บทที่ 4

เพาเวอร์โฟลว์ที่ได้รับการปรับปรุง

วัตถุประสงค์หลักของการคำนวณเพาเวอร์โฟลว์คือ การหาจุดทำงานของระบบซึ่งประกอบด้วยขนาดและมุมของแรงดันไฟฟ้า ณ บัสต่างๆ การคำนวณนี้จะมีตัวแปรต้นที่สำคัญ คือ ค่าโหลด ณ แต่ละบัส ค่ากำลังการผลิต (กำลังจริง) ของเครื่องกำเนิดไฟฟ้าแต่ละเครื่อง (ยกเว้นที่ slack บัส) ค่าขนาดแรงดันไฟฟ้า ณ บัสที่มีเครื่องกำเนิดไฟฟ้าต่ออยู่ และ โครงสร้างของระบบส่ง จากตัวแปรต้นเหล่านี้เราสามารถใช้กฎของ Kirchhoff ร่วมกับสมการความสมดุลของกำลังไฟฟ้า เพื่อสร้างความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้นและตัวแปรสถานะ (ขนาดและมุมของแรงดันไฟฟ้า) ของระบบได้ ความสัมพันธ์นี้เรียกว่า "สมการเพาเวอร์โฟลว์" ซึ่งเป็นสมการที่มีลักษณะไม่เป็นเชิงเส้นดังนั้นการหาคำตอบจึงต้องใช้วิธีการคำนวณซ้ำ (iterative method) ซึ่งมีผู้เสนอไว้หลายวิธีเช่น วิธี Gauss-Seidel วิธี Newton-Raphson และ วิธี fast decoupled power flow [14] อย่างไรก็ดี วิธีที่ได้รับความนิยมมากที่สุด คือ วิธี Newton-Raphson ทั้งนี้เพราะมีอัตราการลู่เข้าสู่คำตอบสูง

ต่อมาในปี ค.ศ. 1962 Carpentier ได้เสนอ Optimum Power Flow (OPF) เพื่อแก้ปัญหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด ที่มีการรวมสมการเพาเวอร์โฟลว์และขอบเขตการดำเนินการต่างๆ เป็นเงื่อนไขในการหาคำตอบ ในปัจจุบัน OPF ถือว่าเป็นวิธีการคำนวณที่สำคัญวิธีหนึ่งในการวิเคราะห์ระบบไฟฟ้ากำลังเนื่องจากมีความสามารถประยุกต์ใช้กับงานหลายประเภท อย่างไรก็ดี จุดด้อยที่สำคัญของ OPF ก็คือกระบวนการหาคำตอบที่มีความซับซ้อนสูงและใช้เวลาในการคำนวณมาก ดังนั้นจึงอาจไม่เหมาะสมกับปัญหาบางประเภท ตัวอย่างเช่น

1) การหาค่าโหลดสูงสุดที่สามารถเพิ่มขึ้นได้ ณ โหลดบัส โดยที่ขนาดของแรงดันไฟฟ้ายังมีค่าอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้
2) การหาค่าโหลดสูงสุดที่สามารถเพิ่มขึ้นได้ ณ โหลดบัส โดยที่การส่งผ่านกำลังไฟฟ้า ณ สายส่งเส้นที่กำลังพิจารณา ยังอยู่ภายใต้ค่าพิกัด
3) การหาค่าโหลดสูงสุดที่สามารถเพิ่มขึ้นได้ ณ โหลดบัส โดยที่ค่ากำลังการผลิตของเครื่องกำเนิดไฟฟ้ายังอยู่ภายใต้ค่าพิกัด

ปัญหาข้างต้นเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความสามารถถ่ายโอนกำลังไฟฟ้า ดังนั้นในบทนี้จะนำเสนอวิธีในการแก้ปัญหาดังกล่าวโดยใช้ชื่อ "Modified Power Flow (MPF)" พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างในการคำนวณอย่างละเอียดกับระบบไฟฟ้ากำลังขนาด 2 บัสเพื่อประกอบความเข้าใจ

ลำดับการนำเสนอในบทนี้จะเริ่มต้นจากการทบทวนวิธีการคำนวณเพาเวอร์โฟลว์ด้วยวิธี Newton – Raphson จากนั้นจึงอธิบายวิธี MPF โดยอาศัยตัวอย่างประกอบในแต่ละในแต่ละกรณีต่อไป

4.1 การคำนวณเพาเวอร์โฟลว์ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน [14]

สมการเพาเวอร์โฟลว์สามารถเขียนให้ในรูปของกำลังไฟฟ้าที่ไหลเข้าบัสและแรงดันที่บัสได้ดังนี้

$$P_i - jQ_i = V_i^* \cdot \sum_{n=1}^{N} Y_{in} \cdot V_n \tag{4.1}$$

โดยที่ P_i คือ กำลังไฟฟ้าจริงที่ไหลเข้าสู่บัส i

Q_i คือ กำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟที่ไหลเข้าสู่บัส i

V_i, V_n คือ แรงดันไฟฟ้าที่บัส i และ n ตามลำดับ

V_i^* คือ สังยุคเชิงซ้อนของแรงดันไฟฟ้าที่บัส i

Y_{in} คือ สมาชิกในตำแหน่งที่ (i,n) ของบัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์

N คือ จำนวนบัสทั้งหมดในระบบกำลังไฟฟ้า

เมื่อพิจารณาสมการที่ (4.1) **จะสามารถเขียนสมการแสดงค่ากำลังจริง และกำลังรีแอกทีฟที่จ่ายเข้าไปยังบัส i ของระบบไฟฟ้ากำลังที่ประกอบไปด้วยบัสจำนวน N บัส ได้ดังสมการที่** (4.2) **และ** (4.3)

$$P_i = \sum_{n=1}^{N} y_{in} V_i V_n \cos(\delta_n - \delta_i + \theta_{in}) \tag{4.2}$$

$$Q_i = -\sum_{n=1}^{N} y_{in} V_i V_n \sin(\delta_n - \delta_i + \theta_{in}) \tag{4.3}$$

โดยที่

V_i, δ_i = ขนาดและมุมเฟสของแรงดันบัสที่บัส i

V_n, δ_n = ขนาดและมุมเฟสของแรงดันบัสที่บัส n

y_{in}, θ_{in} = ขนาดและมุมของสมาชิกในบัสแอดมิตแตนซ์เมตริกซ์

สมการที่ (4.2) **และ** (4.3) เรียกว่าสมการเพาเวอร์โฟลว์**ซึ่งเป็นสมการที่มีลักษณะไม่เป็นเชิงเส้น การวิเคราะห์**เพาเวอร์โฟลว์โดยการใช้วิธี Newton – Raphson **จะเปลี่ยนสมการ**เพาเวอร์**โฟลว์ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้นโดย**การใช้การกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) กระจายฟังก์ชันของ P และ Q รอบจุดประมาณเริ่มต้นและไม่คิดพจน์อันดับสองขึ้นไป โดยจะเขียนให้อยู่ในรูปของสมการความคลาดเคลื่อนของกำลังจริงและกำลังรีแอกทีฟเป็นเมตริกซ์ ดังสมการที่ (4.4)

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \cdots \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & \vdots & J_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ J_3 & \vdots & J_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \cdots \\ \Delta V \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

โดยที่ ΔP, ΔQ คือ เวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนของกำลังจริงและกำลังรีแอกทีฟของบัสแต่ละบัส

$\Delta \delta$ คือ เวกเตอร์ของมุมเฟสของแรงดันไฟฟ้าที่บัสซึ่งต้องแก้ไข(Correction)

ΔV คือ เวกเตอร์ของขนาดของแรงดันไฟฟ้าที่บัสซึ่งต้องแก้ไข(Correction)

J_1, J_2, J_3, J_4 คือ เมตริกซ์จาโคเบียนย่อย (Sub Jacobian Matrix)

สมาชิกแต่ละตัวของ ΔP และ ΔQ สามารถคำนวณได้จากสมการ (4.5) และ (4.6) ตามลำดับ

$$\Delta P_i = (P_{Gi} - P_{Li}) - P_{i,calc} \tag{4.5}$$

$$\Delta Q_i = (Q_{Gi} - Q_{Li}) - Q_{i,calc} \tag{4.6}$$

โดยที่ ΔP_i คือ สมาชิกตัวที่ i ของเวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนกำลังจริง

ΔQ_i คือ สมาชิกตัวที่ i ของเวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนกำลังรีแอกทีฟ

P_{Gi}, Q_{Gi} คือ ค่ากำลังจริงและค่ากำลังรีแอกทีฟ ที่ผลิตได้จากบัส i

P_{Li}, Q_{Li} คือ ค่าความต้องการกำลังจริงและกำลังรีแอกทีฟ ของบัส i

$P_{i,calc}$ คือ ค่ากำลังจริงที่คำนวณได้จากสมการที่ (4.2) สำหรับบัส i

$Q_{i,calc}$ คือ ค่ากำลังรีแอกทีฟที่คำนวณได้จากสมการที่ (4.3) สำหรับบัส i

และสำหรับสมาชิกแต่ละตัวของเมตริกซ์จาโคเบียนย่อย J_1 สามารถหาได้โดยใช้สมการที่ (4.7) และ (4.8) สมาชิกของเมตริกซ์จาโคเบียนย่อย J_2 หาได้โดยใช้สมการที (4.9) และ (4.10) สมาชิกของเมตริกซ์จาโคเบียนย่อย J_3 หาได้โดยใช้สมการที่ (4.11) และ (4.12) และสมาชิกของเมตริกซ์จาโคเบียนย่อย J_4 หาได้โดยใช้สมการที่ (4.13) และ (4.14) ตามลำดับ

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = -\mathrm{V_i V_j y_{ij}} \sin(\delta_j - \delta_i + \theta_{ij}) \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = -Q_i - V_i^2 b_{ii} \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_j} = V_i y_{ij} \cos(\delta_j - \delta_i + \theta_{ij}) \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_i} = \frac{P_i}{V_i} + V_i \ g_{ii} \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} = -V_i V_j y_{ij} \cos(\delta_j - \delta_i + \theta_{ij}) \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = P_i - V_i^2 g_{ii} \tag{4.12}$$

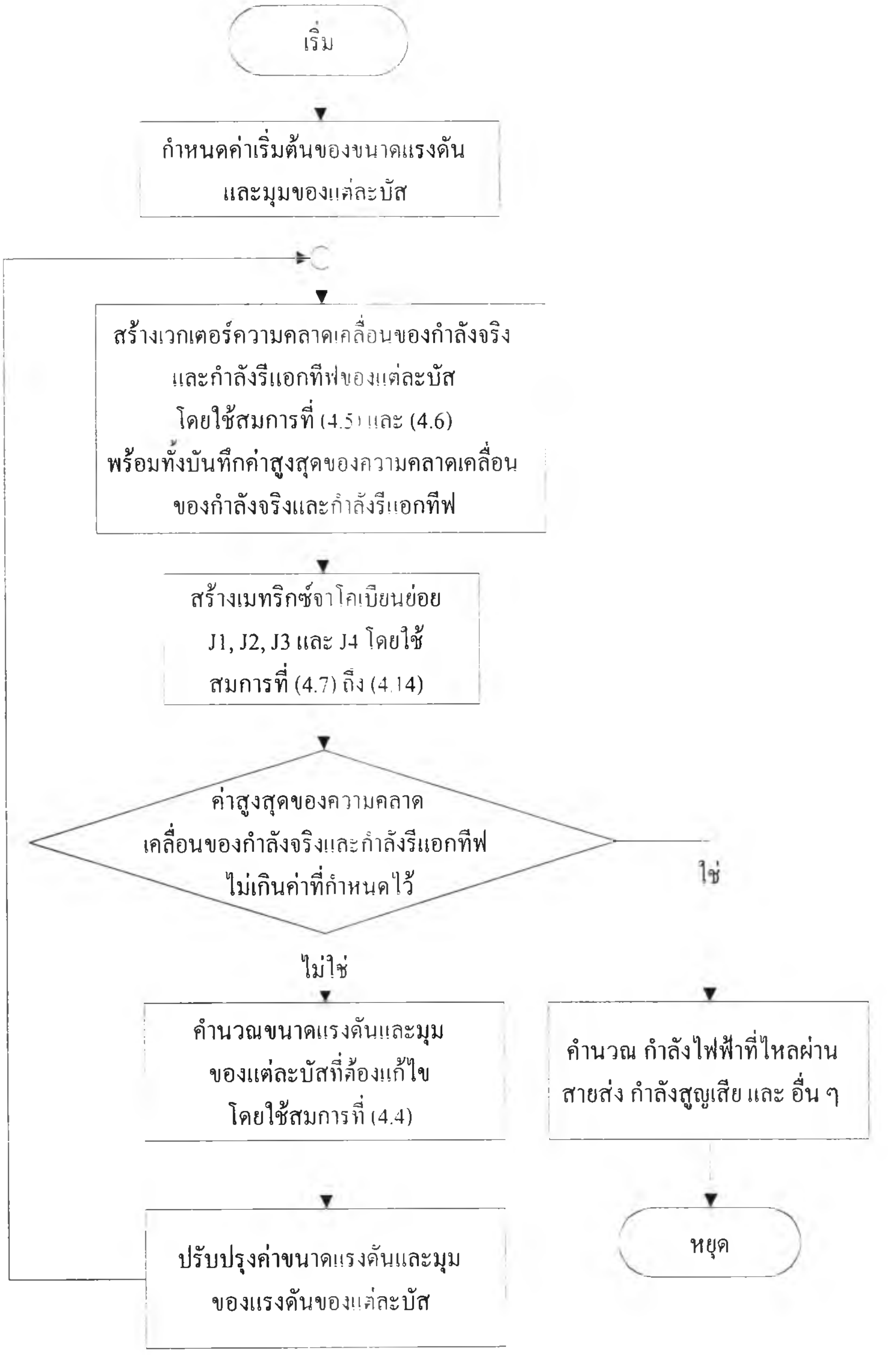
$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_j} = -V_i y_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i + \theta_{ij}) \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_i} = \frac{Q_i}{V_i} - V_i \ b_{ii} \tag{4.14}$$

โดยค่าของ g_{ii} และ b_{ii} เป็นไปตามสมการที่ (4.15)

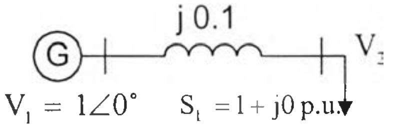
$$\boldsymbol{y_{ii}} = y_{ii}\angle\theta_{ii} = y_{ii}cos\theta_{ii} + j \cdot y_{ii}sin\theta_{ii} = g_{ii} + j \cdot b_{ii} \tag{4.15}$$

การคำนวณเพาเวอร์โฟลว์ด้วยวิธี Newton-Raphson นั้นจำเป็นต้องคำนวณสมการ (4.4) ซ้ำเพื่อหาค่าที่จะนำไปปรับเปลี่ยนค่ามุมกับขนาดแรงดันที่แต่ละบัสได้แก่ $\Delta\delta$ และ ΔV จากนั้นจึงนำไปใช้เป็นค่าเริ่มต้นสำหรับการคำนวณในรอบถัดไป จนกระทั่งค่าความคลาดเคลื่อนของกำลังจริงและกำลังรีแอกทีฟที่บัสทุกบัสในระบบน้อยกว่าค่าที่กำหนดไว้ค่าหนึ่งจึงหยุดคำนวณ จากขั้นตอนทั้งหมดดังกล่าวข้างต้นสามารถสรุปเป็นโฟลว์ชาร์ตแสดงขั้นตอนการคำนวณเพาเวอร์โฟลว์ตามวิธี Newton-Raphson ได้ดังรูปที่ 4.1 [14]



รูป 4.1 ขั้นตอนการคำนวณโหลดโฟลว์ด้วยวิธี นิวตัน-ราฟสัน

ตัวอย่างที่ 1 การหาจุดทำงานของระบบไฟฟ้ากำลัง



รูปที่ 4.2 ระบบไฟฟ้ากำลังขนาดเล็ก

กระแสที่ไหลจากบัสที่ 1 ไปยังบัสที่ 2 หาจาก

$$\boldsymbol{I} = \frac{V_1 - V_2}{j \cdot X}$$

แต่เนื่องจาก

$$\boldsymbol{S_2} = \boldsymbol{V_2 I^*}$$

ดังนั้นแทนค่า $\boldsymbol{I}$ จะได้

$$\boldsymbol{S_2} = \boldsymbol{V_2}\left(\frac{\boldsymbol{V_1 - V_2}}{j \cdot X}\right)^* = \frac{V_2 V_1^* - V_2 V_2^*}{-j \cdot X}$$

$$\boldsymbol{S_2} = \frac{1}{-j \cdot X}\left[V_2 V_1 cos(\delta_2 - \delta_1) + j \cdot V_2 V_1 sin(\delta_2 - \delta_1) - V_2^2\right]$$

$$\therefore \qquad \boldsymbol{S_2} = -\frac{V_2 V_1}{X} sin(\delta_2 - \delta_1) + j \cdot \left[\frac{V_2 V_1 cos(\delta_2 - \delta_1) - V_2^2}{X}\right]$$

ซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็นส่วนจริงและส่วนจินตภาพได้ คือ

$$P_2 = -\frac{V_2 V_1}{X} sin(\delta_2 - \delta_1)$$

$$Q_2 = \frac{V_2 V_1 cos(\delta_2 - \delta_1) - V_2^2}{X}$$

หรือ

$$f_1(V_2, \delta_2) = P_2 + \frac{V_2 V_1}{X} sin(\delta_2 - \delta_1) = 0$$

$$f_2(V_2, \delta_2) = \frac{V_2 V_1 cos(\delta_2 - \delta_1) - V_2^2}{X} - Q = 0$$

สมการข้างต้นนี้คือ สมการเพาเวอร์โฟลว์ของระบบไฟฟ้ากำลังขนาดเล็กในรูปที่ 4.2 การหาคำตอบสามารถโดยวิธีที่ได้อธิบายไว้ในหัวข้อที่ 4.1 เริ่มต้นกระจายสมการเพาเวอร์โฟลว์ด้วยอนุกรม Taylor อันดับที่ 1 ดังนี้

$$f_1(V_2, \delta_2) = f_1(V_2^0, \delta_2^0) + \frac{\partial f_1}{\partial \delta_2} \cdot \Delta\delta_2 + \frac{\partial f_1}{\partial V_2} \cdot \Delta V_2 + \varepsilon_1 = 0$$

$$f_2(V_2, \delta_2) = f_2(V_2^0, \delta_2^0) + \frac{\partial f_2}{\partial \delta_2} \cdot \Delta\delta_2 + \frac{\partial f_2}{\partial V_2} \cdot \Delta V_2 + \varepsilon_2 = 0$$

ทำการประมาณให้ ε_1 และ ε_2 มีค่าเท่ากับศูนย์ และเขียนใหม่ในรูปเมตริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} -f_1(V_2^0,\delta_2^0) \\ -f_2(V_2^0,\delta_2^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial V_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial V_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$\frac{\partial f_1}{\partial \delta_2} = \frac{V_2 V_1}{X} cos(\delta_2 - \delta_1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial V_2} = \frac{V_1}{X} sin(\delta_2 - \delta_1)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \delta_2} = -\frac{V_2 V_1 sin(\delta_2 - \delta_1)}{X}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial V_2} = \frac{V_1 cos(\delta_2 - \delta_1) - 2V_2}{X}$$

ดังนั้นภายใต้การประมาณของอนุกรมเทย์เลอร์จะให้คำตอบ คือ

$$\delta_2 = \delta_2^0 + \Delta\delta_2$$

$$V_2 = V_2^0 + \Delta V_2$$

การคำนวณโดยทั่วไปจะทำซ้ำเป็นรอบๆ จนกระทั่ง $|f_1(V_2,\delta_2)|$ และ $|f_2(V_2,\delta_2)|$ มีค่าต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้เช่น 0.001 ซึ่งการคำนวณทำได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 จากโจทย์ $P = 1$, $Q = 0$ p.u., $X = 0.1$ p.u., $V_1 = 1$ p.u. $\delta_1 = 0$ rad และกำหนด คำตอบเริ่มต้น $V_2 = 1\angle 0^\circ$

ขั้นที่ 2 คำนวณ $f_1(V_2,\delta_2)$ และ $f_2(V_2,\delta_2)$ จะได้

$$f_1(V_2,\delta_2) = 1 + \frac{1\times 1}{0.1}\cdot sin(0-0) = 1$$

$$f_2(V_2,\delta_2) = \frac{1\times 1 cos(0-0) - (1)^2}{0.1} = 0$$

ขั้นที่ 3 แทนค่า $f_1(V_2,\delta_2)$ และ $f_2(V_2,\delta_2)$ เพื่อคำนวณค่า $\Delta\delta_2$ และ ΔV_2

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix}$$

ในที่นี้คำตอบคือ $\Delta\delta_2$ = -0.1 และ ΔV_2 = 0 ดังนั้นเมื่อปรับปรุงค่าจะได้

$$\delta_2 = 0 - 0.1 = -0.1 \text{ rad}$$

$$V_2 = 1 + 0 = 1 \text{ p.u.}$$

คำนวณขั้นที่ 2 ซ้ำได้

$$f_1(V_2,\delta_2) = 0.00166589$$

$$f_2(V_2,\delta_2) = -0.0499583$$

คำนวณขั้นที่ 3 ซ้ำได้

$$\begin{bmatrix} -0.00166589 \\ 0.0499583 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.950041 & -0.99833 \\ 0.998334 & -10.0499 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix}$$

ได้คำตอบคือ $\Delta\delta_2 = -0.000673$ และ $\Delta V_2 = -0.005038$ ดังนั้นเมื่อปรับปรุงค่าจะได้

$$\delta_2 = -0.1 - 0.000673 = -0.100673 \text{ rad}$$

$$V_2 = 1 - 0.005038 = 0.994962 \text{ p.u.}$$

คำนวณขั้นที่ 2 ซ้ำได้

$$f_1(V_2,\delta_2) = 0.000033$$

$$f_2(V_2,\delta_2) = -0.000251$$

ปรากฏว่า $|f_1(V_2,\delta_2)|$ และ $|f_2(V_2,\delta_2)|$ มีค่าน้อยกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้ 0.001 ดังนั้นคำตอบที่ได้จากการคำนวณเพาเวอร์โฟลว์ณ ค่า $P=1, Q=0$ p.u. คือ $V_2 = 0.994962\angle -5.7681^\circ$

4.2 การคำนวณเพาเวอร์โฟลว์ที่ได้รับการปรับปรุง (Modified Power Flow: MPF)

MPF ที่จะกล่าวถึงในที่นี้เป็นเป็นการดัดแปลงการคำนวณเพาเวอร์โฟลว์แบบ Newton – Raphson เพื่อวัตถุประสงค์ 3 ประการ คือ

1) การหาค่าโหลดสูงสุดที่สามารถเพิ่มขึ้นได้ ณ โหลดบัส โดยที่ขนาดของแรงดันไฟฟ้ายังมีค่าอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้
2) การหาค่าโหลดสูงสุดที่สามารถเพิ่มขึ้นได้ ณ โหลดบัส โดยที่การส่งผ่านกำลังไฟฟ้า ณ สายส่งเส้นที่กำลังพิจารณา ยังอยู่ภายใต้ค่าพิกัด
3) การหาค่าโหลดสูงสุดที่สามารถเพิ่มขึ้นได้ ณ โหลดบัส โดยที่ค่ากำลังการผลิตของเครื่องกำเนิดไฟฟ้ายังอยู่ภายใต้ค่าพิกัด

4.2.1 การจัดรูปแบบปัญหา

จากสมการเพาเวอร์โฟลว์ที่ได้อธิบายไว้แล้วในหัวข้อ 4.1 ทำการเขียนใหม่รูปแบบย่อ คือ

$$f(X) = 0 \;;\; X = [\delta, V] \tag{4.16}$$

โดยที่ δ คือ เวกเตอร์ที่สมาชิกประกอบด้วย มุมของแรงดันไฟฟ้า ณ บัสแต่ละบัส

V คือ เวกเตอร์ที่สมาชิกประกอบด้วย ขนาดของแรงดันไฟฟ้า ณ บัสแต่ละบัส

เพื่อให้สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของ MPF ในที่นี้จะดัดแปลงค่าโหลด ณ บัสที่กำลังพิจารณา (บัส i)จากเดิมที่กำหนดเป็นค่าคงที่ เปลี่ยนเป็นค่าโหลดที่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ ผ่านทางการปรับค่าตัวคูณโหลด λ ดังนั้น ค่าโหลด ณ บัส i คือ

$$P_i = P_i^0 + \lambda K_{Pi} \tag{4.17}$$

$$Q_i = Q_i^0 + \lambda K_{Qi} \tag{4.18}$$

โดยที่ P_i^0, Q_i^0 คือ ค่าโหลดจริงและโหลดรีแอกทีฟ ณ บัสที่ i

K_{Pi}, K_{Qi} คือ ค่าคงตัวที่ใช้แสดงอัตราการเพิ่มของโหลดจริงและโหลดรีแอกทีฟ ณ บัสที่ i เมื่อ λ เปลี่ยนแปลง

ดังนั้น สมการเพาเวอร์โฟลว์จึงเปลี่ยนรูปเป็น

$$f(X) = 0 \ ; \ X = [\delta, V, \lambda]$$

สมการข้างต้นนี้จะถูกใช้เป็นสมการหลักในการแก้ปัญหา MPF ที่จะได้กล่าวแยกเป็นแต่ละกรณีในหัวข้อถัดๆ ไป

4.2.2 การคำนวณเพาเวอร์โฟลว์ที่ได้รับการปรับปรุงกรณีที่ 1

ในกรณีนี้ปัญหาที่พิจารณา คือ การหาค่าโหลดสูงสุดที่สามารถเพิ่มขึ้นได้ ณ โหลดบัส โดยที่ขนาดของแรงดันไฟฟ้ายังมีค่าอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ ที่มาของปัญหานี้คือ การเพิ่มขึ้นของโหลด ณ บัสที่ไม่ได้มีการควบคุมแรงดันไฟฟ้า ค่าขนาดแรงดันไฟฟ้าจะมีค่าลดลง ดังนั้นเราจึงความจำเป็นที่จะต้องทราบว่าค่าโหลด ณ บัสที่กำลังพิจารณาจะสามารถเพิ่มขึ้นได้อีกเท่าไรจากค่าในสภาวะปัจจุบัน คำตอบของปัญหานี้สามารถเขียนในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} &Max \quad \lambda \\ &S.T. \ f(X) = 0 \ ; X = [\delta, V, \lambda] \\ &\qquad V_i \le V_i^{limit} \end{aligned} \tag{4.19}$$

อย่างไรก็ดี สมการที่ (4.19) นั้นเมื่อพิจารณาจากทางกายภาพแล้วเราสามารถทำให้การแก้ปัญหาง่ายขึ้น โดยทำการแก้สมการที่ (4.20)-(4.21) ทั้งนี้เนื่องจาก ค่าโหลดที่สามารถเพิ่มขึ้นได้มากสุดซึ่งบอกด้วย λ จะเกิดขึ้น ณ สภาวะที่ขนาดแรงดันไฟฟ้า ณ บัสที่ i มีค่าเท่ากับค่าขีดจำกัดเสมอ ดังนั้นปัญหาของ MPF กรณีที่ 1 ก็คือ

$$f(X) = 0 \ ; X = [\delta, V, \lambda] \tag{4.20}$$

$$g(V_i) = V_i - V_i^{limit} = 0 \tag{4.21}$$

ผู้ทำวิจัยจะแก้ปัญหาด้วยวิธี Newton โดยจะกระจายสมการที่ (4.20) และ (4.21) ให้อยู่ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์อันดับที่ 1 คือ

$$f(X) = f(X^0) + \frac{\partial f}{\partial \delta} \cdot \Delta\delta + \frac{\partial f}{\partial V} \cdot \Delta V + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \cdot \Delta\lambda = 0 \qquad (4.22)$$

$$g(V_i) = g(V_i^0) + \frac{\partial g}{\partial V_i} \cdot \Delta V_i = 0 \qquad (4.23)$$

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \delta} & \frac{\partial f}{\partial V} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ & e_i & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta V \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(X^0) \\ -g(V_i^0) \end{bmatrix} \qquad (4.24)$$

เมื่อ $\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \delta} & \frac{\partial f}{\partial V} \end{bmatrix}$ คือ เมตริกซ์ Jacobian ที่ได้จากสมการที่ (4.4)

$\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ คือ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกเป็น 0 ยกเว้นตำแหน่งที่เกี่ยวข้องกับ P_i, Q_i จะมีค่าเป็น K_{Pi}, K_{Qi} ตามลำดับ (ดูสมการที่ (4.17) และ (4.18))

e_i คือ เมตริกซ์แถวนอนที่มีสมาชิกเป็น 0 ยกเว้นตำแหน่งที่เกี่ยวข้องกับ V_i จะคือ $\frac{\partial g}{\partial V_i}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1

จากสมการที่ (4.24) เราจะได้ค่า $\Delta\delta, \Delta V,$ และ $\Delta\lambda$ ที่จะใช้ในการปรับให้ค่า $\delta, V,$ และ λ เข้าใกล้กับคำตอบมากยิ่งขึ้น ต่อจากนั้นจะทำการคำนวณซ้ำอีกจนกระทั่งค่าความผิดพลาดมีค่าต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้เช่น $max\{|f(X)|, |g(V_i)|\} < 0.001$ จึงหยุดการคำนวณ

ตัวอย่างที่ 2 จากระบบไฟฟ้าในตัวอย่างที่ 1 เมื่อเพิ่มโหลด ณ บัสที่ 2 ขึ้นเรื่อยๆ ขนาดแรงดัน ณ บัสดังกล่าวจะมีค่าลดลง ด้วยเหตุนี้ในตัวอย่างที่ 2 จะแสดงวิธีการหาค่าโหลดสูงสุด ณ บัสที่ 2 โดยที่ขนาดแรงดันไฟฟ้า ณ บัสที่ 2 ยังคงมีค่าไม่ต่ำกว่า 0.95 p.u.

เริ่มต้นจากจัดปัญหาในอยู่ในรูปแบบสมการคณิตศาสตร์ ซึ่งคือ

$$f_1(V_2,\delta_2,\lambda) = 1 + \lambda - 10 \cdot V_2 \cdot \sin\delta_2 = 0$$

$$f_2(V_2,\delta_2,\lambda) = 10 \cdot V_2 \cdot \cos\delta_2 - 10 \cdot V_2^2 = 0$$

$$f_3(V_2,\delta_2,\lambda) = V_2 - 0.95 = 0$$

การแก้สมการจะใช้วิธี Newton ซึ่งเริ่มต้นจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ อันดับที่ 1 ของชุดสมการจะได้

$$f_1(V_2,\delta_2,\lambda) = f_1(V_2^0,\delta_2^0,\lambda^0) + \frac{\partial f_1}{\partial \delta_2} \cdot \Delta\delta_2 + \frac{\partial f_1}{\partial V_2} \cdot \Delta V_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \cdot \Delta\lambda + \varepsilon_1 = 0$$

$$f_2(V_2,\delta_2,\lambda) = f_2(V_2^0,\delta_2^0,\lambda^0) + \frac{\partial f_2}{\partial \delta_2} \cdot \Delta\delta_2 + \frac{\partial f_2}{\partial V_2} \cdot \Delta V_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \cdot \Delta\lambda + \varepsilon_2 = 0$$

$$f_3(V_2,\delta_2,\lambda) = f_3(V_2^0,\delta_2^0,\lambda^0) + \frac{\partial f_3}{\partial \delta_2}\cdot \Delta\delta_2 + \frac{\partial f_3}{\partial V_2}\cdot \Delta V_2 + \frac{\partial f_3}{\partial \lambda}\cdot \Delta\lambda + \varepsilon_3 = 0$$

ประมาณ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ และ ε_3 ให้มีค่าเท่ากับศูนย์ แล้วจัดรูปสมการเป็นแบบเมตริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial V_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial V_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_3}{\partial V_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(V_2^0,\delta_2^0,\lambda^0) \\ -f_2(V_2^0,\delta_2^0,\lambda^0) \\ -f_3(V_2^0,\delta_2^0,\lambda^0) \end{bmatrix}$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} 10\cdot V_2\cdot cos\delta_2 & 10\cdot sin\delta_2 & 1 \\ -10\cdot V_2\cdot sin\delta_2 & 10\cdot cos\delta_2 - 20\cdot V_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(V_2^0,\delta_2^0,\lambda^0) \\ -f_2(V_2^0,\delta_2^0,\lambda^0) \\ -f_3(V_2^0,\delta_2^0,\lambda^0) \end{bmatrix}$$

จุดเริ่มต้น λ =0, $V_1 = 1\angle 0^\circ$ p.u. และ $V_2 = 0.994936\angle -0.10067^r$

รอบที่ 1

$$\begin{bmatrix} 9.8990 & -1.0050 & 1 \\ 0.9999 & -9.9493 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.044936 \end{bmatrix}$$

ซึ่งคำตอบ คือ $\Delta\delta_2$ = -0.447124, ΔV_2 = -0.04493 และ $\Delta\lambda$ =4.38091 ตามลำดับดังนั้นคำตอบที่ได้จากการคำนวณรอบที่ 1 คือ

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ V_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.10067 \\ 0.994936 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.447124 \\ -0.044936 \\ 4.38091 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.547794 \\ 0.95000 \\ 4.38091 \end{bmatrix}$$

รอบที่ 2

$$\begin{bmatrix} 8.109917 & -5.20805 & 1 \\ 4.94765 & -10.8900 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.43325 \\ 0.915082 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งคำตอบ คือ $\Delta\delta_2$ = 0.184953, ΔV_2 = 0 และ $\Delta\lambda$ = -1.93321 ตามลำดับดังนั้นคำตอบที่ได้จากการคำนวณรอบที่ 2 คือ

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ V_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.547794 \\ 0.95000 \\ 4.38091 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.184953 \\ 0 \\ -1.93321 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.362841 \\ 0.95000 \\ 2.44770 \end{bmatrix}$$

รอบที่ 3

$$\begin{bmatrix} 8.881476 & -3.54931 & 1 \\ 3.371851 & -9.65107 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.07584 \\ 0.143523 \\ 0 \end{bmatrix}$$

คำตอบ คือ $\Delta\delta_2 =$ 0.042565, $\Delta V_2 = 0$ และ $\Delta\lambda$ = -0.45389 ตามลำดับดังนั้นคำตอบที่ได้จากการคำนวณรอบที่ 3 คือ

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ V_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.362841 \\ 0.95000 \\ 2.44770 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.042565 \\ 0 \\ -0.45389 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.320245 \\ 0.95000 \\ 1.99381 \end{bmatrix}$$

รอบที่ 4

$$\begin{bmatrix} 9.017004 & -3.14799 & 1 \\ 2.99059 & -9.50841 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.003218 \\ 0.007996 \\ 0 \end{bmatrix}$$

คำตอบ คือ $\Delta\delta_2 =$ 0.002674, $\Delta V_2 = 0$ และ $\Delta\lambda$ = -0.02732 ตามลำดับดังนั้นคำตอบที่ได้จากการคำนวณรอบที่ 4 คือ

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ V_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.320245 \\ 0.95000 \\ 1.99381 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.002674 \\ 0 \\ -0.02732 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.317571 \\ 0.95000 \\ 1.96649 \end{bmatrix}$$

ทดสอบคำตอบที่ได้จากการคำนวณรอบที่ 4 โดยแทนคำตอบที่ได้ลงใน f_1 ถึง f_3 จะได้

$$f_1(V_2,\delta_2,\lambda) = 0.0000205$$

$$f_2(V_2,\delta_2,\lambda) = -0.0000313$$

$$f_3(V_2,\delta_2,\lambda) = 0$$

สังเกตได้ว่าคำตอบที่ได้จากการคำนวณในรอบที่ 4 มีความผิดพลาดอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า โหลดที่ทำให้ค่าขนาดแรงดันของบัสที่ 2 มีค่า 0.95 p.u. คือ *P* = *2.96649 p.u.* ซึ่งเกิดจาก $\lambda = 1.96649$ *p.u.* และทำให้มุมของแรงดันไฟฟ้าที่บัส 2 มีค่า *–0.317571* หรือ –18.195^0

4.2.3 การคำนวณเพาเวอร์โฟลว์ที่ได้รับการปรับปรุงกรณีที่ 2

ในกรณีนี้ปัญหาที่พิจารณา คือ การหาค่าโหลดสูงสุดที่สามารถเพิ่มขึ้นได้ ณ โหลดบัส โดยที่การส่งผ่านกำลังไฟฟ้า ณ สายส่งเส้นที่กำลังพิจารณา ยังอยู่ภายใต้ค่าพิกัด ที่มาของปัญหานี้คือการเพิ่มขึ้นของโหลด ณ บัสที่ไม่มีเครื่องกำเนิดไฟฟ้าต่ออยู่จะก่อให้เกิดการส่งผ่านกำลัง ไฟฟ้าในปริมาณที่มากขึ้น ดังนั้นเราจึงความจำเป็นที่จะต้องทราบว่าค่าโหลด ณ บัสที่กำลังพิจารณา (บัสที่ i) จะสามารถเพิ่มขึ้นได้อีกเท่าไรจากค่าในสภาวะปัจจุบันโดยที่ยังไม่ก่อให้เกิดสภาวะรับ

โหลดเกินของสายส่งเส้นที่สนใจ (j-k) คำตอบของปัญหานี้สามารถเขียนในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} & Max \quad \lambda \\ & S.T. \ \ f(X) = 0 \ \ ; X = [\delta, V, \lambda] \\ & \qquad S_{jk} \le S_{jk}^{limit} \end{aligned} \tag{4.25}$$

เมื่อ S_{jk} คือ ค่ากำลังปรากฏที่ส่งผ่านสายส่งเส้น j-k

S_{jk}^{limit} คือ ค่าพิกัดของกำลังปรากฏที่สายส่งเส้น j-k จะรับได้

อย่างไรก็ดี สมการที่ (4.25) เมื่อพิจารณาจากทางกายภาพแล้วเราสามารถทำให้การแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น โดยทำการแก้สมการที่ (4.26)-(4.27) ทั้งนี้เนื่องจาก ค่าโหลดที่สามารถเพิ่มขึ้นได้มากสุด ซึ่งบอกด้วย λ จะเกิด ณ สภาวะที่การส่งผ่านกำลังปรากฏมีค่าเท่ากับค่าพิกัดของสายส่ง ดังนั้น ปัญหาของ MPF กรณีที่ 2 ก็คือ

$$f(X) = 0 \ \ ; X = [\delta, V, \lambda] \tag{4.26}$$

$$g(X) = S_{jk} - S_{jk}^{limit} = 0 \tag{4.27}$$

ซึ่งจะแก้ปัญหาด้วยวิธี Newton ซึ่งจะทำการกระจายสมการที่ (4.26) และ (4.27) อยู่ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ อันดับที่ 1 จะได้

$$f(X) = f(X^0) + \frac{\partial f}{\partial \delta} \cdot \Delta\delta + \frac{\partial f}{\partial V} \cdot \Delta V + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \cdot \Delta\lambda = 0 \tag{4.28}$$

$$g(X) = g(X^0) + \frac{\partial g}{\partial \delta} \cdot \Delta\delta + \frac{\partial g}{\partial V} \cdot \Delta V = 0 \tag{4.29}$$

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \delta} & \frac{\partial f}{\partial V} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g}{\partial \delta} & \frac{\partial g}{\partial V} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta V \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(X^0) \\ -g(X^0) \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

เมื่อ $\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \delta} & \frac{\partial f}{\partial V} \end{bmatrix}$ คือ เมตริกซ์ Jacobian ที่ได้จากสมการที่ (4.4)

$\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ คือ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกเป็น 0 ยกเว้นตำแหน่งที่เกี่ยวข้องกับ P_i, Q_i จะมีค่าเป็น K_{Pi}, K_{Qi} ตามลำดับ (ดูสมการที่ (4.17) และ (4.18))

$\frac{\partial g}{\partial \delta}$ คือ เมตริกซ์แถวนอนที่มีสมาชิกเป็น 0 ยกเว้นตำแหน่งที่เกี่ยวข้องกับ δ_j

และ

δ_k ซึ่งจะมีค่าเป็น $\frac{\partial S_{jk}}{\partial \delta_j}$ และ $\frac{\partial S_{jk}}{\partial \delta_k}$ ตามลำดับ

$\frac{\partial g}{\partial V}$ คือ เมตริกซ์แถวนอนที่มีสมาชิกเป็น 0 ยกเว้นตำแหน่งที่เกี่ยวข้องกับ V_j และ V_k ซึ่งจะมีค่าเป็น $\frac{\partial S_{jk}}{\partial V_j}$ และ $\frac{\partial S_{jk}}{\partial V_k}$ ตามลำดับ

สำหรับค่า $\frac{\partial S_{jk}}{\partial \delta_j}$, $\frac{\partial S_{jk}}{\partial \delta_k}$, $\frac{\partial S_{jk}}{\partial V_j}$ และ $\frac{\partial S_{jk}}{\partial V_k}$ สามารถหาได้จาก พิจารณากำลังปรากฏที่ไหลผ่านสายส่ง j-k ซึ่งคือ

$$S_{jk} = \sqrt{P_{jk}^2 - Q_{jk}^2} \tag{4.31}$$

เมื่อ

$$P_{jk} = V_j^2 g_{jk} - V_j V_k y_{jk} \cdot cos(\delta_j - \delta_k + \theta_{jk}) \tag{4.32}$$

$$Q_{jk} = -V_j^2 b_{jj} - V_j^2 b_{jk} - V_j V_k y_{jk} \cdot sin(\delta_j - \delta_k + \theta_{jk}) \tag{4.33}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial S_{jk}}{\partial \delta_j} = \frac{1}{S_{jk}} \cdot \left[P_{jk} \cdot \frac{\partial P_{jk}}{\partial \delta_j} + Q_{jk} \cdot \frac{\partial Q_{jk}}{\partial \delta_j} \right] \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial S_{jk}}{\partial \delta_k} = \frac{1}{S_{jk}} \cdot \left[P_{jk} \cdot \frac{\partial P_{jk}}{\partial \delta_k} + Q_{jk} \cdot \frac{\partial Q_{jk}}{\partial \delta_k} \right] \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial S_{jk}}{\partial V_j} = \frac{1}{S_{jk}} \cdot \left[P_{jk} \cdot \frac{\partial P_{jk}}{\partial V_j} + Q_{jk} \cdot \frac{\partial Q_{jk}}{\partial V_j} \right] \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial S_{jk}}{\partial V_k} = \frac{1}{S_{jk}} \cdot \left[P_{jk} \cdot \frac{\partial P_{jk}}{\partial V_k} + Q_{jk} \cdot \frac{\partial Q_{jk}}{\partial V_k} \right] \tag{4.37}$$

โดยที่

$$\frac{\partial P_{jk}}{\partial \delta_j} = V_j V_k\, y_{jk} \cdot sin(\delta_j - \delta_k + \theta_{jk}) \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial Q_{jk}}{\partial \delta_j} = -V_j V_k y_{jk} cos(\delta_j - \delta_k + \theta_{jk}) \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial P_{jk}}{\partial \delta_k} = -\frac{\partial P_{jk}}{\partial \delta_j} = -V_j V_k y_{jk} sin(\delta_j - \delta_k + \theta_{jk}) \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial Q_{jk}}{\partial \delta_k} = -\frac{\partial Q_{jk}}{\partial \delta_j} = V_j V_k y_{jk} cos(\delta_j - \delta_k + \theta_{jk}) \tag{4.41}$$

$$\frac{\partial P_{jk}}{\partial V_j} = 2V_j g_{jk} - V_k y_{jk} cos(\delta_j - \delta_k + \theta_{jk}) \tag{4.42}$$

$$\frac{\partial Q_{jk}}{\partial V_j} = -2V_j B_{jj} - 2V_j B_{jk} - V_k y_{jk} sin(\delta_j - \delta_k + \theta_{jk}) \tag{4.43}$$

$$\frac{\partial P_{jk}}{\partial V_k} = -V_j y_{jk} cos(\delta_j - \delta_k + \theta_{jk}) \tag{4.44}$$

$$\frac{\partial Q_{jk}}{\partial V_k} = -V_j y_{jk} sin(\delta_j - \delta_k + \theta_{jk}) \tag{3.45}$$

จากสมการที่ (4.30)-(4.45) เราจะได้ค่า $\Delta\delta, \Delta V,$ และ $\Delta\lambda$ ที่จะใช้ในการปรับให้ค่า $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{V},$ และ λ เข้าใกล้กับคำตอบมากยิ่งขึ้น ต่อจากนั้นจะทำการคำนวณซ้ำอีกจนกระทั่งค่าความผิดพลาดมีค่าต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้เช่น $max\{|f(X)|, |g(X)|\} < 0.001$ จึงหยุดการคำนวณ

ตัวอย่างที่ 3 จากระบบไฟฟ้าในตัวอย่างที่ 1 เมื่อเพิ่มโหลด ณ บัสที่ 2 ขึ้นเรื่อยๆ ค่าการส่งกำลังไฟฟ้าในสายส่งก็จะมีค่าเพิ่มมากขึ้น ด้วยเหตุนี้ในตัวอย่างที่ 3 จะแสดงวิธีการหาค่าโหลดสูงสุด ณ บัสที่ 2 โดยที่ค่าการส่งผ่านกำลังไฟฟ้ายังมีค่าไม่เกิน 200 MVA หรือ (2 p.u.)

เริ่มต้นจากการหาค่าการส่งผ่านกำลังไฟฟ้าจากบัสที่ 1 ไปยังบัสที่ 2 ดังนี้

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2}{j \cdot 0.1} = -j \cdot 10 \cdot (1 - \boldsymbol{V}_2)$$

$$\boldsymbol{S}_{12} = \boldsymbol{V}_1 \boldsymbol{I}^* = 1 \cdot [-j \cdot 10 \cdot (1 - \boldsymbol{V}_2)]^*$$

$$= j \cdot 10[1 - (V_2 \cdot cos\delta_2 - j \cdot V_2 \cdot sin\delta_2)]$$

$$\boldsymbol{S}_{12} = -10 \cdot V_2 \, sin\,\delta_2 + j \cdot 10 \cdot (1 - V_2 \, cos\,\delta_2)$$

ดังนั้น

$$S_{12} = \sqrt{[-10 \cdot V_2 \cdot sin\delta_2]^2 + [10 \cdot (1 - V_2 \cdot cos\delta_2)]^2}$$

เพราะฉะนั้นการหาค่าโหลดที่ทำให้กำลังปรากฏที่ไหลในสายส่งมีค่า 200 MVA หรือ 2 p.u. จะสามารถหาคำตอบได้จากการแก้ชุดสมการดังนี้

$$f_1(V_2, \delta_2, \lambda) = 1 + \lambda + 10 \cdot V_2 \cdot sin\,\delta_2 = 0$$

$$f_2(V_2, \delta_2, \lambda) = 10 \cdot V_2 \cdot cos\,\delta_2 - 10 \cdot V_2^2 = 0$$

$$f_3(V_2, \delta_2, \lambda) = S_{12} - 2 = 0$$

ซึ่งการแก้สมการจะใช้วิธี Newton ซึ่งเริ่มต้นจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ อันดับที่ 1 ของชุดสมการ แล้วจัดรูปสมการเป็นแบบเมตริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} 10 \cdot V_2 \cdot cos\delta_2 & 10 \cdot sin\delta_2 & 1 \\ -10 \cdot V_2 \cdot sin\delta_2 & 10 \cdot cos\delta_2 - 20 \cdot V_2 & 0 \\ \partial f_3 / \partial \delta_2 & \partial f_3 / \partial V_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(V_2^0, \delta_2^0, \lambda^0) \\ -f_2(V_2^0, \delta_2^0, \lambda^0) \\ -f_3(V_2^0, \delta_2^0, \lambda^0) \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\frac{\partial f_3}{\partial \delta_2} = \frac{1}{2 \cdot S_{12}}\left[200 \cdot V_2^2 \cdot sin\delta_2 \cdot cos\delta_2 + 200 \cdot V_2 \cdot sin\delta_2 \cdot (1 - V_2 \cdot cos\delta_2)\right]$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial V_2} = \frac{1}{2 \cdot S_{12}}\left[200 \cdot V_2 \cdot sin^2\delta_2 - 200 \cdot cos\delta_2 \cdot (1 - V_2 \cdot cos\delta_2)\right]$$

จุดเริ่มต้น λ =0, $V_1 = 1\angle 0^\circ$ p.u. และ $V_2 = 0.994936\angle -0.10067^r$

รอบที่1

$$\begin{bmatrix} 9.8990 & -1.0050 & 1 \\ 0.9999 & -9.9493 & 0 \\ -9.9493 & -0.0001 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9950 \end{bmatrix}$$

คำตอบ คือ $\Delta\delta_2$ = -0.10001, ΔV_2 = -0.01005 และ $\Delta\lambda$ = 0.97986 ตามลำดับดังนั้นคำตอบที่ได้จากการคำนวณรอบที่ 1 คือ

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ V_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.10067 \\ 0.994936 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.10001 \\ -0.01005 \\ 0.97986 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.20068 \\ 0.984886 \\ 0.97986 \end{bmatrix}$$

รอบที่2

$$\begin{bmatrix} 9.6512 & -1.9934 & 1 \\ 1.9632 & -9.8984 & 0 \\ -9.8458 & 0.2485 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01663 \\ 0.04879 \\ 0.00603 \end{bmatrix}$$

คำตอบ คือ $\Delta\delta_2$ = -0.000740, ΔV_2 = -0.005077 และ $\Delta\lambda$ = -0.019606 ตามลำดับดังนั้นคำตอบที่ได้จากการคำนวณรอบที่ 2 คือ

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ V_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.20068 \\ 0.984886 \\ 0.97986 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.000740 \\ -0.005077 \\ -0.019606 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.20142 \\ 0.97981 \\ 0.960254 \end{bmatrix}$$

ทดสอบคำตอบที่ได้จากการคำนวณรอบที่ 2 โดยแทนคำตอบที่ได้ลงใน f_1 ถึง f_3 จะได้

$$f_1(V_2, \delta_2, \lambda) = 0.000040$$

$$f_2(V_2, \delta_2, \lambda) = -0.000250$$

$$f_3(V_2, \delta_2, \lambda) = 0.000608$$

สังเกตได้ว่าคำตอบที่ได้จากการคำนวณในรอบที่ 2 มีความผิดพลาดอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ค่าโหลดที่ทำให้กำลังปรากฏที่ไหลในสายส่งมีค่า 200 MVA หรือ 2 p.u. คือ P = 1.960254 $p.u.$ ซึ่งเกิดจาก $\lambda = 0.960254$ $p.u.$ และทำให้ $V_2 = 0.97981\angle -0.20141^r$ หรือ -11.541°

4.2.4 การคำนวณเพาเวอร์โฟลว์ที่ได้รับการปรับปรุงกรณีที่ 3

ในกรณีนี้ปัญหาที่พิจารณา คือ การหาค่าโหลดสูงสุดที่สามารถเพิ่มขึ้นได้ ณ โหลดบัส โดยที่ค่ากำลังการผลิตของเครื่องกำเนิดไฟฟ้ายังอยู่ภายใต้ค่าพิกัด ที่มาของปัญหานี้คือ ในสภาวะที่โหลดเพิ่มขึ้น กำลังการผลิตก็มีความจำเป็นต้องเพิ่มตามเพื่อจ่ายโหลดและการสูญเสียที่เกิดเพิ่มขึ้น ดังนั้นเราจึงความจำเป็นที่จะต้องทราบว่าค่าโหลด ณ บัสที่กำลังพิจารณาจะสามารถเพิ่มขึ้นได้อีกเท่าไรจากค่าในสภาวะปัจจุบันโดยที่เครื่องกำเนิดไฟฟ้ายังคงทำงานภายใต้ค่าพิกัด คำตอบของปัญหานี้สามารถเขียนในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ได้ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \lambda \\
&S.T. \;\; f(X)=0 \;\; ; X=[\delta, V, \lambda] \\
&\qquad P_{gi} \le P_{gi}^{limit}
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

อย่างไรก็ดี สมการที่ (4.46) เมื่อพิจารณาจากทางกายภาพแล้วเราสามารถทำให้แก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น โดยแก้สมการที่ (4.47)-(4.48) ทั้งนี้เนื่องจาก ค่าโหลดที่สามารถเพิ่มขึ้นได้มากสุด ซึ่งบอกด้วย λ จะเกิด ณ สภาวะที่กำลังการผลิตมีค่าเท่ากับค่าพิกัดพอดี ดังนั้นปัญหาของ MPF กรณีที่ 3 ก็คือ

$$f(X)=0 \;\; ; X=[\delta, V, \lambda] \tag{4.47}$$

$$g(X)=P_{gi}-P_{gi}^{limit}=0 \tag{4.48}$$

ผู้ทำวิจัยจะแก้ปัญหาด้วยวิธี Newton โดยจะกระจายสมการที่ (4.49) และ (4.50) อยู่ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ อันดับที่ 1 จะได้

$$f(X)=f(X^0)+\frac{\partial f}{\partial \delta}\cdot \Delta\delta+\frac{\partial f}{\partial V}\cdot \Delta V+\frac{\partial f}{\partial \lambda}\cdot \Delta\lambda=0 \tag{4.49}$$

$$g(X)=g(X^0)+\frac{\partial g}{\partial \delta}\cdot \Delta\delta+\frac{\partial g}{\partial V}\cdot \Delta V+\frac{\partial g}{\partial \lambda}\cdot \Delta\lambda=0 \tag{4.50}$$

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial f}{\partial \delta} & \frac{\partial f}{\partial V} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\
\frac{\partial g}{\partial \delta} & \frac{\partial g}{\partial V} & \frac{\partial g}{\partial \lambda}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
\Delta\delta \\ \Delta V \\ \Delta\lambda
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-f(X^0) \\ -g(X^0)
\end{bmatrix}
\tag{4.51}
$$

เมื่อ $\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \delta} & \frac{\partial f}{\partial V} \end{bmatrix}$ คือ เมตริกซ์ Jacobian ที่ได้จากสมการที่ (3.4)

$\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ คือ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกเป็น 0 ยกเว้นตำแหน่งที่เกี่ยวข้องกับ P_i, Q_i จะมีค่าเป็น K_{Pi}, K_{Qi} ตามลำดับ (ดูสมการที่ (4.17) และ (4.18))

$\frac{\partial g}{\partial \delta}$ คือ เมตริกซ์แถวนอนที่มีสมาชิกประกอบด้วย $\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j}$ และ $\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i}$ ที่หาจากสมการที่ (4.7) และ (4.8) ตามลำดับ

$\frac{\partial g}{\partial V}$ คือ เมตริกซ์แถวนอนที่มีสมาชิกประกอบด้วย $\frac{\partial P_i}{\partial V_i}$ และ $\frac{\partial P_i}{\partial V_i}$ ที่หาจากสมการที่ (4.9) และ (4.10) ตามลำดับ

$\frac{\partial g}{\partial \lambda}$ ปกติมีค่าเท่ากับ 0 ทั้งนี้เนื่องจากการเพิ่มขึ้นของกำลังการผลิตมิได้เป็นผลโดยตรงจาก λ

จากสมการที่ (4.51) เราจะได้ค่า $\Delta\delta, \Delta V,$ และ $\Delta\lambda$ ที่จะใช้ในการปรับให้ค่า $\delta, V,$ และ λ เข้าใกล้กับคำตอบมากยิ่งขึ้น ต่อจากนั้นจะคำนวณซ้ำอีกจนกระทั่งค่าความผิดพลาดมีค่าต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้เช่น $max\{|f(X)|, |g(X)|\} < 0.001$ จึงหยุดการคำนวณ

ตัวอย่างที่ 4 จากระบบไฟฟ้าในตัวอย่างที่ 1 เมื่อเพิ่มโหลด ณ บัสที่ 2 ขึ้นเรื่อยๆ ค่ากำลังการผลิต ณ บัสที่ 1 ก็จะมีค่าเพิ่มตาม ด้วยเหตุนี้ในตัวอย่างที่ 4 จะแสดงวิธีการหาค่าโหลดสูงสุด ณ บัสที่ 2 โดยที่ค่ากำลังการผลิต ณ บัสที่ 1 มีค่าไม่เกิน 250 MW หรือ (2.5 p.u.)

เริ่มต้นจากการจัดปัญหาในอยู่ในรูปแบบสมการคณิตศาสตร์ คือ

$$f_1(V_2,\delta_2,\lambda) = 1 + \lambda + 10 \cdot V_2 \cdot \sin\delta_2 = 0$$
$$f_2(V_2,\delta_2,\lambda) = 10 \cdot V_2 \cdot \cos\delta_2 - 10 \cdot V_2^2 = 0$$
$$f_3(V_2,\delta_2,\lambda) = 2.5 + 10 \cdot V_2 \cdot \sin\delta_2 = 0$$

การแก้สมการจะใช้วิธี Newton ซึ่งเริ่มต้นจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ อันดับที่ 1 ของชุดสมการ แล้วจัดรูปสมการเป็นแบบเมตริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} 10 \cdot V_2 \cdot \cos\delta_2 & 10 \cdot \sin\delta_2 & 1 \\ -10 \cdot V_2 \cdot \sin\delta_2 & 10 \cdot \cos\delta_2 - 20 \cdot V_2 & 0 \\ 10 \cdot V_2 \cdot \cos\delta_2 & 10 \cdot \sin\delta_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(V_2^0,\delta_2^0,\lambda^0) \\ -f_2(V_2^0,\delta_2^0,\lambda^0) \\ -f_3(V_2^0,\delta_2^0,\lambda^0) \end{bmatrix}$$

จุดเริ่มต้น $\lambda = 0$, $V_1 = 1\angle 0°$ p.u. และ $V_2 = 0.994936\angle -0.10067^r$

รอบที่ 1

$$\begin{bmatrix} 9.8990 & -1.0050 & 1 \\ 0.9999 & -9.9493 & 0 \\ 9.8990 & -1.0050 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

ซึ่งคำตอบ คือ $\Delta\delta_2$ = -0.153093, ΔV_2 = -0.015386 และ $\Delta\lambda$ =1.5 ตามลำดับดังนั้นคำตอบที่ได้จากการคำนวณรอบที่ 1 คือ

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ V_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.10067 \\ 0.994936 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.153093 \\ -0.015386 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.253763 \\ 0.97955 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

รอบที่ 2

$$\begin{bmatrix} 9.4818 & -2.5105 & 1 \\ 2.4591 & -9.9113 & 0 \\ 9.4818 & -2.5105 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04086 \\ -0.11339 \\ 0.04086 \end{bmatrix}$$

คำตอบ คือ $\Delta\delta_2$ = -0.007854, ΔV_2 = -0.013389 และ $\Delta\lambda$ =0 ตามลำดับดังนั้นคำตอบที่ได้จากการคำนวณรอบที่ 2 คือ

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ V_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.253763 \\ 0.97955 \\ 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.007854 \\ -0.013389 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.261617 \\ 0.966161 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

รอบที่ 3

$$\begin{bmatrix} 9.3329 & -2.5864 & 1 \\ 2.4989 & -9.6635 & 0 \\ 9.3329 & -2.5864 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta V_2 \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.001094 \\ 0.001816 \\ -0.001094 \end{bmatrix}$$

คำตอบ คือ $\Delta\delta_2$ = -0.000182, ΔV_2 = -0.000235 และ $\Delta\lambda$ =0 ตามลำดับดังนั้นคำตอบที่ได้จากการคำนวณรอบที่ 3 คือ

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ V_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.261617 \\ 0.966161 \\ 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.000182 \\ -0.000235 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.261799 \\ 0.965926 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

ทำการทดสอบคำตอบที่ได้จากการคำนวณรอบที่ 3โดยแทนคำตอบที่ได้ลงใน f_1 ถึง f_3 จะได้

$$f_1(V_2,\delta_2,\lambda) = 3.695 \times 10^{-7}$$

$$f_2(V_2,\delta_2,\lambda) = -1.45 \times 10^{-6}$$

$$f_3(V_2,\delta_2,\lambda) = 3.695 \times 10^{-7}$$

สังเกตได้ว่าคำตอบที่ได้จากการคำนวณในรอบที่ 3 มีความผิดพลาดอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ค่าโหลดที่ทำให้กำลังการผลิตเท่ากับค่ากำลังการผลิตสูงสุด คือ $P = 2.5\ p.u.$ ซึ่งเกิดจาก $\lambda = 1.5\ p.u.$ และทำให้ $V_2 = 0.965926\angle -0.261799^r$ หรือ -15.00°