ 60 นาที และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต แบ่งเป็น ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบสั้น จำนวน 3 ข้อ และตอนที่ 2 เป็นข้อสอบชนิดอัตนัยแบบตอบยาว 2 ข้อ โดยใช้เวลาในการทดสอบ 60 นาที ทดสอบหลังเรียนนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม หลังจากนั้นทำการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อสรุปผลการวิจัย โดยนำคะแนนที่ได้จากแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และคะแนนที่ได้จากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต มาหาค่ามัชฌิมเลขคณิตเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่มด้วยสถิติการทดสอบค่าที (t- independent) และนำคะแนนจากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มาหาค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมด้วยการทดสอบค่าที (t- independent)

สรุปผลการวิจัย

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 สรุปผลการวิจัยดังนี้

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตสูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อภิปรายผลการวิจัย

1. จากการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 สอดคล้องกับสมมติฐานในการวิจัยที่ตั้งไว้ในข้อที่ 1

จากผลการวิจัยในครั้งนี้แสดงว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนสูงกว่าการเรียนโดยวิธีสอนแบบปกติ ทั้งนี้ เนื่องจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่ผู้วิจัยใช้เป็นกรอบแนวคิดในการจัดการเรียนรู้สำหรับกลุ่มทดลองนั้น ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation) ซึ่งปรากฏในขั้นที่ 2 ของโมเดลของแวนฮีลี นักเรียนได้ศึกษาตามใบงานที่ได้รับมอบหมาย ซึ่งนักเรียนได้สำรวจ สังเกต วิเคราะห์ และประมวลความคิดด้วยตนเอง เกิดการเรียนรู้ เพื่อให้เข้าใจมโนทัศน์และสรุปมโนทัศน์ที่ได้เรียนรู้ในแต่ละคาบได้ สังเกตจากการผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพที่บรรยายพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนซึ่งพบว่านักเรียนในกลุ่มทดลองได้ทำการสำรวจและสังเกตรูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อ แล้วประมวลความรู้เพื่อสรุปมโนทัศน์เรื่องรูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ซึ่งเป็นความสามารถในการนำความรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการที่ได้เรียนมาแล้วมาสัมพันธ์กับเงื่อนไขที่โจทย์ มาสรุปมโนทัศน์ความเท่ากันทุกประการด้วยความสัมพันธ์กันแบบต่างๆ

นอกจากนี้นักเรียนยังได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication) ซึ่งปรากฏในขั้นที่ 3 ของโมเดลของแวนฮีลี และแลกเปลี่ยนความรู้ที่เกิดจากการทำกิจกรรมเพื่อเป็นการร่วมกันตรวจสอบความเข้าใจจากการที่ได้ทำกิจกรรม ซึ่งจะสังเกตได้จากผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพที่บรรยายพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนในการทำตัวอย่างใบงานที่ 4.2: รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่ ซึ่งเกี่ยวกับการเรียนรู้การให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ ที่แสดงให้เห็นว่าก่อนจะแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและความรู้ระหว่างกัน นักเรียนส่วนใหญ่ยังเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ได้บ้างแต่ยังไม่ดีมากนัก แต่เมื่อนักเรียนได้อภิปรายในกลุ่มย่อย ได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นและความรู้ระหว่างกัน ทำให้มีโอกาสร่วมกันปรับการเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลให้ดียิ่งขึ้น ส่งผลให้นักเรียนมีความเข้าใจมากขึ้นเนื่องจากสามารถขยายความสิ่งที่ตนเองเข้าใจจากการพูดคุยแลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อน ทำให้ใบงานนั้นสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น จากนั้นครูจึงนำอภิปรายเพื่อให้นักเรียนทั้งหมดเกิดความเข้าใจตรงกัน ส่งผลให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น ดังที่ Prescott (1961: 14 – 16) ได้กล่าวว่าองค์ประกอบความสัมพันธ์ในเพื่อนวัยเดียวกันมีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน และสอดคล้องกับงานวิจัยของพิริยพงศ์ เตชะศิริยืนยง (2552: 72 – 73) ที่ได้ระบุว่าความสัมพันธ์ที่เกิดจากปฏิสัมพันธ์ในกลุ่ม ทำ

ให้เกิดการระดมความคิด เป็นปฏิกิริยาที่ตอบสนองสิ่งเร้าจากปัญหาที่พบ ทำให้เกิดความรวดเร็วต่อการเรียนรู้ ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนผ่านเกณฑ์ทั้งหมด

เมื่อนักเรียนได้เรียนโดยใช้ขั้นตอนการสอนโดยโมเดลของแวนฮีลีไปเป็นระยะหนึ่ง นักเรียนก็จะมีความคุ้นเคย สามารถคิดวิเคราะห์ เรียบเรียงการพิสูจน์พร้อมการให้เหตุผลได้รวดเร็วขึ้น และให้เหตุผลประกอบข้อความพิสูจน์ได้ถูกต้องมากขึ้น เนื่องจากนักเรียนได้รับการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ (Free Orientation) ซึ่งปรากฏในขั้นที่ 4 ของโมเดลของแวนฮีลี เป็นการฝึกฝนการนำความรู้หรือทฤษฎีบทที่ได้เรียนรู้มาแล้วไปใช้ให้เกิดความชำนาญ สังเกตได้จากผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพที่บรรยายพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนในการทำตัวอย่างใบงานที่ 4.3: ฝึกหัดเพื่อความเข้าใจ ซึ่งเกี่ยวกับการฝึกการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ นักเรียนสามารถประมวลความรู้ที่เคยเรียนรู้มาแล้ว คิดวิเคราะห์ แล้วนำมาเขียนพิสูจน์ นักเรียนส่วนใหญ่สามารถเรียบเรียงการเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลประกอบด้วยตนเองได้ดี ซึ่งชี้ให้เห็นว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยโมเดลแวนฮีลีมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับ Carrol (1963: 723 – 733) ที่เชื่อว่าเวลาและคุณภาพของการสอนมีอิทธิพลโดยตรงต่อปริมาณความรู้ที่นักเรียนจะได้รับ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะโมเดลของแวนฮีลีเป็นวิธีสอนโดยยึดนักเรียนเป็นศูนย์กลาง มีการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่เห็นการพัฒนาความสามารถในการคิดวิเคราะห์ด้วยวิธีการฝึกให้นักเรียนรู้จักอภิปรายและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นระหว่างกันและใช้คำถามกระตุ้นเพื่อให้นักเรียนใช้กระบวนการทางความคิดหาเหตุผลจนพบแนวทางในการอ้างเหตุผลได้ด้วยตนเอง ซึ่งทำให้นักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเองร่วมกัน ซึ่งสอดคล้องกับยุพิน พิพิธกุล (2530 : 75-77) และสิริพร ทิพย์คง (2545: 136) ที่ได้กล่าวถึงการเรียนการสอนเรขาคณิตว่าการเรียนทฤษฎีบททางเรขาคณิตต้องให้ผู้เรียนค้นพบเนื้อหา ให้ผู้เรียนแยกเหตุและผล พิจารณาจากผลไปหาเหตุ ซึ่งมีข้อดี คือ ช่วยทำให้นักเรียนรู้จักคิดไปตามลำดับขั้นตอนและมีเหตุผล และการสอนโดยใช้โมเดลของแวนฮีลี มีข้อดี คือ นักเรียนมีโอกาสแสดงความคิดเห็นและแลกเปลี่ยนความรู้ความเข้าใจร่วมกันอย่างเต็มที่ ฝึกการคิดหาเหตุและผล ซึ่งทำให้นักเรียนได้เรียนรู้วิธีจัดลำดับความคิด นอกจากนี้อาจเนื่องมาจากวิธีการสอนของครูในโรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัยส่วนใหญ่จะดำเนินการสอนโดยใช้วิธีการบรรยาย นักเรียนเป็นผู้รับฟังสิ่งที่ครูบอก ทำให้นักเรียนขาดความกระตือรือร้น และขาดแรงจูงใจในการเรียนการสอน เมื่อนักเรียนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี จึงทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนแบบปกติ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของนาตยา น้ำจิตตรง (2546: 40 – 43) เรื่องการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนระหว่างการสอนที่เน้นลำดับขั้นตอนการเรียนรู้ของแวนฮีลีโมเดลกับการสอนปกติ ซึ่งพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการ

เรียนเรขาคณิตของนักเรียนระหว่างการสอนที่เน้นลำดับขั้นตอนการเรียนรู้ของแวนฮีลีโมเดลสูงกว่ากลุ่มที่สอนแบบปกติ

ส่วนนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีสอนแบบปกติส่วนมากสามารถสรุปมโนทัศน์ที่ได้เรียนรู้ในแต่ละคาบได้ แต่เมื่อให้ทำใบงานที่เกี่ยวข้องกับการเรียนรู้การให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ นักเรียนส่วนใหญ่ยังรอการชี้แนะ หรืออธิบายจากครู นักเรียนไม่ลองฝึกคิดวิเคราะห์ และเขียนแสดงการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองก่อน เลือกที่จะรอครูเฉลยใบงานนั้นๆ แล้วจึงจดตาม

2. จากการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี มีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตสูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 สอดคล้องกับสมมติฐานในการวิจัยที่ตั้งไว้ในข้อที่ 2

การที่ผลการวิจัยเป็นเช่นนี้อาจเป็นผลเนื่องมาจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่ผู้วิจัยใช้เป็นกรอบแนวคิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้สำหรับกลุ่มทดลองนั้น เป็นวิธีการที่นักเรียนค้นคว้าแสวงหาความรู้ โดยอาศัยการอภิปราย และแลกเปลี่ยนความรู้ระหว่างกัน เมื่อเผชิญปัญหาที่ทำให้เกิดความสงสัย แล้วได้ร่วมกันอภิปราย ซึ่งนำไปสู่ความเข้าใจที่ชัดเจนกว่าการฟังจากสิ่งที่ครูบอก โดยแต่ละขั้นตอนของโมเดลของแวนฮีลีได้มีส่วนส่งเสริมและพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation) ซึ่งปรากฏในขั้นที่ 2 ของโมเดลของแวนฮีลี ทำให้นักเรียนได้ศึกษาและเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างเป็นขั้นตอน เป็นแนวทางไปสู่ข้อสรุปที่จะได้จากการเรียนรู้ เกิดข้อค้นพบมโนทัศน์และขั้นตอนทางเรขาคณิต นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตไม่ว่าจะเป็นอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทต่างๆ ที่ได้เรียนรู้มาใช้ประกอบในการให้เหตุผลในการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองได้ สังเกตจากการผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพที่บรรยายพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนซึ่งพบว่านักเรียนในกลุ่มทดลองในการทำตัวอย่างใบงานที่ 4.2: รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่ ซึ่งเกี่ยวกับการเรียนรู้การให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ ก่อนจะแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและความรู้ระหว่างกัน นักเรียนต้องสรุปข้อมูลที่มี แล้วเขียนการพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้วยตนเองก่อน จะเห็นว่านักเรียนเขียนเรียบเรียงการพิสูจน์ด้วยตนเองจะเป็นเหตุผลสั้นๆ และภาษาที่ใช้เขียนยังไม่เป็นสมบูรณ์มากนัก

แต่เมื่อได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication) ซึ่งปรากฏในขั้นที่ 3 ของโมเดลของแวนฮีลี นักเรียนได้ร่วมกันอภิปรายและแสดงความคิดเห็นในประเด็นที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ต่างๆ และความรู้ที่ใช้ประกอบการพิจารณา ทำให้นักเรียนได้เข้าใจว่าสิ่งที่ตนเองคิด

และเขียนไปแล้วนั้นถูกต้องและสมบูรณ์เพียงใด สังเกตจากการผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพที่บรรยายพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนซึ่งพบว่านักเรียนในกลุ่มทดลองพบว่านักเรียนร่วมกันอภิปรายและปรับการให้เหตุผลประกอบข้อความพิสูจน์ได้ดีมากขึ้น และค่อนข้างเป็นภาษาทางคณิตศาสตร์ยิ่งขึ้น เกิดการเรียนรู้และได้ข้อสรุปที่สอดคล้อง ถูกต้อง และตรงกัน นักเรียนมีความสามารถในการเขียนพิสูจน์พร้อมการให้เหตุผลได้มากขึ้น เนื่องจากการได้ร่วมกันอภิปรายในกลุ่มย่อยจะช่วยให้นักเรียนที่เข้าใจแล้วอธิบายให้เพื่อนนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจได้เกิดการเรียนรู้ไปพร้อมกัน จึงส่งผลให้มีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้นดังงานวิจัยของ Meng and Idris (2007: 242 – 248) ที่ได้ทำการศึกษาการส่งเสริมให้นักเรียนสร้างการเรียนรู้จากเรขาคณิตสามมิติผ่านการสอนด้วยขั้นตอนการสอนตามโมเดลของแวนฮีลี โดยใช้ The Geometer's Sketchpad เพื่อศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิต (geometric reasoning) และการเปลี่ยนระดับความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลของแวนฮีลี ซึ่งผลการวิจัยพบว่า การสอนด้วยขั้นตอนการสอนตามโมเดลของแวนฮีลี โดยใช้ร่วมกับ GSP ทำให้การให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนเพิ่มขึ้น และเพิ่มระดับความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลของแวนฮีลีของนักเรียน ส่วนในขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ (Free Orientation) ทำให้นักเรียนนำความรู้ที่ได้มาใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าวอย่างอิสระ โดยนักเรียนฝึกแสดงการวิเคราะห์เพื่อพิจารณาเหตุและผลต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้นๆ แล้วแสดงการพิสูจน์หรือการให้เหตุผลประกอบด้วยตนเอง ซึ่งเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนใช้ความคิดในมุมมองที่หลากหลายมากขึ้น ทำให้นักเรียนคิดได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของกุลยา เหมวัสดุกิจ (2545: 62 – 64)ที่ได้ศึกษาระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี พบว่าหลังการสอน นักเรียนมีความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 3 (Formal Deduction) และ 4 (Rigor) มีจำนวนเพิ่มมากขึ้น เช่นเดียวงานวิจัยของ Meng and Idris (2007: 242 – 248) ที่กล่าวไว้แล้วข้างต้น ขั้นตอนสุดท้ายของการเรียนรู้ นั่นคือ ขั้นการสรุปรวม (Integration) ทำให้นักเรียนได้ร่วมกันสรุปเนื้อหาที่ได้เรียนรู้ทั้งหมด เพื่อเป็นการประมวลความคิดทั้งหมดในการเรียนในแต่ละคาบ

การจัดการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีทั้ง 5 ขั้นตอนนั้น เป็นการพัฒนาความคิดอย่างเป็นระบบและตามลำดับขั้นตอน กล่าวได้ว่าในแต่ละขั้นตอนของโมเดลแวนฮีลีนักเรียนจะได้ฝึกการคิด ซึ่งมีส่วนช่วยส่งเสริมให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตได้ดีขึ้น สังเกตได้จากนักเรียนจะมีความสนใจและให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมแต่ละกิจกรรมเป็นอย่างดี ภายในกลุ่มย่อยได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็น ร่วมกันอภิปรายจนเกิดความเข้าใจภายในกลุ่ม จากนั้นจึงได้มีการทบทวนความเข้าใจโดยร่วมกันอภิปรายภายในชั้นเรียนเพื่อ

หาข้อสรุปร่วมกัน สอดคล้องกับงานวิจัยของ Bobango (1987: 2566 - A) ได้ศึกษาระดับความคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลแวนฮีลีและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิต ซึ่งผลการวิจัยพบว่า การสอนโดยใช้โมเดลของแวนฮีลีทำให้ระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนเพิ่มขึ้น โดยเป็นการเพิ่มระดับความคิดทางเรขาคณิตจากระดับขั้น 1 เป็นการวิเคราะห์ (Analysis) ไปยังระดับขั้น 2 เป็นการพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction) มากกว่าการเพิ่มระดับความคิดทางเรขาคณิตในระดับอื่น ๆ และสอดคล้องกับงานวิจัยของ Lowry (1987: 1971 – A) ที่ได้ศึกษาความคิดทางเรขาคณิตเรื่องพื้นที่และเส้นรอบรูปของเด็กอายุ 9 ปี พบว่า นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 และ 4 มีการเพิ่มระดับความคิดทางเรขาคณิตไปสู่ระดับที่สูงกว่าหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี นั่นแสดงให้เห็นว่าการจัดการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีทำให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตมากขึ้นเนื่องจากมีความคิดทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้นนั่นเอง จะเห็นได้ว่าขั้นตอนการสอนตามโมเดลของแวนฮีลีมีความเหมาะสมในการพัฒนาการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ดังที่งานวิจัยของ Ding and Jones (2007: 1) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการใช้โมเดลขั้นตอนการสอนของแวนฮีลีเพื่อวิเคราะห์บทเรียนการพิสูจน์เกี่ยวกับเรขาคณิตพบว่าขั้นตอนการสอนของแวนฮีลีในขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3 มีความเหมาะสมและสามารถบรรจุไว้ในบทเรียน เนื่องจากสามารถขยายความคิดเกี่ยวกับเรขาคณิตและการพิสูจน์ให้แก่นักเรียนได้

ส่วนนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีสอนแบบปกติส่วนมากไม่สามารถให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ได้จนเสร็จสมบูรณ์ นักเรียนส่วนใหญ่ยังรอการชี้แนะหรืออธิบายจากครู นักเรียนไม่ลองฝึกคิดวิเคราะห์ หรือไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตและสมบัติทางเรขาคณิตมาใช้ประกอบในการให้เหตุผล และเขียนแสดงการเขียนพิสูจน์ด้วยตนเองก่อน เลือกที่จะรอครูเฉลยใบงานนั้นๆ แล้วจึงจดตาม

ข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยดังกล่าว ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะ ดังนี้

ข้อเสนอแนะสำหรับการนำไปใช้

1. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี เกี่ยวข้องกับการพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตซึ่งส่งผลให้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงขึ้น และเมื่อนักเรียนมีระดับความคิดสูงขึ้นย่อมทำให้มีความสามารถในการให้เหตุผลมากขึ้นด้วย ครูผู้สอนและผู้ที่

เกี่ยวข้องควรนำวิธีการสอนโดยใช้โมเดลของแวนฮีลีไปใช้ เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียน ซึ่งครูผู้สอนควรศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับ การพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิต และขั้นตอนของวิธีการสอนตามโมเดลของแวนฮีลีให้เข้าใจ ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีซึ่งเป็นการพัฒนาความคิดอย่างเป็นระบบและตามลำดับขั้นตอน ดังรายละเอียดดังนี้

ขั้นที่ 1 คือ ขั้นการใช้คำถามเพื่อนำเข้าสู่บทเรียน นักเรียนได้มีส่วนร่วมโดยครูเป็นผู้ถามและให้นักเรียนตอบเพื่อทบทวนความเข้าใจในบทเรียนที่ผ่านมาและเพื่อนำเข้าสู่บทเรียนใหม่ ทำให้นักเรียนมีการทบทวนความคิดเกี่ยวกับสิ่งที่ได้เรียนผ่านมา ซึ่งในขั้นนี้เพื่อให้นักเรียนได้คิด และตอบคำถามได้ตรงประเด็น ดังนั้นครูควรมีทักษะในการใช้คำถามที่ดี สามารถถามกระตุ้นให้นักเรียนได้ร่วมกันคิด ร่วมกันอภิปรายเพื่อให้เกิดความเข้าใจและเชื่อมโยงเข้าสู่บทเรียนใหม่

ขั้นที่ 2 คือ ขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง ครูจะชี้ให้เห็นแนวทางในการแก้ปัญหาหรือแนวทางในการพิสูจน์ แต่นักเรียนต้องคิดวิธีการแก้ปัญหาหรือให้เหตุผลในการพิสูจน์ด้วยตนเอง ทำให้นักเรียนรู้จักคิดแก้ปัญหาและคิดหาเหตุผลสำหรับใช้ในการพิสูจน์ได้ ในขั้นนี้ครูควรจัดหากิจกรรมต่างๆ ให้เหมาะสมกับบทเรียน เลือกวัสดุและชิ้นงานที่เหมาะสมเพื่อให้นักเรียนเกิดข้อค้นพบมโนทัศน์และขั้นตอนทางเรขาคณิต

ขั้นที่ 3 คือ ขั้นการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น นักเรียนจะได้แลกเปลี่ยนความคิดซึ่งกันและกัน ทำให้นักเรียนคิดได้ละเอียดลึกซึ้งและกว้างขวางมากยิ่งขึ้น ทั้งนี้เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่สอดคล้อง ถูกต้อง และตรงกัน โดยครูมีส่วนร่วมในการให้คำแนะนำและแก้คำศัพท์ให้อยู่ในรูปที่ถูกต้อง โดยใช้ทักษะการใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนได้ร่วมกันคิด และแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเพื่อให้นักเรียนทุกคนเกิดความเข้าใจเนื้อหา ได้ข้อสรุปที่สอดคล้อง ถูกต้อง และตรงกัน ด้วยการประมวลความคิดของนักเรียนเอง

ขั้นที่ 4 คือ ขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ นักเรียนจะได้งานที่หลากหลาย และมีความซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนใช้ความคิดในมุมมองที่หลากหลายมากขึ้น ทำให้นักเรียนคิดได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น ในขั้นนี้ครูควรเตรียมชิ้นงานที่ให้นักเรียนได้ใช้ความรู้ที่ได้เรียนมาใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าวอย่างอิสระ

ขั้นที่ 5 คือ ขั้นการสรุปรวม นักเรียนช่วยกันสรุปสิ่งที่ได้ทำในคาบ เพื่อเป็นการประมวลความคิดทั้งหมดในการเรียนในแต่ละคาบ ทำให้นักเรียนได้คิดเกี่ยวกับสิ่งที่ได้เรียนผ่านมาและสามารถอธิบายได้โดยอาศัยความเข้าใจของนักเรียนเองทำให้เห็นภาพรวมของการทำงานของตนเอง จึงทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งได้ ซึ่งครูควรมีบทบาทในการใช้คำถามกระตุ้น เพื่อชี้แนวทางการสรุปสาระสำคัญของบทเรียนในแต่ละคาบ

2. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี เป็นวิธีสอนที่เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลาง โดยนักเรียนทุกคนได้ร่วมทำกิจกรรมด้วยตนเองซึ่งครูผู้สอนจะต้องคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล ตลอดจนพื้นฐานหรือประสบการณ์เดิมของนักเรียนแต่ละคน ทั้งนี้กิจกรรมการเรียนการสอนอาจต้องใช้เวลามากเนื่องจากนักเรียนต้องร่วมกันอภิปรายจนได้ข้อสรุปและเรียบเรียงการอ้างเหตุผลในการพิสูจน์ร่วมกัน ครูควรคอยให้คำชี้แนะหรืออธิบายเพิ่มเติมเมื่อนักเรียนเกิดความไม่แน่ใจ หาข้อสรุปไม่ได้ จนกระทั่งได้ข้อสรุป ซึ่งนักเรียนควรทบทวนความรู้ก่อนจะเรียนในแต่ละคาบเพื่อเพิ่มความเข้าใจในระหว่างการเรียนการสอน และต้องทบทวนหลังเรียนเพื่อให้จดจำลำดับขั้นการเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลได้อย่างชำนาญ

3. ครูผู้สอนควรมีการบันทึกปัญหาที่เกิดขึ้นในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อนำข้อมูลมาใช้ในการปรับปรุงวิธีสอนในครั้งต่อไป

4. การวิจัยครั้งนี้มีข้อจำกัดในเรื่องของระยะเวลาดำเนินการ เนื่องจากขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีมีหลายขั้น และแต่ละขั้นล้วนมีความสำคัญในการเกิดการเรียนรู้ อีกทั้งยังใช้เวลานาน โดยเฉพาะขั้นแลกเปลี่ยนความคิดเห็น จึงต้องใช้การสอนในคาบคู่สลับกับคาบเดี่ยว แต่ในสภาพจริง ครูผู้สอนสามารถปรับเวลาให้เหมาะสมกับกิจกรรมได้ เช่น การแลกคาบกับรายวิชาอื่น หรือการให้ฝ่ายวิชาการจัดสรรเวลาที่เหมาะสมกับกิจกรรมให้ตั้งแต่ก่อนเปิดภาคเรียน เป็นต้น

ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลี ในเนื้อหาอื่นๆ ที่เกี่ยวกับเรขาคณิต และในระดับชั้นอื่นๆ เนื่องจากสาระการเรียนรู้เรขาคณิตมีความสำคัญและบรรจุอยู่ในหลักสูตรระดับต่างๆ หลายระดับชั้น หากมีการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการนำโมเดลของแวนฮีลีไปปรับใช้ในเนื้อหาอื่นๆ ที่เกี่ยวกับเรขาคณิต และกลุ่มผู้เรียนในระดับชั้นต่างๆ แล้วผลการวิจัยที่ได้รับก็จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อวงการศึกษาต่อไป

2. ควรมีการศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อตัวแปรอื่น ๆ เช่น ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ ความสามารถในการสื่อสาร และความสามารถในการแก้ปัญหา เป็นต้น

3. ควรมีการศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในรูปแบบอื่น ๆ ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เนื่องจากการให้เหตุผลเป็นทักษะที่ใช้ในชีวิตประจำวันของมนุษย์ เหตุผลคือหลักฐานหรือสิ่งที่ยืนยันความเชื่ออย่างใดอย่างหนึ่งว่าเป็นจริงและ/หรือผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เป็นทักษะที่ได้จากการเรียนรู้ในรายวิชาต่างๆ ที่กำหนดไว้ในหลักสูตร เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความสามารถและนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ได้ ดังนั้น

จึงควรศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในรูปแบบอื่น ๆ เช่น การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวอย่างงาน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลการสร้างมโนทัศน์ เป็นต้น

4. ควรมีการศึกษาระดับความคิดทางเรขาคณิต ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์จากการจัดกิจกรรมการเรียนเรียนรู้โดยโมเดลของแวนฮีลี เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ หรือเนื้อหาเรขาคณิตอื่นๆ

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

กิตติศักดิ์ แก้งทอง. 2547. การศึกษาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เรื่องความน่าจะเป็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาใน โรงเรียนสังกัดกรมสามัญศึกษา เขตการศึกษา 11 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และภูมิหลังต่างกัน. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

กุลยา เหมวัสดุกิจ. 2545. ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี่ที่มีต่อระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

โกมล ไพศาล. 2540. การพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต, สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, สำนักงาน. 2542. พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2542. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

คณะกรรมการพัฒนาการเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ, สำนักงาน. 2549. แผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 10 (พ.ศ. 2550-2554). [ออนไลน์] แหล่งที่มา: http://www.ldd.go.th/Thai-html/05022007/PDF/PDF01/index.htm [2551, 3 กันยายน].

เจนสมุทร แสงพันธ์. 2550. การศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในการแก้ปัญหาปลายเปิด : เน้นการแก้ปัญหาในกลุ่มย่อย. วารสารการวิจัยทางการศึกษา 7. 1(2551): 3 – 16.

ฉวีวรรณ เศวตมาลย์. 2543. ศิลปะการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: สุริยสาส์น. แปลจาก Max A. Sobel.1999. Teaching Mathematics: A Sourcebook of Aids, Activities, and Strategies. New Jersey: Allyn & Bacon.

ฉวีวรรณ เศวตมาลย์. 2545. การพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: สุริยสาส์น.

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี. 2542. การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.

ชนิศวรา ฉัตรแก้ว. 2549. การพัฒนาหน่วยการเรียนรู้เรขาคณิตและลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลีโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเรขาคณิตแบบพลวัตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต, สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

ชัชชัย คุ้มทวีพร. 2534. ตรรกวิทยา. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

ทิศนา แขมมณี. 2542. วิทยาการด้านการคิด. กรุงเทพมหานคร: สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ.

นวลศรี ชำนาญกิจ. 2550. ผลการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของไดนา แวน ฮีลี ที่มีต่อระดับการคิดทางเรขาคณิต ตามตัวแบบแวน ฮีลี และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ของนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์. งานวิจัย มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์.

นาตยา น้ำจิตตรง. 2546. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนระหว่างการสอนที่เน้นลำดับขั้นการเรียนรู้เรขาคณิตของแวนฮีลีโมเดลกับการสอนแบบปกติ. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. 2545. การวัดประเมินการเรียนรู้. กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาการวัดและประเมินผลการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ปานทอง กุลนาถศิริ. 2541. การสอนเรขาคณิตในระดับประถมศึกษาในศตวรรษที่ 21. วารสารสสวท. 26(กรกฎาคม-กันยายน 2541): 3- 5.

พวงรัตน์ ทวีรัตน์. 2530. การสร้างและพัฒนาแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์. กรุงเทพมหานคร: สำนักทดสอบทางการศึกษาและจิตวิทยา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

พนิดา กองเกตุใหญ่. 2542. ระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแบบแวนฮีลีของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้นในจังหวัดกาญจนบุรี. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต แขนงวิชาหลักสูตรและการสอน สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ สุโขทัยธรรมาธิราช.

พร้อมพรรณ อุดมสิน. 2538. การวัดและประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พร้อมพรรณ อุดมสิน. 2544. การวัดและการประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

พิริยพงศ์ เตชะศิริยืนยง. 2552. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการสอนแบบสืบสวนสอบสวนโดยใช้เกมคณิตศาสตร์ เรื่อง การให้เหตุผล. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการมัธยมศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ไพศาล หวังพานิช. 2526. การวัดผลการศึกษา. กรุงเทพมหานคร : ไทยวัฒนาพานิช.

มานะ เอกจริยวงศ์. 2537. จุดมุ่งหมายของการสอนเรขาคณิตในโรงเรียน. วารสารคณิตศาสตร์ปริมา. 38 (พฤษภาคม – มิถุนายน) : 4-8.

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช. 2537. การวัดและการประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.

มานะ เอกจริยวงศ์. 2547. แนวทางการสำรวจทางเรขาคณิตโดยใช้เทคโนโลยี. วารสารคณิตศาสตร์. ฉบับเฉลิมพระเกียรติ 72 พรรษา: 51 - 54.

ยุพิน พิพิธกุล. 2530. การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร : คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ยุพิน พิพิธกุล. 2539. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: บพิธการพิมพ์.

ยุพิน พิพิธกุล. 2545. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยุคปฏิรูปการศึกษา. กรุงเทพมหานคร: บพิธการพิมพ์.

เยาวดี วิบูลย์ศรี. 2545. วัดผลและการสร้างแบบสอบผลสัมฤทธิ์. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เยาวเรศ สิงหนันท์. 2533. การเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์โจทย์เรขาคณิตระหว่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนรัฐบาลและโรงเรียนเอกชน เขตการศึกษา 6. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2539. เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้. กรุงเทพมหานคร : สุวีริยาสาส์น.

วรรณวิภา สุทธเกียรติ. 2542. การพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต. สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร.

วิชาการ, กรม. 2539. การประเมินจากสภาพจริง. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ทดสอบทางการศึกษา, สำนัก. 2549. ผลการประเมินคุณภาพการศึกษาระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานปีการศึกษา 2549. [ออนไลน์]. แหล่งที่มา : http://bet.obec.go.th/eqa/images/2008/documents/nt2549final.pdf [2551, 14 กันยายน]

ทิศนา แขมมณี. 2542. วิทยาการด้านการคิด. กรุงเทพมหานคร: สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ.

ณรงค์ ปั้นนิ่ม. 2549. คู่มือคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 3 เล่ม 2. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร: ภูมิบัณฑิต.

ศิริชัย กาญจนวาสี. 2544. ทฤษฎีการทดสอบแบบดั้งเดิม. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. 2544. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

ส.วาสนา ประวาลพฤกษ์. 2533. การประเมินทักษะกระบวนทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา. กรุงเทพมหานคร: มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. กระทรวงศึกษาธิการ. 2544. คู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. กระทรวงศึกษาธิการ. 2546. คู่มือครูสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. กระทรวงศึกษาธิการ. 2549. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. กระทรวงศึกษาธิการ. 2551. ทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : ส เจริญ การพิมพ์.

สมทรง สุวพานิช. เรขาคณิต...ศาสตร์มหัศจรรย์. วารสารครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม 7. 1(12) (ม.ค.-มิ.ย. 2553): 33 – 38.

สมพร เรืองโชติวิทย์. 2523. รากฐานเรขาคณิต. กรุงเทพมหานคร: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน.

สมวงษ์ แปลงประสพโชค. 2544. การให้เหตุผล. กรุงเทพมหานคร: สถาบันราชภัฏพระนคร.

สมวงษ์ แปลงประสพโชค.ความสำคัญของการเรียนการสอนเรขาคณิต[ออนไลน์] แหล่งที่มา : http://www.mc41.com/area/gift-math02.htm [2551, 3 ธันวาคม].

สมนึก ภัททิยธนี. 2541. การวัดผลการศึกษา. พิมพ์ครั้งที่ 2. กาฬสินธุ์: ประสานการพิมพ์.

สมเดช บุญประจักษ์. 2540. การพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่1 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต, สาขาวิชาคณิตศาสตรศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สมเดช บุญประจักษ์. 2544. เรขาคณิต. กรุงเทพมหานคร: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

สมศักดิ์ ภู่วิภาวรรธน์. 2544. การยึดผู้เรียนเป็นศูนย์กลางและการประเมินตามสภาพจริง. พิมพ์ครั้งที่ 2. เชียงใหม่: The Knowledge Center.

สมศักดิ์ สินธุรเวชญ์. 2529. การประเมินผลกลุ่มทักษะคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา. กรุงเทพมหานคร: ฝ่ายส่งเสริมมาตรฐานการศึกษา สำนักงานทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ.

สิริพร ทิพย์คง. 2536. ทฤษฎีและวิธีสอนวิชาคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: คณะศึกษาศาสตร์, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. (อัดสำเนา)

สิริพร ทิพย์คง. 2545. หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์บริษัทพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด.

สิริพร ทิพย์คง. 2547. แวนฮีลีโมเดล : ลำดับขั้นตอนการเรียนรู้เรขาคณิต. วารสารคณิตศาสตร์. ฉบับเฉลิมพระเกียรติ 72 พรรษา:55 – 64.

สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย. 2550. คำถามหลัก (Key question) : กุญแจไขความคิดและความเข้าใจในการพิสูจน์เรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษา. วารสารคณิตศาสตร์. 52(สิงหาคม – ตุลาคม 2550): 16-20.

สุวัฒนา เอี่ยมอรพรรณ. 2546. วิธีและเทคนิคการสอนคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาการคิด. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เสริมศักดิ์ วิศาลาภรณ์. 2519. รากฐานของเรขาคณิต. พิษณุโลก: แผนกเอกสารและการพิมพ์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก.

เสาวนีย์ เกียร์. 2540. คู่มือการอบรมการใช้แฟ้มสะสมงานนักเรียน. กรุงเทพมหานคร: เนติกุลการพิมพ์.

อัมพร ม้าคนอง. 2547. เอกสารการสอน รายวิชา 2704686 ทฤษฎีและการประยุกต์ทางการศึกษาคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: คณะครุศาสตร์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (อัดสำเนา).

ภาษาอังกฤษ

Assaf, S. A. 1986. The Effects of Using LOGO Turtle Graphics in Teaching Geometry on Eighth Grade Students' Level of Thought, Attitudes Toward Geometry and Knowledge of Geometry. Dissertation Abstracts International 46 (April 1986): 2952 - A.

Bobango, J. C. 1988. Van Hiele levels of geometric thought and student achievement in standard content and proof writing: the effect of phase-based instruction. Doctoral dissertation, The Pennsylvania State University, 1987. Dissertation

Abstracts International. 48 (1988): 2566-A.

Burger, W. F. and Shaughnessy J. M. 1986. Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. Journal for Research in Mathematics Education17, 1 (1986): 31-48.

Brown M., Jones K. and Taylor R. 2003. Developing geometrical reasoning in the secondary school: outcomes of trialling activities in classrooms, Report, Qualifications and Curriculum Authority. School of Education, University of Southampton, Southampton, UK.

Carroll, J. B. 1963. A Model of School Learning. Teacher College Record. 64 (May 1963): 723-733.

Carroll, W. M. 1998. Middle school students' reasoning about geometric situations. Mathematics Teaching in the Middle School, 3(March-April), 398-403.

Chaiyasang, S. 1988. An investigation into level of geometric thinking and ability to construct proof of students in thailand. Doctoral dissertation, The University of Iowa, 1987. Dissertation Abstracts International .49 (1988): 2137-A.

Clements, D. H., and Battista, M. T. 1992. Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 420-464. New York: Macmillan.

Crowley, M. L. 1987. The van Hiele model of the development of geometry thought. In M. M.Lindquist and A. Shulte (eds.), Learning and teaching geometry, K-12, 1-16. Reston, Virginal: National Council of Teachers of Mathematics.

De Villers, M. D. 1999. Excerpt from Introduction Rethinking Proof with Sketchpad. Key Curriculum Press.

Ding, L. and Jones, K. 2007. Using the Van Hiele theory to analyse the teaching of geometrical proof at grade 8 in Shanghai, Proceedings of European Research in Mathematics Education V, 612-621.

Evans, R. 2007. Proof and Geometric Reasoning. Mathematics Teaching Incorporating Micromath, 201 (March 2007): 38-41.

Eysenck, H. J. Wurzburg, W. A., and Berne, R. M. (1972). Encyclopedia psychology. London: Search Press.

Frerking, B. G. 1994. Conjecturing and proof-writing in dynamic geometry. Ph.D. Thesis. Georgia State University.

Garabedian, C. Jr., 1981. The Effects of Proof on Achievement and Reasoning Ability of Students in Geometry. Ph.D. Thesis. The University of connecticut. Dissertation Abstracts international 42 (Aug 1981).

Goodrich, H. 1997. Understanding rubrics. Educational Leadership, 54(4): 14-17.

Guilford, J.P. and Hoepfner. 1971. The Analysis of Intelligence. New York: McGraw-Hill.

Han, T. S. The effects on achievement and attitude of a standard geometry textbook and a textbook consistent with the van Hiele theory. Doctoral dissertation, The University of Iowa, 1986. Dissertation Abstracts Insternational. 47 (1987): 3690 - A.

Hopkins, C.D., and Antes, R.L. 1990. Classroom Measurement and Evaluation. 3rd ed. Itasca, IL: F.E. Peacock.

Hoyles, C. and Jones, K. 1998. Proof in Dynamic Geometry Contexts. In C. Mammana and V. Villani, Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, 121-128. Dordrecht: Kluwer.

Jacobs, R.F. and Meyer, R.A. 1972. Discovering Geometry. New York: Harcourt Brace Jovanovich.

Lappan, G. and Schram, W. P. 1989. Communication and Reasoning: Critical Dimensions of Sense Making in Mathematic. In New Directions for Elementary School Mathematics, Yearbook. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics: 14-30.

Lowry, J. A. 1988. An investigation of nine – year – olds' geometric concepts of area and perimeter. Doctoral dissertation, University of Maryland College Park, 1987. Dissertation Abstracts Insternational. 48 (1988): 1971-A.

Maddox, H. 1965. How to Study. New York : Fawcett World Library.

Mason, M. 2009. The van Hiele levels of geometric understanding. [Online]. Available from: http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/download/96/91. [2009, November 14]

Mason, M. M. and Moore, Sara D. 1997. Assessing Readiness for Geometry in Mathematically Talented Middle School Students. Journal of Secondary Gifted

Education 8, Issue 3 (Spring 1997): 105-111.

Meng, C. C. and Idris, N. 2007. Enhancing Form One Students' Learning of Solid Geometry Through Phase-Based Instruction Using the Geometer's Sketchpad, Proceedings of 4th EAST ASIA REGIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS EDUCATION (EARCOME4), 242-249.

Mehrens, W.A.; & I.J.Lehmann. 1969. Standard Test in Education. New York: Holt, Rivehart and Wirston.

National Council of Teachers of Mathematics. 2000. Principles and Standards for School Mathematics. Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, INC.

Prescott, D. A. 1961. A Report of the Conference on Child Study. Educational Bulletin. Bangkok: Faculty of Education.

Pusey ,E. L. 2003. THE VAN HIELE MODEL OF REASONING IN GEOMETRY:A LITERATURE REVIEW. Master Thesis. North Carolina State University.

Ravielli, A. 1957. An adventure in geometry. New York: The Viking Press,

Senk, S. L. 1989. Van Hiele Levels and Achievement in Writing Geometry Proofs. Journal for Research in Mathematics Education 20, No. 3 (1989): 309 - 321.

Sidhu, K. S. 1981. The Teaching of Mathematics. 3rd ed. New Delhi: Sterling Printers.

Simmons, M. 1992. The Effective Teaching of Mathematics. New York: Longman Publishing.

Stenmark, J.K. 1991. Mathematics Assessment : myths, models, good question, and Practical Suggestion. California : The Nation Council of Teachers of Mathematics, INC.

Teppo, A. 1991. Van Hiele Levels of Geometric Thought Revisited. The Mathematics Teacher 84, No. 3 (March 1991): 210-220.

Usiskin, Z. 1987. Resolving the Continuing Dilemmas in School Geometry . In Mary M. Lindquist , Learning and teaching geometry, K-12, 7-31.Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Wilson, J. W. 1971. Evaluation of learning in Secondary School Mathematics. In B. S. Bloom, J. T. Hastings, and G. F. Madaus, Formative and Summative Evaluation of Classroom Learning, (Chapter 19). New York: McGraw-Hill.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

ผู้ทรงคุณวุฒิที่พิจารณา ความตรงตามเนื้อหา(Content Validity) ความสอดคล้องของข้อคำถาม ตัวเลือก ความเหมาะสมของสำนวนภาษา พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแก้ไขเครื่องมือวิจัย
แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบแบบวัดพื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต (ฉบับที่ 1 ก่อนเรียน และ ฉบับที่ 2 หลังเรียน)

1. อาจารย์ประสาท สอ้านวงศ์	ผู้ทรงคุณวุฒิสาขาคณิตศาสตร์มัธยม สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ข้าราชการบำนาญ สำนักงานปลัดกระทรวงศึกษาธิการ
2. ผศ.ดร. ชานนท์ จันทรา	อาจารย์ประจำสาขาการสอนคณิตศาสตร์ ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
3. อาจารย์ ดร.วรรณวิภา สุทธเกียรติ	อาจารย์ประจำกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย

ผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

1. อาจารย์ประสาท สอ้านวงศ์	ผู้ทรงคุณวุฒิสาขาคณิตศาสตร์มัธยม สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และ เทคโนโลยี ข้าราชการบำนาญ สำนักงานปลัดกระทรวงศึกษาธิการ
2. อาจารย์ ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม	อาจารย์ประจำสาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยี การศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
3. อาจารย์ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา	อาจารย์ประจำกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนวัดราชบพิธ

ภาคผนวก ข

หนังสือเชิญผู้ทรงคุณวุฒิและขอความร่วมมือในการวิจัย

ที่ ศธ 0512.6(2771)/**1402**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

30 มิถุนายน 2552

เรื่อง ขอเชิญบุคลากรในสังกัดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนคณิตศาสตร์และเทคโนโลยี

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นางสาวยุวรรณดา พรหมนิวาส นิสิตชั้นปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2" โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญ อาจารย์ประสาท สอ้านวงศ์ เป็นผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบคุณภาพแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต แบบวัดพื้นฐานการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้ อาจารย์ ดร.ชานนท์ จันทรา เป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

สำนักงานวิชาการ หลักสูตรและการสอน
โทร. 0-2218-2680-2 ต่อ 612

ที่ ศธ 0512.6(2771)/**1399**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

30 มิถุนายน 2552

เรื่อง ขอเชิญบุคลากรในสังกัดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

เรียน คณบดีคณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นางสาวยุวรรณดา พรหมนิวาส นิสิตชั้นปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2" โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญ อาจารย์ ดร.ชานนท์ จันทรา เป็นผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบคุณภาพแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และแบบวัดพื้นฐานการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้ อาจารย์ ดร.ชานนท์ จันทรา เป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

สำนักงานวิชาการ หลักสูตรและการสอน
โทร. 0-2218-2680-2 ต่อ 612

ที่ ศธ 0512.6(2771)/**1398**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

30 มิถุนายน 2552

เรื่อง ขอเชิญบุคลากรในสังกัดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนสามเสนวิทยาลัย

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นางสาวยุวรรณดา พรหมนิวาส นิสิตชั้นปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2" โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญ อาจารย์ ดร.วรรณวิภา สุทธเกียรติ เป็นผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบคุณภาพแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และแบบวัดพื้นฐานการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ทั้งนี้ นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้ อาจารย์ ดร.วรรณวิภา สุทธเกียรติ เป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

สำนักงานวิชาการ หลักสูตรและการสอน
โทร. 0-2218-2680-2 ต่อ 612

บันทึกข้อความ

ส่วนงาน สำนักงานวิชาการ หลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร.82680-2 ต่อ 612

ที่ **ศธ 0512.6(2771)/1400** **วันที่** 30 มิถุนายน 2552

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย

เรียน อาจารย์ไพโรจน์ น่วมนุ่ม

ด้วย นางสาวยุวรรณดา พรหมนิวาส นิสิตชั้นปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาหลักสูตร การสอน และเทคโนโลยีการศึกษา สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2" โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดีฝ่ายวิชาการ หลักสูตรและการสอน

ที่ ศธ 0512.6(2771)/**1401**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

30 มิถุนายน 2552

เรื่อง ขอเชิญบุคลากรในสังกัดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนวัดราชบพิตร

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นางสาวยุวรรณดา พรหมนิวาส นิสิตชั้นปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาหลักสูตร การสอน และเทคโนโลยีการศึกษา สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2" โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญ อาจารย์ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา เป็นผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้ อาจารย์ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา เป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

สำนักงานวิชาการ หลักสูตรและการสอน
โทร. 0-2218-2680-2 ต่อ 612

ที่ ศธ 0512.6(2771)/**2237**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

21 กันยายน 2552

เรื่อง ขออนุญาตทดลองใช้เครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นางสาวยุวรรณดา พรหมนิวาส นิสิตชั้นปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2" โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตมีความจำเป็นต้องทดลองใช้เครื่องมือ คือ แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แบบวัดพื้นฐานการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตกับนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1-2 ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้ นางสาวยุวรรณดา พรหมนิวาส ได้ทดลองใช้เครื่องมือดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

สำนักงานวิชาการ หลักสูตรและการสอน
โทร. 0-2218-2680-2 ต่อ 612

ที่ ศธ 0512.6(2771)/**2240**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

21 กันยายน 2552

เรื่อง ขออนุญาตทดลองใช้เครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัย

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นางสาวขุวรรณดา พรหมนิวาส นิสิตชั้นปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2" โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตมีความจำเป็นต้องทดลองใช้เครื่องมือ คือ แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แบบวัดพื้นฐานการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตกับนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1-2 ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้ นางสาวขุวรรณดา พรหมนิวาส ได้ทดลองใช้เครื่องมือดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

สำนักงานวิชาการ หลักสูตรและการสอน
โทร. 0-2218-2680-2 ต่อ 612

ที่ ศธ 0512.6(2771)/**53-3030**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

10 สิงหาคม 2553

เรื่อง ขอความร่วมมือในการเก็บข้อมูลวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนสันติราษฎร์วิทยาลัย

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นางสาวขวรรณดา พรหมนิวาส นิสิตชั้นปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาหลักสูตร การสอน และเทคโนโลยีการศึกษา สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2" โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตมีความจำเป็นต้องเก็บข้อมูลด้วยแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แบบวัดพื้นฐานการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต กับนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้นิสิตได้ทำการเก็บข้อมูลวิจัยดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อาชัญญา รัตนอุบล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

ฝ่ายวิชาการ หลักสูตรและการสอน
โทร. 0-2218-2680-2 ต่อ 612

ภาคผนวก ค

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ของกลุ่มทดลอง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 สำหรับกลุ่มทดลอง

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1
เรื่อง รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน จำนวน 2 คาบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว

1. ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1.1 บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ

1.2 นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน-มุม-ด้าน ไปใช้อ้างอิงในการให้เหตุผลได้

2. ด้านทักษะ/กระบวนการ นักเรียนสามารถ

2.1 แสดงเหตุผลโดยอ้างอิงความรู้ที่เรียนได้

2.2 สังเกต สำรวจ และแสดงการตรวจสอบการเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปได้

2.3 เชื่อมโยงเนื้อหาคณิตศาสตร์ได้

3. ด้านคุณลักษณะ นักเรียนมีคุณลักษณะ

3.1 ตั้งใจและมีความสนใจในการเรียน

3.2 ทำงานอย่างมีระบบ ระเบียบ รอบคอบ

3.3 สามารถแสดงความคิดเห็นอย่างมีเหตุผล

สาระสำคัญ

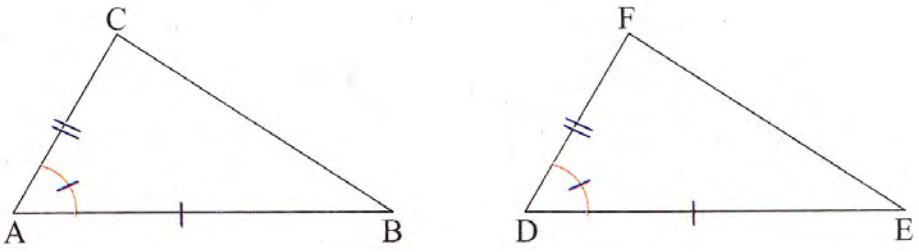
รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน คือ รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

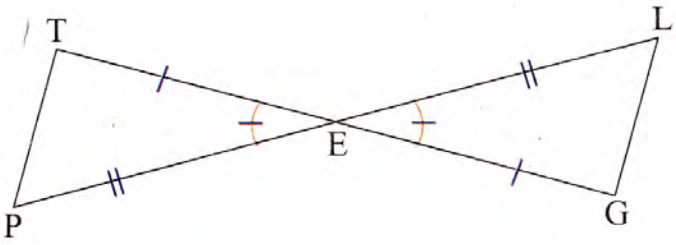
สาระการเรียนรู้

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน – มุม – ด้าน ตัวอย่างเช่น

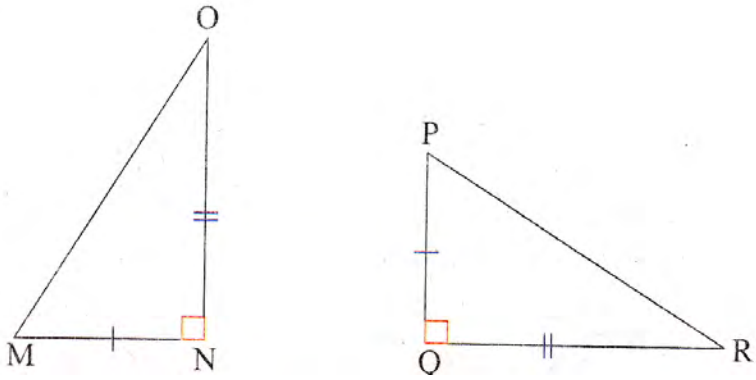
1.



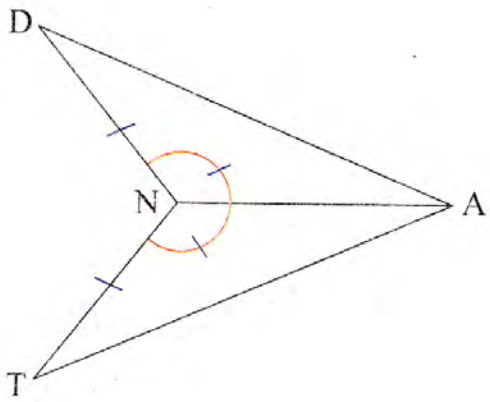
2.



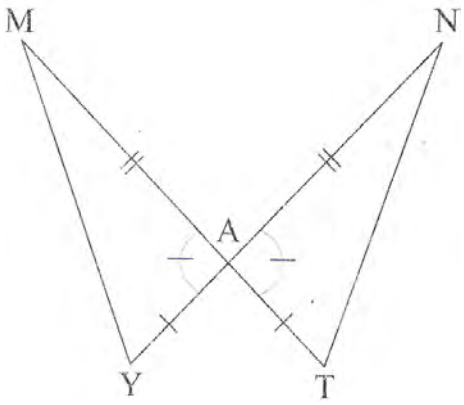
3.



4.



5.



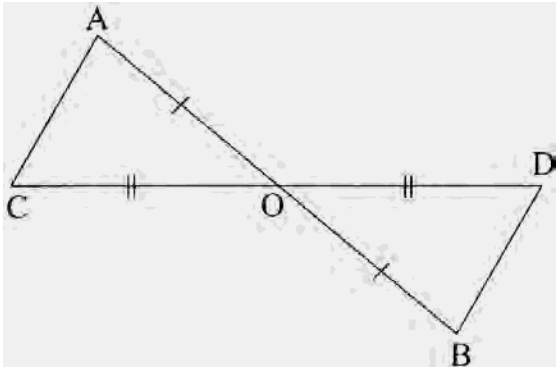
จะเห็นได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน หรือเขียนย่อๆว่า ด.ม.ด. จะมีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ โดยมุมคู่นั้นเป็นมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน

และผลที่ได้ตามมาคือ ด้านที่สมนัยกันที่เหลืออีก 1 คู่จะยาวเท่ากัน และมุมคู่ที่สมนัยกันที่เหลืออีก 2 คู่ จะมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ

โดยทั่วไป รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด.ม.ด. จะเท่ากันทุกประการ ซึ่งเป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ด.ม.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมีมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ตัวอย่างที่ 1



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB}$ ตัดกับ $\overline{CD}$ ที่จุด O มี AO = BO และ CO = DO จงพิสูจน์ว่า $\Delta AOC \cong \Delta BOD$

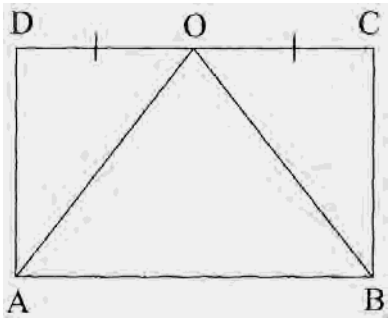
กำหนดให้ $\overline{AB}$ ตัดกับ $\overline{CD}$ ที่จุด O มี AO = BO และ CO = DO

ต้องการพิสูจน์ว่า $\Delta AOC \cong \Delta BOD$

พิสูจน์ พิจารณา ΔAOC และ ΔBOD

AO = BO	(กำหนดให้)
$A\hat{O}C = B\hat{O}D$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)
CO = DO	(กำหนดให้)
ดังนั้น $\Delta AOC \cong \Delta BOD$	(ด.ม.ด.)

ตัวอย่างที่ 2 □ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และจุดO เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$ จงพิสูจน์ว่า $\Delta ADO \cong \Delta BCO$ และ $A\hat{O}D = B\hat{O}C$



กำหนดให้ □ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และจุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$

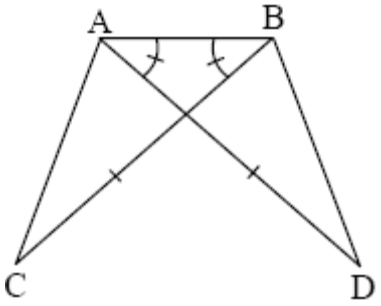
ต้องการพิสูจน์ว่า $\Delta ADO \cong \Delta BCO$ และ $A\hat{O}D = B\hat{O}C$

พิสูจน์ พิจารณา ΔADO และ ΔBCO

DO = CO	(กำหนดให้จุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$)
$A\hat{D}O \cong B\hat{C}O = 90^\circ$	(มุมภายในแต่ละมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีขนาด 90°)
AD = BC	(ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากยาวเท่ากัน)
ดังนั้น $\Delta ADO \cong \Delta BCO$	(ด.ม.ด.)
และ $A\hat{O}D = B\hat{O}C$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ BC = AD และ $A\hat{B}C = B\hat{A}D$

จงพิสูจน์ว่า AC = BD และ $B\hat{A}C = A\hat{B}D$



กำหนดให้ BC = AD และ $A\hat{B}C = B\hat{A}D$

ต้องการพิสูจน์ว่า AC = BD และ $B\hat{A}C = A\hat{B}D$

พิสูจน์ พิจารณา Δ ABC และ Δ BAD

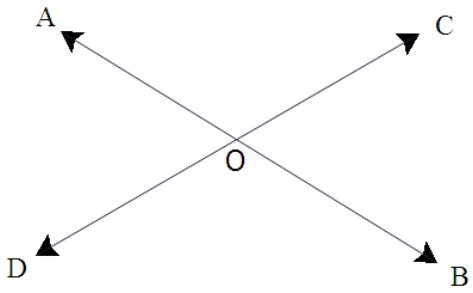
BC = AD	(กำหนดให้)
$A\hat{B}C = B\hat{A}D$	(กำหนดให้)
AB = BA	(AB เป็นด้านร่วม)
ดังนั้น Δ ABC $\cong$ Δ BAD	(ด.ม.ด.)
จะได้ AC = BD	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน)
และ $B\hat{A}C = A\hat{B}D$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน)

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

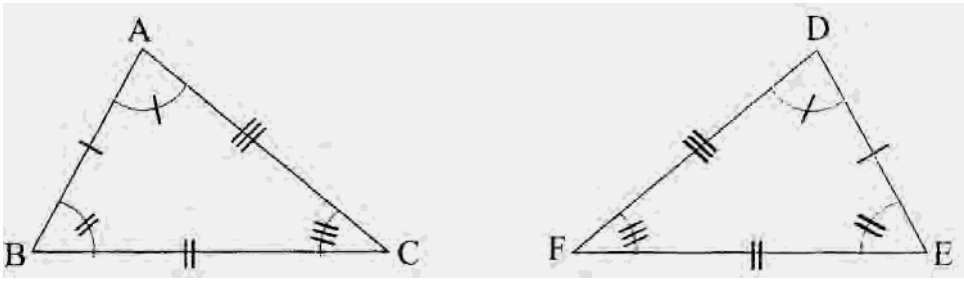
ขั้นการใช้คำถามเพื่อเข้าสู่บทเรียน (Information)

1. ครูทบทวนเรื่องที่ใช้อ้างอิง คือ สาระที่ว่า “ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากัน” และสมบัติของความเท่ากันทุกประการที่ว่า “รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ ด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ” โดย ใช้การถามตอบ เพื่อทบทวนความรู้เดิมที่ต้องใช้ในการอ้างอิงดังนี้



1.1 ถามนักเรียนว่าจากภาพที่ปรากฏ นักเรียนบอกอะไรจากภาพได้บ้าง (เส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด O, มุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากัน)

2. จากนั้นครูแสดงภาพดังตัวอย่างต่อไปนี้



2.1 รูปสามเหลี่ยม 2 รูปนี้เท่ากันทุกประการหรือไม่ (เท่ากันทุกประการ)

2.2 นักเรียนจะตรวจสอบความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปรูปนี้ได้อย่างไร (ต้องตรวจสอบการเท่ากันของความยาวของด้านที่สมนัยกัน 3 คู่ และการเท่ากันของขนาดของมุมคู่ที่สมนัยกันอีก 3 คู่)

3. ครูแนะนำว่าในบทเรียนที่จะเรียนวันนี้ เราจะตรวจสอบว่าถ้าทราบว่ามีด้านของรูปสามเหลี่ยมเท่ากันสองด้าน และมีมุมที่อยู่ในระหว่างด้านคู่ที่เท่ากันมีขนาดเท่ากัน ตามเงื่อนไขที่กำหนดข้างต้นเพียงพอที่จะสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการหรือไม่

ขั้นสอน

ขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation)

1. ครูแจกใบงานที่ 4.1 เรื่อง “รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านคู่ที่สมนัยยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จะเท่ากันทุกประการหรือไม่” นักเรียนแต่ละคนศึกษาใบงาน สร้างความเข้าใจคำสั่งและการบันทึกผลให้ตรงกัน

2. ให้นักเรียนสำรวจรูปสามเหลี่ยมสองรูปว่าเท่ากันทุกประการหรือไม่จากการศึกษากิจกรรมในใบงานที่ 4.1 โดยใช้การวัด หรือใช้กระดาษลอกลาย

3. จากนั้นให้ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปผลที่ได้จากการสำรวจกิจกรรมในใบงานที่ 3.1 โดยใช้การถามตอบ เพื่อสร้างความเข้าใจที่ตรงกันดังต่อไปนี้

3.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อที่ได้สำรวจ เท่ากันทุกประการทุกข้อหรือไม่ (เท่ากันทุกประการทุกข้อ)

3.2 นักเรียนทราบได้อย่างไรว่าสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อเท่ากันทุกประการ และมีวิธีตรวจสอบอย่างไร (ด้านคู่ที่สมนัยกัน และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ ตรวจสอบโดยการวัดขนาดของด้านคู่ที่สมนัยกัน และมุมคู่ที่สมนัยกันเป็นคู่ๆ ตามลำดับ หรือการใช้กระดาษลอกลายลอกรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งไปทับรูปสามเหลี่ยมอีกรูป ถ้าทับกันสนิท แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ)

3.3 นักเรียนคิดว่าการกำหนดด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ โดยมุมคู่นั้นเป็นมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน เพียงพอที่จะสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการหรือไม่ (เพียงพอที่จะสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ <u>หมายเหตุ</u> ถ้านักเรียนคนใดคิดว่าไม่เพียงพอ ให้ลองยกตัวอย่างค้าน จนได้ข้อสรุปว่าถ้าทราบว่าถ้ามีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ โดยมุมคู่นั้นเป็นมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน ก็เพียงพอที่จะสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ)

3.4 นักเรียนคิดว่ารูปสามเหลี่ยมในแต่ละข้อที่ได้สำรวจนั้น มีความสัมพันธ์เหมือนกันในลักษณะใด (รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน)

4. ครูบอกนักเรียนว่าความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน สามารถเขียนย่อๆ ว่า ด.ม.ด. และนักเรียนจะได้ฝึกการให้เหตุผลด้วยการพิสูจน์อย่างเป็นแบบแผนจากใบงานที่ 4.2 เรื่อง “รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่”

5. จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันสรุปว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบด.ม.ด. จะเท่ากันทุกประการ ตามสมบัติที่ว่า

> ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ด.ม.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมีมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

6. จากนั้นนักเรียนจะได้เรียนรู้การนำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน ไปใช้อ้างอิงในการให้เหตุผล จากใบงานที่ 4.2 โดยการร่วมกันอภิปราย เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกวิเคราะห์แยกเหตุ (สิ่งที่กำหนดให้) และแยกผล (สิ่งที่ต้องพิสูจน์) โดยพิจารณาถึงความสัมพันธ์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องว่าเกิดขึ้นด้วยเหตุผลอะไร และต้องใช้ความรู้เรื่องใดมาประกอบการอธิบายเหตุผล พร้อมบันทึกแนวคิดการเขียนพิสูจน์ด้วยตัวเองลงในใบงาน โดยนักเรียนวิเคราะห์จากผลไปสู่เหตุด้วยการใช้คำถาม ดังต่อไปนี้

6.1 โจทย์ให้พิสูจน์อะไร ($\Delta AOC \cong \Delta BOD$)

6.2 การจะพิสูจน์สิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์นั้น จะต้องทราบความสัมพันธ์ใดบ้าง (การจะสรุปได้ว่า $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ แบบ ด.ม.ด. จะต้องทราบว่าด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่และมุมในระหว่างด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่)

6.3 ความสัมพันธ์ที่กล่าวมาข้างต้น มีข้อมูลใดที่ทราบแล้วบ้าง (1. AO = BO 2. CO = DO)

6.4 ข้อมูลดังกล่าวข้างต้นเพียงพอที่จะสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่ (ยังไม่เพียงพอ)

6.5 ถ้าข้อมูลยังไม่เพียงพอที่จะสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ต้องมีข้อมูลใดอีก และหาจากความสัมพันธ์ใด อย่างไร (ขาด $A\hat{O}C = B\hat{O}D$ ซึ่งเราทราบจากความสัมพันธ์ที่ว่า ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน) (<u>หมายเหตุ</u> หากนักเรียนตอบเหตุที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์จากคำถามข้อ 6.3 ยังไม่ครบถ้วน จึงใช้คำถามนี้)

7. ให้นักเรียนนำผลที่เกิดจากการร่วมกันวิเคราะห์ข้างต้น มาเรียงลำดับใหม่อย่างสมเหตุสมผลด้วยตนเอง พร้อมย้ำให้นักเรียนเขียนอธิบายเหตุผลกำกับข้อความพิสูจน์ด้วย (การกระทำดังกล่าว แสดงถึงการลำดับการเขียนพิสูจน์แบบเป็นทางการ) แล้วเขียนลงในใบงานที่ 4.2 เรื่อง “รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่” โดยครูผู้สอนคอยให้ความช่วยเหลือ

<u>ขั้นการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication)</u>

1. ครูให้นักเรียนที่นั่งข้างกันช่วยกันร่วกันอภิปรายแลกเปลี่ยนความคิด แล้วช่วยกันเรียบเรียงและแก้ไขใบงานที่ตนเองเคยเขียนไว้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น เมื่อนักเรียนเรียบเรียงการพิสูจน์เป็นคู่เรียบร้อยแล้ว ครูแจ้งให้นักเรียนเขียนชื่อของทั้งคู่ลงในใบงานให้เรียบร้อยทั้งสองชุด แล้วเก็บรวบรวมใบงานที่ 4.2 ของนักเรียนทุกคู่ๆ ละ 1 ชุด ซึ่งนักเรียนจะเหลือใบงานไว้กับคู่ตนเพียง 1 ชุด

2. ครูตรวจสอบใบงานของนักเรียนที่เก็บรวบรวมมาอย่างคร่าวๆ เพื่อจะได้เห็นข้อบกพร่องในเรื่องต่างๆ เช่น การใช้คำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ หรือขั้นตอนที่เรียบเรียงการเขียนพิสูจน์

3. จากนั้นครูและนักเรียนอภิปรายสรุปร่วมกันเพื่อปรับให้นักเรียนใช้ศัพท์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง รวมถึงเรียบเรียงการเขียนพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน และเพื่อสร้างความเข้าใจให้ถูกต้อง ตรงกัน

คาบที่ 2

ขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ (Free Orientation)

1. ครูนำเสนอปัญหาใหม่เพื่อตรวจสอบความเข้าใจการเขียนพิสูจน์และการให้เหตุผลทางเรขาคณิต รวมทั้งการนำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน มาใช้ในการหาคำตอบ โดยให้นักเรียนทำใบงานที่ 4.3 เรื่อง ฝึกหัดเพื่อความเข้าใจ โดยวิเคราะห์แนวคิดในการหาคำตอบเป็นลำดับอย่างสมเหตุสมผล พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบการพิจารณา แล้วเรียบเรียงวิธีการหาคำตอบใหม่

ขั้นสรุป

ขั้นการสรุปรวม (Integration)

1. ครูถามเพื่อให้นักเรียนช่วยกันสรุปสิ่งที่นักเรียนได้เรียน ได้ทำ และปัญหาที่พบในการเรียนเกี่ยวกับการสิ่งที่ได้เรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน

2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน หน้า 216 แบบฝึกหัดที่ 5.3 ข้อ 2 ข้อ 5 และ ข้อ 7 เป็นการบ้าน โดยให้นักเรียนใช้ความรู้ที่ได้จากการเรียนรู้ เพื่อเป็นการทบทวนสิ่งที่ได้เรียนรู้

สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. กระดาษลอกลาย
2. ไม้ครึ่งวงกลม หรือไม้โปรแทรคเตอร์
3. ไม้บรรทัด
4. ใบงาน ได้แก่ ใบงานที่ 4.1: รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านคู่ที่สมนัยยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จะเท่ากันทุกประการหรือไม่, ใบงานที่ 4.2: รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่, ใบงานที่ 4.3: ฝึกหัดเพื่อความเข้าใจ
5. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

วิธีการวัด	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
1. **ด้านความรู้** นักเรียนสามารถ 1.1 บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ 1.2 นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน ไปใช้อ้างอิงในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้	ผลการบันทึกในใบงาน และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน	1.1 นักเรียนสามารถสรุปได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ 1.2 นักเรียนพิสูจน์และแก้ปัญหาสิ่งที่โจทย์ต้องการได้ถูกต้องไม่น้อยกว่า 80% พร้อมอ้างอิงเหตุผลจากทฤษฎีบทหรือสมบัติทางเรขาคณิต และสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน
2. **ด้านทักษะ/กระบวนการ** นักเรียนสามารถ 2.1 แสดงเหตุผลโดยอ้างอิงความรู้ที่เรียนได้ 2.2 สังเกต สำรวจ และแสดงการตรวจสอบการเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปได้ 2.3 เชื่อมโยงเนื้อหาคณิตศาสตร์ได้	ผลการบันทึกในใบงาน และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน	2.1 นักเรียนอ้างเหตุผลจากความรู้ที่เรียนได้ถูกต้องไม่น้อยกว่า 80% 2.2 นักเรียนสามารถตรวจสอบการเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปโดยใช้กระดาษลอกลายหรือใช้เครื่องมือวัดขนาดมุมและความยาวได้ถูกต้อง 2.3 นักเรียนใช้ความรู้ที่สามารถใช้อ้างอิงได้ไม่น้อยกว่า 80%

วิธีการวัด	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
3. **ด้านคุณลักษณะ** นักเรียนมีคุณลักษณะ 3.1 ตั้งใจและมีความสนใจในการเรียน 3.2 ทำงานอย่างมีระบบระเบียบ รอบคอบ 3.3 สามารถแสดงความคิดเห็นอย่างมีเหตุผล	แบบสังเกตพฤติกรรม	

สรุปการสอนและการเรียนรู้โดยรวม

……

……

……

……

……

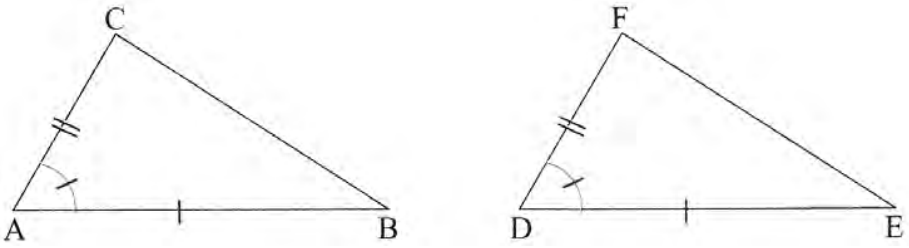
……

ชื่อ..... ชั้น ม.2/..... เลขที่.....

ใบงานที่ 4.1: รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านคู่ที่สมนัยยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จะเท่ากันทุกประการหรือไม่

คำชี้แจง: กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จงสำรวจว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปดังกล่าวเท่ากันทุกประการหรือไม่

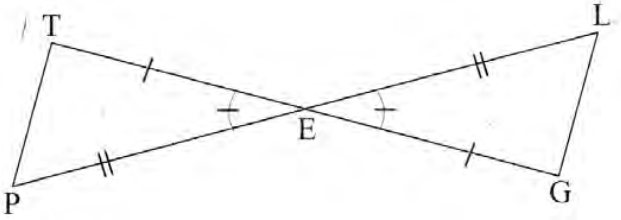
1.



……

……

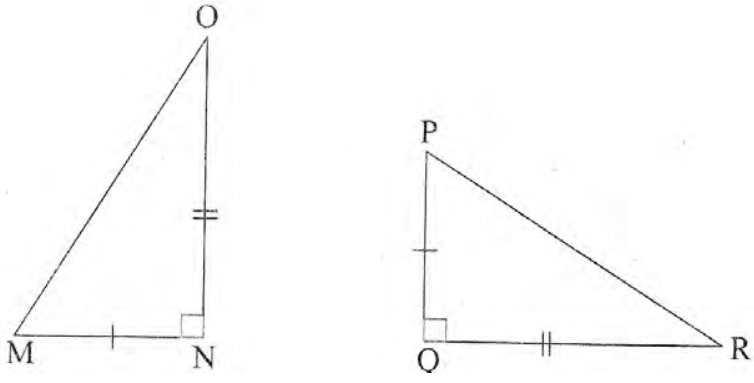
2.



……

……

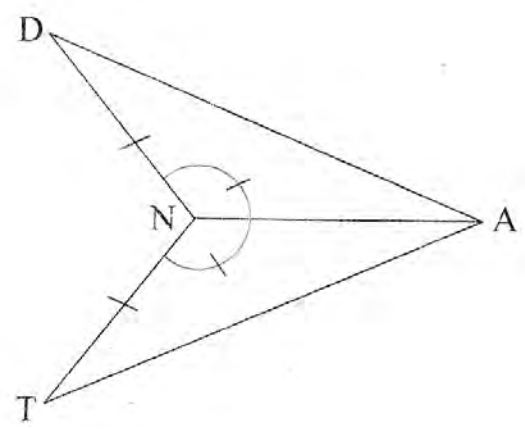
3.



……

……

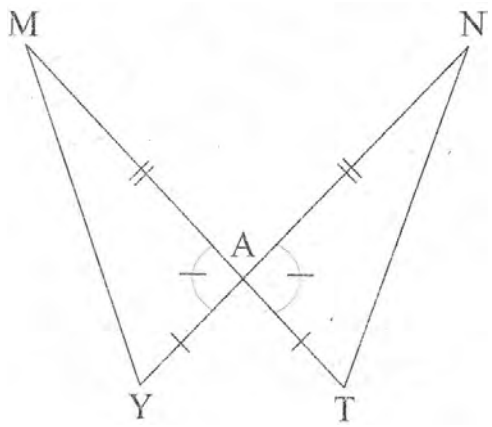
4.



……..…

……

5.



……..…

……

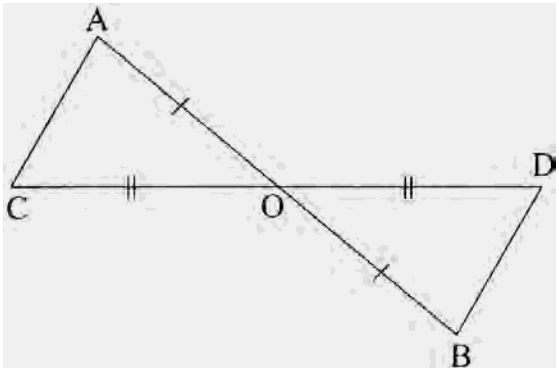
รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อมีความสัมพันธ์กันแบบ……

ชื่อ..... ชั้น ม.2/..... เลขที่.....

ชื่อ..... ชั้น ม.2/..... เลขที่.....

ใบงานที่ 4.2: รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่

คำชี้แจง: ให้นักเรียนเรียบเรียงการพิสูจน์ พร้อมให้เหตุผลทางเรขาคณิตประกอบ



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB}$ ตัดกับ $\overline{CD}$ ที่จุด O มี AO = BO และ CO = DO จง พิสูจน์ว่า $\Delta AOC \cong \Delta BOD$

<u>แนวคิดในการพิสูจน์</u>

.....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>เรียบเรียงการพิสูจน์</u>

.....

.....

.....

.....

.....

.....

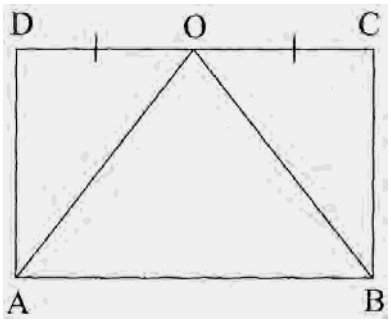
.....

.....

ชื่อ..... ชั้น ม.2/..... เลขที่.....

ใบงานที่ 4.3: ฝึกหัดเพื่อความเข้าใจ

คำชี้แจง: ให้นักเรียนพิจารณาข้อต่อไปนี้ แสดงการวิเคราะห์แนวคิด แล้วเรียบเรียงการเขียนพิสูจน์ พร้อมให้เหตุผลทางเรขาคณิตประกอบ

1. 

□ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และจุดO เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$ จงพิสูจน์ว่า $\Delta ADO \cong \Delta BCO$ และ $A\hat{O}D = B\hat{O}C$

<u>แนวคิดในการพิสูจน์</u>

.....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>เรียบเรียงการพิสูจน์</u>

.....

.....

.....

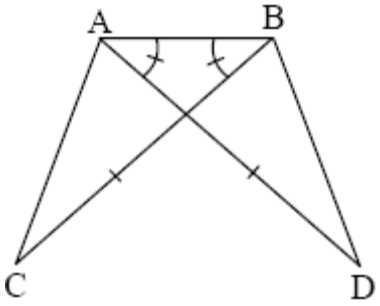
.....

.....

.....

.....

.

2. 

กำหนดให้ BC = AD และ $A\hat{B}C = B\hat{A}D$

จงพิสูจน์ว่า AC = BD และ $B\hat{A}C = A\hat{B}D$

<u>แนวคิดในการพิสูจน์</u>

……

……

……

……

……

……

<u>เรียบเรียงการพิสูจน์</u>

……

……

……

……

……

……

……

……

……

ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ของกลุ่มควบคุม

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 สำหรับกลุ่มควบคุม

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1
เรื่อง รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน จำนวน 2 คาบ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว

1. ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1.1 บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ

1.2 นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน-มุม-ด้าน ไปใช้อ้างอิงในการให้เหตุผลได้

2. ด้านทักษะ/กระบวนการ นักเรียนสามารถ

2.1 แสดงเหตุผลโดยอ้างอิงความรู้ที่เรียนได้

2.2 สังเกต สำรวจ และแสดงการตรวจสอบการเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปได้

2.3 เชื่อมโยงเนื้อหาคณิตศาสตร์ได้

3. ด้านคุณลักษณะ นักเรียนมีคุณลักษณะ

3.1 ตั้งใจและมีความสนใจในการเรียน

3.2 ทำงานอย่างมีระบบ ระเบียบ รอบคอบ

3.3 สามารถแสดงความคิดเห็นอย่างมีเหตุผล

สาระสำคัญ

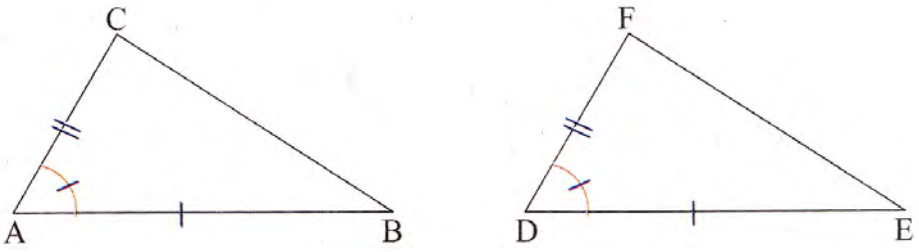
รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน คือ รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

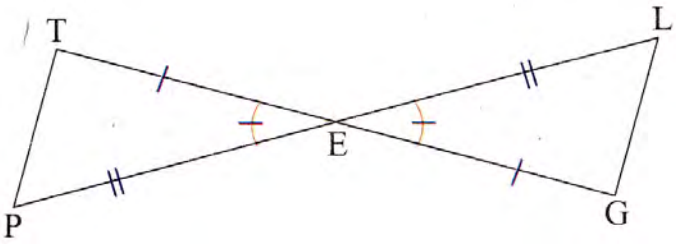
สาระการเรียนรู้

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน – มุม – ด้าน ตัวอย่างเช่น

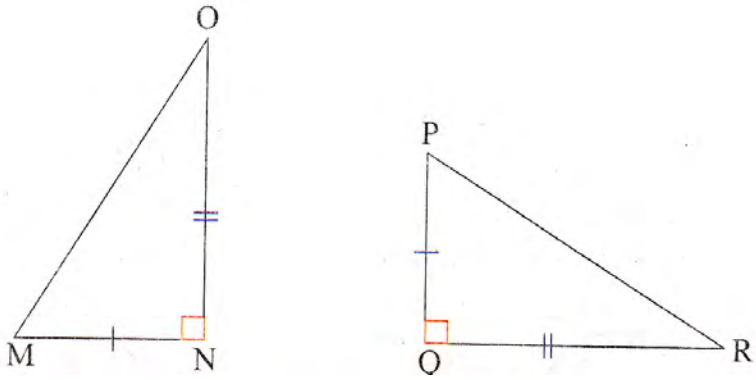
1.



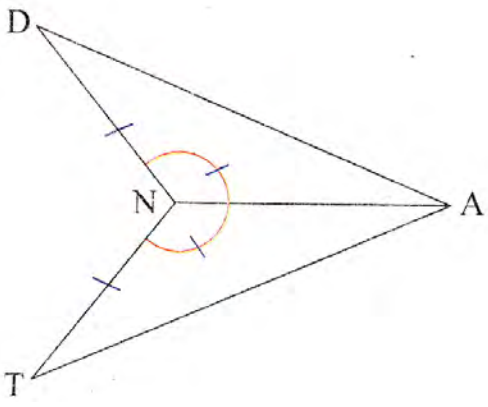
2.



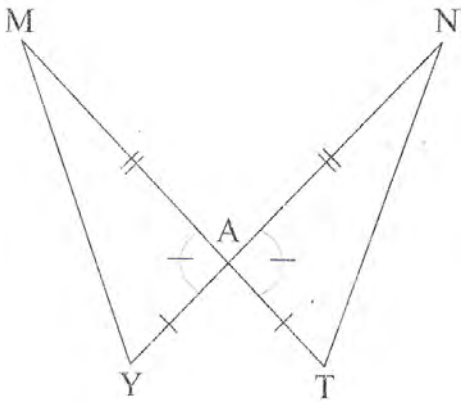
3.



4.



5.



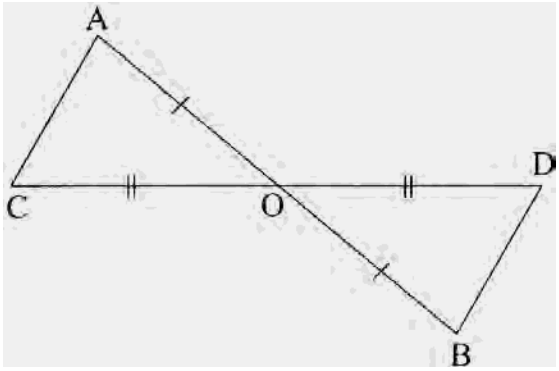
จะเห็นได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน หรือเขียนย่อๆว่า ด.ม.ด. จะมีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ โดยมุมคู่นั้นเป็นมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน

และผลที่ได้ตามมาคือ ด้านที่สมนัยกันที่เหลืออีก 1 คู่จะยาวเท่ากัน และมุมคู่ที่สมนัยกันที่เหลืออีก 2 คู่ จะมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ

โดยทั่วไป รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด.ม.ด. จะเท่ากันทุกประการ ซึ่งเป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ด.ม.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมีมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ตัวอย่างที่ 1



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB}$ ตัดกับ $\overline{CD}$ ที่จุด O มี AO = BO และ CO = DO จงพิสูจน์ว่า $\Delta AOC \cong \Delta BOD$

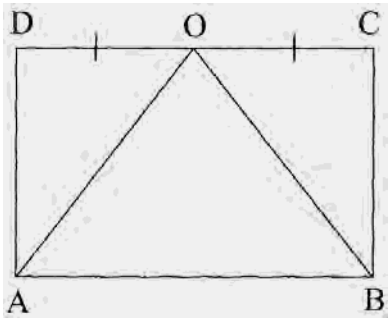
กำหนดให้ $\overline{AB}$ ตัดกับ $\overline{CD}$ ที่จุด O มี AO = BO และ CO = DO

ต้องการพิสูจน์ว่า $\Delta AOC \cong \Delta BOD$

พิสูจน์ พิจารณา ΔAOC และ ΔBOD

AO = BO	(กำหนดให้)
$A\hat{O}C = B\hat{O}D$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)
CO = DO	(กำหนดให้)
ดังนั้น $\Delta AOC \cong \Delta BOD$	(ด.ม.ด.)

ตัวอย่างที่ 2 $\square$ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และจุดO เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$ จงพิสูจน์ว่า $\Delta ADO \cong \Delta BCO$ และ $A\hat{O}D = B\hat{O}C$



กำหนดให้ $\square$ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และจุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$

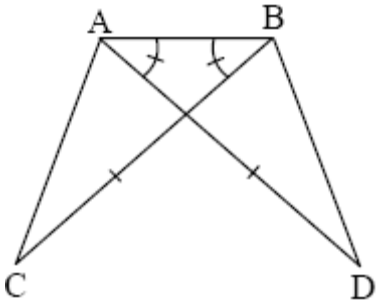
ต้องการพิสูจน์ว่า $\Delta ADO \cong \Delta BCO$ และ $A\hat{O}D = B\hat{O}C$

พิสูจน์ พิจารณา ΔADO และ ΔBCO

DO = CO	(กำหนดให้จุด O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$)
$A\hat{D}O \cong B\hat{C}O = 90^\circ$	(มุมภายในแต่ละมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีขนาด 90°)
AD = BC	(ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากยาวเท่ากัน)
ดังนั้น $\Delta ADO \cong \Delta BCO$	(ด.ม.ด.)
และ $A\hat{O}D = B\hat{O}C$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ BC = AD และ $A\hat{B}C = B\hat{A}D$

จงพิสูจน์ว่า AC = BD และ $B\hat{A}C = A\hat{B}D$



กำหนดให้ BC = AD และ $A\hat{B}C = B\hat{A}D$

ต้องการพิสูจน์ว่า AC = BD และ $B\hat{A}C = A\hat{B}D$

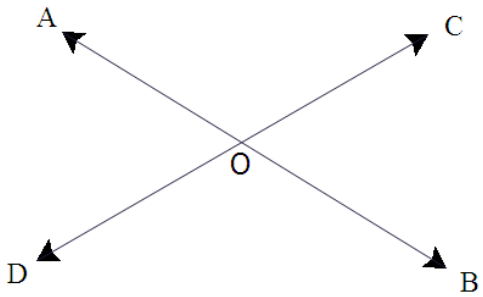
พิสูจน์ พิจารณา Δ ABC และ Δ BAD

BC = AD	(กำหนดให้)
$A\hat{B}C = B\hat{A}D$	(กำหนดให้)
AB = BA	(AB เป็นด้านร่วม)
ดังนั้น Δ ABC $\cong$ Δ BAD	(ด.ม.ด.)
จะได้ AC = BD	(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน)
และ $B\hat{A}C = A\hat{B}D$	(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน)

กิจกรรมการเรียนการสอน

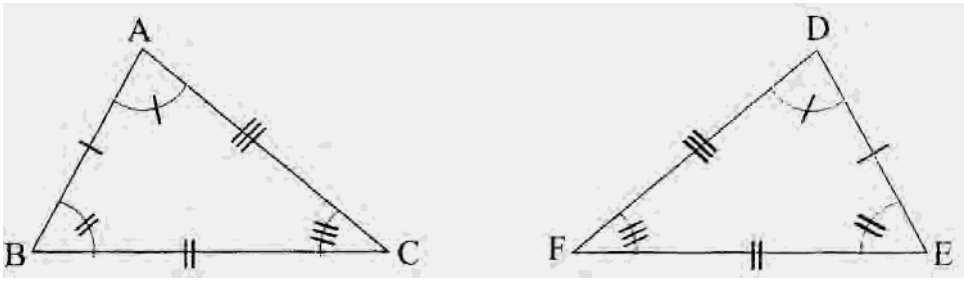
ขั้นนำ

1. ครูทบทวนเรื่องที่ใช้อ้างอิง คือ สาระที่ว่า “ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากัน” และสมบัติของความเท่ากันทุกประการที่ว่า “รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ ด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ” โดย ใช้การถามตอบ เพื่อทบทวนความรู้เดิมที่ต้องใช้ในการอ้างอิงดังนี้



1.1 ถามนักเรียนว่าจากภาพที่ปรากฏ นักเรียนบอกอะไรจากภาพได้บ้าง (เส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด O, มุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากัน)

2. จากนั้นครูแสดงภาพดังตัวอย่างต่อไปนี้



2.3 รูปสามเหลี่ยม 2 รูปนี้เท่ากันทุกประการหรือไม่ (เท่ากันทุกประการ)

2.4 นักเรียนจะตรวจสอบความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปรูปนี้ได้อย่างไร (ต้องตรวจสอบการเท่ากันของความยาวของด้านที่สมนัยกัน 3 คู่ และการเท่ากันของขนาดของมุมคู่ที่สมนัยกันอีก 3 คู่)

3. ครูแนะนำว่าในบทเรียนที่จะเรียนวันนี้ เราจะตรวจสอบว่าถ้าทราบว่ามีด้านของรูปสามเหลี่ยมเท่ากันสองด้าน และมีมุมที่อยู่ในระหว่างด้านคู่ที่เท่ากันมีขนาดเท่ากัน ตามเงื่อนไขที่กำหนดข้างต้นเพียงพอที่จะสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการหรือไม่

ขั้นสอน

1. ครูแจกใบงานที่ 4.1 เรื่อง “รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านคู่ที่สมนัยยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จะเท่ากันทุกประการหรือไม่” นักเรียนแต่ละคนศึกษาใบงาน สร้างความเข้าใจคำสั่งและการบันทึกผลให้ตรงกัน

2. ให้นักเรียนสำรวจรูปสามเหลี่ยมสองรูปว่าเท่ากันทุกประการหรือไม่จากการศึกษากิจกรรมในใบงานที่ 4.1 โดยใช้การวัด หรือใช้กระดาษลอกลาย

3. จากนั้นให้ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปผลที่ได้จากการสำรวจกิจกรรมในใบงานที่ 3.1 โดยใช้การถามตอบ เพื่อสร้างความเข้าใจที่ตรงกันดังต่อไปนี้

3.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อที่ได้สำรวจ เท่ากันทุกประการทุกข้อหรือไม่ (เท่ากันทุกประการทุกข้อ)

3.2 นักเรียนทราบได้อย่างไรว่าสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อเท่ากันทุกประการ และมีวิธีตรวจสอบอย่างไร (ด้านคู่ที่สมนัยกัน และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ ตรวจสอบโดยการวัดขนาดของด้านคู่ที่สมนัยกัน และมุมคู่ที่สมนัยกันเป็นคู่ๆ ตามลำดับ หรือการใช้กระดาษลอกลายลอกรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งไปทับรูปสามเหลี่ยมอีกรูป ถ้าทับกันสนิท แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ)

3.3 นักเรียนคิดว่าการกำหนดด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ โดยมุมคู่นั้นเป็นมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน เพียงพอที่จะสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการหรือไม่ (เพียงพอที่จะสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ หมายเหตุ ถ้านักเรียนคนใดคิดว่าไม่เพียงพอ ให้ลองยกตัวอย่างค้าน จนได้ข้อสรุปว่าถ้าทราบว่าถ้ามีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ โดยมุมคู่นั้นเป็นมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน ก็เพียงพอที่จะสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ)

3.4 นักเรียนคิดว่ารูปสามเหลี่ยมในแต่ละข้อที่ได้สำรวจนั้น มีความสัมพันธ์เหมือนกันในลักษณะใด (รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน)

4. ครูบอกนักเรียนว่าความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน สามารถเขียนย่อๆ ว่า ด.ม.ด. และนักเรียนจะได้ฝึกการให้เหตุผลด้วยการพิสูจน์อย่างเป็นแบบแผนจากใบงานที่ 4.2 เรื่อง “รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่”

6. นักเรียนเรียนรู้การนำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน ไปใช้อ้างอิงในการให้เหตุผล จากใบงานที่ 4.2 โดยการร่วมกันอภิปราย เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกวิเคราะห์แยกเหตุ (สิ่งที่กำหนดให้) และแยกผล (สิ่งที่ต้องพิสูจน์) โดยพิจารณาถึงความสัมพันธ์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องว่าเกิดขึ้นด้วยเหตุผลอะไร และต้องใช้ความรู้เรื่องใดมาประกอบการอธิบายเหตุผล พร้อมบันทึกแนวคิดการเขียนพิสูจน์ด้วยตัวเองลงในใบงาน โดยนักเรียนวิเคราะห์จากผลไปสู่เหตุด้วยการใช้คำถาม ดังต่อไปนี้

6.1 โจทย์ให้พิสูจน์อะไร ($\Delta AOC \cong \Delta BOD$)

6.2 การจะพิสูจน์ว่า $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ จะต้องทราบความสัมพันธ์ใดบ้าง (การจะสรุปได้ว่า $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ แบบ ด.ม.ด. จะต้องทราบว่าด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่และมุมในระหว่างด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่)

6.3 โจทย์บอกอะไรมาบ้าง (1. AO = BO 2. CO = DO)

6.4 พิจารณาดูจะต้องมีอะไรเท่ากันอีก ($A\hat{O}C = B\hat{O}D$)

7. ให้นักเรียนนำผลที่เกิดจากการร่วมกันวิเคราะห์ข้างต้น มาเรียงลำดับใหม่อย่างสมเหตุสมผลด้วยตนเอง พร้อมย้ำให้นักเรียนเขียนอธิบายเหตุผลกำกับข้อความพิสูจน์ด้วย โดยให้นักเรียนที่นั่งข้างกันช่วยกันเรียบเรียงและแก้ไข (การกระทำดังกล่าว แสดงถึงการลำดับการเขียนพิสูจน์แบบเป็นทางการ) แล้วเขียนลงในใบงานที่ 4.2 เรื่อง “รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่” โดยครูผู้สอนคอยให้ความช่วยเหลือ

8. จากนั้นครูและนักเรียนอภิปรายสรุปร่วมกันเพื่อปรับให้นักเรียนใช้ศัพท์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง รวมถึงเรียบเรียงการเขียนพิสูจน์ได้อย่างเป็นลำดับขั้นตอน และเพื่อสร้างความเข้าใจให้ถูกต้อง ตรงกัน

คาบที่ 2

ขั้นสอน

2. ครูแจกใบงานที่ 4.3 เรื่อง ฝึกหัดเพื่อความเข้าใจ เพื่อตรวจสอบความเข้าใจการเขียนพิสูจน์และการให้เหตุผลทางเรขาคณิต รวมทั้งการนำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน มาใช้ในการหาคำตอบ โดยวิเคราะห์แนวคิดในการหาคำตอบเป็นลำดับอย่างสมเหตุสมผล พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบการพิจารณา แล้วเรียบเรียงวิธีการหาคำตอบใหม่

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด.ม.ด. จะเท่ากันทุกประการ ตามสมบัติที่ว่า

> ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ด.ม.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมีมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

2. ครูถามเพื่อให้นักเรียนช่วยกันสรุปสิ่งที่นักเรียนได้เรียน ได้ทำ และปัญหาที่พบในการเรียนเกี่ยวกับการสิ่งที่ได้เรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน

3. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน หน้า 216 แบบฝึกหัดที่ 5.3 ข้อ 2 ข้อ 5 และ ข้อ 7 เป็นการบ้าน โดยให้นักเรียนใช้ความรู้ที่ได้จากการเรียนรู้ เพื่อเป็นการทบทวนสิ่งที่ได้เรียนรู้

สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. กระดาษลอกลาย
2. ไม้ครึ่งวงกลม หรือไม้โปรแทรคเตอร์
3. ไม้บรรทัด

4.ใบงาน ได้แก่ ใบงานที่ 4.1: รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านคู่ที่สมนัยยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จะเท่ากันทุกประการหรือไม่, ใบงานที่ 4.2: รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่, ใบงานที่ 4.3: ฝึกหัดเพื่อความเข้าใจ

5. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

วิธีการวัด	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
1. **ด้านความรู้** นักเรียนสามารถ 1.1 บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ 1.2 นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน-มุม-ด้าน ไปใช้อ้างอิงในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้	ผลการบันทึกในใบงาน และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน	1.1 นักเรียนสามารถสรุปได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ 1.2 นักเรียนพิสูจน์และแก้ปัญหาสิ่งที่โจทย์ต้องการได้ถูกต้องไม่น้อยกว่า 80% พร้อมอ้างอิงเหตุผลจากทฤษฎีบทหรือสมบัติทางเรขาคณิต และสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน-มุม-ด้าน
2. **ด้านทักษะ/กระบวนการ** นักเรียนสามารถ 2.1 แสดงเหตุผลโดยอ้างอิงความรู้ที่เรียนได้	ผลการบันทึกในใบงาน และแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน	2.1 นักเรียนอ้างเหตุผลจากความรู้ที่เรียนได้ถูกต้องไม่น้อยกว่า 80%

วิธีการวัด	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
2.2 สังเกต สำรวจ และแสดงการตรวจสอบการเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปได้ 2.3 เชื่อมโยงเนื้อหาคณิตศาสตร์ได้		2.2 นักเรียนสามารถตรวจสอบการเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปโดยใช้กระดาษลอกลายหรือใช้เครื่องมือวัดขนาดมุมและความยาวได้ถูกต้อง 2.3 นักเรียนใช้ความรู้ที่สามารถใช้อ้างอิงได้ไม่น้อยกว่า 80%
3. **ด้านคุณลักษณะ** นักเรียนมีคุณลักษณะ 3.1 ตั้งใจและมีความสนใจในการเรียน 3.2 ทำงานอย่างมีระบบระเบียบ รอบคอบ 3.3 สามารถแสดงความคิดเห็นอย่างมีเหตุผล	แบบสังเกตพฤติกรรม	

สรุปการสอนและการเรียนรู้โดยรวม

……

……

……

……

……

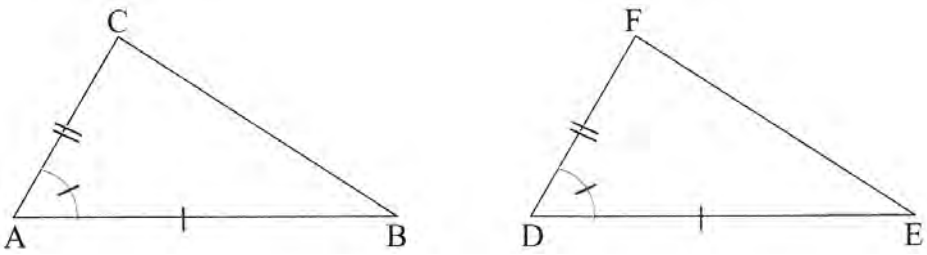
……

ชื่อ..... ชั้น ม.2/..... เลขที่.....

ใบงานที่ 4.1: รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านคู่ที่สมนัยยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จะเท่ากันทุกประการหรือไม่

คำชี้แจง: กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่ และมุมที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่ จงสำรวจว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปดังกล่าวเท่ากันทุกประการหรือไม่

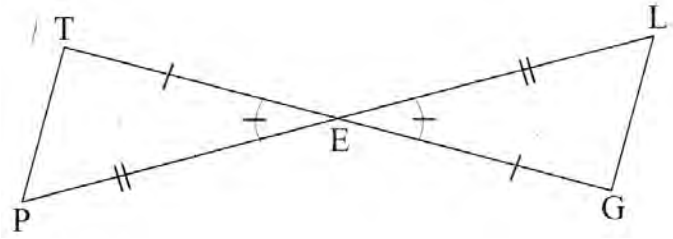
1.



……

……

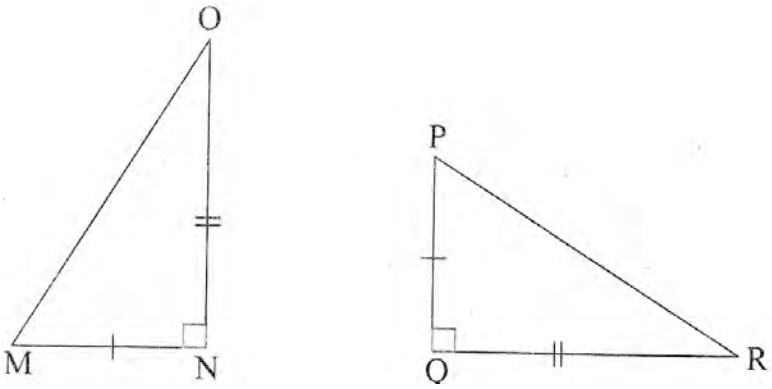
2.



……

……

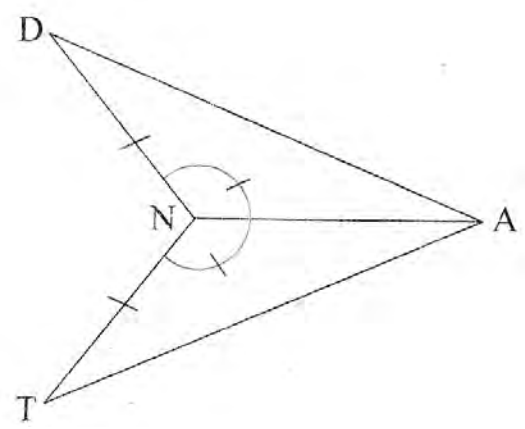
3.



……

……

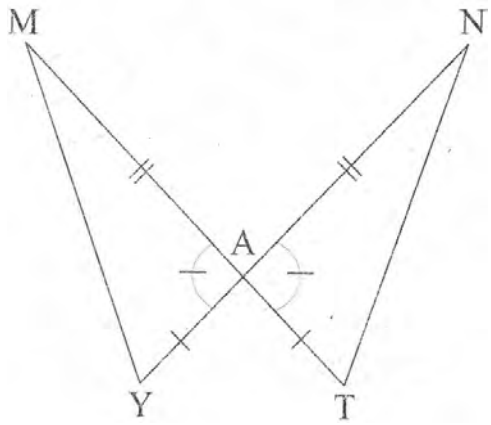
4.



……..…

……

5.



……..…

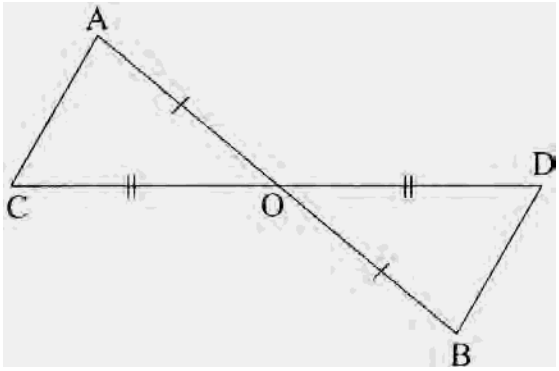
……

รูปสามเหลี่ยมสองรูปในแต่ละข้อมีความสัมพันธ์กันแบบ……

ชื่อ..... ชั้น ม.2/..... เลขที่.....

ใบงานที่ 4.2: รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่

คำชี้แจง: ให้นักเรียนเรียบเรียงการพิสูจน์ พร้อมให้เหตุผลทางเรขาคณิตประกอบ



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB}$ ตัดกับ $\overline{CD}$ ที่จุด O มี AO = BO และ CO = DO จง พิสูจน์ว่า $\Delta AOC \cong \Delta BOD$

<u>แนวคิดในการพิสูจน์</u>

.....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>เรียบเรียงการพิสูจน์</u>

.....

.....

.....

.....

.....

.....

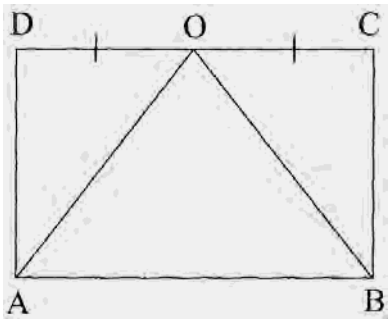
.....

.....

ชื่อ..... ชั้น ม.2/..... เลขที่.....

ใบงานที่ 4.3: ฝึกหัดเพื่อความเข้าใจ

คำชี้แจง: ให้นักเรียนพิจารณาข้อต่อไปนี้ แสดงการวิเคราะห์แนวคิด แล้วเรียบเรียงการเขียนพิสูจน์ พร้อมให้เหตุผลทางเรขาคณิตประกอบ

1. 

□ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และจุดO เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$ จงพิสูจน์ว่า $\Delta ADO \cong \Delta BCO$ และ $A\hat{O}D = B\hat{O}C$

<u>แนวคิดในการพิสูจน์</u>

.....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>เรียบเรียงการพิสูจน์</u>

.....

.....

.....

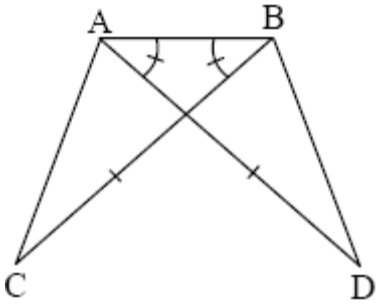
.....

.....

.....

.....

.

2. 

กำหนดให้ BC = AD และ $A\hat{B}C = B\hat{A}D$

จงพิสูจน์ว่า AC = BD และ $B\hat{A}C = A\hat{B}D$

<u>แนวคิดในการพิสูจน์</u>

……

……

……

……

……

……

<u>เรียบเรียงการพิสูจน์</u>

……

……

……

……

……

……

……

……

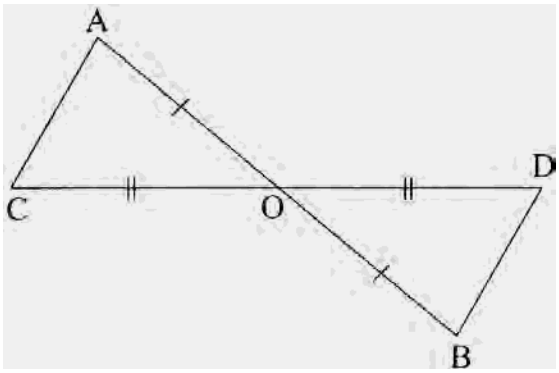
……

- ตัวอย่างการใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้เกิดการคิดของนักเรียนกลุ่มทดลอง -

ตัวอย่างการใช้คำถามของครูต่อไปนี้ เป็นคำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนเกิดการคิด วิเคราะห์และประมวลความคิด ในขั้นการเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation) เพื่อให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้และพัฒนาความคิดอย่างเป็นระบบและตามลำดับขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ใบงานที่ 4.2: รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่

คำชี้แจง: ให้นักเรียนเรียบเรียงการพิสูจน์ พร้อมให้เหตุผลทางเรขาคณิตประกอบ



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB}$ ตัดกับ $\overline{CD}$ ที่จุด O มี AO = BO และ CO = DO จงพิสูจน์ว่า $\Delta AOC \cong \Delta BOD$

<u>ตัวอย่างคำถามที่ใช้ถามเพื่อกระตุ้นให้เกิดการคิด</u>

1. โจทย์ให้พิสูจน์อะไร ($\Delta AOC \cong \Delta BOD$)

2. การจะพิสูจน์สิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์นั้น จะต้องทราบความสัมพันธ์ใดบ้าง (การจะสรุปได้ว่า $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ แบบ ด.ม.ด. จะต้องทราบว่าด้านคู่ที่สมนัยกันยาวเท่ากัน 2 คู่และมุมในระหว่างด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากัน 1 คู่)

3. ความสัมพันธ์ที่กล่าวมาข้างต้น มีข้อมูลใดที่ทราบแล้วบ้าง (1. AO = BO 2. CO = DO)

4. ข้อมูลดังกล่าวข้างต้นเพียงพอที่จะสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันหรือไม่ (ยังไม่เพียงพอ)

5. ถ้าข้อมูลยังไม่เพียงพอที่จะสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ต้องมีข้อมูลใดอีกและหาจากความสัมพันธ์ใด อย่างไร (ขาด $A\hat{O}C = B\hat{O}D$ ซึ่งเราทราบจากความสัมพันธ์ที่ว่า ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน) (<u>หมายเหตุ</u> หากนักเรียนตอบเหตุที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์จากคำถามข้อ 3. ยังไม่ครบถ้วน จึงใช้คำถามนี้)

<u>จากนั้นจึงให้นักเรียนเขียนสรุปข้อมูลที่ได้ลงใน แนวคิดในการพิสูจน์</u>

แนวคิดในการพิสูจน์

(*แนวการสรุปข้อมูล*) ต้องการพิสูจน์ $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ .....

ทราบแล้วว่า AO = BO และ CO = DO .....

จะพิสูจน์ $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ แบบ ด.ม.ด. ดังนั้นขาด $A\hat{O}C = B\hat{O}D$ ....

.....

ให้นักเรียนนำข้อมูลจากการเขียนสรุปแนวคิดในการพิสูจน์มาเรียบเรียงด้วยตนเองโดยเน้นให้นักเรียนเข้าใจการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์ว่า ต้องเขียนสิ่งที่กำหนดให้หรือเหตุย่อยๆ พร้อมอ้างอิงเหตุผล จนนำไปสู่ผลหรือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ก่อนให้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นโดยร่วมกันอภิปรายภายในกลุ่มย่อยก่อน จากนั้นครูและนักเรียนจึงร่วมกันอภิปรายเพื่อสร้างความเข้าใจที่ถูกต้องและตรงกัน โดยใช้คำถามกระตุ้นการคิด ดังนี้

1. โจทย์กำหนดอะไรให้ ($\overline{AB}$ *ตัดกับ* $\overline{CD}$ *ที่จุด O มี AO = BO และ CO = DO)*

2. โจทย์ต้องการพิสูจน์อะไร ($\Delta AOC \cong \Delta BOD$ *ซึ่งทราบจากการวิเคราะห์แนวคิดในการพิสูจน์แล้วว่าจะพิสูจน์ให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้เท่ากันทุกประการแบบ ด.ม.ด.)*

3. การจะสรุปได้ว่า $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ *แบบ ด.ม.ด. ต้องมีข้อมูลอะไรบ้าง(1. AO = BO 2. CO = DO 3.* $A\hat{O}C = B\hat{O}D$*)*

4. ครูเน้นให้นักเรียนนำข้อมูลนั้นมาเขียนเรียงตามลำดับความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด. กล่าวคือ 1. AO = BO 2. $A\hat{O}C = B\hat{O}D$ *3. CO = DO พร้อมให้เหตุผลประกอบข้อความเหล่านั้น จนนำไปสู่การสรุปได้ว่า* $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ *แบบ ด.ม.ด.*

จากนั้นจึงให้นักเรียนเขียนพิสูจน์พร้อมให้เหตุผลที่ได้ลงใน เรียบเรียงการพิสูจน์

เรียบเรียงการพิสูจน์

กำหนดให้	$\overline{AB}$ ตัดกับ $\overline{CD}$ ที่จุด O มี AO = BO และ CO = DO	
ต้องการพิสูจน์ว่า	$\Delta AOC \cong \Delta BOD$	
พิสูจน์	พิจารณา ΔAOC และ ΔBOD	
	AO = BO	(กำหนดให้)
	$A\hat{O}C = B\hat{O}D$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)
	CO = DO	(กำหนดให้)
	ดังนั้น $\Delta AOC \cong \Delta BOD$	(ด.ม.ด.)

- ตัวอย่างแบบฝึกหัด จากหนังสือเรียน -

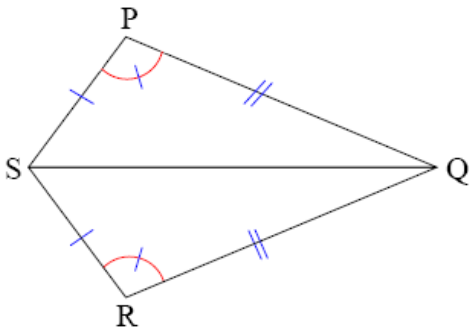
ตัวอย่างแบบฝึกหัดเหล่านี้ ครูให้นักเรียนทำลงในสมุดเป็นการบ้าน โดยให้นักเรียนใช้ความรู้ที่ได้จากการเรียนรู้ เพื่อเป็นการทบทวนสิ่งที่ได้เรียนรู้

แบบฝึกหัดประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ในคาบที่ 4

แบบฝึกหัดที่ 5.3

จากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของ สสวท. เป็นการฝึกการให้เหตุผลประกอบการเขียนพิสูจน์เรื่อง รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน

ข้อ 2

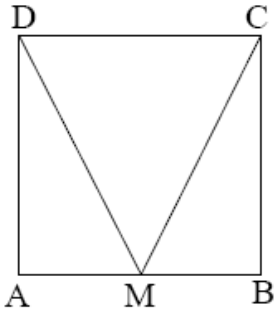


□PQRS มี $\overline{SQ}$ เป็นเส้นทแยงมุม

PS = RS, PQ = RQ และ $S\hat{P}Q = S\hat{R}Q$

จงพิสูจน์ว่า $\Delta PQS \cong \Delta RQS$

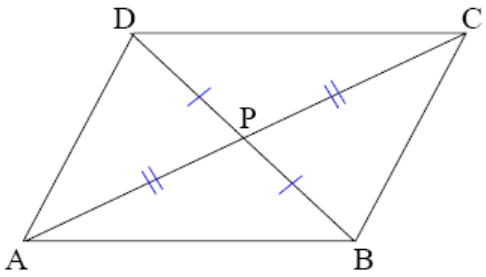
ข้อ 5



□ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มี M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ เป็นเส้นทแยงมุม

จงพิสูจน์ว่า DM = CM และ $A\hat{D}M = B\hat{C}M$

และ ข้อ 7



$\square$ABCD มี $\overline{BD}$ และ $\overline{AC}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด P จงพิสูจน์ว่า

1) AB = CD และ $A\hat{B}P = C\hat{D}P$

2) AD = CB และ $D\hat{A}P = B\hat{C}P$

จากตัวอย่างการบ้านข้างต้น เป็นเพียงตัวอย่างการบ้านซึ่งครูผู้สอนสามารถปรับเปลี่ยนแบบฝึกหัดที่ให้นักเรียนทำเป็นการบ้าน โดยแบบฝึกหัดที่จะให้นั้นต้องใช้ความรู้ที่เคยเรียนมาแล้ว เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกคิด วิเคราะห์ และประมวลความคิด เพื่อให้พัฒนาความคิดอย่างเป็นระบบและตามลำดับขั้นตอน

ภาคผนวก ง

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย

1. แบบวัดความรู้พื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
   เรื่อง การเตรียมความพร้อมในการให้เหตุผล
   - ตารางแสดงค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
   - แบบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

2. แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
   เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ
   - ตารางแสดงจำนวนคาบกับความสอดคล้องของจำนวนข้อสอบในแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ
   - ตารางแสดงพฤติกรรมที่ต้องการในแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ
   - ตารางแสดงผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ต้องการวัดและพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัยของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ
   - ตารางแสดงค่าความเที่ยง ความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
   - แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

3. ความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ
   - ตารางแสดงค่าความเที่ยง ความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
   - แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

แบบวัดความรู้พื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต

ตารางที่ 6 ค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดพื้นฐานในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ซึ่งคำนวณโดยใช้ โปรแกรม SPSS

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ
1	0.50	0.57	0.82
2	0.57	0.58	
3	0.42	0.40	
4	0.28	0.43	
5	0.21	0.41	

แบบวัดพื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
เรื่อง การเตรียมความพร้อมในการให้เหตุผล

ชื่อ.....**สกุล**.....**ชั้น**.....**เลขที่**.....

<u>คำชี้แจง</u>

1. แบบวัดพื้นฐานการให้เหตุผลทางเรขาคณิตฉบับนี้เป็นแบบวัดชนิดอัตนัยมีจำนวน 5 ข้อ แบ่งออกเป็นชนิดตอบสั้น จำนวน 3 ข้อ และชนิดตอบยาวจำนวน 2 ข้อ คะแนนเต็ม 50 คะแนน

2. แบบวัดฉบับนี้ใช้เวลาในการทำ 50 นาที

3. นักเรียนสามารถทดหรือแสดงวิธีที่ช่วยในการเขียนพิสูจน์ลงในที่ว่างของแบบวัดฉบับนี้ได้ เพื่อให้ง่ายแก่การนำมาเรียบเรียงการเขียนพิสูจน์จริง

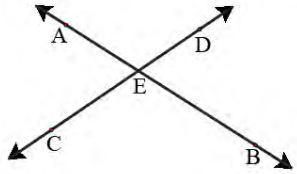
4. ให้นักเรียนทำแบบวัดฉบับนี้ทุกข้อโดย**แบบวัดชนิดตอบสั้น** <u>ให้นักเรียนเติมข้อความพิสูจน์ที่ถูกต้องไว้ในช่องว่างทางซ้ายมือ และเติมการให้เหตุผลที่ถูกต้องลงในวงเล็บทางขวามือ</u>

ส่วน**แบบวัดชนิดตอบยาว** <u>ให้นักเรียนเขียนแสดงการพิสูจน์โดยเขียนแสดงข้อความพิสูจน์ประกอบกับให้เหตุผล อย่างเป็นลำดับขั้นตอนอย่างชัดเจน</u>

<u>ตัวอย่างการเขียนตอบ</u>

ข้อ 0. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\overleftrightarrow{AB}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E แล้ว

$m(B\hat{E}D) = m(A\hat{E}C)$ และ $m(A\hat{E}D) = m(B\hat{E}C)$



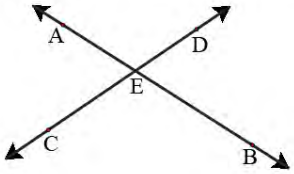
กระดาษคำตอบสำหรับ<u>แบบสอบชนิดตอบสั้น</u>	**กระดาษคำตอบสำหรับ<u>แบบสอบชนิดตอบยาว</u>**
กำหนดให้	.....
ต้องการพิสูจน์ว่า	.....
พิสูจน์ 1. เนื่องจาก $\overline{ED}$ พบกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด E	.....
จะได้ ..... (.....	.....
.....)	.....
2. ...	.....

ตัวอย่างการเขียนตอบ หน้าถัดไป

ตัวอย่างการเขียนตอบ(ต่อ)

ข้อ 0. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\overleftrightarrow{AB}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E แล้ว

$m(B\hat{E}D) = m(A\hat{E}C)$ และ $m(A\hat{E}D) = m(B\hat{E}C)$



กระดาษคำตอบสำหรับแบบสอบชนิดตอบสั้น	**กระดาษคำตอบสำหรับแบบสอบชนิดตอบยาว**
กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E **ต้องการพิสูจน์ว่า** $m(B\hat{E}D) = m(A\hat{E}C)$ และ $m(A\hat{E}D) = m(B\hat{E}C)$ **พิสูจน์** 1. เนื่องจาก $\overline{ED}$ พบกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด E จะได้ $m(A\hat{E}D) + m(B\hat{E}D) = 180°$ (ส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บน ...) 2. ...	**กำหนดให้** AB ตัดกับ CD ที่จุด E **ต้องการพิสูจน์ว่า** $m(B\hat{E}D) = m(A\hat{E}C)$ และ $m(A\hat{E}D) = m(B\hat{E}C)$ **พิสูจน์** 1. เนื่องจาก $\overline{ED}$ พบกับ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่จุด E จะได้ $m(A\hat{E}D) + m(B\hat{E}D) = 180°$ (ส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บน...) 2. ...
หมายเหตุ – เติมข้อความพิสูจน์ที่ถูกต้องลงในช่องว่างทางซ้ายมือ – เติมการให้เหตุผลที่ถูกต้องลงในวงเล็บทางขวามือ	**หมายเหตุ** เขียนแสดงข้อความพิสูจน์ประกอบกับให้เหตุผลอย่างเป็นลำดับขั้นตอนอย่างชัดเจน

<u>ตอนที่ 1</u> แบบวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิตชนิดตอบสั้น

คำชี้แจง จงเติมข้อความพิสูจน์ลงในช่องว่างและการอธิบายเหตุผลในวงเล็บให้สมบูรณ์

1.

จากรูป กำหนดให้ B เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BD}$

จงพิสูจน์ว่า AC=BD

กำหนดให้ .....

ต้องการพิสูจน์ว่า .....

พิสูจน์ 1. เนื่องจาก B เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ (.....)

2. ดังนั้น …….=…… (.....)

3. เนื่องจาก C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BD}$ (.....)

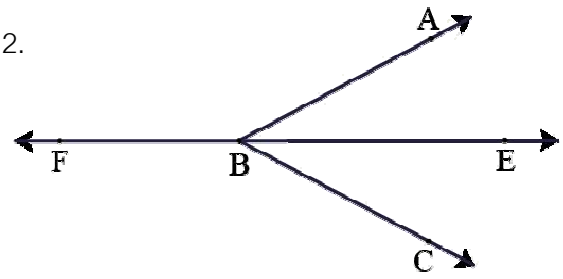
4. ดังนั้น .....=..... (.....)

5. จากข้อ 2 และ 4 จะได้ .....=…… (สมบัติของการเท่ากัน)

6. จากข้อ 5 นำ BC มาบวกกับจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ

จะได้ ..... + BC = …….. + BC

นั่นคือ ……= ……

2. 

ถ้า $\overleftrightarrow{FE}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$

จงพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{FE}$ จะแบ่งครึ่งมุมกลับ $A\hat{B}C$ ด้วย

กำหนดให้ .....

ต้องการพิสูจน์ว่า .....

พิสูจน์ 1. เนื่องจาก $m(A\hat{B}F) + m(A\hat{B}E) = 180^\circ$ (.....

....)

2.ทำนองเดียวกัน .....+..... $= 180^\circ$

3. จากข้อ 1 และ 2 จะได้

$m(A\hat{B}F) + m(A\hat{B}E) =$ ..... (.....

.....)

4. เนื่องจาก $\overrightarrow{BE}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{B}C$ (กำหนดให้)

ดังนั้น $m(A\hat{B}E) = m($ ..... $)$

5. นำ $m(A\hat{B}E)$ หรือ .....ลบออกจากจำนวนทั้งสองข้างของ

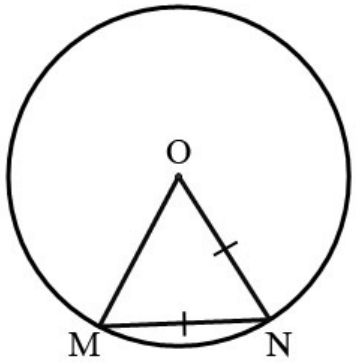
เครื่องหมายเท่ากับของสมการในข้อ 3

จะได้ว่า.....

ดังนั้น.....

ตอนที่ 2 แบบวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิตชนิดตอบยาว

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงการเขียนพิสูจน์ พร้อมให้เหตุผลทางเรขาคณิตประกอบ

1. 

จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ MN = NO จงเขียนข้อความคาดการณ์ว่า ΔMNO เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด พร้อมทั้งพิสูจน์ข้อความคาดการณ์นั้น

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

ตารางที่ 7 วิเคราะห์จำนวนคาบกับความสอดคล้องของจำนวนข้อสอบในแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

เนื้อหา	จำนวน (คาบ)	จำนวนแบบสอบที่ใช้ในการทดลอง	จำนวนแบบสอบที่ใช้จริง
1.ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต 1.1 ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต 1.2 ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง 1.3 ความเท่ากันทุกประการของมุม	2	6	4
2. ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม 2.1 ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม	1	3	2
3. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน 3.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน 3.2 นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน ไปใช้อ้างเหตุผล	3	10	6
4. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม 4.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม 4.2 นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม ไปใช้อ้างเหตุผล	3	9	6
5. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน 5.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน 5.2 นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน ไปใช้อ้างเหตุผล	2	6	4

เนื้อหา	จำนวน (คาบ)	จำนวนแบบสอบที่ใช้ในการทดลอง	จำนวนแบบสอบที่ใช้จริง
6. การนำไปใช้ 6.1 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 6.2 นำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบใดแบบหนึ่ง ไปใช้ในการอ้างอิงในการพิสูจน์และแก้ปัญหา	4	15	8
รวม	15	49	30

ตารางที่ 8 วิเคราะห์พฤติกรรมที่ต้องการในแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

เนื้อหา	ระดับพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย				
	ความรู้ความจำ	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	การวิเคราะห์	รวม
1.ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต					
1.1 ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต	-	1	-	1	2
1.2 ความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง	-	1	-		1
1.3 ความเท่ากันทุกประการของมุม	-	-	-	1	1
1.4 สมบัติอื่นๆ ของความเท่ากันทุกประการ	1	-	-	1	2
2. ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม					
2.1 ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม	-	1	1	1	3
3. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน					
3.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน	-	-	1	1	2
3.2 นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน ไปใช้อ้างเหตุผล	2	1	1	4	8
4. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม					
4.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม	1	1	1	1	4
4.2 นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม ไปใช้อ้างเหตุผล	-	1	2	2	5

เนื้อหา	ระดับพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย				
	ความรู้ความจำ	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	การวิเคราะห์	รวม
5. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน					
5.1 รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน	-	1	1	-	2
5.2 นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน ไปใช้อ้างเหตุผล	-	1		3	4
6. การนำไปใช้					
6.1 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	-	-	2	2	4
6.2 นำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบใดแบบหนึ่ง ไปใช้ในการอ้างอิงในการพิสูจน์และแก้ปัญหา	-	1	3	7	11
รวม	4	9	12	24	49
อันดับความสำคัญ	4	3	2	1	

ตารางที่ 9 ค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนก ของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ ซึ่งคำนวณโดยใช้โปรแกรม SPSS

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ
1	0.57	0.32	0.64
2	0.77	0.27	
3	0.39	0.32	
4	0.64	0.36	
5	0.32	0.27	
6	0.30	0.23	
7	0.30	0.42	
8	0.50	0.45	
9	0.39	0.41	
10	0.70	0.23	
11	0.48	0.32	
12	0.34	0.23	
13	0.30	0.31	
14	0.41	0.27	
15	0.39	0.23	
16	0.68	0.27	
17	0.25	0.23	
18	0.30	0.50	
19	0.39	0.32	
20	0.50	0.37	
21	0.39	0.41	
22	0.32	0.46	
23	0.30	0.41	
24	0.25	0.23	
25	0.43	0.32	
26	0.39	0.32	
27	0.36	0.36	
28	0.64	0.27	
29	0.50	0.55	
30	0.45	0.36	

ตารางที่ 10 วิเคราะห์ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ต้องการวัด และพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย ของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

เนื้อหา	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	ระดับพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย			
		จำนวนข้อ จำแนกตาม			
		ความรู้ความจำ	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	การวิเคราะห์
1.ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต	นักเรียนสามารถ : 1. บอกเงื่อนไขที่ทำให้รูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการได้ 2. บอกสมบัติของความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรงได้ 3. อธิบายความหมายและลักษณะรูปเรขาคณิตสองรูปและส่วนของเส้นตรงที่เท่ากันทุกประการได้ 4. บอกสมบัติของความเท่ากันทุกประการของมุมได้ 5. บอกสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิตได้ 6. อธิบายความหมายของสมบัติของความเท่ากันทุกประการของส่วนของรูปเรขาคณิต A, B และ C ใดๆ ได้	1 (2)	2 (1, 4)		1 (3)

เนื้อหา	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	ระดับพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย			
		จำนวนข้อ จำแนกตาม			
		ความรู้ความจำ	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	การวิเคราะห์
2. ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม	1. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ ด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้น มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ 2. บอกด้านคู่ที่ยาวเท่ากันและมุมคีที่มีขนาดเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปที่เท่ากันทุกประการได้		1 (5)		1 (6)
3. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน	1. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ 2. นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบด้าน – มุม – ด้าน ไปใช้ในการอ้าเหตุผลได้ 3. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ ด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้น มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ	1 (9)	1 (11)	1 (12)	3 (7, 8,10)

เนื้อหา	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	ระดับพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย			
		จำนวนข้อ จำแนกตาม			
		ความรู้ความจำ	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	การวิเคราะห์
3. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน(ต่อ)	4. บอกด้านคู่ยาวเท่ากันและมุมคู่ที่ยาวเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการได้				
4. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม	1. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม เท่ากันทุกประการ 2. นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุมไปใช้ในการอ้างเหตุผลได้	1 (15)	1 (16)	1 (18)	3 (14, 17, 19)
5. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน	1. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน เท่ากันทุกประการ 2. นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน ไปใช้ในการอ้างเหตุผลได้			1 (13)	3 (20, 21, 22)

เนื้อหา	ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	ระดับพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย			
		จำนวนข้อ จำแนกตาม			
		ความรู้ความจำ	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	การวิเคราะห์
6. การนำไปใช้	1. บอกสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ 2. นำสมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบใดแบบหนึ่งคือด้าน – มุม – ด้าน, มุม – ด้าน – มุม และด้าน – ด้าน – ด้าน ไปใช้ในการอ้างอิงในการพิสูจน์และแก้ปัญหาได้			4 (23, 25, 26, 28)	4 (24, 27, 29, 30)
รวม		3	5	7	15

แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

ชื่อ.....**สกุล**.....**ชั้น**.....**เลขที่**.....

<u>คำชี้แจง</u>

1. แบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ฉบับนี้เป็นแบบวัดชนิดปรนัยมีจำนวน 30 ข้อ คะแนนเต็ม 30 คะแนน

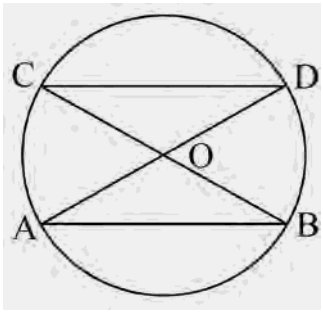
2. แบบวัดฉบับนี้ใช้เวลาในการทำ 50 นาที

3. ให้นักเรียนทำแบบวัดฉบับนี้ทุกข้อโดยทำเครื่องหมายกากบาท (×) ตัวเลือกที่ถูกต้องเพียงข้อเดียวลงในกระดาษคำตอบ

4. นักเรียนสามารถทดเลขหรือแสดงวิธีที่ช่วยในการหาคำตอบลงในที่ว่างของแบบวัดฉบับนี้ได้

5. เมื่อทำแบบวัดนี้เสร็จแล้วให้ส่งตัวแบบวัดฉบับนี้พร้อมกระดาษคำตอบ

จากข้อมูลดังต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 9 – 10



จากรูป กำหนด AD และ BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ AO = DO
พิจารณาการพิสูจน์ว่า Δ ABO $\cong$ Δ CDO
แล้วเติมการให้เหตุผลให้ถูกต้อง

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. AO = DO	กำหนดให้
2. $A\hat{O}B = C\hat{O}D$	.....(a).....
3. BO = DO	รัศมีของวงกลมเดียวกัน ยาวเท่ากัน
…	...

9. ควรให้เหตุผลตรงช่องว่าง a ว่า $A\hat{O}B = C\hat{O}D$ เพราะเหตุใด

ก. กำหนดให้ ข. เป็นมุมตรงข้าม

ค. เป็นมุมแย้ง ง. เพราะ Δ ABO $\cong$ Δ CDO

10. การพิสูจน์ข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า Δ ABO $\cong$ Δ CDO เพราะเหตุใด

ก. ม.ด.ม. ข. ด.ม.ด.

ค. ด.ด.ด. ง. ม.ม.ด.

11. เงื่อนไขอะไรที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการตามความสัมพันธ์แบบ ด้าน – มุม – ด้าน

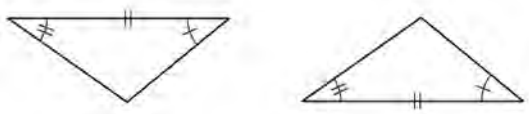
ก. มุมที่เท่ากันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นต้องเป็นมุมแหลม

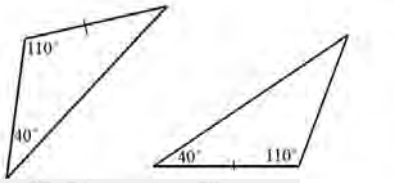
ข. มุมที่เท่ากันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้น ต้องเป็นมุมในระหว่างด้านที่เท่ากัน

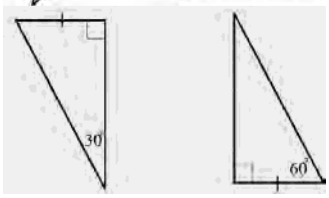
ค. ด้านคู่ที่เท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะต้องเป็นด้านประกอบมุมยอด

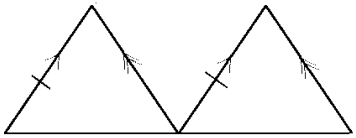
ง. ด้านที่เท่ากันของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้น ด้านหนึ่งจะต้องเป็นฐานของสามเหลี่ยม

15. ข้อใดสรุป<u>ไม่</u>ได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแบบ ม.ด.ม.

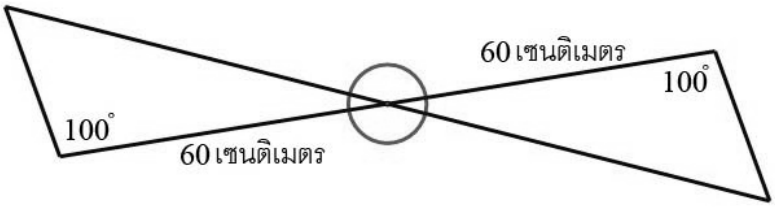
ก. 

ข. 

ค. 

ง. 

16. วิศวกรออกแบบใบพัดของกังหันลมดังรูป แต่ผู้ว่าจ้างบอกว่าใช้ไม่ได้ เพราะใบพัดทั้งสองข้างดูแล้วไม่เท่ากัน แต่วิศวกรยืนยันว่าใบพัดทั้งสองข้าง มีขนาดเท่ากัน ความคิดของใครถูกต้อง จงอธิบาย



ก. ผู้ว่าจ้างพูดถูกแล้ว เพราะ มองเท่าใดก็ดูแล้วมีขนาดไม่เท่ากัน

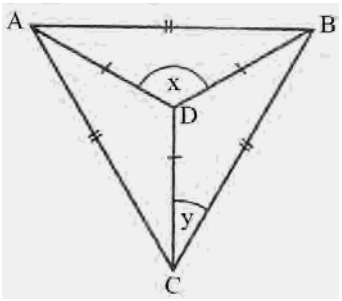
ข. ผู้ว่าจ้างพูดถูกแล้ว เพราะ ขาดข้อพิสูจน์ว่าใบพัดทั้งสองใบเท่ากันทุกประการ

ค. วิศวกรออกแบบถูกแล้ว เพราะ ปลายตัดที่อยู่ตรงกันข้ามของใบพัดสองใบนี้ย่อมเท่ากันจึงทำให้ใบพัดทั้งสองเท่ากันทุกประการแบบ ด.ม.ด.

ง. วิศวกรออกแบบถูกแล้ว เพราะ มุมตรงกันข้ามของเส้นตรงที่ตัดกันย่อมเท่ากันจึงทำให้ใบพัดทั้งสองเท่ากันทุกประการแบบ ม.ด.ม.

...

20. จากรูป AB = BC = CA และ AD = BD = CD จงหาว่าผลต่างของมุม x และ y เป็นเท่าใด

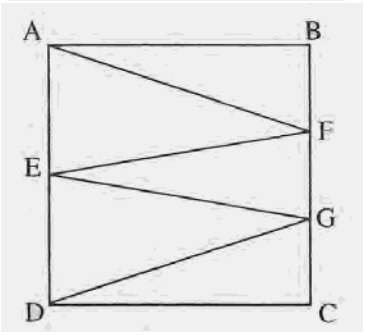


ก. 90 องศา

ข. 120 องศา

ค. 135 องศา

ง. 150 องศา

21. 

จากรูป $\square$ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส AE = ED และ BF = FG = GC จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) Δ AEF $\cong$ Δ DEG

(2) Δ ABF $\cong$ Δ EFG $\cong$ Δ DCG

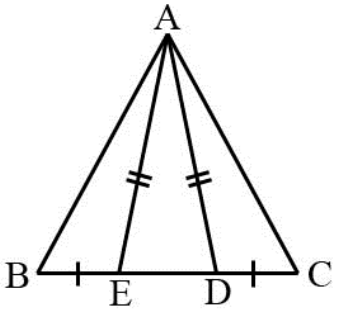
ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

ก. ข้อ (1) และ (2) เป็นจริง

ข. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นจริง

ง. ข้อ (1) และ (2) เป็นเท็จ

22. 

จากรูป Δ ABE เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว BC = DE และ AC = AD ถ้า $A\hat{B}D = 2x^\circ$ และ $A\hat{C}D = 3x^\circ$ แล้ว ขนาดของ $B\hat{A}C$ เท่ากับข้อใด

ก. x°

ข. $2x^\circ$

ค. $3x^\circ$

ง. $4x^\circ$

...

แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต
เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

ตารางที่ 11 ค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ซึ่งคำนวณโดยใช้โปรแกรม SPSS

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ
1	0.52	0.54	0.67
2	0.37	0.49	
3	0.49	0.40	
4	0.38	0.36	
5	0.42	0.42	

แบบวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

ชื่อ.....**สกุล**.....**ชั้น**.....**เลขที่**.....

<u>คำชี้แจง</u>

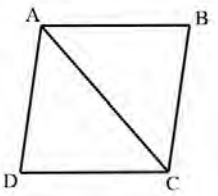
1. แบบวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิตฉบับนี้เป็นแบบวัดชนิดอัตนัยมีจำนวน 5 ข้อ แบ่งออกเป็นชนิดตอบสั้น จำนวน 3 ข้อ และชนิดตอบยาวจำนวน 2 ข้อ คะแนนเต็ม 45 คะแนน

2. แบบวัดฉบับนี้ใช้เวลาในการทำ 50 นาที

3. นักเรียนสามารถทดหรือแสดงวิธีที่ช่วยในการเขียนพิสูจน์ลงในที่ว่างของแบบวัดฉบับนี้ได้ เพื่อให้ง่ายแก่การนำมาเรียบเรียงการเขียนพิสูจน์จริง

4. ให้นักเรียนทำแบบวัดฉบับนี้ทุกข้อโดย**<u>แบบวัดชนิดตอบสั้น</u>** <u>ให้นักเรียนเติมข้อความพิสูจน์ที่ถูกต้องไว้ในช่องว่างทางซ้ายมือ และเติมการให้เหตุผลที่ถูกต้องลงในวงเล็บทางขวามือ</u> ส่วน**<u>แบบวัดชนิดตอบยาว</u>** <u>ให้นักเรียนเขียนแสดงการพิสูจน์โดยเขียนแสดงข้อความพิสูจน์ประกอบกับให้เหตุผล อย่างเป็นลำดับขั้นตอนอย่างชัดเจน</u>

<u>ตัวอย่างการเขียนตอบ</u>



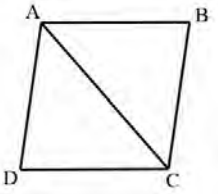
ข้อ 0. กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

จงพิสูจน์ว่า $\Delta ACD \cong \Delta ACB$

กระดาษคำตอบสำหรับ<u>แบบสอบชนิดตอบสั้น</u>	**กระดาษคำตอบสำหรับ<u>แบบสอบชนิดตอบยาว</u>**
กำหนดให้	.....
ต้องการพิสูจน์ว่า	.....
พิสูจน์ พิจารณา……. และ …….	.....
1. AC = …… (……)	.....
	.....
2. …	.....
	.....

ตัวอย่างการเขียนตอบ หน้าถัดไป

ตัวอย่างการเขียนตอบ(ต่อ)



ข้อ 0. กำหนดให้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

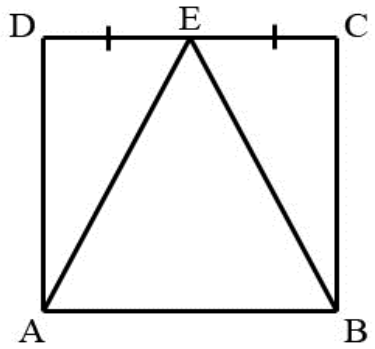
จงพิสูจน์ว่า $\Delta ACD \cong \Delta ACB$

วิธีการเขียนตอบสำหรับแบบสอบชนิดตอบสั้น	**วิธีการเขียนตอบสำหรับแบบสอบชนิดยาว**
กำหนดให้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน **ต้องการพิสูจน์ว่า** $\Delta ACD \cong \Delta ACB$ **พิสูจน์** พิจารณา ΔACD และ ΔACB 1. AC = AC ($\overline{AC}$ ด้านร่วม) 2. …	**กำหนดให้** □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน **ต้องการพิสูจน์ว่า** $\Delta ACD \cong \Delta ACB$ **พิสูจน์** พิจารณา ΔACD และ ΔACB 1. AC = AC ($\overline{AC}$ ด้านร่วม) 2. …
หมายเหตุ – เติมข้อความพิสูจน์ที่ถูกต้องลงในช่องว่างทางซ้ายมือ – เติมการให้เหตุผลที่ถูกต้องลงในวงเล็บทางขวามือ	**หมายเหตุ** เขียนแสดงข้อความพิสูจน์ประกอบกับให้เหตุผลอย่างเป็นลำดับขั้นตอนอย่างชัดเจน

<u>ตอนที่ 1</u> แบบวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิตชนิดตอบสั้น

คำชี้แจง จงเติมข้อความพิสูจน์ลงในช่องว่างและการอธิบายเหตุผลลงในวงเล็บให้สมบูรณ์

1.



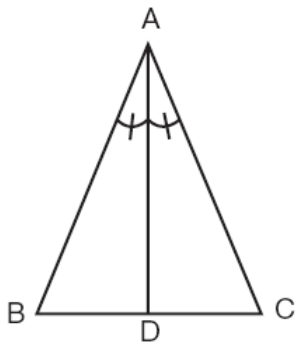
□ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีจุด E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$ จงพิสูจน์ว่า AE = BE

กำหนดให้ .....

ต้องการพิสูจน์ว่า .....

พิสูจน์ พิจารณา ΔDAE และ ΔCBE

1. .....= ..... (กำหนดให้จุด E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{DC}$)
2. $E\hat{D}A = E\hat{C}B$ (.....
   .....)
3. .....=..... (.....)
4. $\Delta DAE \cong \Delta CBE$ (.....)
5. ดังนั้น AE = BE (.....
   .....)

2. 

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

$\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง $B\hat{A}C$

จงพิสูจน์ว่า $\Delta BAD \cong \Delta CAD$

กำหนดให้ .....

ต้องการพิสูจน์ว่า .....

พิสูจน์ พิจารณา ΔBAD และ ΔCAD

1. AB =..... (.....

.....)

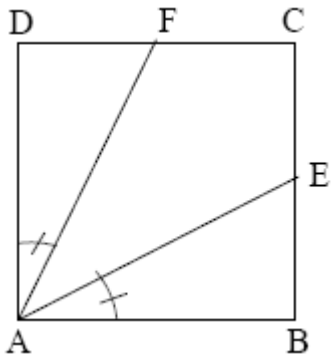
2. $B\hat{A}D = D\hat{A}C$ (.....)

3. .....=..... (.....)

4. $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ (.....)

<u>ตอนที่ 2</u> แบบวัดการให้เหตุผลทางเรขาคณิตชนิดตอบยาว

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงการเขียนพิสูจน์ พร้อมให้เหตุผลทางเรขาคณิตประกอบ

1. 

จากรูป กำหนดให้ □ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่ $D\hat{A}F = B\hat{A}E$ จงพิสูจน์ว่า AF = AE

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

ภาคผนวก จ

ผลการทดสอบความแตกต่างของค่าความแปรปรวน (F-test) และค่าความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิต (t-test) ของคะแนนกลางกลางภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 และคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวอย่างก่อนการทดลอง

ตารางที่ 12 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ก่อนการทดลอง (คะแนนสอบกลางภาคเรียนที่ 1 สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน ปีการศึกษา 2553) ค่าเอฟ (F-test) และค่าที (t-test) (คะแนนเต็ม 50 คะแนน)

ห้อง	n	$\bar{x}$	s	F	t
ม. 2/3	41	34.35	5.23	2.586	1.296
ม. 2/4	36	32.95	6.36		

*p < .05

จากตารางที่ 12 ผลปรากฏว่า ความแปรปรวนของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 จากนั้นทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนสอบกลางภาคเรียนที่ 1 ด้วยค่าที (t-test) พบว่า คะแนนสอบกลางภาคเรียนที่ 1 วิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 แสดงว่านักเรียนทั้งสองห้องมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน

ตารางที่ 13 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนการทดลอง ค่าเอฟ (F-test) และค่าที (t-test) (คะแนนเต็ม 50 คะแนน)

ห้อง	n	$\bar{x}$	s	F	t
ม. 2/3	41	23.47	8.61	0.004	2.031
ม. 2/4	36	19.59	7.54		

*p < .05

จากตารางที่ 13 ผลปรากฏว่า ความแปรปรวนของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 จึงทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิตด้วยค่าที (t-test) พบว่าคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 แสดงว่า นักเรียนทั้งสองห้องมีความรู้พื้นฐานด้านการให้เหตุผลทางเรขาคณิตไม่แตกต่างกัน

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวยุวรรณดา พรหมนิวาส เกิดเมื่อวันที่ 27 มิถุนายน 2527 อยู่บ้านเลขที่ 187 หมู่ที่ 1 ตำบลมีชัย อำเภอเมือง จังหวัดหนองคาย สำเร็จการศึกษาปริญญาครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชา มัธยมศึกษา วิชาเอกวิทยาศาสตร์ทั่วไป และ วิชาเอกคณิตศาสตร์ จากคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2549 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตร ครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตร การสอน และเทคโนโลยีการศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2550 เมื่อ พ.ศ. 2552 ได้เข้ารับราชการเป็นครูปฏิบัติการสอนโรงเรียนวัดสุทธิวราราม กรุงเทพมหานคร จนถึงปัจจุบัน