โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

Necessary and Sufficient conditions for fitting a regular pentagon in an isosceles triangle

ชื่อนิสิต **นางสาว ฐิติรัตน์ ศรีภัทราพันธุ์** **583 35132 23**

ภาควิชา **คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์**

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา **2561**

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

นางสาวฐิติรัตน์ ศรีภัทราพันธุ์

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2561

Necessary and sufficient conditions for fitting a regular pentagon in an isosceles triangle

Ms.Thitirat Sripattraphan

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science Chulalongkorn University

Academic Year 2018

หัวข้อโครงงาน	เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
โดย	นางสาวฐิติรัตน์ ศรีภัทราพันธุ์ เลขประจำตัวนิสิต 5833513223
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก	อาจารย์.ดร.กีรติ ศรีอมร

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก

(อาจารย์ ดร.กีรติ ศรีอมร)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.วัชรินทร์ วิชิรมาลา)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงษ์เดช มนทกานติรัตน์)

นางสาวฐิติรัตน์ ศรีภัทราพันธุ์: เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว. (Necessary and sufficient conditions for fitting a regular pentagon in a isosceles triangle) อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก: อ.ดร.กีรติ ศรีอมร, 40 หน้า.

โครงงานเรื่อง "เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว" มีวัตถุประสงค์เพื่อหารูปแบบทั่วไปของด้านที่ยาวที่สุดของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยเราจะศึกษากรณีรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ใส่ในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเท่านั้น

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ฐิติรัตน์ ศรีภัทราพันธุ์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก กีรติ ศรีอมร

ปีการศึกษา 2561

5833513223: MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS: isosceles triangle, regular pentagon

Ms.Thitirat Sripattraphan : Necessary and sufficient conditions for fitting a regular pentagon in an isosceles triangle. ADVISOR : Prof. Kirati Sriamorn, Ph.D., 40 pp.

The objective of the project entitled "Necessary and sufficient conditions for fitting a regular pentagon in an isosceles triangle" is to study a general form of the side of regular pentagon inscribed in an isosceles triangle. We study for fitting a regular pentagon in an isosceles triangle absolutely.

Department: Mathematics and Computer Science Student's Signature ......Thitirat Sripattrapham......

Field of Study: Mathematics Advisor's Signature ......Kirati Sriamorn......

Academic Year: 2018

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่อง “เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว” จะไม่สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี หากไม่ได้รับความอนุเคราะห์และช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลายท่าน ดังต่อไปนี้ ดร.กีรติ ศรีอมร ที่คอยช่วยเหลือและให้คำปรึกษาตั้งแต่การเลือกหัวข้อ ให้องค์ความรู้ในด้านต่างๆมาแก้ปัญหาที่พบ รวมถึงสละเวลาส่วนตัวคอยติดตามความก้าวหน้า เสนอแนะ ชี้ให้เห็นปัญหาและข้อผิดพลาดในการทำโครงงานมาโดยตลอด รองศาสตราจารย์ ดร.วัชรินทร์ วิชิรมาลา และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงษ์เดช มนทกานติรัตน์ คณะกรรมการที่ทำให้โครงงานนี้ได้รับการพัฒนาให้ดีขึ้น นอกเหนือจากนี้ยังได้รับการสนับสนุนในด้านต่างๆรวมถึงงบประมาณในการทำโครงงาน โดยภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สุดท้ายขอขอบคุณครอบครัวที่เป็นกำลังใจและคอยสนับสนุนในการทำโครงงานมาโดยตลอด

ผู้ดำเนินโครงการ

นางสาวฐิติรัตน์ ศรีภัทราพันธุ์

สารบัญ

สารบัญภาพ

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ประวัติความเป็นมา

ปัจจุบันมีปัญหาเกิดขึ้นมากมาย ไม่ว่าจะเป็นปัญหาการจัดการพื้นที่ หรือปัญหาการบรรจุสิ่งของ ซึ่งปัญหาเหล่านี้สามารถแก้ไขได้โดยการประยุกต์คณิตศาสตร์เข้ามาช่วย ซึ่ง John E. Wetzel[1] ได้ศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับการใส่รูปเรขาคณิตหนึ่งรูปลงในรูปเรขาคณิตอีกรูปหนึ่ง และ J.M.Sullivan[2] ได้พูดถึงรูปทั่วไปของการใส่รูปเรขาคณิตลงในรูปสามเหลี่ยม

ในปี ค.ศ. 2007 , Charles H.Jepson และ Valeria Vulpe[3]ได้เริ่มศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปสามเหลี่ยมมุมฉากลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากอีกรูปหนึ่ง ดิฉันจึงเกิดความสงสัยว่าถ้าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะเป็นอย่างไร เมื่อได้ลองหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วดูแล้ว จึงสนใจที่จะศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

1.2 วัตถุประสงค์

1. หารูปแบบทั่วไปของด้านที่ยาวที่สุดของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

1.3 ขอบเขตโครงงาน

สนใจเฉพาะกรณีรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่บรรจุลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเท่านั้น

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. กำหนดหัวข้อโครงงานที่จะศึกษาและกำหนดขอบเขตของโครงงาน
2. ศึกษาและค้นคว้าข้อมูลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโครงงาน เช่น กรณีที่รูปสามเหลี่ยมมุมฉากแนบในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
3. ศึกษากรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่จะใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
4. หาความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าของทุกกรณี
5. ตรวจสอบผลที่ได้ สรุปผลและจัดทำรูปเล่มรายงาน
6. นำเสนอผลงาน

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้รับความรู้เรื่องเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปสามเหลี่ยมมุมฉากลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากอีกรูปหนึ่ง
2. ได้รู้ถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงสำหรับการใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
3. สามารถนำความรู้ในเรื่องนี้ไปประยุกต์ใช้กับรูปเรขาคณิตด้านเท่ามุมเท่าอื่นๆที่แนบในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้

1.6 โครงสร้างของรายงาน

รายงานฉบับนี้จะกล่าวถึงภาพรวมของการพัฒนาโครงงานนี้ตามลำดับ

บทที่ 2 บทนี้กล่าวถึงความรู้เบื้องต้นที่สำคัญ เพื่อใช้อธิบายโครงงานในส่วนต่างๆ

บทที่ 3 บทนี้กล่าวถึงการหาแบบรูปทั้งหมด การหาความยาวด้านและพื้นที่ที่มากที่สุด

บทที่ 4 บทนี้กล่าวถึงผลจากการดำเนินงานเป็นที่เรียบร้อยแล้ว

บทที่ 5 บทนี้กล่าวถึงข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

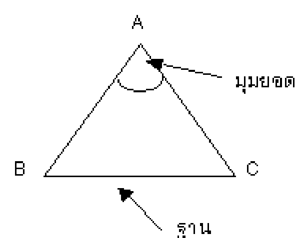
บทที่ 2
ความรู้เบื้องต้น

บทนี้เราจะกล่าวถึงความรู้เบื้องต้นที่สำคัญเพื่อใช้อธิบายโครงงานได้แก่ บทนิยาม ทฤษฎี และสูตรการคำนวณที่เกี่ยวข้องกับโครงงาน

2.1 บทนิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 2.1.1 รูปหลายเหลี่ยม (Polygon) คือ รูปบนระนาบ ที่มีด้านทุกด้านเป็นเส้นตรงถ้าทุกด้านยาวเท่ากัน เราเรียกว่า รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า โดยรูปหลายเหลี่ยมที่มีจำนวนด้านน้อยที่สุด คือ รูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีด้านเป็นเส้นตรงเพียงสามด้านเท่านั้น

บทนิยาม 2.1.2 รูปสามเหลี่ยม(triangle)คือ รูปประนาบซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นตรง 3 เส้น หรือ 3 ด้าน

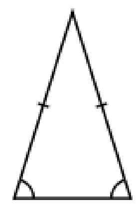


รูปภาพที่ 2.1 รูปสามเหลี่ยม

จุดที่เส้นตรงพบกันเรียกว่า จุดยอด (หรือจุดมุม) ด้านที่อยู่ในแนวราบเรียกว่า ฐาน
มุมที่อยู่ตรงข้ามกับฐานเรียกว่า มุมยอด ผลบวกของด้าน 3 ด้านเรียกว่า เส้นรอบรูป

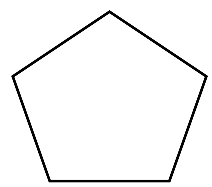
เราอาจจะแบ่งรูปสามเหลี่ยม ตามลักษณะของมุมและด้านของรูปได้ 6 แบบ คือ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ในโครงงานนี้เราสนใจเพียง รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเท่านั้น

บทนิยาม 2.1.3 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว(Isosceles Triangle) คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน และมุมมีขนาดเท่ากันสองมุม



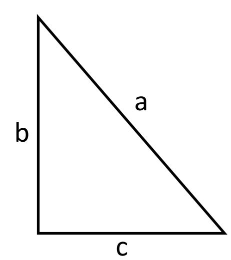
รูปภาพที่ 2.2 สามเหลี่ยมหน้าจั่ว

บทนิยาม 2.1.4 รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า(Pentagon) คือ รูปหลายเหลี่ยมที่มีด้าน 5 ด้าน โดยด้านทุกด้านยาวเท่ากัน และมุมทุกมุมมีขนาดเท่ากัน คือ 108 องศา



รูปภาพที่ 2.3 ห้าเหลี่ยมด้านเท่า

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส 2.1.5 กำลังสองของด้านตรงข้ามมุมฉากจะเท่ากับผลรวมของกำลังสองของด้านประกอบมุมฉากที่เหลือทั้งสองด้าน



รูปภาพที่ 2.4 สามเหลี่ยมพีทาโกรัส

โดยที่ a คือ ด้านตรงข้ามมุมฉาก b และ c คือด้านประกอบมุมฉาก

ดังนั้น $a^2 = b^2 + c^2$

ทฤษฎีบท 2.1.6 ถ้ามีรูปหลายเหลี่ยมที่สามารถบรรจุอยู่ในรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งได้แล้วรูปหลายเหลี่ยมนั้นจะสามารถเคลื่อนที่ได้ภายในรูปสามเหลี่ยมจนกระทั่งมีด้านๆหนึ่งของรูปหลายเหลี่ยมวางอยู่บนด้านด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม

บทที่ 3

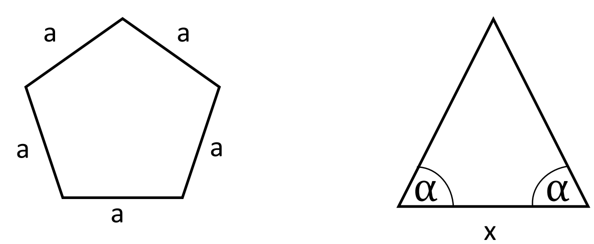
ขั้นตอนการดำเนินงาน

ผู้จัดทำโครงงานได้ศึกษาทฤษฎีบท 2.1.6 แล้วนำมาประยุกต์กับรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ใส่ในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพื่อหาด้านที่ยาวที่สุดของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สามารถใส่ลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ศึกษาทฤษฎีบท 2.1.6
2. หากรณีทั้งหมดของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สามารถใส่ลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ โดยใช้ทฤษฎีบท 2.1.6 ช่วยในการหา

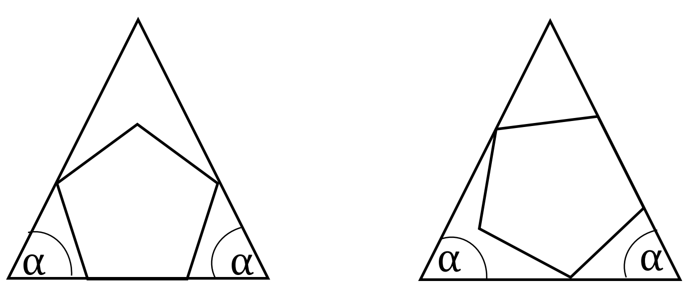
   ผู้จัดทำโครงงานได้กำหนดค่าต่างๆ ไว้ดังนี้

   - รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามีความยาวด้านละ a หน่วย
   - รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีฐานยาว x หน่วย
   - มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาด α องศา



รูปภาพที่ 3.1 กำหนดค่าของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าและรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ตัวอย่างของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สามารถใส่ในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้



รูปภาพที่ 3.2 ตัวอย่างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ใส่ในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้

3. หาความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สามารถใส่ลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ของทุกกรณี โดยใช้ความรู้ดังนี้
    - ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
    - ทฤษฎีบทพีทากอรัส
    - สามเหลี่ยมคล้าย
    - คุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
    - คุณสมบัติของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า
    - กฎของโคไซน์
4. ตรวจสอบผลที่ได้จากการคำนวณหาความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สามารถใส่ลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้
5. เปรียบเทียบความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สามารถใส่ลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้
6. หลังจากนั้นนำข้อมูลที่ได้มาหาพื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สามารถใส่ลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ในทุกกรณี โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad V.5.06 เพื่อตรวจสอบผลที่ได้อีกครั้งหนึ่ง

บทที่ 4

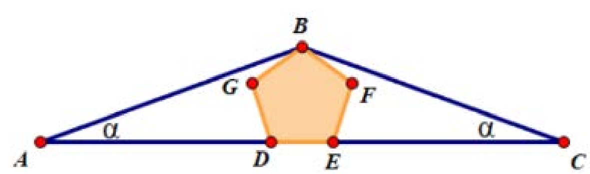
ผลการดำเนินงาน

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงผลที่ได้จากการดำเนินงานในบทที่ 3 ว่าออกมาเป็นอย่างไร ซึ่งจะแบ่งออกเป็นสองส่วนใหญ่ๆ ดังนี้ ส่วนแรกจะกล่าวถึงกรณีทั้งหมดที่สามารถใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ ส่วนที่สองจะกล่าวถึงความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สามารถใส่ลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและพื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

4.1 กรณีทั้งหมดที่สามารถใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้

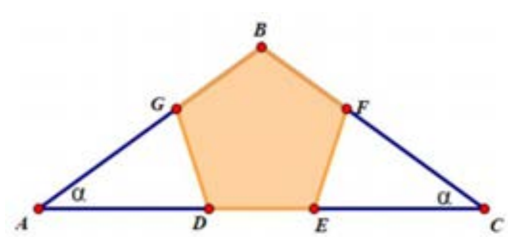
เราสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

1. กรณีที่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าวางอยู่บนด้านฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
   กรณีแรกสามารถแบ่งได้เป็นกรณีย่อยอีก 2 กรณี ดังนี้
   - กรณีที่ $\alpha < 36°$



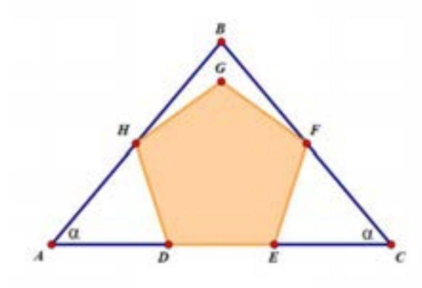
รูปภาพที่ 4.1.1 ห้าเหลี่ยมวางบนฐาน กรณี $\alpha < 36°$

   - กรณีที่ $36° \leq \alpha < 90°$
     กรณีที่ $\alpha = 36°$



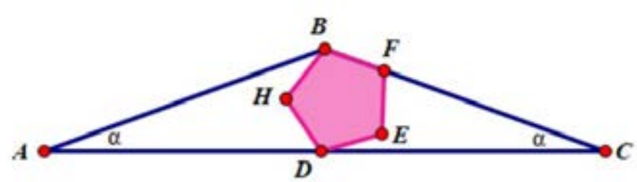
รูปภาพที่ 4.1.2 ห้าเหลี่ยมวางบนฐาน กรณี $\alpha = 36°$

กรณีที่ 36° < α < 90°



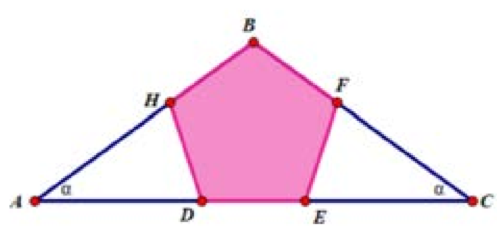
*รูปภาพที่ **4.1.3** ห้าเหลี่ยมวางบนฐาน กรณี **36° < α < 90°***

2. กรณีที่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าวางอยู่บนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว กรณีที่สองสามารถแบ่งได้เป็นกรณีย่อยอีก 5 กรณี ดังนี้
    - กรณีที่ α < 36°



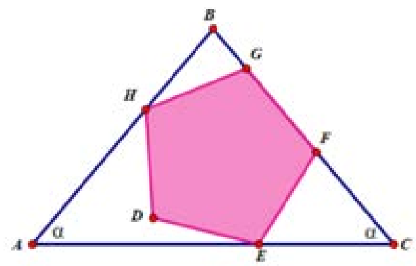
*รูปภาพที่ **4.1.4** ห้าเหลี่ยมวางบนด้านประกอบมุมยอด กรณี **α < 36°***

- กรณีที่ α = 36°



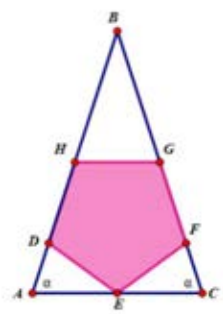
*รูปภาพที่ **4.1.5** ห้าเหลี่ยมวางบนด้านประกอบมุมยอด กรณี **α = 36°***

- กรณีที่ $36° < \alpha < 72°$



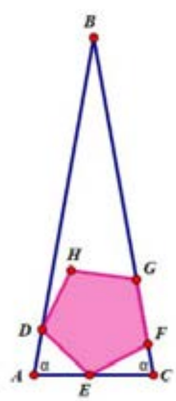
*รูปภาพที่ **4.1.6** ห้าเหลี่ยมวางบนด้านประกอบมุมยอด กรณี **$36° < \alpha < 72°$***

- กรณีที่ $\alpha = 72°$



*รูปภาพที่ **4.1.7** ห้าเหลี่ยมวางบนด้านประกอบมุมยอด กรณี **$\alpha = 72°$***

- กรณีที่ $72° < \alpha < 90°$



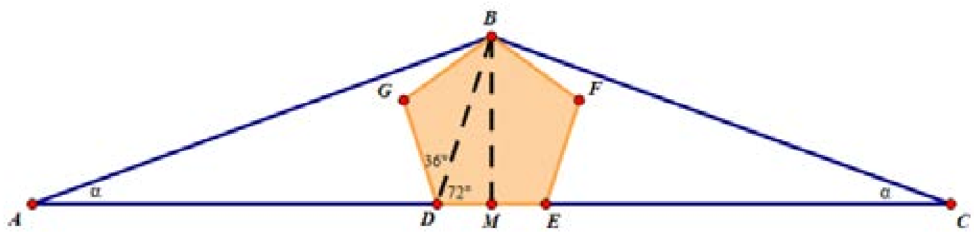
*รูปภาพที่ **4.1.8** ห้าเหลี่ยมวางบนด้านประกอบมุมยอด กรณี **$72° < \alpha < 90°$***

4.2 ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าและพื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

4.2.1 ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สามารถใส่ลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้

กรณีที่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าวางอยู่บนด้านฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

- กรณีที่ $\alpha < 36°$



รูปภาพที่ 4.2.1 หา α ของห้าเหลี่ยมวางบนฐาน กรณี $\alpha < 36°$

กำหนดให้ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาว x หน่วย

พิจารณา รูปสามเหลี่ยม AMB

จะได้ $\overline{BM} = \frac{x}{2}\tan\alpha$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม DMB

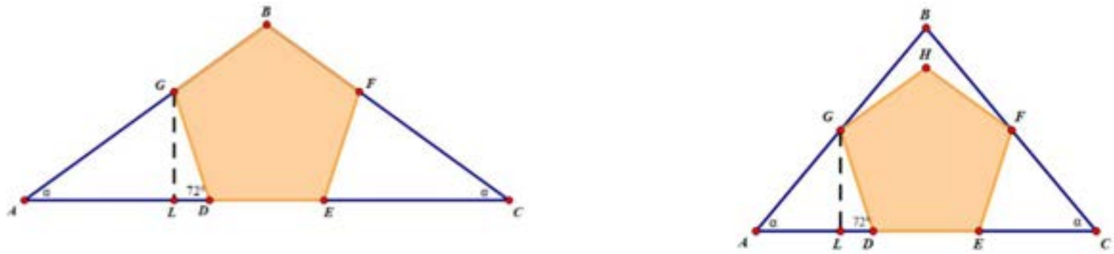
ดังนั้น $\overline{DM} = \frac{x\tan\alpha}{2\tan 72}$

กำหนดให้ รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ a หน่วย

เนื่องจาก $a = 2\overline{DM}$

ดังนั้น $a = \frac{2x\tan\alpha}{2\tan 72} = \frac{x\tan\alpha}{\tan 72}$

- กรณีที่ $36° \leq \alpha < 90°$



รูปภาพที่ 4.2.2 หา a ของห้าเหลี่ยมวางบนฐาน กรณี $36° \leq \alpha < 90°$

กำหนดให้ ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาว x หน่วย

และรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ a หน่วย

พิจารณา รูปสามเหลี่ยม GLD

จะได้ $\overline{GL} = a\sin 72$

และ $\overline{LD} = a\cos 72$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ALG

ดังนั้น $\overline{AL} = \frac{a\sin 72}{\tan\alpha}$

เนื่องจาก $x = 2\left(\frac{a\sin 72}{\tan\alpha} + a\cos 72\right) + a$

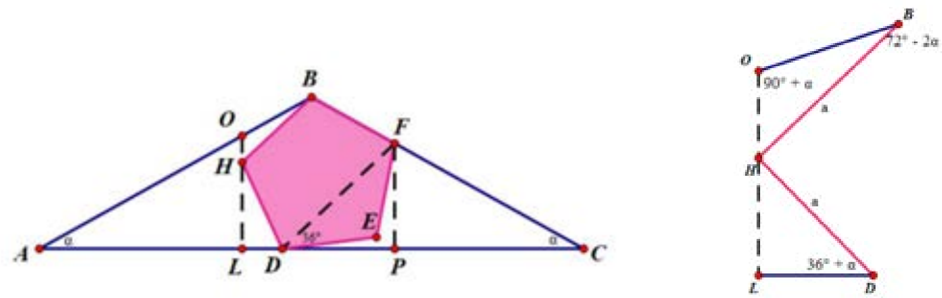
จะได้ $a = \frac{x\tan\alpha}{2\sin 72 + 2\cos 72\tan\alpha + \tan\alpha}$

$= \frac{x\sin\alpha}{2\sin 72\cos\alpha + 2\cos 72\sin\alpha + \sin\alpha}$

ดังนั้น $a = \frac{x\sin\alpha}{\sin\alpha + 2\sin(72+\alpha)}$

กรณีที่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าวางอยู่บนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

- กรณีที่ $\alpha < 36^\circ$



รูปภาพที่ 4.2.3 หา α ของห้าเหลี่ยมวางบนด้านประกอบมุมยอด กรณี $\alpha < 36^\circ$

และรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ a หน่วย

พิจารณา รูปสามเหลี่ยม OHB

จะได้ $\overline{OH} = \frac{a\sin(72-2\alpha)}{\sin(90+\alpha)}$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม HLD

จะได้ $\overline{HL} = a\sin(36+\alpha)$

และ $\overline{LD} = a\cos(36+\alpha)$

ดังนั้น $\overline{OL} = a\sin(36+\alpha) + \frac{a\sin(72-2\alpha)}{\sin(90+\alpha)}$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ALO

ดังนั้น $\overline{AL} = \frac{a\sin(36+\alpha)+\frac{a\sin(72-2\alpha)}{\sin(90+\alpha)}}{\tan\alpha}$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม DEF

จะได้ $\overline{DF} = 2a\cos 36$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม DPF

จะได้ $\overline{DP} = 2a\cos 36\cos(72-\alpha)$

และ $\overline{PF} = 2a\cos 36\sin(72-\alpha)$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม FPC

จะได้ $\overline{PC} = \frac{2a\cos 36\sin(72-\alpha)}{\tan\alpha}$

เนื่องจาก

$$x = \frac{a\sin(36+\alpha)+\frac{a\sin(72-2\alpha)}{\sin(90+\alpha)}}{\tan\alpha} + a\cos(36+\alpha) + 2a\cos 36\cos(72-\alpha) + \frac{2a\cos 36\sin(72-\alpha)}{\tan\alpha}$$

$$= \frac{a\left(\cos 36\sin\alpha\cos\alpha+\sin 36\cos^2\alpha+\sin 72\cos 2\alpha-\cos 72\sin 2\alpha\right)}{\sin\alpha} + a(\cos\alpha\cos 36-\sin\alpha\sin 36)$$

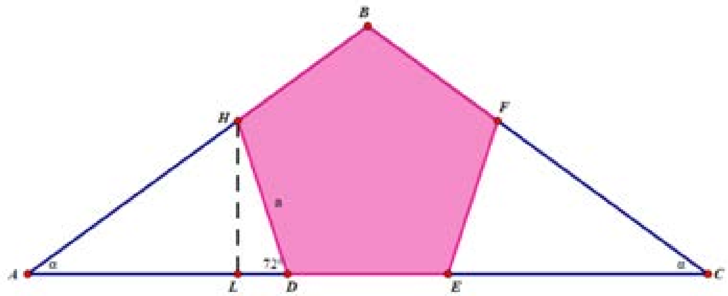
$$+ a(2\cos 36\cos 72\cos\alpha + 2\cos 36\sin 72\sin\alpha) + a\left(\frac{2\cos 36\sin 72\cos^2\alpha - 2\cos 36\cos 72\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

จะได้

$$a = \frac{x\sin\alpha}{2\cos 36\sin\alpha\cos\alpha + \sin 36\cos 2\alpha + \sin 72\cos 2\alpha - \cos 72\sin 2\alpha + 2\cos 36\sin 72}$$

$$= \frac{x\sin\alpha}{(\cos 36-\cos 72)\sin 2\alpha + (\sin 36+\sin 72)\cos 2\alpha + 2\cos 36\sin 72}$$

- กรณีที่ $\alpha = 36°$



รูปภาพที่ 4.2.4 หา a ของห้าเหลี่ยมวางบนด้านประกอบมุมยอด กรณี α = 36°

กำหนดให้ ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาว x หน่วย

และรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ a หน่วย

พิจารณา รูปสามเหลี่ยม HLD

จะได้ $\overline{HL} = a\sin 72$

และ $\overline{LD} = a\cos 72$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ALH

ดังนั้น $\overline{AL} = \dfrac{a\sin 72}{\tan\alpha}$

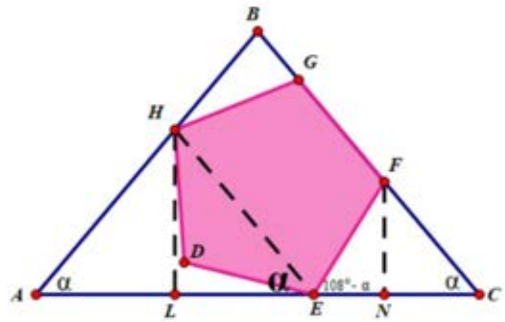
เนื่องจาก $x = 2\left(\frac{a\sin 72}{\tan\alpha} + a\cos 72\right) + a$

จะได้ $a = \dfrac{x\tan\alpha}{2\sin 72 + 2\cos 72\tan\alpha + \tan\alpha}$

$= \dfrac{x\sin\alpha}{2\sin 72\cos\alpha + 2\cos 72\sin\alpha + \sin\alpha}$

ดังนั้น $a = \dfrac{x\sin\alpha}{\sin\alpha + 2\sin(72+\alpha)}$

- กรณีที่ 36° < α < 72°



รูปภาพที่ 4.2.5 หา α ของห้าเหลี่ยมวางบนด้านประกอบมุมยอด กรณี 36° < α < 72°

กำหนดให้ ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาว x หน่วย

และรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ a หน่วย

พิจารณา รูปสามเหลี่ยม HDE

จะได้ $\overline{HE} = 2a\cos 36$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม HLE

จะได้ $\overline{HL} = 2a\cos 36\sin\alpha$

และ $\overline{LE} = 2a\cos 36\cos\alpha$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ALH

ดังนั้น $\overline{AL} = \frac{2a\cos 36\sin\alpha}{\tan\alpha}$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ENF

จะได้ $\overline{EN} = a\cos(108-\alpha)$

และ $\overline{NF} = a\sin(108-\alpha)$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม FNC

จะได้ $\overline{NC} = \frac{a\sin(108-\alpha)}{\tan\alpha}$

เนื่องจาก

$$x = \frac{2a\cos 36 \sin\alpha}{\tan\alpha} + 2a\cos 36\cos\alpha + a\cos(108-\alpha) + \frac{a\sin(108-\alpha)}{\tan\alpha}$$

จะได้

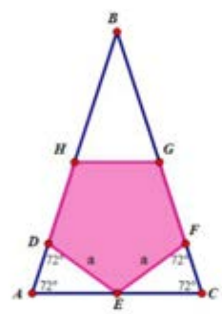
$$a = \frac{x\tan\alpha}{2\cos 36\sin\alpha + 2\cos 36\cos\alpha\tan\alpha + \cos(108-\alpha)\tan\alpha + \sin(108-\alpha)}$$

$$= \frac{x\sin\alpha}{2\cos 36\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos 36\cos\alpha\sin\alpha + \cos 108\cos\alpha\sin\alpha + \sin 108\sin^2\alpha + \sin 108\cos^2\alpha - \cos 108\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$= \frac{x\sin\alpha}{4\cos 36\sin\alpha\cos\alpha + \sin 108}$$

$$= \frac{x\sin\alpha}{2\cos 36\sin 2\alpha + \sin 108}$$

- กรณีที่ $\alpha = 72°$



รูปภาพที่ 4.2.6 หา a ของห้าเหลี่ยมวางบนด้านประกอบมุมยอด กรณี α = 72°

กำหนดให้ ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาว x หน่วย

และรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ a หน่วย

พิจารณา รูปสามเหลี่ยม ADE และรูปสามเหลี่ยม CFE

จะได้ $\overline{DE} = \overline{AE} = a$ และ $\overline{FE} = \overline{CE} = a$

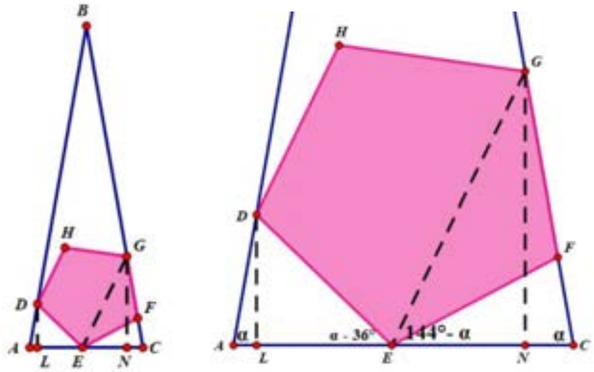
$$\overline{DE} = \overline{AE} = \overline{FE} = \overline{CE} = a$$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ADE และรูปสามเหลี่ยม CFE เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะได้ $x = 2a$

ดังนั้น $a = \frac{x}{2}$

- กรณีที่ 72° < α < 90°



รูปภาพที่ 4.2.7 หา α ของห้าเหลี่ยมวางบนด้านประกอบมุมยอด กรณี 72° < α < 90°

กำหนดให้ ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาว x หน่วย

และรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ a หน่วย

พิจารณารูปสามเหลี่ยม DLE

จะได้ $\overline{DL} = a\sin(\alpha - 36)$

และ $\overline{LE} = a\cos(\alpha - 36)$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ALD

จะได้ $\overline{AL} = \frac{a\sin(\alpha-36)}{\tan\alpha}$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม EFG

จะได้ $\overline{EG} = 2a\cos 36$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ENG

จะได้ $\overline{EN} = 2a\cos 36\cos(144 - \alpha)$

และ $\overline{NG} = 2a\cos 36\sin(144 - \alpha)$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม GNC

จะได้ $\overline{NC} = \frac{2a\cos 36\sin(144-\alpha)}{\tan\alpha}$

เนื่องจาก

$$x = \frac{a\sin(\alpha-36)}{\tan\alpha} + a\cos(\alpha-36) + 2a\cos 36\cos(144-\alpha) + \frac{2a\cos 36\sin(144-\alpha)}{\tan\alpha}$$

จะได้

$$a = \frac{x\tan\alpha}{\sin(\alpha-36)+\cos(\alpha-36)\tan\alpha + 2\cos 36\cos(144-\alpha)\tan\alpha + 2\cos 36\sin(144-\alpha)}$$

$$= \frac{x\tan\alpha}{\cos 36\sin\alpha - \sin 36\cos\alpha + \cos 36\sin\alpha + \frac{\sin 36\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + 2\cos 36\cos 144\sin\alpha + \frac{2\cos 36\sin 144\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + 2\cos 36\sin 144\cos\alpha - 2\cos 36\cos 144\sin\alpha}$$

$$= \frac{x\sin\alpha}{2\cos 36\sin\alpha\cos\alpha - \sin 36\cos^2\alpha + \sin 36\sin^2\alpha + 2\cos 36\sin 144\sin^2\alpha + 2\cos 36\sin 144\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{x\sin\alpha}{2\cos 36\sin\alpha\cos\alpha - \sin 36\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\cos 36\sin 144}$$

$$= \frac{x\sin\alpha}{2\cos 36\sin\alpha\cos\alpha - \sin 36\cos 2\alpha + 2\cos 36\sin 144}$$

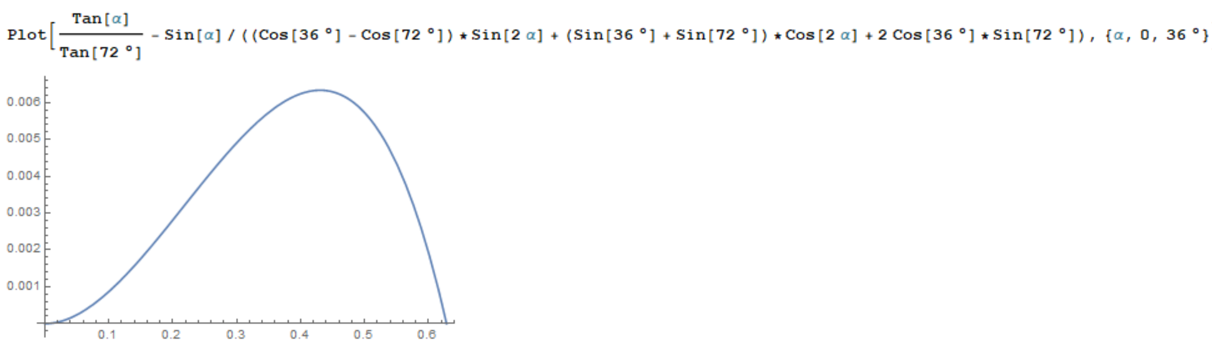
$$= \frac{x\sin\alpha}{\cos 36\sin 2\alpha - \sin 36\cos 2\alpha + 2\cos 36\sin 144}$$

$$= \frac{x\sin\alpha}{\sin(2\alpha-36) + 2\cos 36\sin 144}$$

4.2.2 เปรียบเทียบความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ใส่ลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้

1. กรณีที่ $\alpha < 36°$

ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมที่วางบนฐานของรูปสามเหลี่ยม	ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม
$\dfrac{x \tan\alpha}{\tan 72}$	$\dfrac{x \sin\alpha}{(\cos 36 - \cos 72)\sin 2\alpha + (\sin 36 + \sin 72)\cos 2\alpha + 2\cos 36 \sin 72}$

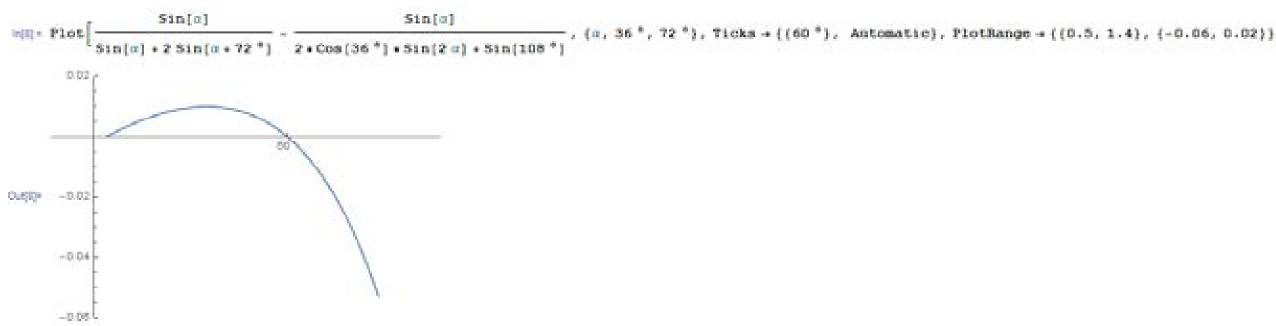


รูปภาพที่ 4.2.8 กราฟผลต่างระหว่างความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า กรณีที่ $\alpha < 36°$

จากกราฟสามารถสรุปได้ว่าที่มุม $0° < \alpha < 36°$ ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ยาวมากกว่าความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

2. กรณีที่ 36° < α < 72°

ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมที่วางบนฐาน ของรูปสามเหลี่ยม	ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมที่วางบนด้านประกอบมุมยอด ของรูปสามเหลี่ยม
$\dfrac{x\sin\alpha}{\sin\alpha + 2\sin(72+\alpha)}$	$\dfrac{x\sin\alpha}{2\cos 36\sin 2\alpha + \sin 108}$



รูปภาพที่ 4.2.9 กราฟผลต่างระหว่างความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า กรณีที่ 36° < α < 72°

จากกราฟสามารถสรุปได้ว่า ที่มุม 36° < α < 60° ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ยาวมากกว่าความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ที่มุม 60° < α < 72° ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ยาวน้อยกว่าความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

3. กรณีที่ $\alpha = 60°$

ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมที่วางบนฐานของรูปสามเหลี่ยม	ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม
$\dfrac{x\sin\alpha}{\sin\alpha + 2\sin(72+\alpha)}$	$\dfrac{x\sin\alpha}{2\cos 36\sin 2\alpha + \sin 108}$

```
N[Sin[60 °]/(Sin[60 °] + 2 Sin[60 ° + 72 °]) - Sin[60 °]/(2 * Cos[36 °] * Sin[2 * 60 °] + Sin[108 °])]
0.
```

รูปภาพที่ 4.2.10 ผลต่างระหว่างความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า กรณีที่ α = 60°

จากภาพสามารถสรุปได้ว่า ที่มุม $\alpha = 60°$ ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ยาวเท่ากับความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

4. กรณีที่ $\alpha = 72°$

ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมที่วางบนฐานของรูปสามเหลี่ยม	ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม
$\dfrac{x\sin\alpha}{\sin\alpha + 2\sin(72+\alpha)}$	$\dfrac{x}{2}$

```
N[Sin[72 °]/(Sin[72 °] + 2 Sin[72 ° + 72 °]) - 1/2]
-0.0527864
```

รูปภาพที่ 4.2.11 ผลต่างระหว่างความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า กรณีที่ α = 72°

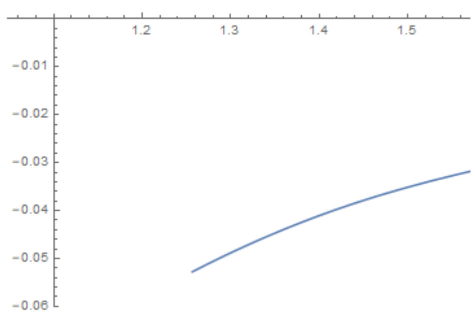
จากภาพสามารถสรุปได้ว่า ที่มุม $\alpha = 72°$ ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ยาวน้อยกว่าความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

5. กรณีที่ $72° < \alpha < 90°$

ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมที่วางบนฐานของรูปสามเหลี่ยม	ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม
$\dfrac{x\sin\alpha}{\sin\alpha + 2\sin(72+\alpha)}$	$\dfrac{x\sin\alpha}{\sin(2\alpha - 36) + 2\cos 36 \sin 144}$

```
In[7]:= Plot[Sin[α]/(Sin[α] + 2 Sin[α + 72 °]) - Sin[α]/(Sin[2 α - 36 °] + 2 Cos[36 °] * Sin[144 °]), {α, 72 °, 90 °}, PlotRange → {{60 °, 90 °}, {-.06, 0}}]
```

Out[7]=



รูปภาพที่ 4.2.12 กราฟผลต่างระหว่างความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า กรณีที่ 72° < α < 90°

จากกราฟสามารถสรุปได้ว่า ที่มุม $72° < \alpha < 90°$ ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ยาวน้อยกว่าความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

4.2.3 พื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สามารถใส่ลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้

พื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนด้านฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
เมื่อให้ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาว 1 หน่วย และเปลี่ยนมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ฐาน	มุม	พื้นที่รูปห้าเหลี่ยม
1.00ซม.	10.00°	0.00565 ซม.^{2}
1.00ซม.	20.00°	0.02406 ซม.^{2}
1.00ซม.	30.00°	0.06055 ซม.^{2}
1.00ซม.	36.00°	0.09588 ซม.^{2}
1.00ซม.	40.00°	0.11400 ซม.^{2}
1.00ซม.	50.00°	0.16654 ซม.^{2}
1.00ซม.	60.00°	0.23320 ซม.^{2}
1.00ซม.	70.00°	0.32233 ซม.^{2}
1.00ซม.	72.00°	0.34410 ซม.^{2}
1.00ซม.	80.00°	0.45087 ซม.^{2}
1.00ซม.	85.00°	0.54031 ซม.^{2}

*รูปภาพที่ **4.2.13** ตารางพื้นที่รูปห้าเหลี่ยมที่วางบนด้านฐานของรูปสามเหลี่ยม*

พื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
เมื่อให้ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาว 1 หน่วย และเปลี่ยนมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ฐาน	มุม	พื้นที่รูปห้าเหลี่ยม
1.00ซม.	10.00°	0.00521 ซม.^{2}
1.00ซม.	20.00°	0.02179 ซม.^{2}
1.00ซม.	30.00°	0.05724 ซม.^{2}
1.00ซม.	36.00°	0.09588 ซม.^{2}
1.00ซม.	40.00°	0.10979 ซม.^{2}
1.00ซม.	50.00°	0.15594 ซม.^{2}
1.00ซม.	60.00°	0.23320 ซม.^{2}
1.00ซม.	70.00°	0.38320 ซม.^{2}
1.00ซม.	72.00°	0.43012 ซม.^{2}
1.00ซม.	80.00°	0.52658 ซม.^{2}
1.00ซม.	85.00°	0.61193 ซม.^{2}

*รูปภาพที่ **4.2.14** ตารางพื้นที่รูปห้าเหลี่ยมที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม*

จากภาพที่ 4.2.13 และภาพที่ 4.2.14 จะได้ว่า

- ที่มุม $0° < \alpha < 60°$ จะเห็นได้ว่า พื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีค่ามากกว่า พื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
- ที่มุม $\alpha = 60°$ จะเห็นได้ว่า พื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีค่าเท่ากับ พื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
- ที่มุม $60° < \alpha < 90°$ จะเห็นได้ว่า พื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีค่าน้อยกว่า พื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

บทที่ 5
ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้จะกล่าวถึง ผลสรุปของรูปแบบทั่วไปของความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สามารถใส่ลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ ที่ $0° < \alpha < 90°$ รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าควรเป็นรูปแบบไหนจึงจะมีด้านยาวที่สุด และข้อเสนอของโครงงาน

5.1 ข้อสรุปการดำเนินโครงงาน

เมื่อผู้ดำเนินโครงงานได้หากรณีทั้งหมดที่สามารถใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ใหญ่ที่สุดลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ผลสรุปดังนี้

รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ใหญ่ที่สุดที่สามารถใส่ลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ มีเป็น 2 กรณี คือ

1. มีด้านด้านหนึ่งของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าวางอยู่บนด้านฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
2. มีด้านด้านหนึ่งของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าวางอยู่บนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

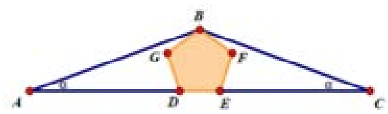
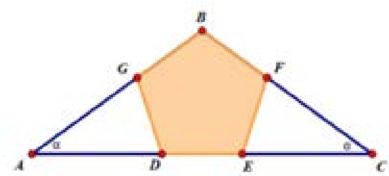
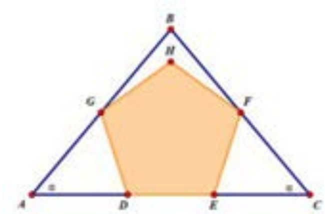
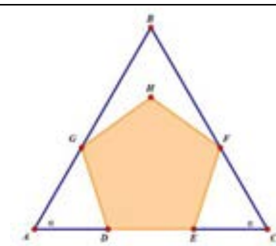
ซึ่งความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามีรูปทั่วไปดังนี้

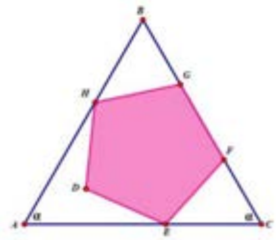
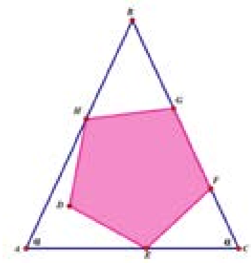
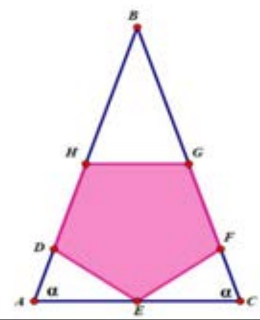
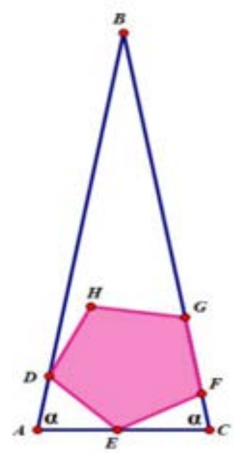
มุม α	วางบนฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	วางบนด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
$0° < \alpha < 36°$	$\frac{x \tan\alpha}{\tan 72}$	$\frac{x \sin\alpha}{(\cos 36 - \cos 72)\sin 2\alpha + (\sin 36 + \sin 72)\cos 2\alpha + 2\cos 36 \sin 72}$
$\alpha = 36°$	$\frac{x \sin\alpha}{\sin\alpha + 2\sin(72+\alpha)}$	$\frac{x \sin\alpha}{\sin\alpha + 2\sin(72+\alpha)}$
$36° < \alpha < 72°$	$\frac{x \sin\alpha}{\sin\alpha + 2\sin(72+\alpha)}$	$\frac{x \sin\alpha}{2\cos 36 \sin 2\alpha + \sin 108}$
$\alpha = 72°$	$\frac{x \sin\alpha}{\sin\alpha + 2\sin(72+\alpha)}$	$\frac{x}{2}$

72° < α < 90°	$\dfrac{x\sin\alpha}{\sin\alpha+2\sin(72+\alpha)}$	$\dfrac{x\sin\alpha}{\sin(2\alpha-36)+2\cos 36\sin 144}$

เมื่อ x แทนความยาวฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
α แทนมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

และรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีด้านยาวที่สุดควรมีรูปแบบดังนี้

มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	ความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า	รูปที่เกิดขึ้น
0° < α < 36°	$\dfrac{x\tan\alpha}{\tan 72}$	
α = 36°	$\dfrac{x\sin\alpha}{\sin\alpha+2\sin(72+\alpha)}$	
36° < α < 60°	$\dfrac{x\sin\alpha}{\sin\alpha+2\sin(72+\alpha)}$	
α = 60°	$\dfrac{x\sin\alpha}{\sin\alpha+2\sin(72+\alpha)}$	

$\alpha = 60°$	$$\frac{x\sin\alpha}{2\cos 36\sin 2\alpha + \sin 108}$$	
$60° < \alpha < 72°$	$$\frac{x\sin\alpha}{2\cos 36\sin 2\alpha + \sin 108}$$	
$\alpha = 72°$	$$\frac{x}{2}$$	
$72° < \alpha < 90°$	$$\frac{x\sin\alpha}{\sin(2\alpha - 36) + 2\cos 36\sin 144}$$	

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 การเปรียบเทียบความยาวของด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สามารถใส่ลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ สามารถเปรียบเทียบโดยใช้วิธีอื่นนอกจากการเปรียบเทียบ โดยดูจากกราฟ เช่น การเปรียบเทียบค่าความยาวด้าน โดยตรงจากสมการความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

5.2.2 ใช้โปรแกรมที่เป็นที่รู้จักอย่างแพร่หลาย เพื่อให้เป็นประโยชน์ในวงกว้าง

เอกสารอ้างอิง

[1] Wetzel, J.E. Fits and covers. Mathematics Magazine 76,5(December 2003): 349-363.

[2]Sullivan, J.M. Polygon in triangle:Generalizing a theorem of post.(November 1996): 1-5. (Unpublished Manuscript)

[3] Jepsen, C.H. and Valeria Vulpe. Fittingone right triangle in another. Mathematics Magazine 80,3 (June 2007): 203-207.

ภาคผนวก ก
แบบเสนอหัวข้อโครงงาน

ภาคผนวก ก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal

ปีการศึกษา 2561

ชื่อโครงงาน(ภาษาไทย) เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูป สามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ชื่อโครงงาน(ภาษาอังกฤษ) Necessary and sufficient conditions for fitting regular pentagon in Isosceles triangles

อาจารย์ที่ปรึกษา อ.ดร.กีรติ ศรีอมร

ผู้ดำเนินการ 1. นางสาวฐิติรัตน์ ศรีภัทราพันธุ์ 5833513223

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ปัจจุบันมีปัญหาเกิดขึ้นมากมาย ไม่ว่าจะเป็นปัญหาการจัดการพื้นที่ หรือปัญหาการบรรจุสิ่งของ ซึ่งปัญหาเหล่านี้สามารถแก้ไขได้โดยการประยุกต์คณิตศาสตร์เข้ามาช่วย เช่น J.M.Sullivan ได้พูดถึงรูปทั่วไปของการใส่รูปเรขาคณิตลงในรูปสามเหลี่ยม

ในปี ค.ศ. 2007 , Charles H.Jepson และ Valeria Vulpe ได้เริ่มศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปสามเหลี่ยมมุมฉากลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากอีกรูปหนึ่ง ดิฉันจึงเกิดความสงสัยว่าถ้าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะเป็นอย่างไร เมื่อได้ลองหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปสี่เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วดูแล้ว จึงสนใจที่จะศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

วัตถุประสงค์

1. หารูปแบบทั่วไปของด้านที่ยาวที่สุดของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

2. หารูปแบบทั่วไปของพื้นที่ที่มากที่สุดของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ขอบเขตของโครงงาน

สนใจเฉพาะกรณีรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเท่านั้น

วิธีการดำเนินงาน

ก.แผนการศึกษา

1. กำหนดหัวข้อโครงงานที่จะศึกษาและกำหนดขอบเขตของโครงงาน
2. ศึกษาและค้นคว้าข้อมูลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโครงงาน
    - ศึกษาปัญหาของการใส่รูปเรขาคณิตลงในรูปสามเหลี่ยม
    - ศึกษารูปทั่วไปของการใส่รูปเรขาคณิตลงในรูปสามเหลี่ยม
    - ศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูป สามเหลี่ยมมุมฉากลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากอีกรูปหนึ่ง
3. ศึกษากรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่จะใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมจั่ว
4. หาความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าของทุกกรณี
5. หาพื้นที่ที่มากที่สุดของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าว่าเป็นกรณีใด
6. ตรวจสอบผลที่ได้ สรุปผลและจัดทำรูปเล่มรายงาน
7. นำเสนอผลงาน

ข.ระยะเวลาการศึกษา

ขั้นตอนการดำเนินงาน	ปี 2561					ปี 2562			
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. กำหนดหัวข้อโครงงานที่จะศึกษาและกำหนดขอบเขตของโครงงาน									
2. ศึกษาและค้นคว้าข้อมูลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโครงงาน									

3. ศึกษากรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่จะใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว									
4. หาความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าของทุกกรณี									
5. หาพื้นที่ที่มากที่สุดของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าว่าเป็นกรณีใด									
6. ตรวจสอบผลที่ได้ สรุปผลและจัดทำรูปเล่มรายงาน									
7. นำเสนอผลงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ต่อตัวนิสิตที่ทำโครงงาน

1. ได้รับความรู้เรื่องเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปสามเหลี่ยมมุมฉากลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากอีกรูปหนึ่ง
2. ได้รับความรู้เรื่องรูปทั่วไปของการใส่รูปเรขาคณิตลงในรูปสามเหลี่ยม
3. ได้รู้ถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ประโยชน์ต่อผู้ที่มาศึกษาโครงงาน

1. ได้รู้ถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
2. สามารถนำความรู้ในเรื่องนี้ไปประยุกต์ใช้กับรูปเรขาคณิตด้านเท่ามุมเท่าอื่นๆที่แนบในรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

วัสดุอุปกรณ์

1. กระดาษ A4
2. เครื่องเขียน
3. External Hard Disk
4. หมึกเครื่องพิมพ์

ฮาร์ดแวร์

1. เครื่องคอมพิวเตอร์
2. เครื่องพิมพ์

ซอฟต์แวร์

1. โปรแกรม Microsoft Word
2. โปรแกรม Microsoft Power Point
3. โปรแกรม Adobe PDF
4. โปรแกรม Wolfram Mathematica
5. โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

งบประมาณ

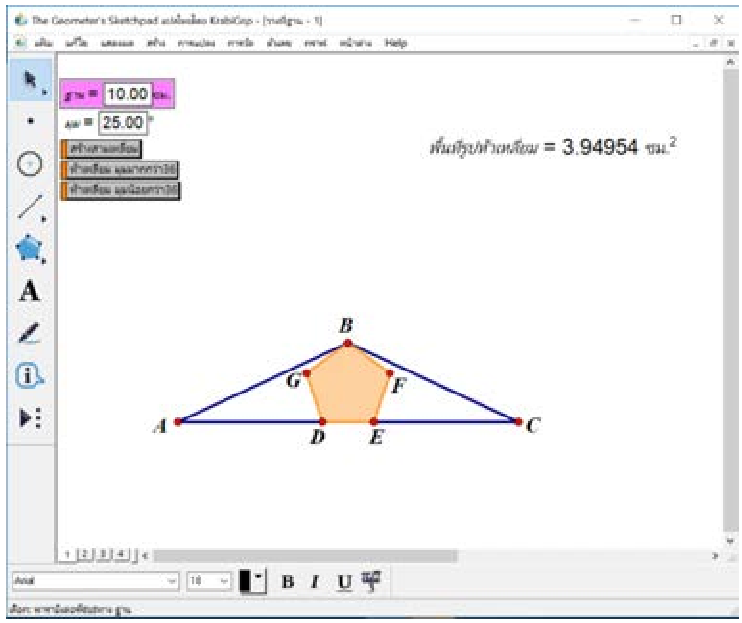
วัสดุ-อุปกรณ์	ราคา
1. กระดาษ A4	300
2. External Harddisk	2500
3. เครื่องเขียน	200
4. หมึกเครื่องพิมพ์	1000

ภาคผนวก ข

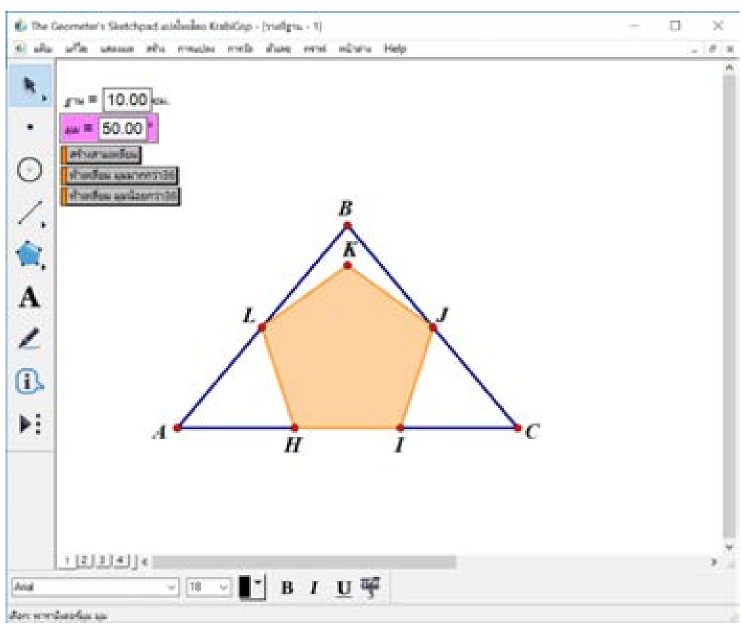
ตัวอย่างโปรแกรม GSP v.5.06

ภาคผนวก ข

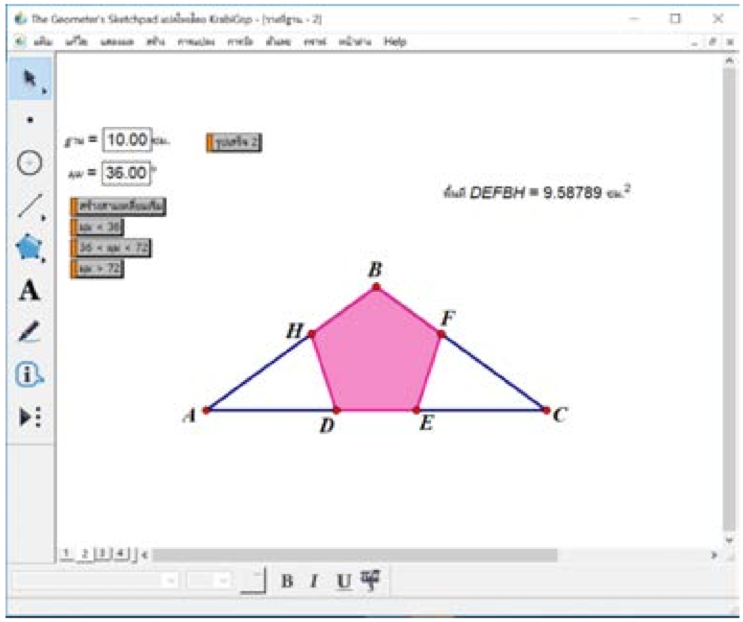
ตัวอย่างโปรแกรม GSP v.5.06



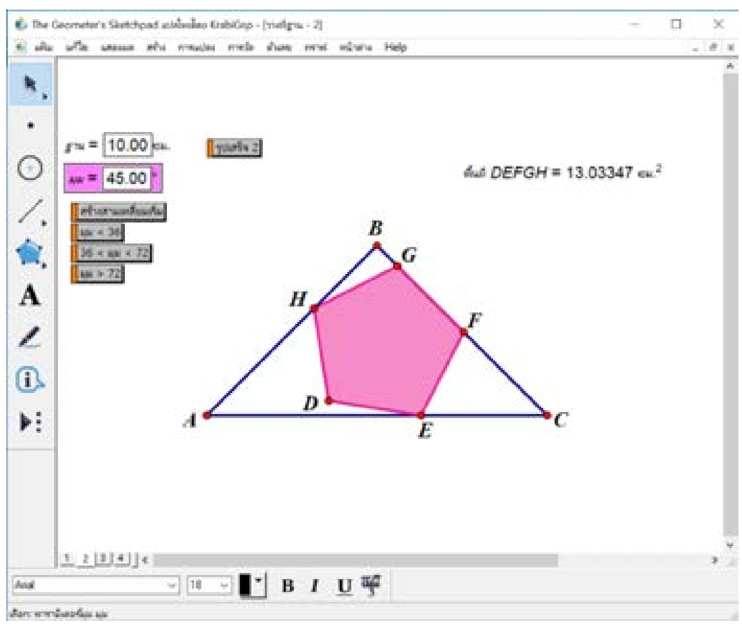
รูปภาพที่ ข-1 ผู้ใช้โปรแกรมป้อนข้อมูล ฐาน,มุม วางบนฐาน



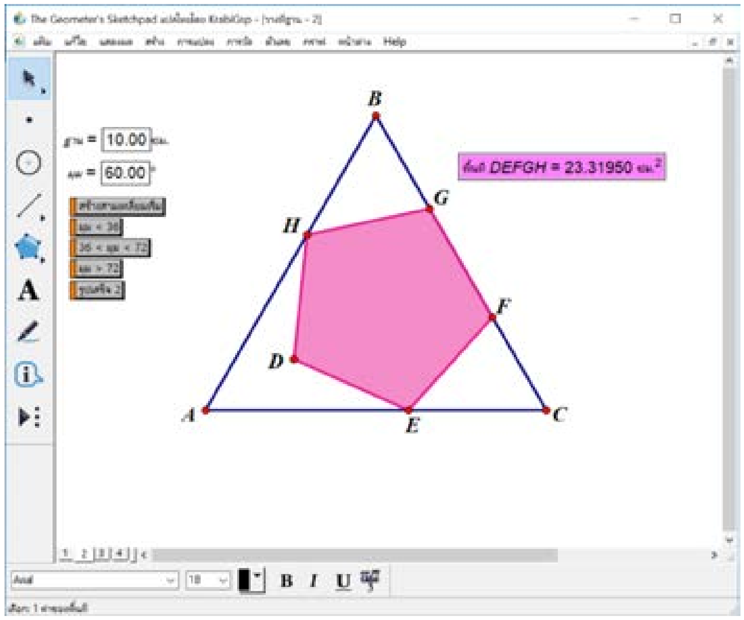
รูปภาพที่ ข-2 โปรแกรมแสดงผล วางบนฐาน



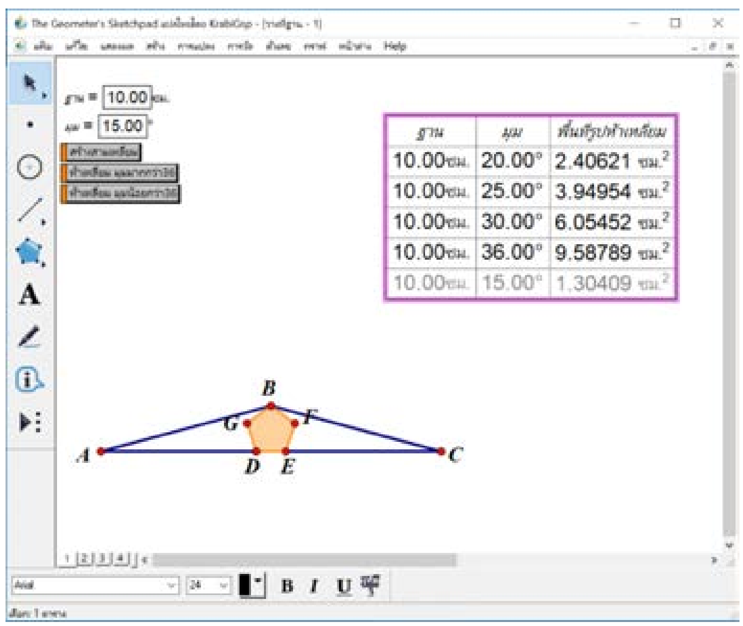
รูปภาพที่ ข-3 ผู้ใช้โปรแกรมป้อนข้อมูล ฐาน,มุม วางด้านประกอบมุมยอด



รูปภาพที่ ข-4 โปรแกรมแสดงผล วางด้านประกอบมุมยอด



รูปภาพที่ ข-5 แสดงพื้นที่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า



รูปภาพที่ ข-6 ตารางแสดงพื้นที่ห้าเหลี่ยมที่มุมต่างๆ

ประวัติผู้เขียน

นางสาวฐิติรัตน์ ศรีภัทราพันธุ์ รหัสประจำตัว 5833513223

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย