# โครงการ

# การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

| | |
|---|---|
| ชื่อโครงการ | วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ<br>Mathematical Methods for Schrödinger Equation using the WKB approximation and 2X2 transfer matrix techniques |
| ชื่อนิสิต | นางสาวกุลภัทร แสนสุข 583 35030 23 |
| ภาควิชา | คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์<br>สาขาวิชาคณิตศาสตร์ |
| ปีการศึกษา | 2561 |

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์ โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี
และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

นางสาวกุลภัทร แสนสุข

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2561

# Mathematical Methods for Schrödinger Equation using the WKB approximation and 2X2 transfer matrix techniques

Miss Kunlapat Sansuk

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science Chulalongkorn University

Academic Year 2018

| | |
|---|---|
| หัวข้อโครงงาน | วิธีทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์ โดยวิธีประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีและวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ |
| โดย | นางสาวกุลภัทร แสนสุข |
| สาขาวิชา | คณิตศาสตร์ |
| อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน | ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เพชรอาภา บุญเสริม |

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิตในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

........................................ หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

เพชรอาภา บุญเสริม ........................ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เพชรอาภา บุญเสริม)

ณัฏฐนาถ ไตรภพ ........................ กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ณัฏฐนาถ ไตรภพ)

........................................ กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุจินต์ คมฤทัย)

นางสาวกุลภัทร แสนสุข : วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์ โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ.
(Mathematical Methods for Schrödinger Equation using the WKB approximation and 2X2 transfer matrix techniques)
อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เพชรอาภา บุญเสริม, 153 หน้า.

สมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่สามารถอธิบายอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันคลื่น และเชื่อมโยงกับพลังงานรวมของระบบ อย่างไรก็ตามในสถานะคงตัวสมการชเรอดิงเงอร์จะลดรูปเป็นสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา เนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงเส้น ผลรวมเชิงเส้นใด ๆ ของผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา ยังคงเป็นผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาเช่นเดียวกัน ในโครงงานนี้เราสนใจศึกษาหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา พร้อมทั้งแสดงวิธีการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของการส่งผ่านและการสะท้อนที่ได้จากผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์โดยใช้สองวิธี คือ วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีและวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนและการส่งผ่านสามารถอธิบายพฤติกรรมของคลื่นสสารเมื่อตกกระทบหรือสะท้อนกลับบนกำแพงศักย์ ซึ่งสามารถบอกความน่าจะเป็นที่คลื่นสามารถสะท้อนหรือส่งผ่านได้ นอกจากนี้ยังสนใจการหาค่าสัมประสิทธิ์ความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งพลังงานศักย์แบบผสม

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต กุลภัทร แสนสุข
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก เพชรอาภา บุญเสริม
ปีการศึกษา 2561

# #5833503023 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : SCHRÖDINGER EQUATION / WKB APPROXIMATION / 2X2 TRANSFER MATRIX TECHNIQUES.


KUNLAPAT SANSUK : MATHEMATICAL METHODS FOR SCHRÖDINGER EQUATION USING THE WKB APPROXIMATION AND 2X2 TRANSFER MATRIX TECHNIQUES.

ADVISOR : ASST. PROF. PETARPA BOONSERM, Ph.D., 153 pp.


The Schrödinger equation is a second order partial differential equation which describes the rate of change of a wave function, and is completely determined by the total energy of a system. Nevertheless, in a stationary state, the Schrödinger equation is reduced to the time independent Schrödinger equation. Since the time independent Schrödinger equation is linear, the superposition of any of two solutions to the time independent Schrödinger equation is also a solution. In this project, we are interested in finding a solution of the time independent Schrödinger equation. In addition, we calculate the probability of transmission and reflection from the solutions of the Schrödinger equation using two methods; the WKB approximation and the 2X2 transfer matrix techniques. The reflection and transmission coefficients describe the behavior of the matter wave incident on the potential barrier. They can be expressed in term of the probability with which the matter wave can be reflected or transmitted. Furthermore, we also focus on the superposition of various potentials, where the reflection and transmission coefficients from the superposition of the various potentials are derived.


Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature ..................

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature ..................

Academic Year : 2018

# กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่องวิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์ โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีเพราะได้รับความอนุเคราะห์และความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลายท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินโครงงานจึงใคร่ขอขอบพระคุณในความช่วยเหลือต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เพชรอาภา บุญเสริม ที่กรุณารับผู้ดำเนินโครงงานเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน และคอยให้คำปรึกษาในเรื่องต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นขั้นตอนวิธีการดำเนินงาน รวมถึงติดตามความก้าวหน้า ดูแลเอาใจใส่ ให้ข้อเสนอแนะ และชี้ให้เห็นถึงปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ และให้ความช่วยเหลือหลายสิ่งหลายอย่างตั้งแต่การเริ่มต้นทำโครงงานจนกระทั่งทำโครงงานสำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณ อ.ดร. ไตรทศ งามปิติพันธ์ ที่แก้ไขปรับปรุงโครงงานให้มีความถูกต้องคอยให้คำปรึกษาในเรื่องต่าง ๆ ให้ข้อเสนอแนะ และชี้ให้เห็นถึงปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ อย่างละเอียด ตั้งแต่การเริ่มต้นทำโครงงานจนกระทั่งทำโครงงานสำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ณัฏฐนาถ ไตรภพ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุจินต์ คมฤทัย ที่กรุณาเป็นคณะกรรมการสอบโครงงานในครั้งนี้ และยังให้ข้อเสนอแนะและข้อคิดที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่ง รวมทั้งยังชี้ให้เห็นถึงปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ เพื่อนำไปแก้ไขโครงงานให้สำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์อีกด้วย

# สารบัญ

# สารบัญตาราง

หน้า

# สารบัญภาพ

# บทที่ 1

# บทนำ

## 1.1 ความเป็นมาและเหตุผลการวิจัย

ในทางฟิสิกส์ กลศาสตร์แบบดั้งเดิม อธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุขนาดใหญ่ รวมไปถึงสถานะของสสาร กลศาสตร์แบบดั้งเดิมถูกใช้อธิบายกลศาสตร์นิวตันของไอแซก นิวตัน ซึ่งอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างแรงและโมเมนตัม ซึ่งสามารถอธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ทางฟิสิกส์ได้ (พงษ์แก้ว, 2553) แต่เมื่อวัตถุมีขนาดเล็กหรือความเร็วสูง กลศาสตร์แบบดั้งเดิมไม่สามารถอธิบายได้ ในปีค.ศ. 1887 ไฮน์ริช เฮิร์ตซ์ พบว่าเมื่อฉายแสงอัลตราไวโอเล็ตไปยังขั้วไฟฟ้าซึ่งอยู่ในวงจร จะมีประจุไฟฟ้าหลุดออกมา ต่อมาฮอลล์วอชส์ พบว่าเมื่อมีแสงหรือคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่สูงตกกระทบผิวโลหะ จะมีอิเล็กตรอนหลุดออกจากผิวโลหะนั้น ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก (photoelectric effect) และเรียกอิเล็กตรอนที่หลุดออกจากผิวโลหะที่ถูกแสงว่าโฟโตอิเล็กตรอน (photoelectron) (เจษฎา, 2554) และในปีค.ศ. 1905 อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ ได้อธิบายปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก โดยใช้แนวคิดของพลังค์ ซึ่งพลังค์ได้ศึกษาทฤษฎีควอนตัม นั่นคือ กฎการแผ่รังสีของวัตถุดำ ซึ่งอธิบายว่าพลังงานที่วัตถุดำรับเข้าไปหรือปล่อยออกมามีค่าเฉพาะบางค่า เรียกว่าควอนตัมของพลังงานหรือโฟตอน มีค่าเท่ากับ $hf$ เมื่อ $h$ เป็นค่าคงตัวของพลังค์ และ $f$ เป็นความถี่ของแสง (นรา, 2553) ซึ่งไอน์สไตน์ได้อธิบายว่าแสงมีสมบัติเป็นอนุภาค ในปีค.ศ. 1913 นีลส์ โบร์ ได้ทำการศึกษาการเกิดสเปกตรัมของก๊าซไฮโดรเจน และได้สร้างแบบจำลองอะตอมเพื่อใช้อธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนรอบ ๆ นิวเคลียสเป็นวงคล้ายกับวงโคจรของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์ แต่ละวงจะมีระดับพลังงานเฉพาะตัว (สิขรินทร์, 2558) ในปีค.ศ. 1923 หลุยส์ เดอบรอยล์ เสนอว่าถ้าคลื่นประพฤติตัวเป็นอนุภาค แล้วอนุภาคก็สามารถประพฤติตัวเสมือนเป็นคลื่นได้เช่นเดียวกัน (ไตรทศ และเพชรอาภา, 2558) หลังจากนั้น ในปีค.ศ. 1925 กลศาสตร์ควอนตัมได้ก่อกำเนิดขึ้นและใช้อธิบายแทนกลศาสตร์แบบดั้งเดิม โดยกลศาสตร์ควอนตัมอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีขนาดเล็กมากซึ่งเหมาะกับคลื่นรวมถึงอนุภาคในอะตอมและโมเลกุล กลศาสตร์ควอนตัมแบ่งเป็น 2 แบบ คือ กลศาสตร์คลื่น และกลศาสตร์เมทริกซ์ ซึ่งกลศาสตร์คลื่นนั้น ในปีค.ศ. 1926 เออวิน ชเรอดิงเงอร์ นักฟิสิกส์ชาวออสเตรีย ได้ค้นพบสมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหรือสมการคลื่น โดยสามารถแก้สมการเพื่อหาฟังก์ชันคลื่น ส่วนกลศาสตร์เมทริกซ์นั้น ในปีค.ศ. 1927

เวอเนอร์ ไฮเซนเบิร์ก นักวิทยาศาสตร์ชาวเยอรมัน เสนอหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์ก นั่นคือ ความไม่แน่นอนในการวัดตำแหน่งและโมเมนตัม (ภนพพร, 2555; นรา, 2553) ต่อมาชเรอดิงเงอร์ได้พิสูจน์ว่าทั้ง 2 แบบนั้นให้ผลเหมือนกัน แต่วิธีการของชเรอดิงเงอร์สอดคล้องกับเดอบรอยล์ และเข้าใจง่ายกว่ากลศาสตร์เมทริกซ์ของไฮเซนเบิร์ก

การเปรียบเทียบระหว่างกลศาสตร์แบบดั้งเดิมและกลศาสตร์ควอนตัม

| กลศาสตร์แบบดั้งเดิม | กลศาสตร์ควอนตัม |
|---|---|
| 1. ศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีขนาดใหญ่กว่าอะตอม | 1. ศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีขนาดเล็กมากในระดับอะตอม |
| 2. ระบุตำแหน่งในการพบอนุภาคได้อย่างแม่นยำ | 2. ระบุความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคในรูปของกลุ่มคลื่น |
| 3. เมื่อวัตถุมีขนาดเล็กจะไม่สามารถอธิบายได้ | 3. ให้ความถูกต้องในการคำนวณแม่นยำแม้วัตถุมีขนาดเล็ก |

เนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหรือสมการคลื่น สามารถหาผลเฉลยออกมาเป็นฟังก์ชันคลื่น และฟังก์ชันคลื่นสามารถอธิบายพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของคลื่นได้ ดังนั้นเราจึงสนใจวิธีที่จะหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ และการคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนที่ได้จากผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ศึกษาสมการชเรอดิงเงอร์ หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ และหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของคลื่นด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

## 1.3 ขอบเขตการวิจัย

หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาใน 1 มิติ และคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของคลื่นโดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

## 1.4 ขั้นตอนการวิจัย

1.4.1 ศึกษาที่มาของกลศาสตร์ควอนตัม

1.4.2 ศึกษาสมการชเรอดิงเงอร์

1.4.3 หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และใช้วิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ หาความสัมพันธ์ระหว่างค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน

1.4.4 หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

1.4.5 เปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ กับผลเฉลยแม่นตรง

1.4.6 จัดทำสรุป

1.4.7 จัดทำเอกสารเพื่อนำเสนอโครงงานเป็นรูปเล่ม

1.4.8 เตรียมส่งเล่มโครงงานฉบับสมบูรณ์

## 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ประโยชน์ต่อตัวนิสิตที่ทำโครงงาน

- สามารถหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

1.5.2 ประโยชน์ที่ได้จากโครงงานที่พัฒนาขึ้น

- สามารถนำเทคนิคการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ เพื่อหาค่าความน่าจะเป็นในระบบที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น

## 1.6 โครงสร้างของรายงาน

1.6.1 บทที่ 2 จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่ใช้ในการทำโครงงาน

1.6.2 บทที่ 3 จะกล่าวถึงวิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์

1.6.3 บทที่ 4 จะกล่าวถึงค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนคลื่น สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

1.6.4 บทที่ 5 จะกล่าวถึงข้อสรุปจากการทำวิจัยและข้อเสนอแนะ

# บทที่ 2
# งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องซึ่งได้แก่ สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา และสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา

สมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหรือสมการคลื่นที่ขึ้นกับตำแหน่งและเวลา ซึ่งอยู่ในรูปของพลังงานรวมโดยเกิดจากผลรวมระหว่างพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ พลังงานรวม (Total Energy) คือ พลังงานรวมของอนุภาค (นรา, 2553)

- พลังงานจลน์ (Kinetic Energy) คือ พลังงานที่เกิดขึ้นขณะวัตถุกำลังเคลื่อนที่เนื่องจากมีแรงมากระทำต่อวัตถุและมีค่าเปลี่ยนแปลงตามอัตราเร็วของวัตถุเคลื่อนที่ พลังงานจลน์ที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ เช่น พลังงานลม พลังงานคลื่น พลังงานน้ำ พลังงานเสียง (ณรงค์ฤทธิ์, 2555)

- พลังงานศักย์ (Potential energy) คือ พลังงานที่สะสมในวัตถุอันเนื่องมาจากตำแหน่งของวัตถุ เคลื่อนที่ได้จากแรงโน้มถ่วงหรือแรงดึงดูดจากแม่เหล็ก เช่น ก้อนหินที่วางอยู่บนขอบที่สูง (สมพงษ์, 2539)

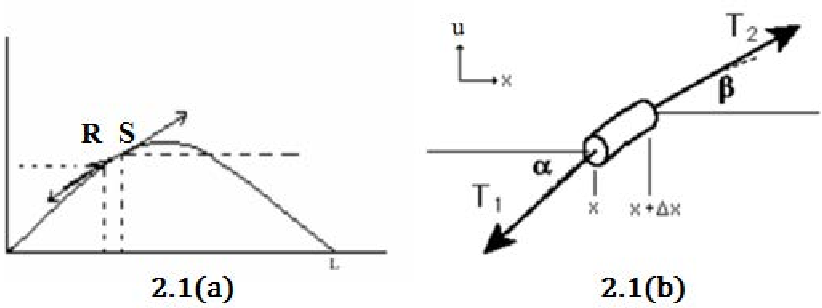
โดยพลังงานศักย์แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

- พลังงานศักย์โน้มถ่วง (Gravitational Potential Energy) คือ พลังงานศักย์ที่สะสมในวัตถุเมื่ออยู่บนที่สูง พลังงานศักย์โน้มถ่วงจะมีค่ามากหรือค่าน้อย ขึ้นอยู่กับมวลและตำแหน่งแนวดิ่ง
- พลังงานศักย์ยืดหยุ่น (Elastic Potential Energy) คือ พลังงานศักย์ของสปริงขณะที่ยืดออก หรือหดเข้าจากตำแหน่งสมดุล (อฑิติยา, 2558)

สมการชเรอดิงเงอร์แบ่งออกเป็นสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา และสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา

## 2.1 สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

พิจารณาจากสมการคลื่นในการสั่นของเส้นลวด นำเส้นลวดมาขึงให้ตึงระหว่างจุด 2 จุด คือ $\boldsymbol{x = 0}$ และ $\boldsymbol{x = L}$ ณ เวลา $\boldsymbol{t = 0}$ ดึงตรงกึ่งกลางเส้นลวดแล้วปล่อย ทำให้เส้นลวดเกิดการสั่นในระยะแนวดิ่ง $\boldsymbol{u(x,t)}$ แต่ไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวราบ (พรชัย, 2554)




**ภาพที่ 2.1** แรงกระทำบนส่วนกึ่งกลางของเส้นลวด (อุษณีย์, 2557)

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน $F = ma$ โดยที่ $m$ คือ มวลของเส้นลวด และ $a$ คือ ความเร่งของการเคลื่อนที่ ณ จุดใดจุดหนึ่งซึ่งอยู่ระหว่าง $x$ และ $x + \Delta x$

ดังนั้น
$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1.1}$$

เนื่องจาก
$$T_1 cos\alpha = T_2 \cos\beta = T$$

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1.2}$$

เพราะว่า $\tan\alpha$ และ $\tan\beta$ เป็นความชันของเส้นลวดที่ $x$ และ $x + \Delta x$

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x}\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1.3}$$

จะสังเกตได้ว่า สมการทางซ้าย คือ อัตราส่วนเชิงผลต่างของนิวตันของ $\frac{\partial u}{\partial x}$ ที่ $x$

ให้ $\Delta x \to 0$ และ $c^2 = \frac{T}{\rho}$ เป็นค่าคงที่ โดยที่ $T$ คือแรงตึงในเส้นลวดระหว่างจุดสัมผัสที่จุด $R$ และ $S$ และ $\rho$ คือ มวลของเส้นลวดต่อหน่วยความยาว $\Delta x$ ในช่วง $RS$

ดังนั้น

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2.1.4)$$

เรียกสมการนี้ว่า **สมการคลื่นใน 1 มิติ**

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการนี้คือผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \qquad (2.1.5)$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t \geq 0 \qquad (2.1.6)$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) \qquad 0 < x < L \qquad (2.1.7)$$

ซึ่ง $u(x,0)$ คือ การเคลื่อนที่ของเส้นลวดขึ้นอยู่กับรูปเดิมของเส้นลวดก่อนที่จะถูกปล่อยให้เคลื่อนที่ และ $u_t(x,0)$ คือ ความเร็วของจุดต่าง ๆ บนเส้นลวด

สมมติว่าผลเฉลย คือ $u(x,t) = X(x)T(t)$

แทนค่า $u(x,t)$ ในสมการ (2.1.5)

จะได้

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)}$$

และให้

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = k$$

**กรณีที่** 1 ถ้า $k < 0$ ให้ $k = -a^2, a > 0$

จะได้ว่า

$$X''(x) + a^2 X(x) = 0 \qquad (2.1.8)$$

$$T''(t) + c^2 a^2 T(t) = 0 \qquad (2.1.9)$$

มีผลเฉลยเป็น

$$X(x) = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax \qquad (2.1.10)$$

$$T(t) = c_3 \cos cat + c_4 \sin cat \qquad (2.1.11)$$

โดยใช้เงื่อนไขค่าขอบ (2.1.6) จะได้ว่า $c_1 = c_2 = 0$ ดังนั้น $X(x) = 0$

ซึ่ง $u(x,t) = 0$ หมายความว่า เส้นลวดไม่มีการสั่นและขัดแย้งกับปัญหา ดังนั้น $c_2 \neq 0$

จะได้ว่า

$$\sin aL = 0$$

นั่นคือ $aL = n\pi$ หรือ $a_n = \frac{n\pi}{L}, n = 1, 2, 3, \ldots$ และให้ $c_2 = 1$

และผลเฉลยที่สมนัยคือ $X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x,\ n = 1, 2, 3, \dots$

จากสมการ (2.1.9) จะได้ว่า $T''(t) + c^2 a_n^2 T(t) = 0$

มีผลเฉลยเป็น $T_n(t) = A_n \cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n \sin\frac{cn\pi}{L}t, n = 1, 2, 3, \dots$

เมื่อ $A_{\mathrm{n}}, B_{\mathrm{n}}$ เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

ดังนั้น $u_n(x,t) = \left(A_n\, cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n\, sin\frac{cn\pi}{L}t\right) sin\frac{n\pi}{L}x, n = 1, 2, 3, \dots$

**กรณีที่ 2** ถ้า $k = 0$ จะได้ว่า $u(x,t) = 0$ หมายความว่า เส้นลวดไม่มีการสั่นและขัดแย้งกับปัญหา

**กรณีที่ 3** ถ้า $k > 0$ ให้ $k = a^2, a > 0$

จะได้ว่า $$X''(x) - a^2 X(x) = 0 \qquad (2.1.12)$$

$$T''(t) - c^2 a^2 T(t) = 0 \qquad (2.1.13)$$

มีผลเฉลยเป็น $$X(x) = c_5 \cosh ax + c_6 \sinh ax \qquad (2.1.14)$$

$$T(t) = c_7 \cosh cat + c_8 \sinh cat \qquad (2.1.15)$$

โดยใช้เงื่อนไขค่าขอบ (2.1.6) จะได้ว่า $c_1 = c_2 = 0$ ดังนั้น $X(x) = 0$ ซึ่ง $u(x,t) = 0$ หมายความว่า เส้นลวดไม่มีการสั่นและขัดแย้งกับปัญหา

สรุปได้ว่า

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n \sin\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x, n = 1, 2, 3, \dots$$

เป็นผลเฉลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบ (2.1.6)

เมื่อให้ $t = 0$ และใช้เงื่อนไขแรกของค่าเริ่มต้น (2.1.7)

จะได้ว่า $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}x$

คือการกระจายครึ่งช่วงของ $f(x)$ ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์บนช่วง $0 < x < L$

โดยที่ $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x dx, n = 1, 2, 3, \dots$

เนื่องจาก $u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{cn\pi}{L}\sin\frac{cn\pi}{L}t + B_n\frac{cn\pi}{L}\cos\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x, n = 1, 2, 3, \dots$

เมื่อให้ $t = 0$ และใช้เงื่อนไขที่สองของค่าเริ่มต้น (2.1.7)

จะได้ว่า $u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cn\pi}{L}B_n \sin\frac{n\pi}{L}x$

คือการกระจายครึ่งช่วงของ $g(x)$ ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์บนช่วง $0 < x < L$

โดยที่ $\frac{cn\pi}{L}B_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x dx, n = 1, 2, 3, \dots$

$$B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x dx, n = 1, 2, 3, \dots$$

ดังนั้น ผลเฉลยที่สอดคล้องเงื่อนไขค่าขอบ (2.1.6) และเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (2.1.7) คือ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n \sin\frac{cn\pi}{L}t \right) \sin\frac{n\pi}{L}x, n = 1,2,3,\ldots$$

โดยที่ $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx, \quad n = 1,2,3,\ldots$

$$B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

จากสมการ (2.1.4) คลื่นใน 1 มิติ คือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ผลเฉลยอยู่ในรูป $u(x,t) = X(x)T(t)$ (2.1.16)

แทนสมการ (2.1.16) ในสมการ (2.1.4) จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2\,[X(x)T(t)]}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2[X(x)T(t)]}{\partial x^2}$$

$$X(x)\frac{d^2\,T(t)}{dt^2} = c^2T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2} \tag{2.1.17}$$

หารตลอดสมการด้วย $X(x)T(t)$

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d^2\,T(t)}{dt^2} = \frac{c^2}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

เนื่องจากสมการทางซ้ายเป็นฟังก์ชันของ $t$ และสมการทางขวาเป็นฟังก์ชันของ $x$ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองข้างเป็นค่าคงตัว จากการคำนวณหาผลเฉลยของ $u(x,t)$ พบว่าถ้า $k < 0$ ให้ $k = -a^2, a > 0$ จะได้ผลเฉลยที่สอดคล้องกับปัญหาค่าขอบและค่าเริ่มต้น

ดังนั้น

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d^2\,T(t)}{dt^2} = -a^2 \tag{2.1.18}$$

ให้ $a = \omega$ จะได้ว่า

จัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$\frac{d^2\,T(t)}{dt^2} = -T(t)\omega^2 \tag{2.1.19}$$

$$\frac{d^2\,T(t)}{dt^2} + T(t)\omega^2 = 0$$

มีผลเฉลยเป็น $$T(t) = c_9 \cos \omega t + c_{10} \sin \omega t \tag{2.1.20}$$

แทนสมการ (2.1.20) ในสมการ (2.1.17)

$$X(x)\frac{d^2\,[c_9 \cos \omega t + c_{10} \sin \omega t]}{dt^2} = c^2[c_9 \cos \omega t + c_{10} \sin \omega t]\,\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

$$X(x)[-\omega^2 c_9 \cos \omega t - \omega^2 c_{10} \sin \omega t] = c^2[c_9 \cos \omega t + c_{10} \sin \omega t]\,\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

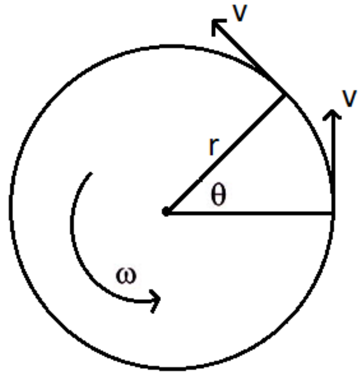
$$-\omega^2 X(x)[c_9 \cos \omega t + c_{10} \sin \omega t] = c^2[c_9 \cos \omega t + c_{10} \sin \omega t]\,\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

$$-\omega^2 X(x) = c^2\,\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

จัดรูปใหม่ และให้ $c = v$ จะได้ว่า

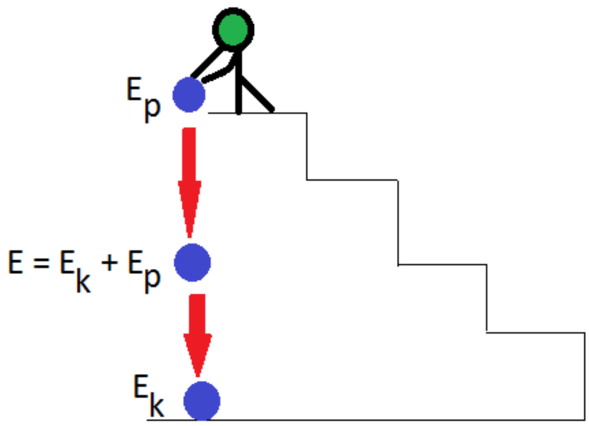
$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}X(x) \tag{2.1.21}$$

โดยที่ $\omega$ เป็น อัตราเร็วเชิงมุม คือ มุมที่จุดศูนย์กลางที่รัศมีกวาดไปได้ใน 1 หน่วยเวลา หน่วยเป็น $rad/s$ เราใช้ค่าคงตัวของพลังค์ในการอธิบายควอนไทเซชัน ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระดับขนาดที่เล็กมาก ๆ สำหรับอนุภาคอย่างอิเล็กตรอนและโฟตอน โดยคุณสมบัติทางฟิสิกส์บางอย่างของอนุภาคเหล่านี้จะมีค่าที่เป็นไปได้เป็นจำนวนเท่าของค่าคงตัวหนึ่งเท่านั้น ตัวอย่างเช่น พลังงาน $E$ ของแสงที่มีความถี่ $f$ จะมีค่าได้เป็น $E = hf$ โดยที่ $h$ คือค่าคงตัวของพลังค์ และ $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ คือ ค่าคงตัวของพลังค์แบบลดค่า (reduced Planck constant) หรือบางครั้งเรียกว่าค่าคงตัวของดิแรค บางครั้งจะเขียนปริมาณนี้ในหน่วยของ $\omega = 2\pi f$ ซึ่งเท่ากับ $E = \hbar\omega$ และ $v$ เป็นอัตราเร็วในการเคลื่อนที่ของอนุภาค คือ ระยะทางตามเส้นรอบวงที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ ใน 1 หน่วยเวลา มีหน่วยเป็น $m/s$




**ภาพที่ 2.2** การเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม (ไผ่, 2560)

จากพลังงานรวมของอนุภาคสามารถเขียนได้ในรูปผลรวมของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์




**ภาพที่ 2.3** ผลรวมของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์

$$E = K + V$$

โดยที่ $K$ คือ พลังงานจลน์ และ $V$ คือพลังงานศักย์

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

และ $p = mv$ จะได้ว่า

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

โดยที่ $p$ คือ โมเมนตัม และ $m$ คือ มวลของอนุภาค

จะได้ว่า $$p = \sqrt{2m[E - V(x)]} \qquad (2.1.22)$$

เดอ บรอยล์ ได้เสนอสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวคลื่นและโมเมนตัมของโฟตอนโดยอาศัยทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ ซึ่งกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงาน $E$ และมวล $m$ ของอนุภาค คือ

$$E = mc^2$$

และควอนตัมของพลังงาน $$E = hf$$

ดังนั้นจะได้ว่า $$mc^2 = hf$$

เมื่อ $c$ เป็นอัตราเร็วของแสง ในกรณีอนุภาคของแสงเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $c$ จะมีโมเมนตัมเป็นไปตามสมการ

$$p = \frac{E}{c}$$

ดังนั้น $$pc = hf$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{h}{p}$$

จะได้ว่า ความยาวคลื่นของเดอบรอยล์ คือ

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

จะได้ว่า

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m[E - V(x)]}} \tag{2.1.23}$$

ให้ $\omega = 2\pi f$ และ $v = f\lambda$ และ $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

โดยที่ $f$ คือ ความถี่ของอนุภาค และ $h$ คือค่าคงตัวของพลังค์ เป็นปริมาณที่เกี่ยวข้องกับขนาดของควอนตาและมีค่าเท่ากับ $6.626 \times 10^{-34}\ J \cdot s$ หรือเขียนในหน่วยอิเล็กตรอนโวลต์ได้เท่ากับ $4.135 \times 10^{-15}\ eV \cdot s$ ปริมาณอีกอย่างซึ่งมีความเกี่ยวข้องกันคือค่าคงตัวของพลังค์แบบลดค่า หรือบางครั้งเรียกว่าค่าคงตัวของดิแรค คือ $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-34}\ J \cdot s$

ดังนั้น

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 f^2}{f^2\lambda^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2 2m[E - V(x)]}{h^2} = \frac{4\pi^2 2m[E - V(x)]}{4\pi^2\hbar^2}$$

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{2m[E - V(x)]}{\hbar^2} \tag{2.1.24}$$

แทนสมการ (2.1.24) ในสมการ (2.1.21)

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{2m[E - V(x)]}{\hbar^2}\ X(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = EX(x) - V(x)X(x)$$

ดังนั้นจะได้ว่าสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาใน 1 มิติ คือ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + V(x)X(x) = EX(x)$$

จากสมการคลื่นในหนึ่งมิติสามารถขยายไปยังสามมิติได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1.25}$$

โดยที่ $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ เรียกว่า ตัวดำเนินการลาปลาส ซึ่ง $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ เป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับสองในระบบพิกัดฉาก

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\nabla^2 u=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1.26}$$

ให้ $$u(x,y,z,t)=X(x,y,z)T(t)$$

หรือ $$u(\vec{r},t)=X(\vec{r})T(t) \tag{2.1.27}$$

พลังงานรวมของอนุภาคในกลศาสตร์ฮามิลตัน เรียกว่า ฮามิลโทเนียน จะเขียนอยู่ในรูปของตำแหน่งกับโมเมนตัม

$$H=T+V$$

$$=\frac{p^2}{2m}+V(x,y,z) \tag{2.1.28}$$

โดยที่ $T$ คือ พลังงานจลน์ของอนุภาค, $V$ คือ พลังงานศักย์ของอนุภาค, $p$ คือ โมเมนตัม และ $m$ คือมวลของอนุภาค

ตัวดำเนินการฮามิลโทเนียนหาได้จากสมการ (2.1.28) โดยเปลี่ยน $p$ และ $x,y,z$ ให้เป็นตัวดำเนินการตามพอสชูเลตที่ 4 นั่นคือ ตัวดำเนินการของการวัดปริมาณฟิสิกส์ใด หาได้จากการคำนวณปริมาณฟิสิกส์นั้นโดยอาศัยฟิสิกส์คลาสสิก แล้วจึงเปลี่ยนตัวแปรต่าง ๆ ให้เป็นตัวดำเนินการ (นรา, 2553)

ตัวดำเนินการฮามิลโทเนียนอาศัยตัวดำเนินการตำแหน่งและโมเมนตัมที่ได้จากพอสชูเลตที่ 3 นั่นคือ คุณสมบัติของตัวดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับการวัดปริมาณฟิสิกส์ต่าง ๆ นั้นต้องเป็นไปตามกฎความสัมพันธ์สลับที่พื้นฐาน (นรา, 2553) จะเขียนได้ว่า

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$$

$$=\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla})^2+V(x,y,z)$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z) \tag{2.1.29}$$

โดยอาศัยพอสชูเลตที่ 2 นั่นคือ การวัดปริมาณฟิสิกส์ใด ๆ มีตัวแทนทางคณิตศาสตร์ คือ ตัวดำเนินการเฮอร์มิเชียนที่เกี่ยวข้องและค่าที่วัดได้คือ ค่าไอเกนของตัวดำเนินการนั้น ๆ (นรา, 2553) จะได้ว่า

$$\hat{H}X(\vec{r}) = EX(\vec{r}) \tag{2.1.30}$$

โดยที่ $\hat{H}$ คือ ตัวดำเนินการฮามิลโทเนียน และ $X(\vec{r})$ คือ ฟังก์ชันไอเกนของ $\hat{H}$ และ $E$ คือ ค่าไอเกน

แทนสมการ (2.1.29) ในสมการ (2.1.30) จะได้ว่า

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z)\right)X(\vec{r}) = EX(\vec{r})$$

จะได้ว่าสมการชเรอดิงเงอร์ในสามมิติ คือ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 X(\vec{r}) + V(\vec{r})X(\vec{r}) = EX(\vec{r}) \tag{2.1.31}$$

การแก้สมการเพื่อให้ได้ผลเฉลยนั้นใช้วิธีการแยกตัวแปร เพื่อทำให้จำนวนตัวแปรที่มีในสมการน้อยลง โดยจะพิจารณาการแก้สมการจากสมการชเรอดิงเงอร์สามมิติในพิกัดฉาก (พงษ์แก้ว, 2553)

โดยพลังงานศักย์สามารถเขียนได้ในรูป $V(x,y,z) = V(x) + V(y) + V(z)$

ดังนั้น สมการชเรอดิงเงอร์สามมิติ จะได้เป็น

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F(x,y,z) + \big(V(x) + V(y) + V(z)\big)F(x,y,z) = EF(x,y,z) \tag{2.1.32}$$

ใช้วิธีแยกตัวแปร ให้

$$F(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{2.1.33}$$

แทนสมการ (2.1.33) ในสมการ (2.1.32) จะได้ว่า

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)X(x)Y(y)Z(z) + \big(V(x) + V(y) + V(z)\big)X(x)Y(y)Z(z)$$
$$= EX(x)Y(y)Z(z) \tag{2.1.34}$$

หารสมการ (2.1.34) ตลอดสมการด้วย $X(x)Y(y)Z(z)$ จะได้ว่า

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)+\frac{1}{y(y)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(y)+\frac{1}{z(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z)\right)+\big(V(x)+V(y)+V(z)\big)=E \quad (2.1.35)$$

ให้ $E=\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3$ จะได้สมการชเรอดิงเงอร์เป็น

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)+V(x)=\varepsilon_1$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)+V(x)X(x)=\varepsilon_1 X(x) \quad (2.1.36)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(y)+V(y)Y(y)=\varepsilon_1\, Y(y) \quad (2.1.37)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z)+V(z)Z(z)=\varepsilon_1\, Z(z) \quad (2.1.38)$$

พิจารณาบ่อศักย์อนันต์ $V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0\,, x>L\\ 0\,, & 0\le x\le L\end{cases}$

โดยที่ $X(x)=\begin{cases}X_1(x), & x<0\,, x>L\\ X_2(x)\,, & 0\le x\le L\end{cases}$

**กรณีที่ 1** $x<0$ และ $x>L$ ดังนั้น $V(x)=\infty$ เนื่องจาก $V$ มีขนาดใหญ่มากจึงสามารถตัดเทอมอื่นทิ้งได้ จากสมการ (2.1.35) จะได้ว่า $VX_1(x)=0$

เนื่องจาก $V\neq 0$ จะได้ว่า $X_1(x)=0$ (2.1.39)

**กรณีที่ 2** $0\le x\le L$ ดังนั้น $V(x)=0$ จากสมการ (2.1.36) จะได้ว่า

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X_2(x)=\ X_2(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X_2(x)=-\frac{2m}{\hbar^2}\varepsilon_1\, X_2(x)$$

ให้ $k=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\varepsilon_1}$ จะได้เป็นผลเฉลยเป็น

$$X_2(x)=A\cos kx+B\sin kx \quad (2.1.40)$$

พิจารณาเงื่อนไขขอบเขต เมื่อ $x=0$ จะได้ว่า $X_1(0)=X_2(0)=0$

จะได้ว่า $A = 0$

ดังนั้น $X_2(x) =$

$B \sin kx$ (2.1.41)

เมื่อ $x = L$ จะได้ว่า $X_1(L) = X_2(L) = 0$

ดังนั้น $B \sin kL = 0$

จะได้ว่า $k = \frac{n\pi}{L}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

จาก $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\varepsilon_1}$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\varepsilon_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1\pi}{L}\right)^2 \quad , \qquad n_1 = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.1.42}$$

และ $X_{n_1}(x) =$

$B_1\, sin\frac{n_1\pi}{L}x$ (2.1.43)

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\varepsilon_2 = \frac{\hbar^2}{2m}(\frac{n_2\pi}{L})^2 \quad , \qquad n_2 = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.1.44}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\hbar^2}{2m}(\frac{n_3\pi}{L})^2 \quad , \qquad n_3 = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.1.45}$$

$$Y_{n_2}(\mathrm{y}) = B_2\, sin\frac{n_2\pi}{L}y \tag{2.1.46}$$

$$Z_{n_3}(\mathrm{z}) = B_3\, sin\frac{n_3\pi}{L}z \tag{2.1.47}$$

ดังนั้น สมการชเรอดิงเงอร์ในพิกัดฉากมีผลเฉลยดังนี้

$$E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1\pi}{L}\right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_2\pi}{L}\right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_3\pi}{L}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar\pi}{L}\right)^2 ({n_1}^2 + {n_2}^2 + {n_3}^2) \tag{2.1.48}$$

$$F(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) = B_1B_2B_3\, sin\frac{n_1\pi}{L}x\, sin\frac{n_2\pi}{L}y\ \ sin\frac{n_3\pi}{L}z \tag{2.1.49}$$

ในสมการ (2.1.49) ค่าของ $B_1B_2B_3$ คือ ค่าคงที่ใด ๆ ในการหาค่าคงที่ $B_1B_2B_3$ และฟังก์ชันไอเกนนอร์แมลไลซ์ จะใช้เงื่อนไขการนอร์แมลไลเซชัน เมื่อ $|X(x)|^2$ เป็นความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคในขณะที่ $|X(x)|^2\,dx$ คือโอกาสที่จะพบอนุภาคในช่วง $x$ ถึง $x + dx$ หากต้องการคำนวณโอกาสที่จะพบอนุภาคในทุก ๆ ที่ในปริภูมิ (วีระศักดิ์, 2559) จะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(x)|^2\,dx = 1$$

สำหรับบ่อศักย์อนันต์จะได้ว่า

$$\int_{0}^{L} |X(x)|^2\,dx = 1$$

$$\int_0^L \left|B_1\,sin\,\frac{n_1\pi}{L}x\right|^2 dx = 1$$

$$|B_1|^2 \int_0^L sin^2\,\frac{n_1\pi x}{L}\,dx = 1$$

$$\frac{|B_1|^2}{2}\int_0^L \left(1 - cos\,\frac{2n_1\pi x}{L}\right) dx = 1$$

$$\frac{|B_1|^2}{2}\left[x - \frac{L}{2n_1\pi}\,sin\,\frac{2n_1\pi x}{L}\right]_{x=0}^{x=L} = 1$$

$$\frac{|B_1|^2}{2}L = 1$$

$$B_1 = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

ในทำนองเดียวกัน $B_1 = B_2 = B_3 = \sqrt{\frac{2}{L}}$

แทนในสมการ (2.1.49) จะได้ว่า

$$F(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) = \left(\sqrt{\frac{2}{L}}\right)^3 \sin\frac{\mathrm{n}_1\pi}{L}x \sin\frac{\mathrm{n}_2\pi}{L}y\ \sin\frac{\mathrm{n}_3\pi}{L}z \qquad (2.1.50)$$

เมื่อ $n_i = 1, 2, 3, \ldots$ และ $i = 1, 2, 3$

## 2.2 สมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา

สมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลาพิจารณาจากทฤษฎีของพลังค์และเดอบรอยล์ โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างความถี่กับเลขคลื่น (วีระศักดิ์, 2559)

โดยพิจารณาจากคลื่นระนาบ ซึ่งเป็นคลื่นที่มีการสั่นของอนุภาคในแนวเดียวกันและมีหน้าคลื่นในแนวระนาบ เกิดจากการที่คลื่น 2 ขบวนเคลื่อนที่ไปพร้อมกัน โดยคลื่นทั้งสองนี้มีความถี่ และแอมพลิจูดเท่ากัน เคลื่อนที่ไปในทิศทางเดียวกัน และมีเฟสต่างกัน $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน

จากคลื่นที่มีการเคลื่อนที่เป็นคาบและเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยอัตราเร็ว $v$ จะสามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นได้ในรูปของฟังก์ชันไซน์ดังนี้

$$X(x,t) = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

โดยที่ $A$ คือ แอมพลิจูดของคลื่น

ดังนั้น คลื่นทั้ง 2 ขบวนเคลื่อนที่ไปพร้อมกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} X(x,t) &= \{X_1(x,t),\ X_2(x,t)\} \\ &= \left\{A\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left[(x - vt) + \frac{\pi}{2}\right], A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right\} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

ดังนั้นจะได้ว่า $$X(x,t) = \left\{A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt),\ A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right\}$$

ซึ่งสามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นได้ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน นั่นคือ

$$X(x,t) = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + iA\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

เนื่องจาก $$e^{i\emptyset} = \cos\emptyset + i\sin\emptyset$$

ดังนั้น $$X(x,t) = Ae^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)}$$

หรือ $$X(x,t) = Ae^{i2\pi(\frac{x}{\lambda} - ft)}$$

โดยที่ $A$ คือ แอมพลิจูดของคลื่น, $\lambda$ คือ ความยาวคลื่น และ $f$ คือ ความถี่ของคลื่น

เนื่องจาก ความยาวคลื่นของเดอบรอยล์ $\lambda = \frac{h}{p}$ และทฤษฎีของพลังค์ $E = hf$ จะได้ฟังก์ชันคลื่นเป็น

$$X(x,t) = Ae^{i2\pi\left(\frac{xp}{h}-\frac{E}{h}t\right)} \qquad (2.2.1)$$

ให้ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ เป็นเลขคลื่นหรือค่าคงตัวของการแผ่ และ $\omega = 2\pi f$ เป็นอัตราเร็วเชิงมุม จะได้ว่า $k = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar}$ และ $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi E}{h}$ แทนในสมการ (2.2.1)

จะได้ว่า
$$X(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} \qquad (2.2.2)$$

ตามพอสซูเลตที่ 1 นั่นคือ ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของอนุภาคคือฟังก์ชันคลื่น โดยที่คุณสมบัติต่าง ๆ ของการเคลื่อนที่ของอนุภาคเช่น ค่าโมเมนตัมและค่าพลังงานนั้น สามารถหาได้จากฟังก์ชันคลื่น (นรา, 2553)

ดังนั้น หาอนุพันธ์เทียบ $t$ ของฟังก์ชันคลื่นจากสมการ (2.2.2) จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial t}X(x,t) = (-i\omega)Ae^{i(kx-\omega t)} \qquad (2.2.3)$$

คูณ $i\hbar$ ตลอดทั้งสมการ (2.2.3) จะได้ว่า

$$(i\hbar)\frac{\partial}{\partial t}X(x,t) = (i\hbar)(-i\omega)Ae^{i(kx-\omega t)}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}X(x,t) = \hbar\omega Ae^{i(kx-\omega t)}$$

เนื่องจาก $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi E}{h}$ ดังนั้น $E = \hbar\omega$ จะได้ว่า

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}X(x,t) = EAe^{i(kx-\omega t)}$$

จากสมการ (2.2.2) จะได้ว่า

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}X(x,t) = EX(x,t) \qquad (2.2.4)$$

โดยที่ $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ เป็นตัวดำเนินการพลังงาน

และจากสมการ (2.2.2) อนุพันธ์อันดับสองเทียบ $x$ ของฟังก์ชันคลื่น จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x,t) = (ik)^2Ae^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x,t) = -k^2 A e^{i(kx-\omega t)}$$

จาก $k = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar}$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x,t) = -\left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 A e^{i(kx-\omega t)}$$

จัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$p^2\, X(x,t) = -\hbar^2\, \frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x,t) \tag{2.2.5}$$

และเมื่อแทน $E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ ในสมการ (2.2.4) จะได้ว่า

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}X(x,t) = \left[\frac{p^2}{2m} + V(x)\right]X(x,t)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}X(x,t) = \frac{p^2}{2m}X(x,t) + V(x)X(x,t) \tag{2.2.6}$$

แทนสมการ (2.2.5) ในสมการ (2.2.6) จะได้ว่า

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}X(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x,t) + V(x)X(x,t) \tag{2.2.7}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่าสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลาในสามมิติ คือ

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}X(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 X(\vec{r},t) + V(\vec{r})X(\vec{r},t) \tag{2.2.8}$$

ซึ่งสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา ผลเฉลยสามารถเขียนได้ในรูป

$$X(\vec{r},t) = X(\vec{r})T(t) \tag{2.2.9}$$

แทนสมการ (2.2.9) ในสมการ (2.2.8) จะได้ว่า

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}X(\vec{r})T(t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 X(\vec{r})T(t) + V(\vec{r})X(\vec{r})T(t)$$

$$X(\vec{r})i\hbar\frac{\partial}{\partial t}T(t) = T(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 + V(\vec{r})\right]X(\vec{r})$$

หารด้วย $X(\vec{r})T(t)$ ตลอดทั้งสมการจะได้ว่า

$$\frac{1}{T(t)}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}T(t) = \frac{1}{X(\vec{r})}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 + V(\vec{r})\right]X(\vec{r})$$

เนื่องจากสมการทางซ้ายเป็นฟังก์ชันของ $t$ และสมการทางขวาเป็นฟังก์ชันของ $\vec{r}$ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองข้างเป็นค่าคงตัว ดังนั้นจึงกำหนดให้ค่าคงตัวเท่ากับ $D$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{T(t)} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} T(t) = D$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t) = \frac{D}{i\hbar} T(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t) - \frac{D}{i\hbar} T(t) = 0$$

$$T(t) = e^{\frac{Dt}{i\hbar}}$$

เนื่องจาก $E = hf$ สามารถเขียนปริมาณนี้ได้ในรูปของ $\omega = 2\pi f$ ซึ่งเท่ากับ $E = \hbar\omega$ จึงได้ว่า

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชัน $T(t)$ เป็นฟังก์ชันคลื่นที่เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม

ดังนั้นสรุปได้ว่า $D = E$

$$T(t) = e^{\left(\frac{Et}{i\hbar}\right)} \tag{2.2.10}$$

แทนสมการ (2.2.10) ในผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา (2.2.9)

จะได้ว่า

$$X(\vec{r}, t) = e^{\left(\frac{Et}{i\hbar}\right)} X(\vec{r})$$

ในบทที่ 2 ได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา และสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา สมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหรือสมการคลื่น สามารถหาผลเฉลยออกมาเป็นฟังก์ชันคลื่น และฟังก์ชันคลื่นสามารถอธิบายพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของคลื่นได้ และพบว่าสมการชเรอดิงเงอร์สามารถทำนายสมบัติของอะตอมไฮโดรเจนได้อย่างแม่นยำ นอกจากนั้นสามารถใช้สมการชเรอดิงเงอร์ได้อย่างกว้างขวางทั้งในฟิสิกส์อะตอม ฟิสิกส์นิวเคลียร์ และฟิสิกส์สถานะของแข็ง (เพชรอาภา, 2556) ในโครงงานนี้สนใจศึกษาสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาใน 1 มิติ ดังนั้นการขยายสมการชเรอดิงเงอร์จากหนึ่งมิติไปยังสามมิติ พิจารณาการแก้สมการชเรอดิงเงอร์สามมิติในพิกัดฉาก ซึ่งในการแก้สมการเพื่อให้ได้ผลเฉลยนั้นใช้วิธีการแยกตัวแปร

# บทที่ 3

# วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์

ในบทนี้จะศึกษาการหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา โดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และใช้วิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน

## 3.1 วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี

วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB) ถูกค้นพบโดย Wentzel-Kramers-Brillouin ใช้ในการหาผลเฉลยซึ่งนำมาใช้กับกรณีที่พลังงานศักย์มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ เมื่อตำแหน่งเปลี่ยนไป (Slowly varying function of position) การเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ นั่นคือ พลังงานศักย์จะมีค่าเปลี่ยนไปน้อยมากในช่วงที่ความยาวเปลี่ยนไปหลายช่วงของความยาวคลื่นเดอบรอยล์ (พงษ์แก้ว, 2553)

พิจารณาจากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}X(x)+V(x)X(x)=EX(x)$$

จัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x)=-\frac{2m}{\hbar^2}[E-V(x)]X(x) \qquad (3.1.1)$$

ดังนั้น สามารถเขียนผลเฉลยได้ในรูป

$$X(x)=B(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} \qquad (3.1.2)$$

หาอนุพันธ์อันดับสองของสมการ (3.1.2) เทียบกับ $x$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}X(x) &= \frac{i}{\hbar}G'(x)B(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}+B'(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}\\ &=\left(\frac{i}{\hbar}G'(x)B(x)+B'(x)\right)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}X(x) &= \frac{i}{\hbar}G'(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}\left(\frac{i}{\hbar}G'(x)B(x)+B'(x)\right)\\ &\quad+\left(\frac{i}{\hbar}G''(x)B(x)+\frac{i}{\hbar}G'(x)B'(x)+B''(x)\right)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\hbar^2}G'(x)^2B(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} + \frac{i}{\hbar}G'(x)B'(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} + \frac{i}{\hbar}G''(x)B(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}$$
$$+ \frac{i}{\hbar}G'(x)B'(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} + B''(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}$$

$$= -\frac{1}{\hbar^2}G'(x)^2B(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} + \frac{2i}{\hbar}G'(x)B'(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}$$
$$+ \frac{i}{\hbar}G''(x)B(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} + B''(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x) = \left(-\frac{1}{\hbar^2}G'(x)^2B(x) + \frac{2i}{\hbar}G'(x)B'(x) + \frac{i}{\hbar}G''(x)B(x) + B''(x)\right)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} \qquad (3.1.3)$$

แทนสมการ (3.1.2) และ (3.1.3) ในสมการ (3.1.1)

$$\left(-\frac{1}{\hbar^2}G'(x)^2B(x) + \frac{2i}{\hbar}G'(x)B'(x) + \frac{i}{\hbar}G''(x)B(x) + B''(x)\right)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} = -\frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]B(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}$$

พิจารณาโดยการเทียบส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน

$$-\frac{1}{\hbar^2}G'(x)^2B(x) + B''(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]B(x)$$

$$-\frac{1}{\hbar^2}G'(x)^2B(x) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]B(x) = -B''(x)$$

$$-G'(x)^2B(x) + 2m[E - V(x)]B(x) = -\hbar^2B''(x)$$

$$-G'(x)^2 + 2m[E - V(x)] = -\hbar^2\frac{B''(x)}{B(x)}$$

$$G'(x)^2 = 2m[E - V(x)] + \hbar^2\frac{B''(x)}{B(x)} \qquad (3.1.4)$$

พิจารณาโดยการเทียบส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน

$$\frac{2}{\hbar}G'(x)B'(x) + \frac{1}{\hbar}G''(x)B(x) = 0$$

$$\frac{1}{\hbar}G''(x)B(x) = -\frac{2}{\hbar}G'(x)B'(x)$$

$$G''(x)B(x) = -2G'(x)B'(x)$$

คูณ $B(x)$ ตลอดทั้งสมการ

$$G''(x)B(x)^2 = -2G'(x)B'(x)B(x)$$

$$G''(x)B(x)^2 + 2G'(x)B'(x)B(x) = 0$$

$$(B(x)^2 G'(x))' = 0$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$B(x)^2 G'(x) = C$$

$$B(x) = \frac{S}{\sqrt{|G'(x)|}} \quad (3.1.5)$$

โดยที่ $S = \sqrt{C}$ และ $S$ เป็นค่าคงตัว

ทำการประมาณสมการ (3.1.4) ให้

$$\frac{B''(x)}{B(x)} \ll \frac{G'(x)^2}{\hbar^2}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$G'(x)^2 = 2m[E - V(x)]$$

จากสมการ (2.1.22)

$$p(x) = \sqrt{2m[E - V(x)]}$$

ดังนั้น

$$G'(x)^2 = p(x)^2$$

$$G'(x) = \pm p(x)$$

$$G(x) = \pm \int p(x)dx \quad (3.1.6)$$

แทนสมการ (3.1.5) และ (3.1.6) ในสมการ (3.1.2)

จะได้ว่าผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติโดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$X(x) = \frac{S}{\sqrt{|G'(x)|}} e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx}$$

$$= \frac{S}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx}$$

จากสมการ (3.1.1) ให้

$$k^2(x) = \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)] = \frac{G'(x)^2}{\hbar^2} = \frac{p(x)^2}{\hbar^2}$$

ดังนั้นสรุปได้ว่าผลเฉลยคือ

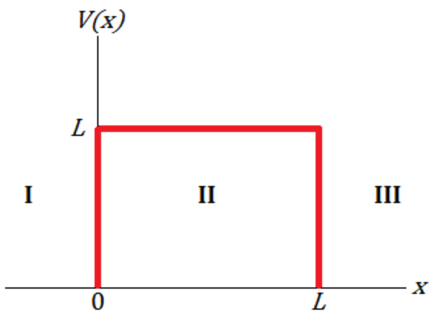
$$X(x) \approx \frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}} e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int \hbar k(x)dx} = \frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}} e^{\pm i\int k(x)dx} \qquad (3.1.7)$$

โดยที่ $S$ เป็นค่าคงตัว

ผลเฉลยที่ได้สามารถใช้ในการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน โดยพลังงานศักย์ที่จะศึกษาเพื่อหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ ได้แก่

1. พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส

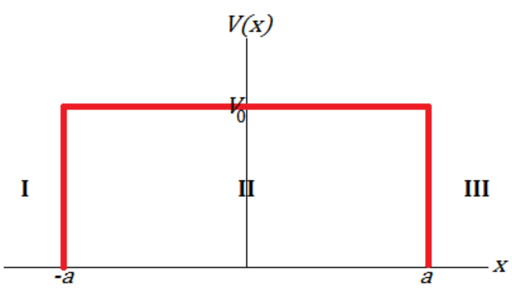
$$V(x) = \begin{cases} L, & 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{L} \\ 0, & x < 0, x > L \end{cases}$$




**ภาพที่ 3.1** พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส

2. พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า

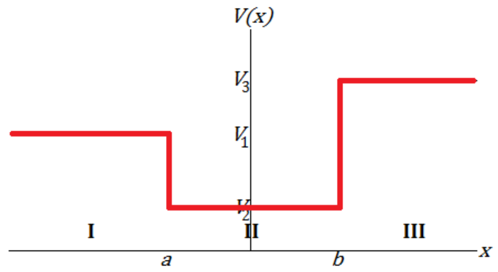
$$V(x) = \begin{cases} V_0, & |x| \le a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$




**ภาพที่ 3.2** พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า

3. พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร

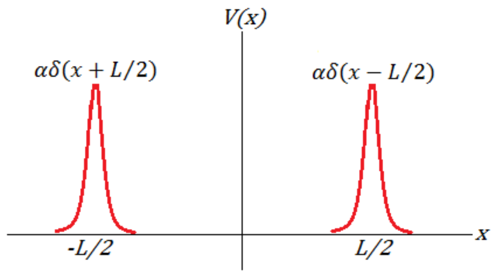
$$V(x) = \begin{cases} V_1, & x < a \\ V_2, & a < x < b \\ V_3, & x > b \end{cases}$$




**ภาพที่ 3.3** พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร

4. พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน

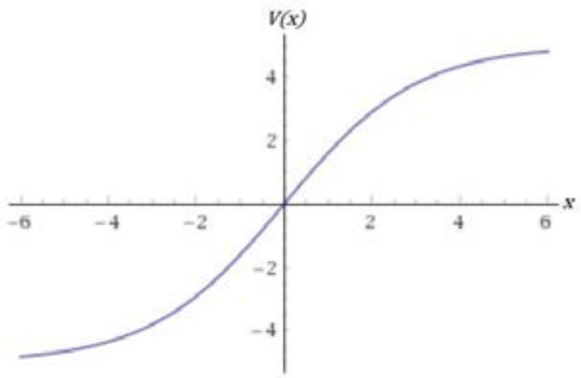
$$V(x) = \alpha\{\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2)\}$$




**ภาพที่ 3.4** พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน

5. พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

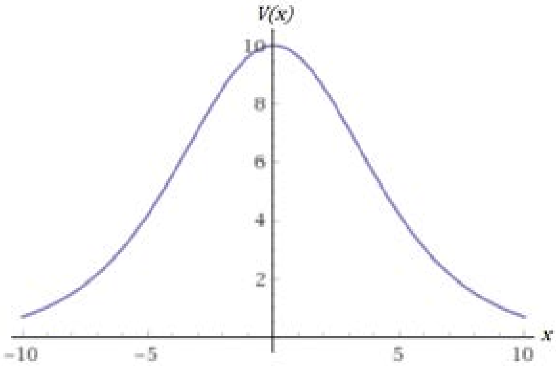
$$V(x) = V_{+\infty}\, tanh(x/L)$$




**ภาพที่ 3.5** พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ เมื่อ $V_{+\infty} = 5$ และ $L = 3$

6. พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง

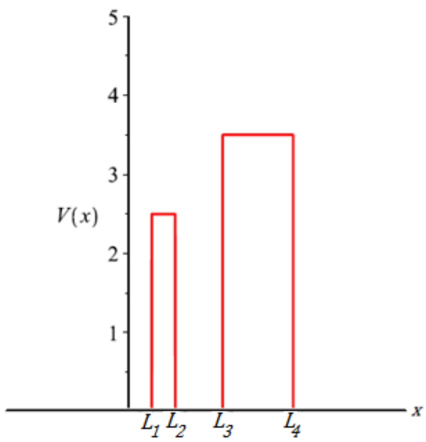
$$V(x) = V_e\, sech^2(x/L)$$




**ภาพที่ 3.6** พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง เมื่อ $V_e = 10$ และ $L = 5$

7. พลังงานศักย์แบบผสม

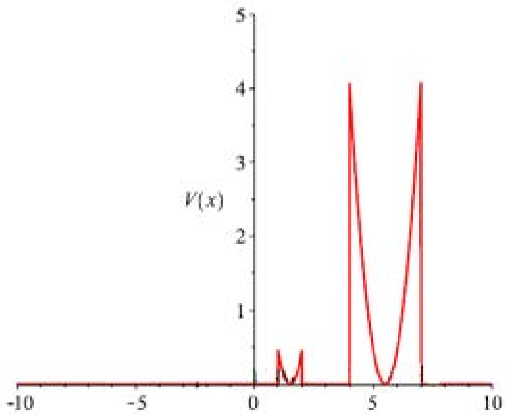
$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < L_1 \\ V_1, & L_1 \le x \le L_2 \\ 0, & L_2 < x < L_3 \\ V_2, & L_3 \le x \le L_4 \\ 0, & x > L_4 \end{cases}$$




**ภาพที่ 3.7** พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า $L_1 = 1,\ L_2 = 2,\ L_3 = 4$ และ $L_4 = 7$

(เพชรอาภา, ไตรทศ และกุลภัทร, 2562)

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<L_1\\ (1/2)ab^2(x-c)^2, & L_1\le x\le L_2\\ 0, & L_2<x<L_3\\ (1/2)ab^2(x-d)^2, & L_3\le x\le L_4\\ 0, & x>L_4\end{cases}$$




**ภาพที่** 3.8 พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก เมื่อ $L_1=1,\ L_2=2,\ L_3=4,$ $L_4=7,$
$a=3,\ b=1.1,\ c=1.5$ และ $d=5.5$ (เพชรอาภา, ไตรทศ และกุลภัทร, 2562)

ใน**กรณีที่** $\boldsymbol{E<V}$ โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีจะสามารถหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนได้ดังนี้

จาก (3.1.7) ผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$X(x)\approx\frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}}e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int \hbar k(x)dx}=\frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}}e^{\pm i\int k(x)dx}=\frac{U}{\sqrt{k(x)}}e^{\pm i\int k(x)dx}$$

โดยที่ $U=\frac{S}{\sqrt{\hbar}}$ เป็นค่าคงตัว และ $k^2(x)=\frac{2m}{\hbar^2}(V(x)-E)$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$X_{\mathrm{I}}(x)=\frac{A}{\sqrt{k(x)}}exp\left[i\int_a^x k(x)dx\right]+\frac{B}{\sqrt{k(x)}}exp\left[-i\int_a^x k(x)dx\right]$$

$$X_{\mathrm{II}}(x)=\frac{C}{\sqrt{k(x)}}exp\left[\int_a^x k(x)dx\right]+\frac{D}{\sqrt{k(x)}}exp\left[-\int_a^x k(x)dx\right]$$

$$X_{\mathrm{III}}(x) = \frac{F}{\sqrt{k(x)}} exp\left[i\int_b^x k(x)dx\right]$$

และเงื่อนไขขอบเขตคือ

$$X_{\mathrm{I}}(a) = X_{\mathrm{II}}(a)$$

$$\frac{A}{\sqrt{k(a)}} + \frac{B}{\sqrt{k(a)}} = \frac{C}{\sqrt{k(a)}} + \frac{D}{\sqrt{k(a)}}$$

$$A + B = C + D \qquad (3.1.8)$$

$$X_{\mathrm{I}}'(a) = X_{\mathrm{II}}'(a)$$

$$\frac{\sqrt{k(a)}\big(Aik(a) - Bik(a)\big) + (A+B)\frac{1}{2\sqrt{k(a)}}}{k(a)} = \frac{\sqrt{k(a)}\big(Ck(a) - Dk(a)\big) + (C+D)\frac{1}{2\sqrt{k(a)}}}{k(a)}$$

$$2k^2(a)(Ai - Bi) + (A+B) = 2k^2(a)(C - D) + (C + D) \qquad (3.1.9)$$

$$X_{\mathrm{II}}(b) = X_{\mathrm{III}}(b)$$

$$\frac{C}{\sqrt{k(b)}} exp\left[\int_a^b k(x)dx\right] + \frac{D}{\sqrt{k(b)}} exp\left[-\int_a^b k(x)dx\right] = \frac{F}{\sqrt{k(b)}}$$

ให้ $\theta = \int_a^b k(x)dx$ จะได้ว่า

$$Cexp(\theta) + Dexp(-\theta) = F \qquad (3.1.10)$$

$$X_{\mathrm{II}}'(b) = X_{\mathrm{III}}'(b)$$

$$\frac{\sqrt{k(b)}\big(Ck(b)exp(\theta) - Dk(b)exp(-\theta)\big) + \big(Cexp(\theta) + Dexp(-\theta)\big)(\frac{1}{2\sqrt{k(b)}}))}{k(b)}$$

$$= \frac{\sqrt{k(b)}Fik(b) + \frac{F}{2\sqrt{k(b)}}}{k(b)}$$

$$2k^2(b)\big(cexp(\theta) - Dexp(-\theta)\big) + \big(Cexp(\theta) + Dexp(-\theta)\big) = 2k^2(b)Fi + F \qquad (3.1.11)$$

(3.1.11) − (3.1.10);

$$2k^2(b)\big(Cexp(\theta) - Dexp(-\theta)\big) = 2k^2(b)Fi$$

$$Cexp(\theta) - Dexp(-\theta) = Fi \qquad (3.1.12)$$

(3.1.10) + (3.1.12);

$$2Cexp(\theta) = F + Fi$$

$$C = \frac{F + Fi}{2exp(\theta)}$$

(3.1.10) − (3.1.12);

$$2Dexp(-\theta) = F - Fi$$

$$D = \frac{F - Fi}{2exp(-\theta)}$$

(3.1.9) − (3.1.8);

$$2k^2(a)(Ai - Bi) = 2k^2(a)(C - D)$$

$$Ai - Bi = C - D \qquad (3.1.13)$$

แทน $C$ และ $D$ ในสมการ (3.1.8) และ (3.1.13)

$$A + B = \frac{F + Fi}{2exp(\theta)} + \frac{F - Fi}{2exp(-\theta)} \qquad (3.1.14)$$

$$Ai - Bi = \frac{F + Fi}{2exp(\theta)} - \frac{F - Fi}{2exp(-\theta)} \qquad (3.1.15)$$

$i \times$ (3.1.14);

$$Ai + Bi = \frac{Fi - F}{2exp(\theta)} + \frac{Fi + F}{2exp(-\theta)} \qquad (3.1.16)$$

(3.1.15) + (3.1.16);

$$2Ai = \frac{2Fi}{2exp(\theta)} + \frac{2Fi}{2exp(-\theta)}$$

$$A = \frac{F}{2exp(\theta)} + \frac{F}{2exp(-\theta)}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2exp(\theta)} + \frac{1}{2exp(-\theta)}\right)}$$

เนื่องจาก $\frac{1}{2exp(\theta)}$ คือค่าของ $C$ และจากผลเฉลย

$$X_{\mathrm{II}}(x) = \frac{C}{\sqrt{k(x)}} exp\left[\int_a^x k(x)dx\right] + \frac{D}{\sqrt{k(x)}} exp\left[-\int_a^x k(x)dx\right]$$

ในทางฟิสิกส์หากเปรียบเทียบกับค่าความเข้มแสง ค่าที่ตกกระทบต้องมีค่ามากกว่าค่าความเข้มแสงที่ส่งผ่านหรือสะท้อนกลับ ในขณะที่พจน์ของ $C$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง เมื่อ $x$ มีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งขัดแย้ง ดังนั้นเพื่อให้มีความหมายทางฟิสิกส์จึงสมารถตัดพจน์ $C$ ได้

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{F}{A} = 2exp(-\theta)$$

เนื่องจาก $\theta = \int_a^b k(x)dx$ ดังนั้น

$$\frac{F}{A} = 2exp\left(-\int_a^b k(x)dx\right)$$

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = 4exp\left(-2\int_a^b k(x)dx\right)$$

ทำการประมาณให้ $T \approx e^{-2\int_a^b k(x)dx}$ เนื่องจากเป็นวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ค่าที่ได้จะเป็นค่าประมาณ

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 \approx exp\left(-2\int_a^b k(x)dx\right) \tag{3.1.17}$$

ดังนั้นจะได้ว่า สมการ (3.1.17) เป็นค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านที่สามารถหาได้จากสูตรโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ซึ่งจะนำสูตรนี้ไปใช้ในการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

## 3.2 วิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2x2 มิติ

วิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2x2 มิติ พิจารณาจากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ $r$ และ $t$ โดยใช้ทฤษฎีการกระเจิงแสง และนำไปสู่การคำนวณหาความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคที่ส่งผ่านและสะท้อนกลับ

จากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}X(x) + V(x)X(x) = EX(x)$$

จัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}X(x) = EX(x) - V(x)X(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}[EX(x) - V(x)X(x)]$$

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]X(x) = 0$$

ให้

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]$$

จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x) + k^2X(x) = 0$$

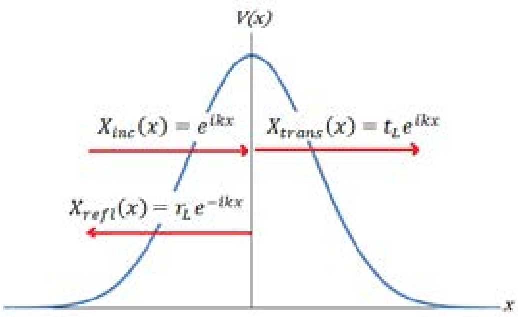
ดังนั้นผลเฉลยเป็น $$X(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

เพื่อง่ายต่อการคำนวณ จึงจะพิจารณาที่ $V(x) = 0$ ดังนั้นจะได้ว่าผลเฉลย คือ

$$X_L(x) = A_Le^{ikx} + B_Le^{-ikx}$$

$$X_R(x) = A_Re^{ikx} + B_Re^{-ikx}$$

<u>พิจารณาการเคลื่อนที่จากทางฝั่งซ้าย</u>




**ภาพที่ 3.9** ภาพแสดงการกระเจิงของอนุภาคจากการเคลื่อนที่จากทางฝั่งซ้าย

ดังนั้น ผลเฉลยของฝั่งซ้ายคือ

$$X_L(x) = e^{ikx} + r_Le^{-ikx}$$

และผลเฉลยของฝั่งขวาคือ

$$X_R(x) = t_Le^{ikx}$$

โดยที่ $r_L$ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนกลับของการเคลื่อนที่จากฝั่งซ้าย และ $t_{\mathrm{L}}$ คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของการเคลื่อนที่จากฝั่งซ้าย

เนื่องจาก สมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ดังนั้น ความสัมพันธ์เชิงเส้นของสัมประสิทธิ์ $r_{\mathrm{L}}$ และ $t_{\mathrm{L}}$ จึงสามารถเขียนอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} t_L \\ 0 \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} 1 \\ r_L \end{bmatrix} \tag{3.2.1}$$

เมื่อเมทริกซ์ $N$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $2 \times 2$ มิติ

เนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์เป็นจริง ดังนั้น ผลเฉลยสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนของสมการนี้ก็เป็นผลเฉลยเช่นเดียวกัน

ผลเฉลยสังยุคของกรณีนี้คือ

$$X_L^*(x) = e^{-ikx} + r_L^* e^{ikx}$$

$$X_R^*(x) = t_L^* e^{-ikx}$$

โดยที่ $r_L^*$ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนกลับของการเคลื่อนที่จากฝั่งซ้าย และ $t_L^*$ คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของการเคลื่อนที่จากฝั่งซ้าย

ความสัมพันธ์เชิงเส้นของสัมประสิทธิ์ $r_L^*$ และ $t_L^*$ จึงสามารถเขียนอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 0 \\ t_L^* \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} r_L^* \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.2}$$

เมื่อเมทริกซ์ $N$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $2 \times 2$ มิติ

จากสมการ (3.2.1) และ (3.2.2) จะได้ว่า

$$N = \begin{bmatrix} t_L & 0 \\ 0 & t_L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_L^* \\ r_L & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$N = \frac{1}{1 - r_L r_L^*} \begin{bmatrix} t_L & 0 \\ 0 & t_L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -r_L^* \\ -r_L & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{1}{1 - r_L r_L^*} \begin{bmatrix} t_L & -t_L r_L^* \\ -t_L^* r_L & t_L^* \end{bmatrix} \tag{3.2.3}$$

เนื่องจากความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคนั้นสามารถหาได้จากฟังก์ชันคลื่น

โดยที่ $|X(x)|^2 = X^*(x)X(x)$ ดังนั้น สมการชเรอดิงเงอร์ก็มีความเกี่ยวข้องกับกระแสความหนาแน่น ($\mathfrak{J}$) นั่นคือ

$$\mathfrak{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left(X^*(x)\frac{dX(x)}{dx} - \frac{dX^*(x)}{dx}X(x)\right)$$

$$\mathfrak{J} = \frac{\hbar}{2mi}\Big(\big(e^{-ikx} + r_L^* e^{ikx}\big)\big(ike^{ikx} - r_L ike^{-ikx}\big) + \big(ike^{-ikx} - r_L^* ike^{ikx}\big)\big(e^{ikx} + r_L e^{-ikx}\big)\Big)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}(ik - ikr_L e^{-2ikx} + ikr_L^* e^{2ikx} - r_L r_L^* ik + ik + ikr_L e^{-2ikx} - ik\, r_L^* e^{2ikx} - r_L r_L^* ik)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}(2ik - 2ik|r_L|^2)$$

$$= \tfrac{\hbar}{2mi} 2ik(1 - |r_L|^2) = \tfrac{\hbar k}{m}(1 - |r_L|^2) \qquad (3.2.4)$$

และในทำนองเดียวกัน

$$\mathfrak{J} = \frac{\hbar}{2mi}(X^*(x)\frac{dX(x)}{dx} - \frac{dX^*(x)}{dx}X(x))$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}(t_L^* e^{-ikx}\big(ikt_L e^{ikx}\big) + ikt_L^* e^{-ikx}(t_L e^{ikx}))$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}(2ikt_L^* t_L) \quad = \frac{\hbar k}{m}|t_L|^2 \qquad (3.2.5)$$

จากสมการ (3.2.4) และ (3.2.5) จะได้ว่า

$$\frac{\hbar k}{m}(1 - |r_L|^2) = \frac{\hbar k}{m}|t_L|^2$$

$$|t_L|^2 + |r_L|^2 = 1$$

จากสมการ (3.2.3) จะได้ว่า

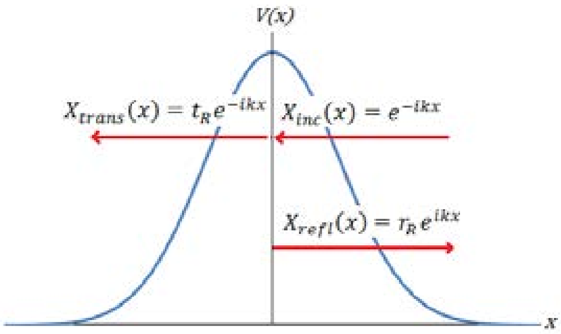
$$N = \frac{1}{1 - r_L r_L^*}\begin{bmatrix} t_L & -t_L r_L^* \\ -t_L^* r_L & t_L^* \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{1}{1 - |r_L|^2}\begin{bmatrix} t_L & -t_L r_L^* \\ -t_L^* r_L & t_L^* \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{1}{|t_L|^2}\begin{bmatrix} t_L & -t_L r_L^* \\ -t_L^* r_L & t_L^* \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_L^*} & -\frac{r_L^*}{t_L^*} \\ -\frac{r_L}{t_L} & \frac{1}{t_L} \end{bmatrix} \tag{3.2.6}$$

<u>พิจารณาการเคลื่อนที่จากฝั่งขวา</u>




**ภาพที่ 3.10** ภาพแสดงการกระเจิงของอนุภาคจากการเคลื่อนที่จากทางฝั่งขวา

ผลเฉลยของฝั่งซ้าย คือ

$$X_L(x) = t_R e^{-ikx}$$

และผลเฉลยของฝั่งขวา คือ

$$X_R(x) = e^{-ikx} + r_R e^{ikx}$$

โดยที่ $r_R$ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนของการเคลื่อนที่จากฝั่งขวา และ $t_R$ คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของการเคลื่อนที่จากฝั่งขวา

เนื่องจาก สมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ดังนั้น ความสัมพันธ์เชิงเส้นของสัมประสิทธิ์ $r_R$ และ $t_R$ จึงสามารถเขียนอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$N \begin{bmatrix} 0 \\ t_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_R \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.7}$$

เมื่อเมทริกซ์ $N$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $2 \times 2$ มิติ

เนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์เป็นจริง ดังนั้น ผลเฉลยสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนของสมการนี้ก็เป็นผลเฉลยเช่นเดียวกัน

ผลเฉลยสังยุคของกรณีนี้คือ

$$X_L{}^*(x) = t_R^* e^{ikx}$$

$$X_R{}^*(x) = e^{ikx} + r_R^* e^{-ikx}$$

โดยที่ $r_R^*$ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนของการเคลื่อนที่จากฝั่งขวา และ $t_R^*$ คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของการเคลื่อนที่จากฝั่งขวา

ความสัมพันธ์เชิงเส้นของสัมประสิทธิ์ $r_R^*$ และ $t_R^*$ จึงสามารถเขียนอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$N \begin{bmatrix} t_R^* \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ r_R^* \end{bmatrix} \tag{3.2.8}$$

เมื่อเมทริกซ์ $N$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $2 \times 2$ มิติ

จากสมการ (3.2.7) และ (3.2.8) จะได้ว่า

$$N = \begin{bmatrix} 1 & r_R \\ r_R^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_R^* & 0 \\ 0 & t_R \end{bmatrix}^{-1}$$

$$N = \frac{1}{t_R t_R^*} \begin{bmatrix} 1 & r_R \\ r_R^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_R & 0 \\ 0 & t_R^* \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{1}{t_R t_R^*} \begin{bmatrix} t_R & r_R t_R^* \\ r_R^* t_R & t_R^* \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_R^*} & \frac{r_R}{t_R} \\ \frac{r_R^*}{t_R^*} & \frac{1}{t_R} \end{bmatrix} \tag{3.2.9}$$

จากสมการ (3.2.6) และ (3.2.9)

$$N = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_L^*} & -\frac{r_L^*}{t_L^*} \\ -\frac{r_L}{t_L} & \frac{1}{t_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_R^*} & \frac{r_R}{t_R} \\ \frac{r_R^*}{t_R^*} & \frac{1}{t_R} \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ว่า $t_L = t_R$ และ $-r_L = r_R$

แสดงให้เห็นว่า การเคลื่อนที่จากฝั่งซ้ายหรือฝั่งขวาจะมีขนาดของค่าสัมประสิทธิ์ในการส่งผ่านและการสะท้อนเท่ากัน

ดังนั้น จึงให้ $|t_L|^2 = |t_R|^2 = T$ โดยที่ $T$ คือ ความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคที่ส่งผ่าน และ

$|r_L|^2 = |r_R|^2 = R$ โดยที่ $R$ คือ ความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคที่สะท้อนกลับ

เนื่องจาก $|t_L|^2 + |r_L|^2 = 1$ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $T + R = 1$

ความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคนั้นสามารถหาได้จากฟังก์ชันคลื่น

โดยที่ $|X(x)|^2 = X^*(x)X(x)$ ดังนั้น สมการชเรอดิงเงอร์ก็มีความเกี่ยวข้องกับกระแสความหนาแน่น นั่นคือ

$$\mathfrak{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left(X^*(x)\frac{dX(x)}{dx} - X(x)\frac{dX^*(x)}{dx}\right)$$

$$X_{inc}(x) = Ae^{ikx}$$

$$\mathfrak{J}_{inc} = \frac{\hbar}{2mi}(A^*e^{-ikx}(ikAe^{ikx}) - Ae^{ikx}(-ikA^*e^{-ikx}))$$

$$\mathfrak{J}_{inc} = \frac{\hbar}{2mi}(ikA^*A + ikAA^*)$$

$$\mathfrak{J}_{inc} = \frac{\hbar}{2mi}(2ikA^*A) = \frac{\hbar}{m}\left(k|A|^2\right)$$

$$X_{refl}(x) = Be^{-ikx}$$

$$\mathfrak{J}_{refl} = \frac{\hbar}{2mi}(B^*e^{ikx}(-ikBe^{-ikx}) - Be^{-ikx}(ikB^*e^{ikx}))$$

$$\mathfrak{J}_{refl} = \frac{\hbar}{2mi}(-ikB^*B - ikBB^*)$$

$$\mathfrak{J}_{refl} = \frac{\hbar}{2mi}(-2ikB^*B) = -\frac{\hbar}{m}\left(k|B|^2\right)$$

$$X_{trans}(x) = Fe^{ikx}$$

$$\mathfrak{J}_{trans} = \frac{\hbar}{2mi}(F^*e^{-ikx}(ikFe^{ikx}) - Fe^{ikx}(-ikF^*e^{-ikx}))$$

$$\mathfrak{J}_{trans} = \frac{\hbar}{2mi}(ikF^*F + ikFF^*)$$

$$\mathfrak{J}_{trans} = \frac{\hbar}{2mi}(2ikF^*F) = \frac{\hbar}{m}\left(k|F|^2\right)$$

$$R = \left|\frac{\mathfrak{J}_{refl}}{\mathfrak{J}_{inc}}\right| = \left|\frac{-\frac{\hbar}{m}(k|B|^2)}{\frac{\hbar}{m}(k|A|^2)}\right| = \left|\frac{B}{A}\right|^2 \qquad (3.2.10)$$

$$T = \left|\frac{\mathfrak{J}_{trans}}{\mathfrak{J}_{inc}}\right| = \left|\frac{\frac{\hbar}{m}(k|F|^2)}{\frac{\hbar}{m}(k|A|^2)}\right| = \left|\frac{F}{A}\right|^2 \qquad (3.2.11)$$

โดยที่ สมการ (3.2.10) และ (3.2.11) คือ ความน่าจะเป็นในการสะท้อนและการส่งผ่าน ตามลำดับ และยังสามารถหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านได้ดังต่อไปนี้

$$T \geq \operatorname{sech}^2[\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta dx]$$

เมื่อ

$$\vartheta(x) = \frac{\sqrt{(X''(x))^2 + [k^2(x) - ((X'(x))^2]^2}}{2|X'(x)|}$$

โดยที่เป็นไปตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. $X'(x) \neq 0$ แล้ว $X'(x) \to k_{\pm\infty}$ เมื่อ $x \to \pm\infty$

$$k_{\pm\infty} = \frac{\sqrt{2m[E - V_{\pm\infty}]}}{\hbar};\ V_{\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} V(x)$$

2. $X(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง

3. การเลือก $X'(x)$ เป็นค่าคงที่ได้ต้องอยู่ในช่วง $\pm\infty$ และมีค่าเดียว

ซึ่งวิธีข้างต้นนี้เป็นการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนโดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

จากบทที่ 3 วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์ เราได้ทำการศึกษาหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ซึ่งผลเฉลยที่ได้สามารถใช้ในการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน โดยพลังงานศักย์ที่จะศึกษาเพื่อหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ ได้แก่ พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง และพลังงานศักย์แบบผสม ได้แก่ พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า และพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก และใช้วิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ ในการหาความสัมพันธ์ของค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน และเพื่อง่ายต่อการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน ทั้งวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ สามารถใช้สูตรในการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน แทนการใช้ผลเฉลยในการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนได้เช่นเดียวกัน

# บทที่ 4

# ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

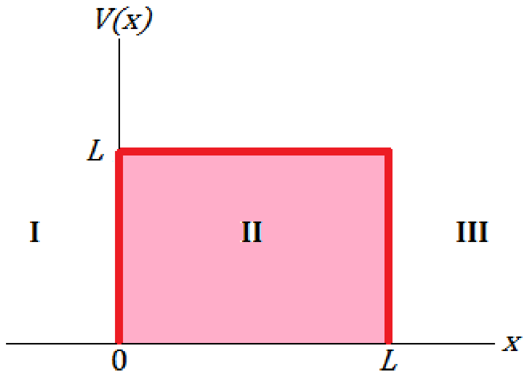
ในบทนี้จะทำการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน โดยใช้วิธีผลเฉลยแม่นตรง วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ ซึ่งพลังงานศักย์ที่ศึกษาเพื่อหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนได้แก่ พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง และพลังงานศักย์แบบผสม ได้แก่ พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า และพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก

## 4.1 วิธีผลเฉลยแม่นตรง

วิธีผลเฉลยแม่นตรง เป็นวิธีที่ใช้การหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์เพื่อนำไปหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน โดยผลเฉลยที่ได้จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันคลื่น และฟังก์ชันคลื่นสามารถบอกความหนาแน่นของอนุภาคที่พบหรือความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนได้

### 4.1.1 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส

$$V(x) = \begin{cases} L, & 0 \le x \le L \\ 0, & x < 0, x > L \end{cases}$$




**ภาพที่ 4.1** พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส

**กรณี $\boldsymbol{E < V_o}$**

พิจารณาจากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + V(x)X(x) = EX(x)$$

$x < 0$ ;

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = EX(x)$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{-2m}{\hbar^2}EX(x)$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}EX(x) = 0$$

ให้ $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

จะได้ว่า

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k^2X(x) = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยจะได้ว่า

$$X_{\mathrm{I}}(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$0 \leq x \leq L$;

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + LX(x) = EX(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + (L - E)X(x) = 0$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(L - E)X(x)$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(L - E)X(x) = 0$$

ให้ $k_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(L - E)$

จะได้ว่า

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} - k_0^2X(x) = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยจะได้ว่า

$$X_{\mathrm{II}}(x) = Ce^{k_0x} + De^{-k_0x}$$

ในทำนองเดียวกัน

$x > L$;  จะได้ว่า

$$X_{\mathrm{III}}(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

เพื่อให้มีความหมายทางฟิสิกส์และสอดคล้องกับการทดลองจึงสามารถตัดพจน์ที่สองของผลเฉลยได้

ดังนั้นผลเฉลยจะได้ว่า

$$X_{\mathrm{III}}(x) = Fe^{ikx}$$

จากรูปที่ 4.1 จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันคลื่นมีความต่อเนื่องที่รอยต่อและเมื่ออนุพันธ์ยังคงมีความต่อเนื่อง

จะได้ว่าเงื่อนไขขอบเขต คือ

$$X_{\mathrm{I}}(0) = X_{\mathrm{II}}(0)$$

$$A + B = C + D \qquad (4.1.1.1)$$

$$\mathrm{X}'_{\mathrm{I}}(0) = X'_{\mathrm{II}}(0)$$

$$ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx} = k_0Ce^{k_0x} - k_0De^{-k_0x}$$

$$ikA - ikB = k_0C - k_0D \qquad (4.1.1.2)$$

$$X_{\mathrm{II}}(L) = X_{\mathrm{III}}(L)$$

$$Ce^{k_0L} + De^{-k_0L} = Fe^{ikL} \qquad (4.1.1.3)$$

$$X'_{\mathrm{II}}(L) = X'_{\mathrm{III}}(L)$$

$$k_0Ce^{k_0L} - k_0De^{-k_0L} = ikFe^{ikL} \qquad (4.1.1.4)$$

$k_0 \times (4.1.1.3)$;  $$k_0Ce^{k_0L} + k_0De^{-k_0L} = k_0Fe^{ikL} \qquad (4.1.1.5)$$

$(4.1.1.4) + (4.1.1.5)$;  $$2k_0Ce^{k_0L} = (ik + k_0)Fe^{ikL}$$

แทนค่า $C = \frac{(ik+k_0)Fe^{ikL}}{2k_0e^{k_0L}}$ ใน (4.1.1.3)

จะได้ว่า

$$\frac{(ik+k_0)Fe^{ikL}}{2k_0}+De^{-k_0L}=Fe^{ikL}$$

$$D=\left[1-(\frac{ik+k_0}{2k_0})\right]\frac{Fe^{ikL}}{e^{-k_0L}}$$

$$D=\left[\frac{-ik+k_0}{2k_0}\right]\frac{Fe^{ikL}}{e^{-k_0L}}$$

แทน $C$ และ $D$ ใน (4.1.1.1) และ (4.1.1.2) จะได้ว่า

$$A+B=\left(\frac{ik+k_0}{2k_0}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{k_0L}}+\left(\frac{-ik+k_0}{2k_0}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{-k_0L}} \tag{4.1.1.6}$$

$$ikA-ikB=\left(\frac{ik+k_0}{2}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{k_0L}}-\left(\frac{-ik+k_0}{2}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{-k_0L}} \tag{4.1.1.7}$$

$ik\times$ (4.1.1.6);

$$ikA+ikB=ik\left(\frac{ik+k_0}{2k_0}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{k_0L}}+ik\left(\frac{-ik+k_0}{2k_0}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{-k_0L}} \tag{4.1.1.8}$$

(4.1.1.7) + (4.1.1.8);

$$2ikA=\left(\frac{Fe^{ikL}}{e^{k_0L}}\right)\left[ik\left(\frac{ik+k_0}{2k_0}\right)+\left(\frac{ik+k_0}{2}\right)\right]+\left(\frac{Fe^{ikL}}{e^{-k_0L}}\right)\left[ik\left(\frac{-ik+k_0}{2k_0}\right)-\left(\frac{-ik+k_0}{2}\right)\right]$$

$$A=F\left(\frac{e^{ikL}}{2ike^{k_0L}}\right)\left(\frac{ik+k_0}{2}\right)\left(\frac{ik}{k_0}+1\right)+F\left(\frac{e^{ikL}}{2ike^{-k_0L}}\right)\left(\frac{-ik+k_0}{2}\right)\left(\frac{ik}{k_0}-1\right)$$

$$F=\frac{A}{\left(\frac{e^{ikL}}{2ike^{k_0L}}\right)\left(\frac{ik+k_0}{2}\right)\left(\frac{ik}{k_0}+1\right)+\left(\frac{e^{ikL}}{2ike^{-k_0L}}\right)\left(\frac{-ik+k_0}{2}\right)\left(\frac{ik}{k_0}-1\right)}$$

$$=\frac{A}{\left(\frac{e^{ikL}}{2ike^{k_0L}}\right)\frac{(ik+k_0)^2}{2k_0}+\left(\frac{e^{ikL}}{2ike^{-k_0L}}\right)\left(-\frac{(ik-k_0)^2}{2k_0}\right)}$$

$$=\frac{A}{\left(\frac{e^{ikL}}{2ike^{k_0L}}\right)\left(\frac{-k^2+2ikk_0+k_0^2}{2k_0}\right)+\left(\frac{e^{ikL}}{2ike^{-k_0L}}\right)\left(\frac{k^2+2ikk_0-k_0^2}{2k_0}\right)}$$

$$=\frac{A}{\left(\frac{e^{ikL}}{2ike^{k_0L}}\right)\left(\frac{-k^2+k_0^2}{2k_0}+\frac{2ikk_0}{2k_0}\right)+\left(\frac{e^{ikL}}{2ike^{-k_0L}}\right)\left(\frac{k^2-k_0^2}{2k_0}+\frac{2ikk_0}{2k_0}\right)}$$

$$F = \frac{A}{\frac{2ikk_0}{2k_0}\left(\frac{e^{ikL}}{2ik}\right)\left(\frac{1}{e^{k_0L}} + \frac{1}{e^{-k_0L}}\right) + \left(\frac{k^2 - k_0^2}{2k_0}\right)\left(\frac{e^{ikL}}{2ik}\right)\left(-\frac{1}{e^{k_0L}} + \frac{1}{e^{-k_0L}}\right)}$$

$$F = \frac{A}{\left(\frac{e^{ikL}}{2}\right)(e^{-k_0L} + e^{k_0L}) + \left(\frac{k^2 - k_0^2}{2k_0}\right)\left(\frac{e^{ikL}}{2ik}\right)(-e^{-k_0L} + e^{k_0L})}$$

$$F = \frac{A}{e^{ikL}[\cosh k_0\mathrm{L} + \left(\frac{k^2 - k_0^2}{k_0}\right)\left(\frac{1}{2ik}\right)\sinh k_0\mathrm{L}]}$$

$$F = \frac{2ikk_0e^{-ikL}A}{[2ik\,k_0\cosh k_0\mathrm{L} + (k^2 - k_0^2)\sinh k_0\mathrm{L}]}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{2ikk_0e^{-ikL}}{[2ik\,k_0\cosh k_0\mathrm{L} + (k^2 - k_0^2)\sinh k_0\mathrm{L}]}$$

จาก (3.2.11) จะได้ว่า

$$T = \left|\frac{\mathfrak{I}_{trans}}{\mathfrak{I}_{inc}}\right| = \left|\frac{\frac{\hbar}{m}(k|F|^2)}{\frac{\hbar}{m}(k|A|^2)}\right| = \left|\frac{F}{A}\right|^2$$

$$= \frac{4k^2k_0^2}{[4k^2\,k_0^2\cosh^2 k_0\mathrm{L} - 4k^2k_0^2\sinh^2 k_0\mathrm{L} + 4k^2k_0^2\sinh^2 k_0\mathrm{L} + (k^2 - k_0^2)^2\sinh^2 k_0\mathrm{L}}$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง คือ

$$T = \frac{4k^2k_0^2}{[4k^2k_0^2 + (k^2 + k_0^2)^2\sinh^2 k_0\mathrm{L}]} \qquad (4.1.1.8.a)$$

$(4.1.1.8) - (4.1.1.7);$

$$2ikB = \left(\frac{Fe^{ikL}}{e^{k_0L}}\right)\left(\frac{ik + k_0}{2}\right)\left(\frac{ik}{k_0} - 1\right) + \left(\frac{Fe^{ikL}}{e^{-k_0L}}\right)\left(\frac{-ik + k_0}{2}\right)\left(\frac{ik}{k_0} + 1\right)$$

$$B = \frac{Fe^{ikL}}{2ik}\left[\left(\frac{1}{e^{k_0L}}\right)\left(\frac{ik + k_0}{2}\right)\left(\frac{ik - k_0}{k_0}\right) + \left(\frac{1}{e^{-k_0L}}\right)\left(\frac{-ik + k_0}{2}\right)\left(\frac{ik + k_0}{k_0}\right)\right]$$

$$B = \frac{Fe^{ikL}}{2ik}\left[\left(\frac{1}{e^{k_0L}}\right)\frac{(-k^2 - k_0^2)}{2k_0} + \left(\frac{1}{e^{-k_0L}}\right)\frac{(k^2 + k_0^2)}{2k_0}\right]$$

$$B = \frac{Fe^{ikL}}{2ik}\frac{(k^2 + k_0^2)}{2k_0}\left[\left(-\frac{1}{e^{k_0L}}\right) + \left(\frac{1}{e^{-k_0L}}\right)\right]$$

$$B = \frac{Fe^{ikL}}{2ik}\frac{(k^2 + k_0^2)}{2k_0}[-e^{-k_0L} + e^{k_0L}]$$

$$B=\frac{Fe^{ikL}}{2ik}\frac{(k^2+k_0^2)}{k_0}\sinh k_0L$$

$$B=\frac{A(k^2+k_0^2)\sinh k_0L}{[2ik\,k_0\cosh k_0\mathrm{L}+(k^2-k_0^2)\sinh k_0\mathrm{L}]}$$

$$\frac{B}{A}=\frac{(k^2+k_0^2)\sinh k_0L}{[2ik\,k_0\cosh k_0\mathrm{L}+(k^2-k_0^2)\sinh k_0\mathrm{L}]}$$

จาก (3.2.10) จะได้ว่า

$$R=\left|\frac{\Im_{refl}}{\Im_{inc}}\right|=\left|\frac{-\frac{\hbar}{m}(k|B|^2)}{\frac{\hbar}{m}(k|A|^2)}\right|=\left|\frac{B}{A}\right|^2=\frac{(k^2+k_0^2)^2\sinh^2 k_0\mathrm{L}}{[4k^2\,k_0^2\cosh^2 k_0\mathrm{L}+(k^2-k_0^2)^2\sinh^2 k_0\mathrm{L}]}$$

$$=\frac{(k^2+k_0^2)^2\sinh^2 k_0\mathrm{L}}{[4k^2\,k_0^2\cosh^2 k_0\mathrm{L}-4k^2k_0^2\sinh^2 k_0\mathrm{L}+4k^2k_0^2\sinh^2 k_0\mathrm{L}+(k^2-k_0^2)^2\sinh^2 k_0\mathrm{L}]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง คือ

$$R=\frac{(k^2+k_0^2)^2\sinh^2 k_0\mathrm{L}}{[4k^2k_0^2+(k^2+k_0^2)^2\sinh^2 k_0\mathrm{L}]} \qquad (4.1.1.8.b)$$

**กรณี $\boldsymbol{E>V_0}$**

ทำนองเดียวกันกับกรณี $E<V_0$

ดังนั้นผลเฉลยจะได้ว่า

$$X_{\mathrm{I}}(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$$

$$X_{\mathrm{II}}(x)=Ce^{ik_1x}+De^{-ik_1x}$$

$$X_{\mathrm{III}}(x)=Fe^{ikx}$$

โดยที่ $k_1^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-L)$

จะได้ว่าเงื่อนไขขอบเขต คือ

$$A+B=C+D \qquad (4.1.1.9)$$

$$kA-kB=k_1C-k_1D \qquad (4.1.1.10)$$

$$Ce^{ik_1L}+De^{-ik_1L}=Fe^{ikL} \qquad (4.1.1.11)$$

$$k_1Ce^{ik_1L} - k_1De^{-ik_1L} = kFe^{ikL} \quad (4.1.1.12)$$

$k_1 \times (4.1.1.11)$; $$k_1Ce^{ik_1L} + k_1De^{-ik_1L} = k_1Fe^{ikL} \quad (4.1.1.13)$$

$(4.1.1.12) + (4.1.1.13)$; $$2k_1Ce^{ik_1L} = (k + k_1)Fe^{ikL}$$

$$C = \frac{(k+k_1)Fe^{ikL}}{2k_1e^{ik_1L}}$$

$(4.1.1.13) - (4.1.1.12)$ จะได้ว่า

$$2k_1De^{-ik_1L} = (k_1 - k)Fe^{ikL}$$

$$D = \frac{(k_1-k)Fe^{ikL}}{2k_1e^{-ik_1L}}$$

แทน $C$ และ $D$ ใน (4.1.1.9) และ (4.1.1.10) จะได้ว่า

$$A + B = \left(\frac{k_1 + k}{2k_1}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{ik_1L}} + \left(\frac{k_1 - k}{2k_1}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{-ik_1L}} \quad (4.1.1.14)$$

$$kA - kB = \left(\frac{k_1 + k}{2}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{ik_1L}} - \left(\frac{k_1 - k}{2}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{-ik_1L}} \quad (4.1.1.15)$$

$k \times (4.1.1.14)$;

$$kA + kB = k\left(\frac{k_1 + k}{2k_1}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{ik_1L}} + k\left(\frac{k_1 - k}{2k_1}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{-ik_1L}} \quad (4.1.1.16)$$

$(4.1.1.15) + (4.1.1.16)$;

$$2kA = \left(\frac{Fe^{ikL}}{e^{ik_1L}}\right)\left[k\left(\frac{k_1 + k}{2k_1}\right) + \left(\frac{k_1 + k}{2}\right)\right] + \left(\frac{Fe^{ikL}}{e^{-ik_1L}}\right)[k\left(\frac{k_1 - k}{2k_1}\right) - \left(\frac{k_1 - k}{2}\right)]$$

$$A = F\left(\frac{e^{ikL}}{2ke^{ik_1L}}\right)\left(\frac{k_1 + k}{2}\right)\left(\frac{k}{k_1} + 1\right) + F\left(\frac{e^{ikL}}{2ke^{-ik_1L}}\right)\left(\frac{k_1 - k}{2}\right)\left(\frac{k}{k_1} - 1\right)$$

$$F = \frac{A}{\left(\frac{e^{ikL}}{2ke^{ik_1L}}\right)\left(\frac{k_1 + k}{2}\right)\left(\frac{k}{k_1} + 1\right) + \left(\frac{e^{ikL}}{2ke^{-ik_1L}}\right)\left(\frac{k_1 - k}{2}\right)\left(\frac{k}{k_1} - 1\right)}$$

$$= \frac{A}{\left(\frac{e^{ikL}}{2ke^{ik_1L}}\right)\frac{(k_1 + k)^2}{2k_1} - \left(\frac{e^{ikL}}{2ke^{-ik_1L}}\right)\frac{(k_1 - k)^2}{2k_1}}$$

$$= \frac{A}{\left(\frac{e^{ikL}}{2ke^{ik_1L}}\right)\left(\frac{k_1^2 + 2kk_1 + k^2}{2k_1}\right) - \left(\frac{e^{ikL}}{2ke^{-ik_1L}}\right)\left(\frac{k_1^2 - 2kk_1 + k^2}{2k_1}\right)}$$

$$F = \frac{A}{\left(\frac{e^{ikL}}{2ke^{ik_1L}}\right)\left(\frac{k_1^2+k^2}{2k_1}+\frac{2kk_1}{2k_1}\right)-\left(\frac{e^{ikL}}{2ke^{-ik_1L}}\right)\left(\frac{k_1^2+k^2}{2k_1}-\frac{2kk_1}{2k_1}\right)}$$

$$F = \frac{A}{\frac{k_1^2+k^2}{2k_1}\left(\frac{e^{ikL}}{2k}\right)\left(\frac{1}{e^{ik_1L}}-\frac{1}{e^{-ik_1L}}\right)+\left(\frac{2kk_1}{2k_1}\right)\left(\frac{e^{ikL}}{2k}\right)\left(\frac{1}{e^{ik_1L}}+\frac{1}{e^{-ik_1L}}\right)}$$

$$F = \frac{A}{\frac{k_1^2+k^2}{2k_1}\left(\frac{e^{ikL}}{2k}\right)(e^{-ik_1L}-e^{ik_1L})+\left(\frac{2kk_1}{2k_1}\right)\left(\frac{e^{ikL}}{2k}\right)(e^{-ik_1L}+e^{ik_1L})}$$

$$F = \frac{A}{e^{ikL}[-\left(\frac{k_1^2+k^2}{2k_1}\right)\left(\frac{1}{k}\right)i\sin k_1\mathrm{L}+\cos k_1\mathrm{L}]}$$

$$F = \frac{A}{e^{ikL}[\cos k_1\mathrm{L}-\left(\frac{k_1^2+k^2}{2k_1}\right)\left(\frac{1}{k}\right)i\sin k_1\mathrm{L}]}$$

$$F = \frac{2kk_1e^{-ikL}A}{[2k\,k_1\cos k_1\mathrm{L}-(k_1^2+k^2)i\sin k_1\mathrm{L}]}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{2kk_1e^{-ikL}}{[2k\,k_1\cos k_1\mathrm{L}-(k_1^2+k^2)i\sin k_1\mathrm{L}]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง คือ

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4k^2k_1^2}{[4k^2\,k_1^2\cos^2 k_1\mathrm{L}+(k_1^2+k^2)^2\sin^2 k_1\mathrm{L}]} \qquad (4.1.1.16.a)$$

$(4.1.1.16)-(4.1.1.15);$

$$2kB = \left(\frac{Fe^{ikL}}{e^{ik_1L}}\right)\left(k\left(\frac{k_1+k}{2k_1}\right)-\left(\frac{k_1+k}{2}\right)\right)+\left(\frac{Fe^{ikL}}{e^{-ik_1L}}\right)\left(k\left(\frac{k_1-k}{2k_1}\right)+\left(\frac{k_1-k}{2}\right)\right)$$

$$B = \frac{Fe^{ikL}}{2ke^{ik_1L}}\left(\frac{k_1+k}{2}\right)\left(\frac{k}{k_1}-1\right)+\frac{Fe^{ikL}}{2ke^{-ik_1L}}\left(\frac{k_1-k}{2}\right)\left(\frac{k}{k_1}+1\right)$$

$$B = \left(\frac{Fe^{ikL}}{2ke^{ik_1L}}\right)\frac{-(k_1^2-k^2)}{2k_1}+\left(\frac{Fe^{ikL}}{2ke^{-ik_1L}}\right)\frac{(k_1^2-k^2)}{2k_1}$$

$$B = \frac{Fe^{ikL}}{2k}\frac{(k_1^2-k^2)}{2k_1}\left[\left(-\frac{1}{e^{ik_1L}}\right)+\left(\frac{1}{e^{-ik_1L}}\right)\right]$$

$$B = \frac{Fe^{ikL}}{2k}\frac{(k_1^2-k^2)}{2k_1}\left[-e^{-ik_1L}+e^{ik_1L}\right]$$

$$B = \frac{Fe^{ikL}}{k}\frac{(k_1^2 - k^2)}{2k_1}\,\mathrm{isin}\,k_1 L$$

$$B = \frac{A(k_1^2 - k^2) i \sin k_1 L}{[2kk_1 \cos k_1 \mathrm{L} - (k_1^2 + k^2)\, i\sin k_1 \mathrm{L}]}$$

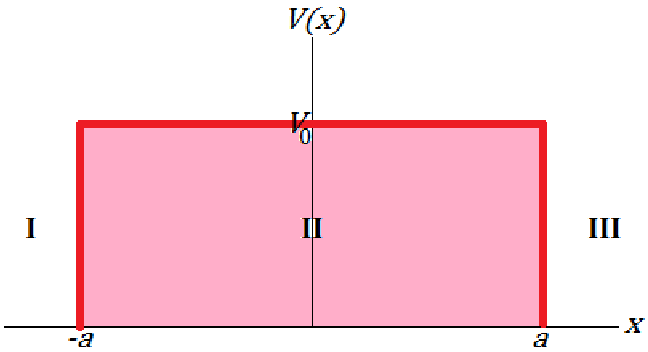
$$\frac{B}{A} = \frac{(k_1^2 - k^2)\,\mathrm{isin}\,k_1 L}{[2kk_1 \cos k_1 \mathrm{L} - (k_1^2 + k^2)\, i\sin k_1 \mathrm{L}]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง คือ

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(k_1^2 - k^2)^2 \sin^2 k_1 L}{[4k^2 k_1^2 \cos^2 k_1 \mathrm{L} + (k_1^2 + k^2)^2 \sin^2 k_1 \mathrm{L}]} \qquad (4.1.1.16.b)$$

### 4.1.2 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & |x| \le a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$




**ภาพที่ 4.2** พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า

**กรณี $E < V_0$**

ดังนั้นผลเฉลยจะได้ว่า

$$X_{\mathrm{I}}(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$X_{\mathrm{II}}(x) = Ce^{k_2 x} + De^{-k_2 x}$$
$$X_{\mathrm{III}}(x) = Fe^{ikx}$$

โดยที่ $k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$

จะได้ว่าเงื่อนไขขอบเขต คือ

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = Ce^{-k_2a} + De^{k_2a} \tag{4.1.2.1}$$

$$ikAe^{-ika} - ikBe^{ika} = k_2Ce^{-k_2a} - k_2De^{k_2a} \tag{4.1.2.2}$$

$$Ce^{k_2a} + De^{-k_2a} = Fe^{ika} \tag{4.1.2.3}$$

$$k_2Ce^{k_2a} - k_2De^{-k_2a} = ikFe^{ika} \tag{4.1.2.4}$$

$k_2 \times (4.1.2.3)$; $\quad k_2Ce^{k_2a} + k_2De^{-k_2a} = k_2Fe^{ika}$ (4.1.2.5)

(4.1.2.4) + (4.1.2.5); $\quad 2k_2Ce^{k_2a} = (ik + k_2)Fe^{ika}$

$$C = \frac{(ik+k_2)Fe^{ika}}{2k_2e^{k_2a}}$$

(4.1.2.5) − (4.1.2.4); $\quad 2k_2De^{-k_2a} = (-ik + k_2)Fe^{ika}$

$$D = \frac{(-ik+k_2)Fe^{ika}}{2k_2e^{-k_2a}}$$

แทน $C$ และ $D$ ใน (4.1.2.1) และ (4.1.2.2) จะได้ว่า

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = \left(\frac{ik + k_2}{2k_2}\right)\frac{Fe^{ika}}{e^{2k_2a}} + \left(\frac{-ik + k_2}{2k_2}\right)\frac{Fe^{ika}}{e^{-2k_2a}} \tag{4.1.2.6}$$

$$ikAe^{-ika} - ikBe^{ika} = \left(\frac{ik + k_2}{2}\right)\frac{Fe^{ika}}{e^{2k_2a}} - \left(\frac{-ik + k_2}{2}\right)\frac{Fe^{ika}}{e^{-2k_2a}} \tag{4.1.2.7}$$

$ik \times (4.1.2.6)$;

$$ikAe^{-ika} + ikBe^{ika} = ik\left(\frac{ik + k_2}{2k_2}\right)\frac{Fe^{ika}}{e^{2k_2a}} + ik\left(\frac{-ik + k_2}{2k_2}\right)\frac{Fe^{ika}}{e^{-2k_2a}} \tag{4.1.2.8}$$

(4.1.2.7) + (4.1.2.8);

$$2ikAe^{-ika} = \left(\frac{Fe^{ika}}{e^{2k_2a}}\right)\left[ik\left(\frac{ik + k_2}{2k_2}\right) + \left(\frac{ik + k_2}{2}\right)\right] + \left(\frac{Fe^{ika}}{e^{-2k_2a}}\right)[ik\left(\frac{-ik + k_2}{2k_2}\right) - \left(\frac{-ik + k_2}{2}\right)]$$

$$A = F\left(\frac{e^{2ika}}{2ike^{2k_2a}}\right)\left(\frac{ik + k_2}{2}\right)\left(\frac{ik}{k_2} + 1\right) + F\left(\frac{e^{2ika}}{2ike^{-2k_2a}}\right)\left(\frac{-ik + k_2}{2}\right)\left(\frac{ik}{k_2} - 1\right)$$

$$F = \frac{A}{\left(\frac{e^{2ika}}{2ike^{2k_2a}}\right)\left(\frac{ik + k_2}{2}\right)\left(\frac{ik}{k_2} + 1\right) + \left(\frac{e^{2ika}}{2ike^{-2k_2a}}\right)\left(\frac{-ik + k_2}{2}\right)\left(\frac{ik}{k_2} - 1\right)}$$

$$F = \frac{A}{\left(\frac{e^{2ika}}{2ike^{2k_2a}}\right)\frac{(ik + k_2)^2}{2k_2} + \left(\frac{e^{2ika}}{2ike^{-2k_2a}}\right)\left(-\frac{(ik - k_2)^2}{2k_2}\right)}$$

$$= \frac{A}{\left(\frac{e^{2ika}}{2ike^{2k_2a}}\right)\left(\frac{-k^2 + 2ikk_2 + k_2^2}{2k_2}\right) + \left(\frac{e^{2ika}}{2ike^{-2k_2a}}\right)\left(\frac{k^2 + 2ikk_2 - k_2^2}{2k_2}\right)}$$

$$= \frac{A}{\left(\frac{e^{2ika}}{2ike^{2k_2a}}\right)\left(\frac{-k^2 + k_2^2}{2k_2} + \frac{2ikk_2}{2k_2}\right) + \left(\frac{e^{2ika}}{2ike^{-2k_2a}}\right)\left(\frac{k^2 - k_2^2}{2k_2} + \frac{2ikk_2}{2k_2}\right)}$$

$$= \frac{A}{\frac{2ikk_2}{2k_2}\left(\frac{e^{2ika}}{2ik}\right)\left(\frac{1}{e^{2k_2a}} + \frac{1}{e^{-2k_2a}}\right) + \left(\frac{k^2 - k_2^2}{2k_2}\right)\left(\frac{e^{2ika}}{2ik}\right)\left(-\frac{1}{e^{2k_2a}} + \frac{1}{e^{-2k_2a}}\right)}$$

$$= \frac{A}{\left(\frac{e^{2ika}}{2}\right)(e^{-2k_2a} + e^{2k_2a}) + \left(\frac{k^2 - k_2^2}{2k_2}\right)\left(\frac{e^{2ika}}{2ik}\right)(-e^{-2k_2a} + e^{2k_2a})}$$

$$= \frac{A}{e^{2ika}[\cosh 2k_2a + \left(\frac{k^2 - k_2^2}{k_2}\right)\left(\frac{1}{2ik}\right)\sinh 2k_2a]}$$

$$F = \frac{2ikk_2e^{-2ika}A}{[2ik\,k_2\cosh 2k_2a + (k^2 - k_2^2)\sinh 2k_2a]}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{2ikk_2e^{-2ika}}{[2ik\,k_2\cosh 2k_2a + (k^2 - k_2^2)\sinh 2k_2a]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง คือ

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4k^2k_2^2}{[4k^2k_2^2 + (k^2 + k_2^2)^2\sinh^2 2k_2a]} \qquad (4.1.2.8.a)$$

$(4.1.2.8) - (4.1.2.7)$;

$$2ikBe^{ika} = \left(\frac{Fe^{ika}}{e^{2k_2a}}\right)\left(\frac{ik + k_2}{2}\right)\left(\frac{ik}{k_2} - 1\right) + \left(\frac{Fe^{ika}}{e^{-2k_2a}}\right)\left(\frac{-ik + k_2}{2}\right)\left(\frac{ik}{k_2} + 1\right)$$

$$B = \frac{F}{2ik}\left[\left(\frac{1}{e^{2k_2a}}\right)\left(\frac{ik + k_2}{2}\right)\left(\frac{ik - k_2}{k_2}\right) + \left(\frac{1}{e^{-2k_2a}}\right)\left(\frac{-ik + k_2}{2}\right)\left(\frac{ik + k_2}{k_2}\right)\right]$$

$$B = \frac{F}{2ik}\left[\left(\frac{1}{e^{2k_2a}}\right)\frac{(-k^2 - k_2^2)}{2k_2} + \left(\frac{1}{e^{-2k_2a}}\right)\frac{(k^2 + k_2^2)}{2k_2}\right]$$

$$B = \frac{F}{2ik}\frac{(k^2 + k_2^2)}{2k_2}\left[\left(-\frac{1}{e^{2k_2a}}\right) + \left(\frac{1}{e^{-2k_2a}}\right)\right]$$

$$B = \frac{F}{2ik}\frac{(k^2 + k_2^2)}{2k_2}[-e^{-2k_2a} + e^{2k_2a}]$$

$$B = \frac{F}{2ik}\frac{(k^2 + k_2^2)}{k_2}\sinh 2k_2 a$$

$$B = \frac{Ae^{-2ika}(k^2 + k_2^2)\sinh 2k_2 a}{[2ik\,k_2\cosh 2k_2 a + (k^2 - k_2^2)\sinh 2k_2 a]}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{e^{-2ika}(k^2 + k_2^2)\sinh 2k_2 a}{[2ik\,k_2\cosh 2k_2 a + (k^2 - k_2^2)\sinh 2k_2 a]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง คือ

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(k^2 + k_2^2)^2 \sinh^2 2k_2 a}{[4k^2 k_2^2 + (k^2 + k_2^2)^2 \sinh^2 2k_2 a]} \qquad (4.1.2.8.b)$$

**กรณี $\boldsymbol{E > V_0}$**

ดังนั้นผลเฉลยจะได้ว่า

$$X_{\mathrm{I}}(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$X_{\mathrm{II}}(x) = Ce^{ik_3 x} + De^{-ik_3 x}$$

$$X_{\mathrm{III}}(x) = Fe^{ikx}$$

โดยที่ $k_3^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$

จะได้ว่าเงื่อนไขขอบเขต คือ

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = Ce^{-ik_3 a} + De^{ik_3 a} \qquad (4.1.2.9)$$

$$kAe^{-ika} - kBe^{ika} = k_3 Ce^{-ik_3 a} - k_3 De^{ik_3 a} \qquad (4.1.2.10)$$

$$Ce^{ik_3 a} + De^{-ik_3 a} = Fe^{ika} \qquad (4.1.2.11)$$

$$k_3 Ce^{ik_3 a} - k_3 De^{-ik_3 a} = kFe^{ika} \qquad (4.1.2.12)$$

$k_3 \times (4.1.2.11);$ $k_3 Ce^{ik_3 a} + k_3 De^{-ik_3 a} = k_3 Fe^{ika}$ (4.1.2.13)

$(4.1.2.12) + (4.1.2.13);$ $\quad 2k_3 Ce^{ik_3 a} = (k + k_3)Fe^{ika}$

$$C = \frac{(k+k_3)Fe^{ika}}{2k_3 e^{ik_3 a}}$$

$(4.1.2.13) - (4.1.2.12);$ $\quad 2k_3 De^{-ik_3 a} = (k_3 - k)Fe^{ika}$

$$D = \frac{(k_3-k)Fe^{ika}}{2k_3 e^{-ik_3 a}}$$

แทน $C$ และ $D$ ใน (4.1.2.9) และ (4.1.2.10) จะได้ว่า

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = \left(\frac{k_3 + k}{2k_3}\right)\frac{Fe^{ika}}{e^{2ik_3a}} + \left(\frac{k_3 - k}{2k_3}\right)\frac{Fe^{ika}}{e^{-2ik_3a}} \qquad (4.1.2.14)$$

$$kAe^{-ika} - kBe^{ika} = \left(\frac{k_3 + k}{2}\right)\frac{Fe^{ika}}{e^{2ik_3a}} - \left(\frac{k_3 - k}{2}\right)\frac{Fe^{ika}}{e^{-2ik_3a}} \qquad (4.1.2.15)$$

$k \times$ (4.1.2.14);

$$kAe^{-ika} + kBe^{ika} = k\left(\frac{k_3 + k}{2k_3}\right)\frac{Fe^{ika}}{e^{2ik_3a}} + k\left(\frac{k_3 - k}{2k_3}\right)\frac{Fe^{ika}}{e^{-2ik_3a}} \qquad (4.1.2.16)$$

(4.1.2.15) + (4.1.2.16);

$$2kAe^{-ika} = \left(\frac{Fe^{ika}}{e^{2ik_3a}}\right)\left[k\left(\frac{k_3 + k}{2k_3}\right) + \left(\frac{k_3 + k}{2}\right)\right] + \left(\frac{Fe^{ika}}{e^{-2ik_3a}}\right)[k\left(\frac{k_3 - k}{2k_3}\right) - \left(\frac{k_3 - k}{2}\right)]$$

$$A = F\left(\frac{e^{2ika}}{2ke^{2ik_3a}}\right)\left(\frac{k_3 + k}{2}\right)\left(\frac{k}{k_3} + 1\right) + F\left(\frac{e^{2ika}}{2ke^{-2ik_3a}}\right)\left(\frac{k_3 - k}{2}\right)\left(\frac{k}{k_3} - 1\right)$$

$$F = \frac{A}{\left(\frac{e^{2ika}}{2ke^{2ik_3a}}\right)\left(\frac{k_3 + k}{2}\right)\left(\frac{k}{k_3} + 1\right) + \left(\frac{e^{2ika}}{2ke^{-2ik_3a}}\right)\left(\frac{k_3 - k}{2}\right)\left(\frac{k}{k_3} - 1\right)}$$

$$= \frac{A}{\left(\frac{e^{2ika}}{2ke^{2ik_3a}}\right)\frac{(k_3 + k)^2}{2k_3} - \left(\frac{e^{2ika}}{2ke^{-2ik_3a}}\right)\left(\frac{(k_3 - k)^2}{2k_3}\right)}$$

$$= \frac{A}{\left(\frac{e^{2ika}}{2ke^{2ik_3a}}\right)\left(\frac{k_3^2 + 2kk_3 + k^2}{2k_3}\right) - \left(\frac{e^{2ika}}{2ke^{-2ik_3a}}\right)\left(\frac{k_3^2 - 2kk_3 + k^2}{2k_3}\right)}$$

$$F = \frac{A}{\left(\frac{e^{2ika}}{2ke^{2ik_3a}}\right)\left(\frac{k_3^2 + k^2}{2k_3} + \frac{2kk_3}{2k_3}\right) - \left(\frac{e^{2ika}}{2ke^{-2ik_3a}}\right)\left(\frac{k_3^2 + k^2}{2k_3} - \frac{2kk_3}{2k_3}\right)}$$

$$F = \frac{A}{\frac{2kk_3}{2k_3}\left(\frac{e^{2ika}}{2k}\right)\left(\frac{1}{e^{2ik_3a}} + \frac{1}{e^{-2ik_3a}}\right) + \left(\frac{k_3^2 + k^2}{2k_3}\right)\left(\frac{e^{2ika}}{2k}\right)\left(\frac{1}{e^{2ik_3a}} - \frac{1}{e^{-2ik_3a}}\right)}$$

$$F = \frac{A}{\left(\frac{e^{2ika}}{2}\right)(e^{-2ik_3a} + e^{2ik_3a}) + \left(\frac{k_3^2 + k^2}{2k_3}\right)\left(\frac{e^{2ika}}{2k}\right)(e^{-2ik_3a} - e^{2ik_3a})}$$

$$F = \frac{A}{e^{2ika}[\cos 2k_3a - \left(\frac{k_3^2 + k^2}{2k_3}\right)\left(\frac{1}{k}\right) i \sin 2k_3a]}$$

$$F = \frac{2kk_3e^{-2ika}A}{[2k\,k_3\cos 2k_3a - (k_3^2 + k^2)\,i\sin 2k_3a]}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{2kk_3e^{-2ika}}{[2k\,k_3\cos 2k_3a - (k_3^2 + k^2)\,i\sin 2k_3a]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง คือ

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4k^2k_3^2}{[4k^2k_3^2\cos^2 2k_3a + (k_3^2 + k^2)^2\sin^2 2k_3a]} \qquad (4.1.2.16.a)$$

$(4.1.2.16) - (4.1.2.15)$;

$$2kBe^{ika} = \left(\frac{Fe^{ika}}{e^{2ik_3a}}\right)\left(k\left(\frac{k_3+k}{2k_3}\right) - \left(\frac{k_3+k}{2}\right)\right) + \left(\frac{Fe^{ika}}{e^{-2ik_3a}}\right)\left(k\left(\frac{k_3-k}{2k_3}\right) + \left(\frac{k_3-k}{2}\right)\right)$$

$$B = \frac{F}{2k}\left[\left(\frac{1}{e^{2ik_3a}}\right)\left(\frac{k_3+k}{2}\right)\left(\frac{k}{k_3} - 1\right) + \left(\frac{1}{e^{-2ik_3a}}\right)\left(\frac{k_3-k}{2}\right)\left(\frac{k}{k_3} + 1\right)\right]$$

$$B = \frac{F}{2k}\left[\left(\frac{1}{e^{2ik_3a}}\right)\frac{-(k_3^2 - k^2)}{2k_3} + \left(\frac{1}{e^{-2ik_3a}}\right)\frac{(k_3^2 - k^2)}{2k_3}\right]$$

$$B = \frac{F}{2k}\frac{(k_3^2 - k^2)}{2k_3}\left[\left(-\frac{1}{e^{2ik_3a}}\right) + \left(\frac{1}{e^{-2ik_3a}}\right)\right]$$

$$B = \frac{F}{2k}\frac{(k_3^2 - k^2)}{2k_3}\left[-e^{-2ik_3a} + e^{2ik_3a}\right]$$

$$B = \frac{F}{2k}\frac{(k_3^2 - k^2)}{k_3}i\sin 2k_3a$$

$$B = \frac{Ae^{-2ika}(k_3^2 - k^2)\,\mathrm{i}\sin 2k_3a}{[2k\,k_3\cos 2k_3a - (k_3^2 + k^2)i\sin 2k_3a]}$$

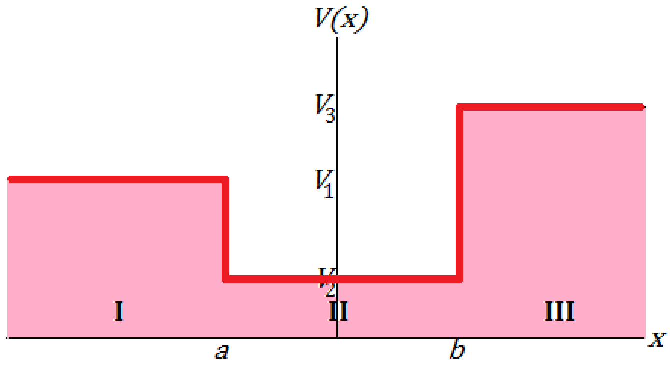
$$\frac{B}{A} = \frac{e^{-2ika}(k_3^2 - k^2)\,\mathrm{i}\sin 2k_3a}{[2k\,k_3\cos 2k_3a - (k_3^2 + k^2)\,i\sin 2k_3a]}$$

ดังนั้นจะได้ว่าค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง คือ

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(k_3^2 - k^2)^2\sin^2 2k_3a}{[4k^2\,k_3^2\cos^2 2k_3a + (k_3^2 + k^2)^2\sin^2 2k_3a]} \qquad (4.1.2.16.b)$$

### 4.1.3 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร

$$V(x) = \begin{cases} V_1, & x < a \\ V_2, & a < x < b \\ V_3, & x > b \end{cases}$$




**ภาพที่ 4.3** พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร

**กรณี $\boldsymbol{E < V_i, i = 1,\ 2,\ 3}$**

ดังนั้นผลเฉลยจะได้ว่า

$$X_{\mathrm{I}}(x) = Ae^{k_4 x} + Be^{-k_4 x}$$

$$\mathrm{X}_{\mathrm{II}}(x) = Ce^{k_5 x} + De^{-k_5 x}$$

$$X_{\mathrm{III}}(x) = Fe^{k_6 x}$$

โดยที่ $k_4{}^2 = \frac{2m(V_1 - E)}{\hbar^2}$, $k_5^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_2 - E)$ และ $k_6^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_3 - E)$

จะได้ว่าเงื่อนไขขอบเขต คือ

$$Ae^{k_4 a} + Be^{-k_4 a} = Ce^{k_5 a} + De^{-k_5 a} \tag{4.1.3.1}$$

$$k_4 Ae^{k_4 a} - k_4 Be^{-k_4 a} = k_5 Ce^{k_5 a} - k_5 De^{-k_5 a} \tag{4.1.3.2}$$

$$Ce^{k_5 b} + De^{-k_5 b} = Fe^{k_6 b} \tag{4.1.3.3}$$

$$k_5 Ce^{k_5 b} - k_5 De^{-k_5 b} = k_6 Fe^{k_6 b} \tag{4.1.3.4}$$

$k_5 \times (4.1.3.3)$;

$$k_5 Ce^{k_5 b} + k_5 De^{-k_5 b} = k_5 Fe^{k_6 b} \tag{4.1.3.5}$$

$(4.1.3.4) + (4.1.3.5)$;

$$2k_5 Ce^{k_5 b} = (k_5 + k_6)Fe^{k_6 b}$$

$$C = \frac{(k_5+k_6)Fe^{k_6 b}}{2k_5 e^{k_5 b}}$$

(4.1.3.5) − (4.1.3.4);

$$2k_5 De^{-k_5 b} = (k_5 - k_6)Fe^{k_6 b}$$

$$D = \frac{(k_5-k_6)Fe^{k_6 b}}{2k_5 e^{-k_5 b}}$$

แทน $C$ และ $D$ ใน (4.1.3.1) และ (4.1.3.2)

$$Ae^{k_4 a} + Be^{-k_4 a} = \frac{(k_5+k_6)Fe^{k_6 b}}{2k_5 e^{k_5(b-a)}} + \frac{(k_5-k_6)Fe^{k_6 b}}{2k_5 e^{-k_5(b-a)}} \tag{4.1.3.6}$$

$$k_4 Ae^{k_4 a} - k_4 Be^{-k_4 a} = \frac{(k_5+k_6)Fe^{k_6 b}}{2e^{k_5(b-a)}} - \frac{(k_5-k_6)Fe^{k_6 b}}{2e^{-k_5(b-a)}} \tag{4.1.3.7}$$

$k_4 \times$ (4.1.3.6);

$$k_4 Ae^{k_4 a} + k_4 Be^{-k_4 a} = k_4\frac{(k_5+k_6)Fe^{k_6 b}}{2k_5 e^{k_5(b-a)}} + k_4\frac{(k_5-k_6)Fe^{k_6 b}}{2k_5 e^{-k_5(b-a)}} \tag{4.1.3.8}$$

(4.1.3.7) + (4.1.3.8);

$$2k_4 Ae^{k_4 a} = \frac{Fe^{k_6 b}}{e^{k_5(b-a)}}\left(k_4\frac{(k_5+k_6)}{2k_5} + \frac{(k_5+k_6)}{2}\right) + \frac{Fe^{k_6 b}}{e^{-k_5(b-a)}}\left(k_4\frac{(k_5-k_6)}{2k_5} - \frac{(k_5-k_6)}{2}\right)$$

$$A = F\frac{e^{k_6 b}}{2k_4 e^{k_4 a}}\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(k_4\frac{(k_5+k_6)}{2k_5} + \frac{(k_5+k_6)}{2}\right) + \left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(k_4\frac{(k_5-k_6)}{2k_5} - \frac{(k_5-k_6)}{2}\right)\right]$$

$$A = F\frac{e^{k_6 b}}{2k_4 e^{k_4 a}}\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_5+k_6}{2}\right)\left(\frac{k_4}{k_5}+1\right) + \left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_5-k_6}{2}\right)\left(\frac{k_4}{k_5}-1\right)\right]$$

$$F = \frac{A}{\frac{e^{k_6 b}}{2k_4 e^{k_4 a}}\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_5 k_4 + k_5^2 + k_6 k_4 + k_6 k_5}{2k_5}\right) + \left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_5 k_4 - k_5^2 - k_6 k_4 + k_6 k_5}{2k_5}\right)\right]}$$

$$F = \frac{A}{\frac{e^{k_6 b}}{2k_4 e^{k_4 a}}\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_5 k_4 + k_6 k_5}{2k_5} + \frac{k_5^2 + k_6 k_4}{2k_5}\right) + \left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_5 k_4 + k_6 k_5}{2k_5} - \frac{(k_5^2 + k_6 k_4)}{2k_5}\right)\right]}$$

$$F = \frac{A}{\frac{e^{k_6 b}}{2k_4 e^{k_4 a}}\left[\left(\left(\frac{k_5 k_4 + k_6 k_5}{2k_5}\right)\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right) + \left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\right]\right) + \left(\left(\frac{k_5^2 + k_6 k_4}{2k_5}\right)\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right) - \left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\right]\right)\right]}$$

$$F=\frac{A}{\frac{e^{k_6 b}}{2k_4e^{k_4a}}\left[\left(\left(\frac{k_5k_4+k_6k_5}{2k_5}\right)[e^{-k_5(b-a)}+e^{k_5(b-a)}]\right)+\left(\left(\frac{k_5^2+k_6k_4}{2k_5}\right)[e^{-k_5(b-a)}-e^{k_5(b-a)}]\right)\right]}$$

$$F=\frac{A}{\frac{e^{k_6 b}}{2k_4e^{k_4a}}\left[\left(\frac{k_5k_4+k_6k_5}{k_5}\right)\cosh k_5(b-a)-\left(\frac{k_5^2+k_6k_4}{k_5}\right)\sinh k_5(b-a)\right]}$$

$$\frac{F}{A}=\frac{2k_4e^{k_4a}e^{-k_6b}}{\left[\left(\frac{k_5k_4+k_6k_5}{k_5}\right)\cosh k_5(b-a)-\left(\frac{k_5^2+k_6k_4}{k_5}\right)\sinh k_5(b-a)\right]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$T=\left|\frac{F}{A}\right|^2=\frac{4k_4^2e^{2k_4a}e^{-2k_6b}}{\left[\left(\frac{k_5k_4+k_6k_5}{k_5}\right)\cosh k_5(b-a)-\left(\frac{k_5^2+k_6k_4}{k_5}\right)\sinh k_5(b-a)\right]^2} \quad (4.1.3.8.a)$$

โดยที่ สมการ $(4.1.3.8.a)$ คือ ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง

$(4.1.3.8)-(4.1.3.7)$;

$$2k_4Be^{-k_4a}=\frac{Fe^{k_6b}}{e^{k_5(b-a)}}\left(k_4\frac{(k_5+k_6)}{2k_5}-\frac{(k_5+k_6)}{2}\right)+\frac{Fe^{k_6b}}{e^{-k_5(b-a)}}\left(k_4\frac{(k_5-k_6)}{2k_5}+\frac{(k_5-k_6)}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}B=F\frac{e^{k_6b}}{2k_4e^{-k_4a}}\Bigg[&\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(k_4\frac{(k_5+k_6)}{2k_5}-\frac{(k_5+k_6)}{2}\right)\\&+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(k_4\frac{(k_5-k_6)}{2k_5}+\frac{(k_5-k_6)}{2}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

$$B=F\frac{e^{k_6b}}{2k_4e^{-k_4a}}\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_5+k_6}{2}\right)\left(\frac{k_4}{k_5}-1\right)+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_5-k_6}{2}\right)\left(\frac{k_4}{k_5}+1\right)\right]$$

$$\begin{aligned}B=F\frac{e^{k_6b}}{2k_4e^{-k_4a}}\Bigg[&\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_5k_4-k_5^2+k_6k_4-k_6k_5}{2k_5}\right)\\&+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_5k_4+k_5^2-k_6k_4-k_6k_5}{2k_5}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

$$B=F\frac{e^{k_6b}}{2k_4e^{-k_4a}}\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_5k_4-k_6k_5}{2k_5}-\frac{(k_5^2-k_6k_4)}{2k_5}\right)\\+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_5k_4-k_6k_5}{2k_5}+\frac{(k_5^2-k_6k_4)}{2k_5}\right)\end{bmatrix}$$

$$B = F\frac{e^{k_6 b}}{2k_4 e^{-k_4 a}}\left[\left(\left(\frac{k_5k_4 - k_6k_5}{2k_5}\right)\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right) + \left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\right]\right) + \left(\left(\frac{k_5^2 - k_6k_4}{2k_5}\right)\left[-\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right) + \left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\right]\right)\right]$$

$$B = F\frac{e^{k_6 b}}{2k_4 e^{-k_4 a}}\left[\left(\left(\frac{k_5k_4 - k_6k_5}{2k_5}\right)\left[e^{-k_5(b-a)} + e^{k_5(b-a)}\right]\right) + \left(\left(\frac{k_5^2 - k_6k_4}{2k_5}\right)\left[-e^{-k_5(b-a)} + e^{k_5(b-a)}\right]\right)\right]$$

$$B = F\frac{e^{k_6 b}}{2k_4 e^{-k_4 a}}\left[\left(\frac{k_5k_4 - k_6k_5}{k_5}\right)\cosh k_5(b-a) + \left(\frac{k_5^2 - k_6k_4}{k_5}\right)\sinh k_5(b-a)\right]$$

$$B = \frac{Ae^{2k_4 a}\left[\left(\frac{k_5k_4 - k_6k_5}{k_5}\right)\cosh k_5(b-a) + \left(\frac{k_5^2 - k_6k_4}{k_5}\right)\sinh k_5(b-a)\right]}{\left[\left(\frac{k_5k_4 + k_6k_5}{k_5}\right)\cosh k_5(b-a) - \left(\frac{k_5^2 + k_6k_4}{k_5}\right)\sinh k_5(b-a)\right]}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{e^{2k_4 a}\left[\left(\frac{k_5k_4 - k_6k_5}{k_5}\right)\cosh k_5(b-a) + \left(\frac{k_5^2 - k_6k_4}{k_5}\right)\sinh k_5(b-a)\right]}{\left[\left(\frac{k_5k_4 + k_6k_5}{k_5}\right)\cosh k_5(b-a) - \left(\frac{k_5^2 + k_6k_4}{k_5}\right)\sinh k_5(b-a)\right]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{e^{4k_4 a}\left[\left(\frac{k_5k_4 - k_6k_5}{k_5}\right)\cosh k_5(b-a) + \left(\frac{k_5^2 - k_6k_4}{k_5}\right)\sinh k_5(b-a)\right]^2}{\left[\left(\frac{k_5k_4 + k_6k_5}{k_5}\right)\cosh k_5(b-a) - \left(\frac{k_5^2 + k_6k_4}{k_5}\right)\sinh k_5(b-a)\right]^2} \qquad (4.1.3.8.b)$$

โดยที่ สมการ $(4.1.3.8.b)$ คือ ค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง

**กรณี $\boldsymbol{E > V_i, i = 1,\ 2,\ 3}$**

ดังนั้นผลเฉลยจะได้ว่า

$$X_{\mathrm{I}}(x) = Ae^{ik_7 x} + Be^{-ik_7 x}$$

$$X_{\mathrm{II}}(x) = Ce^{ik_8 x} + De^{-ik_8 x}$$

$$X_{\mathrm{III}}(x) = Fe^{ik_9 x}$$

โดยที่ $k_7^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_1)$, $k_8^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_2)$, $k_9^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_3)$

จะได้ว่าเงื่อนไขขอบเขต คือ

$$Ae^{ik_7a} + Be^{-ik_7a} = Ce^{ik_8a} + De^{-ik_8a} \tag{4.1.3.9}$$

$$ik_7Ae^{ik_7a} - ik_7Be^{-ik_7a} = ik_8Ce^{ik_8a} - ik_8De^{-ik_8a} \tag{4.1.3.10}$$

$$Ce^{ik_8b} + De^{-ik_8b} = Fe^{ik_9b} \tag{4.1.3.11}$$

$$ik_8Ce^{ik_8b} - ik_8De^{-ik_8b} = ik_9Fe^{ik_9b} \tag{4.1.3.12}$$

$ik_8 \times$ (4.1.3.11);

$$ik_8Ce^{ik_8b} + ik_8De^{-ik_8b} = ik_8Fe^{ik_9b} \tag{4.1.3.13}$$

(4.1.3.12) + (4.1.3.13);

$$2ik_8Ce^{ik_8b} = (k_8 + k_9)iFe^{ik_9b}$$

$$C = \frac{(k_8 + k_9)iFe^{ik_9b}}{2ik_8e^{ik_8b}}$$

(4.1.3.13) − (4.1.3.12);

$$2ik_8De^{-ik_8b} = (k_8 - k_9)iFe^{ik_9b}$$

$$D = \frac{(k_8 - k_9)iFe^{ik_9b}}{2ik_8e^{-ik_8b}}$$

แทน $C$ และ $D$ ใน (4.1.3.9) และ (4.1.3.10)

$$Ae^{ik_7a} + Be^{-ik_7a} = \frac{(k_8 + k_9)Fe^{ik_9b}}{2k_8e^{ik_8(b-a)}} + \frac{(k_8 - k_9)Fe^{ik_9b}}{2k_8e^{-ik_8(b-a)}} \tag{4.1.3.14}$$

$$k_7Ae^{ik_7a} - k_7Be^{-ik_7a} = \frac{(k_8 + k_9)Fe^{ik_9b}}{2e^{ik_8(b-a)}} - \frac{(k_8 - k_9)Fe^{ik_9b}}{2e^{-ik_8(b-a)}} \tag{4.1.3.15}$$

$k_7 \times$ (4.1.3.14);

$$k_7Ae^{ik_7a} + k_7Be^{-ik_7a} = k_7\frac{(k_8 + k_9)Fe^{ik_9b}}{2k_8e^{ik_8(b-a)}} + k_7\frac{(k_8 - k_9)Fe^{ik_9b}}{2k_8e^{-ik_8(b-a)}} \tag{4.1.3.16}$$

(4.1.3.15) + (4.1.3.16);

$$2k_7Ae^{ik_7a} = \frac{Fe^{ik_9b}}{e^{ik_8(b-a)}}\left(k_7\frac{(k_8+k_9)}{2k_8}+\frac{(k_8+k_9)}{2}\right)$$
$$+\frac{Fe^{k_9b}}{e^{-ik_8(b-a)}}\left(k_7\frac{(k_8-k_9)}{2k_8}-\frac{(k_8-k_9)}{2}\right)$$

$$A = F\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{ik_7a}}\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)\left(k_7\frac{(k_8+k_9)}{2k_8}+\frac{(k_8+k_9)}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\left(k_7\frac{(k_8-k_9)}{2k_8}-\frac{(k_8-k_9)}{2}\right)\right]$$

$$A = F\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{ik_7a}}\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{k_8+k_9}{2}\right)\left(\frac{k_7}{k_8}+1\right)+\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{k_8-k_9}{2}\right)\left(\frac{k_7}{k_8}-1\right)\right]$$

$$F = \frac{A}{\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{ik_7a}}\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{k_8k_7+k_8^2+k_9k_7+k_9k_8}{2k_8}\right)+\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{k_8k_7-k_8^2-k_9k_7+k_9k_8}{2k_8}\right)\right]}$$

$$F = \frac{A}{\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{ik_7a}}\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{k_8k_7+k_9k_8}{2k_8}+\frac{k_8^2+k_9k_7}{2k_8}\right)+\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{k_8k_7+k_9k_8}{2k_8}-\frac{(k_8^2+k_9k_7)}{2k_8}\right)\right]}$$

$$F = \frac{A}{\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{ik_7a}}\left[\left(\left(\frac{k_8k_7+k_9k_8}{2k_8}\right)\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)+\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\right]\right)\right]}$$

$$+\frac{A}{\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{ik_7a}}\left[\left(\left(\frac{k_8^2+k_9k_7}{2k_8}\right)\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)-\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\right]\right)\right]}$$

$$F = \frac{A}{\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{ik_7a}}\left[\left(\left(\frac{k_8k_7+k_9k_8}{2k_8}\right)\left[e^{-ik_8(b-a)}+e^{ik_8(b-a)}\right]\right)+\left(\left(\frac{k_8^2+k_9k_7}{2k_8}\right)\left[e^{-ik_8(b-a)}-e^{ik_8(b-a)}\right]\right)\right]}$$

$$F = \frac{A}{\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{ik_7a}}\left[\left(\frac{k_8k_7+k_9k_8}{k_8}\right)\cos k_8(b-a)-\left(\frac{k_8^2+k_9k_7}{k_8}\right)i\sin k_8(b-a)\right]}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{2k_7e^{ik_7a}e^{-ik_9b}}{\left[(k_7+k_9)\cos k_8(b-a)-\left(\frac{k_8^2+k_9k_7}{k_8}\right)i\sin k_8(b-a)\right]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4k_7^2}{\left[(k_7+k_9)^2\cos^2 k_8(b-a)+\left(\frac{k_8^2+k_9k_7}{k_8}\right)^2\sin^2 k_8(b-a)\right]} \qquad (4.1.3.16.a)$$

โดยที่ สมการ $(4.1.3.16.a)$ คือ ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง

$(4.1.3.16) - (4.1.3.15)$;

$$\begin{aligned}2k_7Be^{-ik_7a} &= \frac{Fe^{ik_9b}}{e^{ik_8(b-a)}}\left(k_7\frac{(k_8+k_9)}{2k_8}-\frac{(k_8+k_9)}{2}\right)\\ &\quad+\frac{Fe^{k_9b}}{e^{-ik_8(b-a)}}\left(k_7\frac{(k_8-k_9)}{2k_8}+\frac{(k_8-k_9)}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= F\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{-ik_7a}}\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)\left(k_7\frac{(k_8+k_9)}{2k_8}-\frac{(k_8+k_9)}{2}\right)\right.\\ &\quad\left.+\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\left(k_7\frac{(k_8-k_9)}{2k_8}+\frac{(k_8-k_9)}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= F\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{-ik_7a}}\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{k_8+k_9}{2}\right)\left(\frac{k_7}{k_8}-1\right)\right.\\ &\quad\left.+\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{k_8-k_9}{2}\right)\left(\frac{k_7}{k_8}+1\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= F\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{-ik_7a}}\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{k_8k_7-k_8^2+k_9k_7-k_9k_8}{2k_8}\right)\right.\\ &\quad\left.+\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{k_8k_7+k_8^2-k_9k_7-k_9k_8}{2k_8}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= F\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{-ik_7a}}\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{k_8k_7-k_9k_8}{2k_8}-\frac{(k_8^2-k_9k_7)}{2k_8}\right)\right.\\ &\quad\left.+\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{k_8k_7-k_9k_8}{2k_8}+\frac{(k_8^2-k_9k_7)}{2k_8}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= F\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{-ik_7a}}\left[\left(\left(\frac{k_8k_7-k_9k_8}{2k_8}\right)\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)+\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\right]\right)\right.\\ &\quad\left.+\left(\left(\frac{k_8^2-k_9k_7}{2k_8}\right)\left[-\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)+\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\right]\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= F\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{-ik_7a}}\left[\left(\left(\frac{k_8k_7-k_9k_8}{2k_8}\right)\left[e^{-ik_8(b-a)}+e^{ik_8(b-a)}\right]\right)\right.\\ &\quad\left.+\left(\left(\frac{k_8^2-k_9k_7}{2k_8}\right)\left[-e^{-ik_8(b-a)}+e^{ik_8(b-a)}\right]\right)\right]\end{aligned}$$

$$B = F\frac{e^{ik_9b}}{2k_7e^{-ik_7a}}\left[\left(\frac{k_8k_7-k_9k_8}{k_8}\right)\cos k_8(b-a)+\left(\frac{k_8^2-k_9k_7}{k_8}\right)i\sin k_8(b-a)\right]$$

$$B = \frac{A}{\frac{e^{ik_9 b}}{2k_7 e^{ik_7 a}}\left[\left(\frac{k_8 k_7 + k_9 k_8}{k_8}\right)\cos k_8(b-a) - \left(\frac{k_8^2 + k_9 k_7}{k_8}\right) i\sin k_8(b-a)\right] \cdot \frac{e^{ik_9 b}}{2k_7 e^{-ik_7 a}}\left[\left(\frac{k_8 k_7 - k_9 k_8}{k_8}\right)\cos k_8(b-a) + \left(\frac{k_8^2 - k_9 k_7}{k_8}\right) i\sin k_8(b-a)\right]}$$

$$B = \frac{Ae^{2ik_7 a}\left[\left(\frac{k_8 k_7 - k_9 k_8}{k_8}\right)\cos k_8(b-a) + \left(\frac{k_8^2 - k_9 k_7}{k_8}\right) i\sin k_8(b-a)\right]}{\left[\left(\frac{k_8 k_7 + k_9 k_8}{k_8}\right)\cos k_8(b-a) - \left(\frac{k_8^2 + k_9 k_7}{k_8}\right) i\sin k_8(b-a)\right]}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{e^{2ik_7 a}\left[\left(\frac{k_8 k_7 - k_9 k_8}{k_8}\right)\cos k_8(b-a) + \left(\frac{k_8^2 - k_9 k_7}{k_8}\right) i\sin k_8(b-a)\right]}{\left[\left(\frac{k_8 k_7 + k_9 k_8}{k_8}\right)\cos k_8(b-a) - \left(\frac{k_8^2 + k_9 k_7}{k_8}\right) i\sin k_8(b-a)\right]}$$

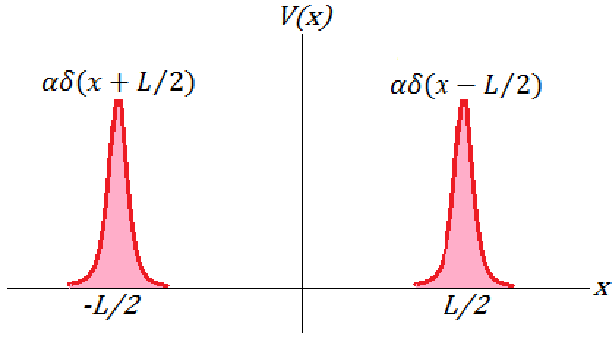
ดังนั้นจะได้ว่า

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{[(k_8 k_7 - k_9 k_8)^2 \cos^2 k_8(b-a) + (k_8^2 - k_9 k_7)^2 \sin^2 k_8(b-a)]}{[(k_8 k_7 + k_9 k_8)^2 \cos^2 k_8(b-a) + (k_8^2 + k_9 k_7)^2 \sin^2 k_8(b-a)]} \quad (4.1.3.16.b)$$

โดยที่ สมการ $(4.1.3.16.b)$ คือ ค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง

### 4.1.4 พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน

$$V(x) = \alpha\{\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2)\}$$




**ภาพที่ 4.4** พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน

**กรณี** $\boldsymbol{E} < 0$ และ $\boldsymbol{V(x) = 0}$

ให้ $k_\delta^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}E$ จะได้ว่าผลเฉลยคือ

$$X_{\mathrm{I}}(x) = Ae^{k_\delta x} + Be^{-k_\delta x}, \qquad x < -L/2$$

$$X_{\mathrm{II}}(x) = Ce^{k_\delta x} + De^{-k_\delta x}, -L/2 < x < L/2$$

$$X_{\mathrm{III}}(x) = Fe^{k_\delta x} \;, \qquad\qquad x > L/2$$

จะได้ว่าเงื่อนไขขอบเขต คือ

$$Ae^{-k_\delta L/2} + Be^{k_\delta L/2} = Ce^{-k_\delta L/2} + De^{k_\delta L/2}$$

$$Ce^{k_\delta L/2} + De^{-k_\delta L/2} = Fe^{k_\delta L/2}$$

จากการอินทิเกรตสมการชเรอดิงเงอร์ที่ $V(x) = \alpha\delta(x)$ ช่วง $\epsilon$ ถึง $-\epsilon$ โดยที่ $\epsilon \to 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{d^2X(x)}{dx^2}dx + \alpha\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)X(x)dx = E\int_{-\epsilon}^{\epsilon}X(x)\,dx$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{dX(\epsilon)}{dx} - \frac{dX(-\epsilon)}{dx}\right] + \alpha X(0) = 2\epsilon EX(\epsilon)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[X'(\epsilon) - X'(-\epsilon)] + \alpha X(0) = 2\epsilon EX(\epsilon)$$

โดยที่ $X'(\epsilon) = X_{\mathrm{I}}'(\epsilon), X'(-\epsilon) = X_{\mathrm{II}}'(-\epsilon)$ และ $X(\epsilon) = \mathrm{X}_{\mathrm{II}}(\epsilon)$

$$\lim_{\epsilon\to 0} -\frac{\hbar^2}{2m}[X_{\mathrm{I}}'(\epsilon) - X_{\mathrm{II}}'(-\epsilon)] + \alpha\mathrm{X}_{\mathrm{II}}(0) = 2\epsilon E\mathrm{X}_{\mathrm{II}}(\epsilon)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[X_{\mathrm{I}}'(0) - X_{\mathrm{II}}'(0)] + \alpha\mathrm{X}_{\mathrm{II}}(0) = 0$$

จากการอินทิเกรตเดลต้าฟังก์ชัน เราจะได้ว่า

เมื่อ $x = -L/2$ จะได้ว่า

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[X_{\mathrm{I}}'(-L/2\,) - X_{\mathrm{II}}'(-L/2\,)] + \alpha\mathrm{X}_{\mathrm{II}}(-L/2\,) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[k_\delta Ae^{-k_\delta L/2} -, k_\delta Be^{k_\delta L/2} - [k_\delta Ce^{-k_\delta L/2} - k_\delta De^{k_\delta L/2}]\,\right] + \alpha[Ce^{-k_\delta L/2} + De^{k_\delta L/2}] = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[k_\delta Ae^{-k_\delta L/2} - k_\delta Be^{k_\delta L/2} - [k_\delta Ce^{-k_\delta L/2} - k_\delta De^{k_\delta L/2}]\,\right] = -\,\alpha[Ce^{-k_\delta L/2} + De^{k_\delta L/2}]$$

$$k_\delta Ae^{-k_\delta L/2} - k_\delta Be^{k_\delta L/2} - [k_\delta Ce^{-k_\delta L/2} - k_\delta De^{k_\delta L/2}] = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}[Ce^{-k_\delta L/2} + De^{k_\delta L/2}]$$

ให้ $a_0 = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$

$$k_\delta Ae^{-k_\delta L/2} - k_\delta Be^{k_\delta L/2} - [k_\delta Ce^{-k_\delta L/2} - k_\delta De^{k_\delta L/2}] = 2a_0[Ce^{-k_\delta L/2} + De^{k_\delta L/2}]$$

เมื่อ $x = L/2$ จะได้ว่า

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[k_\delta Ce^{k_\delta L/2} - k_\delta De^{-k_\delta L/2} - k_\delta Fe^{k_\delta L/2}\right] + \alpha Fe^{k_\delta L/2} = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[k_\delta Ce^{k_\delta L/2} - k_\delta De^{-k_\delta L/2} - k_\delta Fe^{k_\delta L/2}\right] = -\alpha Fe^{k_\delta L/2}$$

$$\left[k_\delta Ce^{k_\delta L/2} - k_\delta De^{-k_\delta L/2} - k_\delta Fe^{k_\delta L/2}\right] = 2a_0 Fe^{k_\delta}$$

ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตจะได้ว่า

$$Ae^{-k_\delta L/2} + Be^{k_\delta L/2} = Ce^{-k_\delta L/2} + De^{k_\delta L/2} \qquad (4.1.4.1)$$

$$Ce^{k_\delta L/2} + De^{-k_\delta L/2} = Fe^{k_\delta L/2} \qquad (4.1.4.2)$$

$$k_\delta Ae^{-k_\delta L/2} - k_\delta Be^{k_\delta L/2} - [k_\delta Ce^{-k_\delta L/2} - k_\delta De^{k_\delta L/2}] = 2a_0\left[Ce^{-k_\delta L/2} + De^{k_\delta L/2}\right] (4.1.4.3)$$

$$\left[k_\delta Ce^{k_\delta L/2} - k_\delta De^{-k_\delta L/2} - k_\delta Fe^{k_\delta L/2}\right] = 2a_0 Fe^{k_\delta L/2} \qquad (4.1.4.4)$$

$$k_\delta Ce^{k_\delta L/2} - k_\delta De^{-k_\delta L/2} = (2a_0 + k_0)Fe^{k_\delta L/2} \qquad (4.1.4.5)$$

$k_0 \times (4.1.4.2)$;

$$k_\delta Ce^{k_\delta L/2} + k_\delta De^{-k_\delta L/2} = k_\delta Fe^{k_\delta L/2} \qquad (4.1.4.6)$$

$(4.1.4.5) + (4.1.4.6)$;

$$2k_\delta Ce^{k_\delta L/2} = (2a_0 + 2k_\delta)Fe^{k_\delta L/2}$$

$$C = \frac{a_0 + k_\delta}{k_\delta}F$$

$(4.1.4.6) - (4.1.4.5)$;

$$2k_\delta De^{-k_\delta L/2} = -2a_0 Fe^{k_\delta L/2}$$

$$D = -\frac{a_0}{k_\delta}Fe^{2k_\delta L/2}$$

แทน $C$ และ $D$ ใน (4.1.4.1) และ (4.1.4.3)

$$Ae^{-k_\delta L/2} + Be^{k_\delta L/2} = \frac{a_0 + k_\delta}{k_\delta}Fe^{-k_\delta L/2} - \frac{a_0}{k_\delta}Fe^{3k_\delta L/2} \qquad (4.1.4.7)$$

$$k_\delta A e^{-k_\delta L/2} - k_\delta B e^{k_\delta L/2} - [k_\delta \frac{a_0 + k_\delta}{k_\delta} F e^{-k_\delta L/2} + k_\delta \frac{a_0}{k_\delta} F e^{2k_\delta L/2} e^{k_\delta L/2}]$$
$$= 2a_0 \left[\frac{a_0 + k_\delta}{k_\delta} F e^{-k_\delta L/2} - \frac{a_0}{k_\delta} F e^{2k_\delta L/2} e^{k_\delta L/2}\right]$$

$$k_\delta A e^{-k_\delta L/2} - k_\delta B e^{k_\delta L/2}$$
$$= 2a_0 \left[\frac{a_0 + k_\delta}{k_\delta} F e^{-k_\delta L/2} - \frac{a_0}{k_\delta} F e^{2k_\delta L/2} e^{k_\delta L/2}\right] + [k_\delta \frac{a_0 + k_\delta}{k_\delta} F e^{-k_\delta L/2}$$
$$+ k_\delta \frac{a_0}{k_\delta} F e^{2k_\delta L/2} e^{k_\delta L/2}$$

$$k_\delta A e^{-k_\delta L/2} - k_\delta B e^{k_\delta L/2}$$
$$= 2a_0 \left[\frac{a_0 + k_\delta}{k_\delta} F e^{-k_\delta L/2} - \frac{a_0}{k_\delta} F e^{3k_\delta L/2}\right] + \left[(a_0 + k_\delta) F e^{-k_\delta L/2} + a_0 F e^{3k_\delta L/2}\right]$$

$$k_\delta A e^{-k_\delta L/2} - k_\delta B e^{k_\delta L/2}$$
$$= \left[2a_0 \frac{a_0 + k_\delta}{k_\delta} + (a_0 + k_\delta)\right] F e^{-k_\delta L/2} + \left[-2a_0 \frac{a_0}{k_\delta} + a_0\right] F e^{3k_\delta L/2} \tag{4.1.4.8}$$

$k_\delta \times$ (4.1.4.7);

$$k_\delta A e^{-k_\delta L/2} + k_\delta B e^{k_\delta L/2} = \left[(a_0 + k_\delta) F e^{-k_\delta L/2} - a_0 F e^{3k_\delta L/2}\right] \tag{4.1.4.9}$$

(4.1.4.8) + (4.1.4.9);

$$2k_\delta A e^{-k_\delta L/2} = \left[2a_0 \frac{a_0 + k_\delta}{k_\delta} + 2(a_0 + k_\delta)\right] F e^{-k_\delta L/2} + \left[-2a_0 \frac{a_0}{k_\delta}\right] F e^{3k_\delta L/2}$$

$$A = \left[2a_0 \frac{a_0 + k_\delta}{k_\delta} + 2(a_0 + k_\delta)\right] \frac{F}{2k_\delta} + \left[-2a_0 \frac{a_0}{k_\delta}\right] \frac{F}{2k_\delta} e^{4k_\delta L/2}$$

$$A = \left[\frac{a_0^2 + a_0 k_\delta}{k_\delta^2} + \frac{a_0 + k_\delta}{k_\delta}\right] F - \left[\frac{a_0^2}{k_\delta^2}\right] F e^{4k_\delta L/2}$$

$$F = \frac{A}{\left[\frac{a_0^2 + a_0 k_\delta}{k_\delta^2} + \frac{a_0 + k_\delta}{k_\delta}\right] - \left[\frac{a_0^2}{k_\delta^2}\right] e^{4k_\delta L/2}}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{\left[\frac{a_0^2 + a_0 k_\delta}{k_\delta^2} + \frac{a_0 + k_\delta}{k_\delta}\right] - \left[\frac{a_0^2}{k_\delta^2}\right] e^{4k_\delta L/2}}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{\left[\frac{a_0^2 + a_0 k_\delta}{k_\delta^2} + \frac{a_0 k_\delta + k_\delta^2}{k_\delta^2}\right] - \left[\frac{a_0^2}{k_\delta^2}\right] e^{4k_\delta L/2}}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{\left[\frac{(a_0 + k_\delta)^2}{k_\delta^2}\right] - \left[\frac{a_0^2}{k_\delta^2}\right] e^{4k_\delta L/2}}$$

$$\frac{F}{A}=\frac{k_\delta^2}{[(a_0+k_\delta)^2-a_0^2e^{4k_\delta L/2}]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$T=\left|\frac{F}{A}\right|^2=\frac{k_\delta^4}{[(a_0+k_\delta)^2-a_0^2e^{4k_\delta L/2}]^2} \qquad (4.1.4.9.a)$$

โดยที่ สมการ $(4.1.4.9.a)$ คือ ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง

$(4.1.4.9)-(4.1.4.8)$;

$$2k_\delta Be^{k_\delta L/2}=\left[-2a_0\frac{a_0+k_\delta}{k_\delta}\right]Fe^{-k_\delta L/2}+\left[2a_0\frac{a_0}{k_\delta}-2a_0\right]Fe^{3k_\delta L/2}$$

$$B=\left[\frac{a_0^2-a_0k_\delta}{k_\delta^2}\right]Fe^{-2k_\delta L/2}+\left[\frac{a_0^2-a_0k_\delta}{k_\delta^2}\right]Fe^{2k_\delta L/2}$$

$$B=\left[\left(\frac{a_0^2-a_0k_\delta}{k_\delta^2}\right)e^{-2k_\delta L/2}+\left(\frac{a_0^2-a_0k_\delta}{k_\delta^2}\right)e^{2k_\delta L/2}\right]F$$

$$B=\left[\left(\frac{a_0^2-a_0k_\delta}{k_\delta^2}\right)e^{-2k_\delta L/2}+\left(\frac{a_0^2-a_0k_\delta}{k_\delta^2}\right)e^{2k_\delta L/2}\right]$$
$$\cdot\frac{A}{\left[\frac{a_0^2+a_0k_\delta}{k_\delta^2}+\frac{a_0+k_\delta}{k_\delta}\right]-\left[\frac{a_0^2}{k_\delta^2}\right]e^{4k_\delta L/2}}$$

$$\frac{B}{A}=\frac{\left[\left(\frac{a_0^2-a_0k_\delta}{k_\delta^2}\right)e^{-2k_\delta L/2}+\left(\frac{a_0^2-a_0k_\delta}{k_\delta^2}\right)e^{2k_\delta L/2}\right]}{\frac{(a_0+k_\delta)^2-a_0^2e^{4k_\delta L/2}}{k_\delta^2}}$$

$$\frac{B}{A}=\frac{(a_0^2-a_0k_\delta)\left[e^{-2k_\delta L/2}+\ e^{2k_\delta L/2}\right]}{(a_0+k_\delta)^2-a_0^2e^{4k_\delta L/2}}=\frac{(a_0^2-a_0k_\delta)\cosh 2k_\delta\, L/2}{(a_0+k_\delta)^2-a_0^2e^{4k_\delta L/2}}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$R=\left|\frac{B}{A}\right|^2=\frac{(a_0^2-a_0k_\delta)^2\cosh^2 2k_\delta\, L/2}{[(a_0+k_\delta)^2-a_0^2e^{4k_\delta L/2}]^2} \qquad (4.1.4.9.b)$$

โดยที่ สมการ $(4.1.4.9.b)$ คือ ค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง

**กรณี** $\boldsymbol{E} > 0$ และ $\boldsymbol{V(x)} = \boldsymbol{0}$ จะได้ว่าผลเฉลย คือ

$$X_{\mathrm{I}}(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}\ , \qquad x < -L/2$$

$$X_{\mathrm{II}}(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}\ , -L/2 < x < L/2$$

$$X_{\mathrm{III}}(x) = Fe^{ikx}\ , \qquad x > L/2$$

โดยที่ $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$

จะได้ว่าเงื่อนไขขอบเขต คือ

$$Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$$

$$Ce^{ikL/2} + De^{-ikL/2} = Fe^{ikL/2}$$

จากการอินทิเกรตเดลต้าฟังก์ชัน เราจะได้ว่า

เมื่อ $x = -L/2$ จะได้ว่า

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[X_{\mathrm{I}}'(-L/2\,) - X_{\mathrm{II}}'(-L/2\,)] + \alpha \mathrm{X}_{\mathrm{II}}(-L/2\,) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[ikAe^{-ikL/2} - ikBe^{ikL/2} - [ikCe^{-ikL/2} - ikDe^{ikL/2}]\,\right] + \alpha[Ce^{-ikL/2} + De^{ikL/2}] = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[ikAe^{-ikL/2} - ikBe^{ikL/2} - [ikCe^{-ikL/2} - ikDe^{ikL/2}]\,\right] = -\,\alpha[Ce^{-ikL/2} + De^{ikL/2}]$$

$$ikAe^{-ikL/2} - ikBe^{ikL/2} - [ikCe^{-ikL/2} - ikDe^{ikL/2}] = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}[Ce^{-ikL/2} + De^{ikL/2}]$$

ให้ $a_0 = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$

$$ikAe^{-ikL/2} - ikBe^{ikL/2} - [ikCe^{-ikL/2} - ikDe^{ikL/2}] = 2a_0[Ce^{-ikL/2} + De^{ikL/2}]$$

เมื่อ $x = L/2$ จะได้ว่า

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[ikCe^{ikL/2} - ikDe^{-ikL/2} - ikFe^{ikL/2}\right] + \alpha Fe^{ikL/2} = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[ikCe^{ikL/2} - ikDe^{-ikL/2} - ikFe^{ikL/2}\right] = -\,\alpha Fe^{ikL/2}$$

$$\left[ikCe^{ikL/2} - ikDe^{-ikL/2} - ikFe^{ikL/2}\right] = \ 2a_0Fe^{ikL/2}$$

ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตจะได้ว่า

$$Ae^{-ikL/2} + Be^{ikL/2} = Ce^{-ikL/2} + De^{ikL/2} \tag{4.1.4.10}$$

$$Ce^{ikL/2} + De^{-ikL/2} = Fe^{ikL/2} \tag{4.1.4.11}$$

$$ikAe^{-ikL/2} - ikBe^{ikL/2} - \left[ikCe^{-ikL/2} - ikDe^{ikL/2}\right] = 2a_0\left[Ce^{-ikL/2} + De^{ikL/2}\right] \tag{4.1.4.12}$$

$$\left[ikCe^{ikL/2} - ikDe^{-ikL/2} - ikFe^{ikL/2}\right] = 2a_0Fe^{ikL/2} \tag{4.1.4.13}$$

$$ikCe^{ikL/2} - ikDe^{-ikL/2} = (2a_0 + ik)Fe^{ikL/2} \tag{4.1.4.14}$$

$ik \times (4.1.4.11)$;

$$ikCe^{ikL/2} + ikDe^{-ikL/2} = ikFe^{ikL/2} \tag{4.1.4.15}$$

$(4.1.4.15) + (4.1.4.14)$;

$$2ikCe^{ikL/2} = (2a_0 + 2ik)Fe^{ikL/2}$$

$$C = \frac{a_0 + ik}{ik}F$$

$(4.1.4.15) - (4.1.4.14)$;

$$2k_0De^{-ikL/2} = -2a_0Fe^{ikL/2}$$

$$D = -\frac{a_0}{ik}Fe^{2ikL/2}$$

แทน $C$ และ $D$ ใน 4.1.4.10 และ (4.1.4.11)

$$Ae^{-ikL/2} + Be^{ikL/2} = \frac{a_0 + ik}{ik}Fe^{-ikL/2} - \frac{a_0}{ik}Fe^{3ikL/2} \tag{4.1.4.16}$$

$$ikAe^{-ikL/2} - ikBe^{ikL/2} - \left[ik\frac{a_0 + ik}{ik}Fe^{-ikL/2} + ik\frac{a_0}{ik}Fe^{3ikL/2}\right]$$
$$= 2a_0\left[\frac{a_0 + ik}{ik}Fe^{-ikL/2} - \frac{a_0}{ik}Fe^{3ikL/2}\right]$$

$$ikAe^{-ikL/2} - ikBe^{ikL/2}$$
$$= 2a_0\left[\frac{a_0 + ik}{ik}Fe^{-ikL/2} - \frac{a_0}{ik}Fe^{3ikL/2}\right] + [ik\frac{a_0 + ik}{ik}Fe^{-ikL/2} + ik\frac{a_0}{ik}Fe^{3ikL/2}]$$

$$ikAe^{-ikL/2} - ikBe^{ikL/2}$$
$$= \left[2a_0\frac{a_0 + ik}{ik} + (a_0 + ik)\right]Fe^{-ikL/2} + \left[-2a_0\frac{a_0}{ik} + a_0\right] Fe^{3ikL/2} \tag{4.1.4.17}$$

$ik \times (4.1.4.16)$;

$$ikAe^{-ikL/2} + ikBe^{ikL/2} = (a_0 + ik)Fe^{-ikL/2} - a_0Fe^{3ikL/2} \tag{4.1.4.18}$$

$(4.1.4.18) + (4.1.4.17)$;

$$2ikAe^{-ikL/2} = \left[2a_0\frac{a_0+ik}{ik} + 2(a_0+ik)\right]Fe^{-ikL/2} + \left[-2a_0\frac{a_0}{ik}\right]\ Fe^{3ikL/2}$$

$$A = \left[2a_0\frac{a_0+ik}{ik} + 2(a_0+ik)\right]\frac{F}{2ik} + \left[-2a_0\frac{a_0}{ik}\right]\ \frac{F}{2ik}e^{4ikL/2}$$

$$A = \left[\frac{a_0^2+a_0 ik}{-k^2} + \frac{a_0+ik}{ik}\right]F - \left[\frac{a_0^2}{-k^2}\right]\ Fe^{4ikL/2}$$

$$F = \frac{A}{\left[\frac{a_0^2+a_0 ik}{-k^2} + \frac{a_0+ik}{ik}\right] - \left[\frac{a_0^2}{-k^2}\right]\ e^{4ikL/2}}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{\left[\frac{a_0^2+a_0 ik}{-k^2} + \frac{a_0+ik}{ik}\right] - \left[\frac{a_0^2}{-k^2}\right]\ e^{4ikL/2}}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{\left[\frac{a_0^2+a_0 ik}{-k^2} + \frac{a_0 ik - k^2}{-k^2}\right] - \left[\frac{a_0^2}{-k^2}\right]\ e^{4ikL/2}}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{\left[\frac{(a_0+ik)^2}{-k^2}\right] - \left[\frac{a_0^2}{-k^2}\right]\ e^{4ikL/2}}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{-k^2}{[(a_0+ik)^2 - a_0^2 e^{4ikL/2}]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{k^4}{[(a_0+ik)^2 - a_0^2 e^{4ikL/2}]^2} \qquad (4.1.4.18.a)$$

โดยที่ สมการ $(4.1.4.18.a)$ คือ ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง

$(4.1.4.18) - (4.1.4.17)$;

$$2ikBe^{ikL/2} = \left[-2a_0\frac{a_0+ik}{ik}\right]Fe^{-ikL/2} + \left[2a_0\frac{a_0}{ik} - 2a_0\right]\ Fe^{3ikL/2}$$

$$B = \left[\frac{a_0^2 - a_0 ik}{-k^2}\right]Fe^{-2ikL/2} + \left[\frac{a_0^2 - a_0 ik}{-k^2}\right]\ Fe^{2ikL/2}$$

$$B = \left[\left(\frac{a_0^2 - a_0 ik}{-k^2}\right)e^{-2ikL/2} + \left(\frac{a_0^2 - a_0 ik}{-k^2}\right)\ e^{2ikL/2}\right]\ F$$

$$B = \left[\left(\frac{a_0^2 - a_0 ik}{-k^2}\right) e^{-2ikL/2} + \left(\frac{a_0^2 - a_0 ik}{-k^2}\right) e^{2ikL/2}\right]$$
$$\times \frac{A}{\left[\frac{a_0^2 + a_0 ik}{-k^2} + \frac{a_0 + ik}{ik}\right] - \left[\frac{a_0^2}{-k^2}\right] e^{4ikL/2}}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\left[\left(\frac{a_0^2 - a_0 ik}{-k^2}\right) e^{-2ikL/2} + \left(\frac{a_0^2 - a_0 ik}{-k^2}\right) e^{2ikL/2}\right]}{\frac{(a_0 + ik)^2 - a_0^2 e^{4ikL/2}}{-k^2}}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{(a_0^2 - a_0 ik)\left[e^{-2ikL/2} + e^{2ikL/2}\right]}{(a_0 + ik)^2 - a_0^2 e^{4ikL/2}} = \frac{2(a_0^2 - a_0 ik)\cos 2k\, L/2}{(a_0 + ik)^2 - a_0^2 e^{4ikL/2}}$$

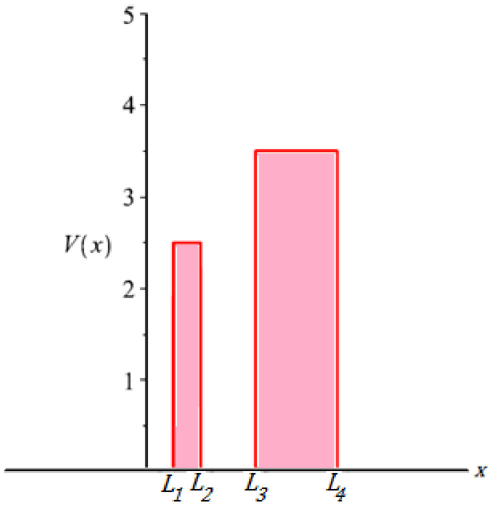
ดังนั้นจะได้ว่า

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{4(a_0^2 - a_0 ik)^2 \cos^2 2k\, L/2}{[(a_0 + ik)^2 - a_0^2 e^{4ikL/2}]^2} \qquad (4.1.4.18.b)$$

โดยที่ สมการ $(4.1.4.18.b)$ คือ ค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง

### 4.1.5 พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < L_1 \\ V_1, & L_1 \le x \le L_2 \\ 0, & L_2 < x < L_3 \\ V_2, & L_3 \le x \le L_4 \\ 0, & x > L_4 \end{cases}$$




**ภาพที่ 4.5** พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า $L_1 = 1,\ L_2 = 2,\ L_3 = 4$ และ $L_4\ = 7$ (เพชรอาภา, ไตรทศ และกุลภัทร, 2562)

กรณี $\boldsymbol{E > V_i, i = 0, 1, 2, 3}$ จะได้ว่าผลเฉลย คือ

$$X_{\mathrm{I}}(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$X_{\mathrm{II}}(x) = Ce^{ik_1x} + De^{-ik_1x}$$

$$X_{\mathrm{III}}(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

$$X_{\mathrm{IV}}(x) = He^{ik_2x} + Ie^{-ik_2x}$$

$$X_{\mathrm{V}}(x) = Je^{ikx}$$

โดยที่ $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, k_1 = \sqrt{\frac{2m(E-V_1)}{\hbar^2}}, k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_2)}{\hbar^2}}$

จะได้ว่าเงื่อนไขขอบเขต คือ

$$Ae^{ikL_1} + Be^{-ikL_1} = Ce^{ik_1L_1} + De^{-ik_1L_1} \tag{4.1.5.1}$$

$$ikAe^{ikL_1} - ikBe^{-ikL_1} = ikCe^{ik_1L_1} - ikDe^{-ik_1L_1} \tag{4.1.5.2}$$

$$Ce^{ik_1L_2} + De^{-ik_1L_2} = Fe^{ikL_2} + Ge^{-ikL_2} \tag{4.1.5.3}$$

$$ik_1Ce^{ik_1L_2} - ik_1De^{-ik_1L_2} = ikFe^{ikL_2} - ikGe^{-ikL_2} \tag{4.1.5.4}$$

$$Fe^{ikL_3} + Ge^{-ikL_3} = He^{ik_2L_3} + Ie^{-ik_2L_3} \quad (4.1.5.5)$$

$$ikFe^{ikL_3} - ikGe^{-ikL_3} = ik_2He^{k_2L_3} - ik_2Ie^{-k_2L_3} \quad (4.1.5.6)$$

$$He^{ik_2L_4} + Ie^{-ik_2L_4} = Je^{ikL_4} \quad (4.1.5.7)$$

$$ik_2He^{k_2L_4} - k_2Ie^{-k_2L_4} = ikJe^{ikL_4} \quad (4.1.5.8)$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง คือ

$$T = \left|\frac{J}{A}\right|^2 = \frac{64k^2k_2^2}{|\beta|^2}$$

โดยที่ $|\beta| = (2kk_2\cos[k_2(L_4 - L_3)] - i(k^2 + k_2^2)\sin[k_2(L_4 - L_3)])$

$$\times (2kk_1\cos[k_1(L_2 - L_1)] - i(k^2 + k_1^2)\sin[k_1(L_2 - L_1)])\frac{e^{-ik(L_3+L_4)+ik(L_2-L_1)}}{kk_1}$$

$$+(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2)\sin[k_1(L_2 - L_1)]\sin[k_2(L_4 - L_3)]\frac{e^{-ik(L_4-L_3)+ik(L_1+L_2)}}{kk_1}$$

**ความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง**

| **ชนิดของพลังงานศักย์** | Transmission$(T)$ เมื่อ $E < V$ | Transmission$(T)$ เมื่อ $E > V$ |
|---|---|---|
| สี่เหลี่ยมจัตุรัส | $\frac{4k^2k_0^2}{[4k^2k_0^2 + (k^2 + k_0^2)^2 \sinh^2 k_0 \mathrm{L}]}$ | $\frac{4k^2k_1^2}{[4k^2 k_1^2 \cos^2 k_1 \mathrm{L} + (k_1^2 + k^2)^2 \sin^2 k_1 \mathrm{L}]}$ |
| สี่เหลี่ยมผืนผ้า | $\frac{4k^2k_2^2}{[4k^2k_2^2 + (k^2 + k_2^2)^2 \sinh^2 2k_2 a]}$ | $\frac{4k^2k_3^2}{[4k^2k_3^2 \cos^2 2k_3 a + (k_3^2 + k^2)^2 \sin^2 2k_3 a]}$ |
| สี่เหลี่ยมจัตุรัส อสมมาตร | $\frac{4k_4^2 e^{2k_4 a} e^{-2k_6 b}}{\left[\left(\frac{k_5k_4 + k_6k_5}{k_5}\right)\cosh k_5(b-a) - \left(\frac{k_5^2 + k_6k_4}{k_5}\right)\sinh k_5(b-a)\right]^2}$ | $\frac{4k_7^2}{\left[\left(\frac{k_8k_7 + k_9k_8}{k_8}\right)^2 \cos^2 k_8(b-a) + \left(\frac{k_8^2 + k_9k_7}{k_8}\right)^2 \sin^2 k_8(b-a)\right]}$ |
| ดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน | $\frac{k_\delta^4}{[(a_0 + k_\delta)^2 - a_0^2 e^{4k_\delta L/2}]^2}$ | $\frac{k^4}{[(a_0 + ik)^2 - a_0^2 e^{4ikL/2}]^2}$ |
| ดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า | | $\frac{64k^2k_2^2}{\lvert\beta\rvert^2}$ |

**ตารางที่ 4.1** ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านโดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

โดยที่ $|\beta| = (2kk_2 \cos[k_2(L_4 - L_3)] - i(k^2 + k_2^2) \sin[k_2(L_4 - L_3)])$

$$\times (2kk_1 \cos[k_1(L_2 - L_1)] - i(k^2 + k_1^2) \sin[k_1(L_2 - L_1)]) \frac{e^{-ik(L_3+L_4)+ik(L_2-L_1)}}{kk_1}$$

$$+(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2) \sin[k_1(L_2 - L_1)] \sin[k_2(L_4 - L_3)] \frac{e^{-ik(L_4-L_3)+ik(L_1+L_2)}}{kk_1}$$

**ความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง**

| **ชนิดของพลังงานศักย์** | Reflection$(R)$ เมื่อ $E < V$ | Reflection$(R)$ เมื่อ $E > V$ |
|---|---|---|
| สี่เหลี่ยมจัตุรัส | $\dfrac{(k^2+k_0^2)^2\sinh^2 k_0\mathrm{L}}{[4k^2k_0^2+(k^2+k_0^2)^2\sinh^2 k_0\mathrm{L}]}$ | $\dfrac{(k_1^2-k^2)^2\sinh^2 k_1L}{[4k^2k_1^2\cos^2 k_1\mathrm{L}+(k_1^2+k^2)^2\sin^2 k_1\mathrm{L}]}$ |
| สี่เหลี่ยมผืนผ้า | $\dfrac{(k^2+k_2^2)^2\sinh^2 2k_2a}{[4k^2k_2^2+(k^2+k_2^2)^2\sinh^2 2k_2a]}$ | $\dfrac{(k_3^2-k^2)^2\sin^2 2k_3a}{[4k^2\,k_3^2\cos^2 2k_3a+(k_3^2+k^2)^2\sin^2 2k_3a]}$ |
| สี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร | $\dfrac{e^{4k_4a}\left[\left(\frac{k_5k_4-k_6k_5}{k_5}\right)\cosh k_5(b-a)+\left(\frac{k_5^2-k_6k_4}{k_5}\right)\sinh k_5(b-a)\right]^2}{\left[\left(\frac{k_5k_4+k_6k_5}{k_5}\right)\cosh k_5(b-a)-\left(\frac{k_5^2+k_6k_4}{k_5}\right)\sinh k_5(b-a)\right]^2}$ | $\dfrac{[(k_8k_7-k_9k_8)^2\cos^2 k_8(b-a)+(k_8^2-k_9k_7)^2\sin^2 k_8(b-a)]}{[(k_8k_7+k_9k_8)^2\cos^2 k_8(b-a)+(k_8^2+k_9k_7)^2\sin^2 k_8(b-a)]}$ |
| ดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน | $\dfrac{(a_0^2-a_0k_\delta)^2\cosh^2 2k_\delta L/2}{[(a_0+k_\delta)^2-a_0^2e^{4k_\delta L/2}]^2}$ | $\dfrac{4(a_0^2-a_0ik)^2\cos^2 2k\,L/2}{[(a_0+ik)^2-a_0^2e^{4ikL/2}]^2}$ |
| ดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า | | $1-\dfrac{64k^2k_2^2}{\lvert\beta\rvert^2}$ |

**ตารางที่ 4.2** ค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนโดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

โดยที่ $|\beta| = (2kk_2\cos[k_2(L_4-L_3)] - i(k^2+k_2^2)\sin[k_2(L_4-L_3)])$

$$\times(2kk_1\cos[k_1(L_2-L_1)] - i(k^2+k_1^2)\sin[k_1(L_2-L_1)])\frac{e^{-ik(L_3+L_4)+ik(L_2-L_1)}}{kk_1}$$

$$+(k^2-k_1^2)(k^2-k_2^2)\sin[k_1(L_2-L_1)]\sin[k_2(L_4-L_3)]\frac{e^{-ik(L_4-L_3)+ik(L_1+L_2)}}{kk_1}$$

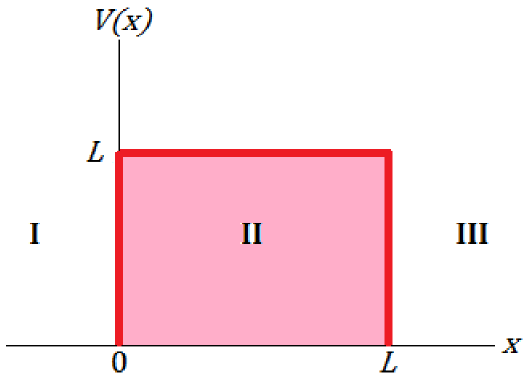
จากตารางที่ 4.1 และ 4.2 แสดงค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ โดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง โดยพลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง และพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก เมื่อใช้วิธีผลเฉลยแม่นตรงมีความยากและซับซ้อนในการหาผลเฉลย ดังนั้นพลังงานศักย์ข้างต้นนี้จึงไม่เหมาะสมในการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนโดยวิธีผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งพลังงานศักย์ที่เหมาะสมสำหรับวิธีนี้ในการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน คือ พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน และพลังงานศักย์แบบผสม (พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า) เนื่องจากมีศักย์เป็นค่าคงที่ ดังนั้นจึงง่ายต่อการคำนวณเมื่อใช้วิธีผลเฉลยแม่นตรง

## 4.2 วิธีประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี

วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB) ถูกค้นพบโดย Wentzel-Kramers-Brillouin ใช้ในการหาผลเฉลยซึ่งนำมาใช้กับกรณีที่พลังงานศักย์มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ เมื่อตำแหน่งเปลี่ยนไป (Slowly varying function of position) การเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ นั่นคือ พลังงานศักย์จะมีค่าเปลี่ยนไปน้อยมากในช่วงที่ความยาวเปลี่ยนไปหลายช่วงของความยาวคลื่นเดอบรอยล์ (พงษ์แก้ว, 2553)

### 4.2.1 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส

$$V(x) = \begin{cases} L, & 0 \leq x \leq L \\ 0, & x < 0, x > L \end{cases}$$




**ภาพที่ 4.6** พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส

**กรณี $E < L$**

จากผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีคือ

$$X(x) \approx \frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}} e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int \hbar k(x)dx} = \frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}} e^{\pm i\int k(x)dx} = \frac{U}{\sqrt{k(x)}} e^{\pm i\int k(x)dx}$$

โดยที่ $U = \frac{S}{\sqrt{\hbar}}$ เป็นค่าคงตัว

ดังนั้นจะได้ว่า

$$X_{\mathrm{I}}(x) = \frac{A}{\sqrt{k}} e^{i\int kdx} + \frac{B}{\sqrt{k}} e^{i\int kdx}$$

$$X_{\mathrm{II}}(x) = \frac{C}{\sqrt{k_0}} e^{\int k_0 dx} + \frac{D}{\sqrt{k_0}} e^{\int k_0 dx}$$

$$X_{\mathrm{III}}(x) = \frac{F}{\sqrt{k}} e^{i\int k dx}$$

โดยที่ $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ และ $k_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(L-E)$

จะได้ว่าเงื่อนไขขอบเขตคือ

$$\frac{A}{\sqrt{k}} + \frac{B}{\sqrt{k}} = \frac{C}{\sqrt{k_0}} + \frac{D}{\sqrt{k_0}} \tag{4.2.1.1}$$

$$ik\frac{A}{\sqrt{k}} - ik\frac{B}{\sqrt{k}} = k_0\frac{C}{\sqrt{k_0}} - k_0\frac{D}{\sqrt{k_0}} \tag{4.2.1.2}$$

$$\frac{C}{\sqrt{k_0}}e^{k_0L} + \frac{D}{\sqrt{k_0}}e^{-k_0L} = \frac{F}{\sqrt{k}}e^{ikL} \tag{4.2.1.3}$$

$$k_0\frac{C}{\sqrt{k_0}}e^{k_0L} - k_0\frac{D}{\sqrt{k_0}}e^{-k_0L} = ik\frac{F}{\sqrt{k}}e^{ikL} \tag{4.2.1.4}$$

$k_2 \times (4.2.1.3)$; $$k_0\frac{C}{\sqrt{k_0}}e^{k_0L} + k_0\frac{D}{\sqrt{k_0}}e^{-k_0L} = k_0\frac{F}{\sqrt{k}}e^{ikL} \tag{4.2.1.5}$$

$(4.2.1.4) + (4.2.1.5)$; $$2k_0\frac{C}{\sqrt{k_0}}e^{k_0L} = (ik+k_0)\frac{F}{\sqrt{k}}e^{ikL}$$

$$C = \frac{\sqrt{k_0}\left(\frac{ik+k_0}{\sqrt{k}}\right)Fe^{ikL}}{2k_0e^{k_0L}}$$

$(4.2.1.5) - (4.2.1.4)$; $$2k_0\frac{D}{\sqrt{k_0}}e^{-k_0L} = (k_0-ik)\frac{F}{\sqrt{k}}e^{ikL}$$

$$D = \frac{\sqrt{k_0}\left(\frac{k_0-ik}{\sqrt{k}}\right)Fe^{ikL}}{2k_0e^{-k_0L}}$$

แทน $C$ และ $D$ ใน (4.2.1.1) และ (4.2.1.2) จะได้ว่า

$$A+B = \left(\frac{ik+k_0}{2k_0}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{k_0L}} + \left(\frac{-ik+k_0}{2k_0}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{-k_0L}} \tag{4.2.1.6}$$

$$ikA - ikB = \left(\frac{ik+k_0}{2}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{k_0L}} - \left(\frac{-ik+k_0}{2}\right)\frac{Fe^{ikL}}{e^{-k_0L}} \tag{4.2.1.7}$$

เนื่องจากสมการ (4.2.1.6) และ (4.2.1.7) เหมือนกับสมการการหาแบบผลเฉลยแม่นตรง ดังนั้น คำตอบที่ได้จะเหมือนกับแบบผลเฉลยแม่นตรง นั่นคือ

$$R = \frac{(k^2+k_0^2)^2\sinh^2 k_0\mathrm{L}}{[4k^2k_0^2 + (k^2+k_0^2)^2\sinh^2 k_0\mathrm{L}]} \tag{4.2.1.8}$$

$$T = \frac{4k^2k_0^2}{[4k^2k_0^2 + (k^2 + k_0^2)^2 \sinh^2 k_0\mathrm{L}]} \tag{4.2.1.9}$$

โดยที่ สมการ (4.2.1.8) และ (4.2.1.9) คือ ค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนและการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้ผลเฉลยที่ได้จากวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ตามลำดับ

และในทำนองเดียวกับ**กรณี** $\boldsymbol{E} > L$ จะได้ว่า

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(k_1^2 - k^2)^2 \sinh^2 k_1 L}{[4k^2k_1^2 \cosh k_1\mathrm{L} + (k_1^2 + k^2)^2 \sinh^2 k_1\mathrm{L}]} \tag{4.2.1.10}$$

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4k^2k_1^2}{[4k^2\, k_1^2\cosh^2 k_1\mathrm{L} + (k_1^2 + k^2)^2 \sinh^2 k_1\mathrm{L}]} \tag{4.2.1.11}$$

โดยที่ $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - L)$

และสมการ (4.2.1.10) และ (4.2.1.11) คือ ค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนและการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้ผลเฉลยที่ได้จากวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ตามลำดับ

ต่อไปจะเป็นการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี

จากสมการ (3.1.17)

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b \sqrt{V(x) - E}dx\right)$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_0^L \sqrt{L - E}dx\right)$$

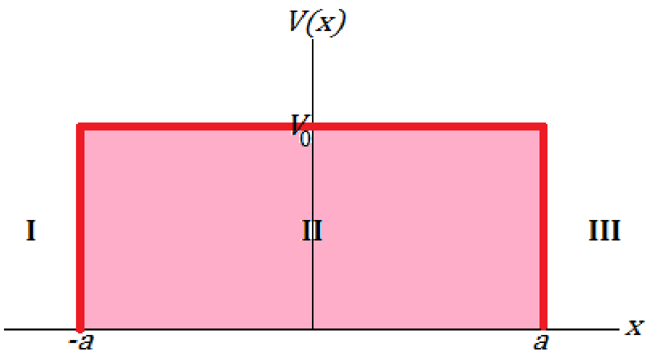
$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left[(\sqrt{L - E})x\right]_0^L\right)$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\,(\sqrt{L-E})L\right) \tag{4.2.1.12}$$

**4.2.2 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า**

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$




**ภาพที่ 4.7** พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า

**กรณี $E < V_0$**

จาก (3.1.7) ผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$X(x) \approx \frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}}e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int \hbar k(x)dx} = \frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}}e^{\pm i\int k(x)dx} = \frac{U}{\sqrt{k(x)}}e^{\pm i\int k(x)dx}$$

โดยที่ $U = \frac{S}{\sqrt{\hbar}}$ เป็นค่าคงตัว

ดังนั้นจะได้ว่า

$$X_{\mathrm{I}}(x) = \frac{A}{\sqrt{k}}e^{i\int kdx} + \frac{B}{\sqrt{k}}e^{-i\int kdx}$$

$$X_{\mathrm{II}}(x) = \frac{C}{\sqrt{k_2}}e^{\int k_2dx} + \frac{D}{\sqrt{k_2}}e^{-\int k_2dx}$$

$$X_{\mathrm{III}}(x) = \frac{F}{\sqrt{k}}e^{i\int kdx}$$

$$\frac{A}{\sqrt{k}}e^{-ika} + \frac{B}{\sqrt{k}}e^{ika} = \frac{C}{\sqrt{k_2}}e^{-k_2 a} + \frac{D}{\sqrt{k_2}}e^{k_2 a} \tag{4.2.2.1}$$

$$ik\frac{A}{\sqrt{k}}e^{-ika} - ik\frac{B}{\sqrt{k}}e^{ika} = k_2\frac{C}{\sqrt{k_2}}e^{-k_2 a} - k_2\frac{D}{\sqrt{k_2}}e^{k_2 a} \tag{4.2.2.2}$$

$$\frac{C}{\sqrt{k_2}}e^{k_2 a} + \frac{D}{\sqrt{k_2}}e^{-k_2 a} = \frac{F}{\sqrt{k}}e^{ika} \tag{4.2.2.3}$$

$$k_2\frac{C}{\sqrt{k_2}}e^{k_2 a} - k_2\frac{D}{\sqrt{k_2}}e^{-k_2 a} = ik\frac{F}{\sqrt{k}}e^{ika} \tag{4.2.2.4}$$

$k_2 \times (4.2.2.3)$;

$$k_2\frac{C}{\sqrt{k_2}}e^{k_2 a} + k_2\frac{D}{\sqrt{k_2}}e^{-k_2 a} = k_2\frac{F}{\sqrt{k}}e^{ika} \tag{4.2.2.5}$$

$(4.2.2.4) + (4.2.2.5)$;

$$2k_2\frac{C}{\sqrt{k_2}}e^{k_2 a} = (ik + k_2)\frac{F}{\sqrt{k}}e^{ika}$$

$$C = \frac{\sqrt{k_2}\left(\frac{ik+k_2}{\sqrt{k}}\right)Fe^{ika}}{2k_2 e^{k_2 a}}$$

$(4.2.2.5) - (4.2.2.4)$;

$$2k_2\frac{D}{\sqrt{k_2}}e^{-k_2 a} = (k_2 - ik)\frac{F}{\sqrt{k}}e^{ika}$$

$$D = \frac{\sqrt{k_2}\left(\frac{k_2-ik}{\sqrt{k}}\right)Fe^{ika}}{2k_2 e^{-k_2 a}}$$

แทน $C$ และ $D$ ใน (4.2.2.1) และ (4.2.2.2) จะได้ว่า

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = \frac{(ik + k_2)Fe^{ika}}{2k_2 e^{2k_2 a}} + \frac{(k_2 - ik)Fe^{ika}}{2k_2 e^{-2k_2 a}} \tag{4.2.2.6}$$

$$ikAe^{-ika} - ikBe^{ika} = \frac{(ik + k_2)Fe^{ika}}{2e^{2k_2 a}} - \frac{(k_2 - ik)Fe^{ika}}{2e^{-2k_2 a}} \tag{4.2.2.7}$$

เนื่องจากสมการ (4.2.2.6) และ (4.2.2.7) เหมือนกับสมการการหาแบบผลเฉลยแม่นตรง ดังนั้น คำตอบที่ได้จะเหมือนกับแบบผลเฉลยแม่นตรง นั่นคือ

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4k^2k_2^2}{[4k^2k_2^2 + (k^2 + k_2^2)^2 \sinh^2 2k_2 a]} \tag{4.2.2.8}$$

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(k^2 + k_2^2)^2 \sinh^2 2k_2 a}{[4k^2k_2^2 + (k^2 + k_2^2)^2 \sinh^2 2k_2 a]} \tag{4.2.2.9}$$

โดยที่ $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ และ $k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$

และสมการ (4.2.2.8) และ (4.2.2.9) คือ ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้ผลเฉลยที่ได้จากวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ตามลำดับ

และในทำนองเดียวกับ**กรณี $\boldsymbol{E > V_0}$** จะได้ว่า

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4k^2k_3^2}{[4k^2k_3^2\cos^2 2k_3a + (k_3^2+k^2)^2\sin^2 2k_3a]} \qquad (4.2.2.10)$$

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(k_3^2-k^2)^2\sinh^2 2k_3a}{[4k^2\,k_3^2\cos^2 2k_3a + (k_3^2+k^2)^2\sin^2 2k_3a]} \qquad (4.2.2.11)$$

โดยที่ $k_3^2 = \dfrac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$

และสมการ (4.2.2.10) และ (4.2.2.11) คือ ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้ผลเฉลยที่ได้จากวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ตามลำดับ

ต่อไปจะเป็นการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี

ในกรณี $\boldsymbol{E < V_0}$ จาก (3.1.17) จะได้ว่า

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b \sqrt{V(x)-E}\,dx\right)$$

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_{-a}^a \sqrt{V_0-E}\,dx\right)$$

$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\,\left[\left(\sqrt{V_0-E}\right)x\right]_{-a}^a\right)$$

$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\,\left[\left(\sqrt{V_0-E}\right)x\right]_{-a}^a\right)$$

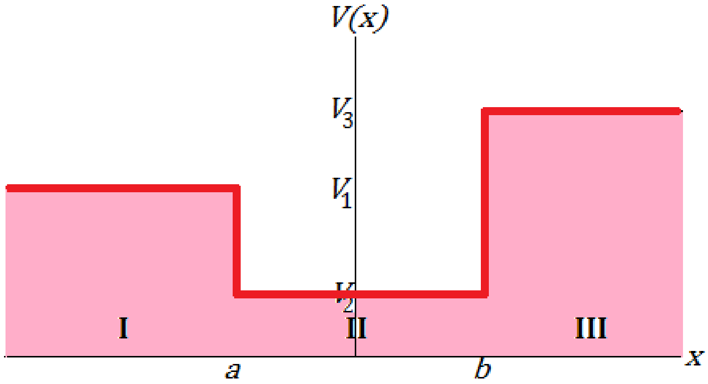
$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\,\left[a\sqrt{V_0-E} - (-a\sqrt{V_0-E})\right]\right)$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left[2a\sqrt{V_0 - E}\right]\right) \tag{4.2.2.12}$$

### 4.2.3 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร

$$V(x) = \begin{cases} V_1, & x < a \\ V_2, & a < x < b \\ V_3, & x > b \end{cases}$$




**ภาพที่ 4.8** พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร

**กรณี $E < V_i, i = 1, 2, 3$**

จาก (3.1.7) ผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$X(x) \approx \frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}} e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int \hbar k(x)dx} = \frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}} e^{\pm i\int k(x)dx} = \frac{U}{\sqrt{k(x)}} e^{\pm i\int k(x)dx}$$

โดยที่ $U = \frac{S}{\sqrt{\hbar}}$ เป็นค่าคงตัว

ดังนั้นจะได้ว่า

$$X_{\mathrm{I}}(x) = \frac{A}{\sqrt{k_4}} e^{\int k_4 dx} + \frac{B}{\sqrt{k_4}} e^{-\int k_4 dx}$$

$$X_{\mathrm{II}}(x) = \frac{C}{\sqrt{k_5}} e^{\int k_5 dx} + \frac{D}{\sqrt{k_5}} e^{-\int k_5 dx}$$

$$X_{\mathrm{III}}(x) = \frac{F}{\sqrt{k_6}} e^{\int k_6 dx}$$

โดยที่ $k_4{}^2 = \frac{2m(V_1-E)}{\hbar^2}$, $k_5^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_2 - E)$ และ $k_6^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_3 - E)$

$$\frac{A}{\sqrt{k_4}}e^{k_4a} + \frac{B}{\sqrt{k_4}}e^{-k_4a} = \frac{C}{\sqrt{k_5}}e^{k_5a} + \frac{D}{\sqrt{k_5}}e^{-k_5a} \tag{4.2.3.1}$$

$$k_4\frac{A}{\sqrt{k_4}}e^{k_4a} - k_4\frac{B}{\sqrt{k_4}}e^{-k_4a} = k_5\frac{C}{\sqrt{k_5}}e^{k_5a} - k_5\frac{D}{\sqrt{k_5}}e^{-k_5a} \tag{4.2.3.2}$$

$$\frac{C}{\sqrt{k_5}}e^{k_5b} + \frac{D}{\sqrt{k_5}}e^{-k_5b} = \frac{F}{\sqrt{k_6}}e^{k_6b} \tag{4.2.3.3}$$

$$k_5\frac{C}{\sqrt{k_5}}e^{k_5b} - k_5\frac{D}{\sqrt{k_5}}e^{-k_5b} = k_6\frac{F}{\sqrt{k_6}}e^{k_6b} \tag{4.2.3.4}$$

$k_5 \times (4.2.3.3)$;
$$k_5\frac{C}{\sqrt{k_5}}e^{k_5b} + k_5\frac{D}{\sqrt{k_5}}e^{-k_5b} = k_5\frac{F}{\sqrt{k_6}}e^{k_6b} \tag{4.2.3.5}$$

$(4.2.3.4) + (4.2.3.5)$;
$$2k_5\frac{C}{\sqrt{k_5}}e^{k_5b} = (k_5 + k_6)\frac{F}{\sqrt{k_6}}e^{k_6b}$$

$$C = \frac{\sqrt{k_5}\left(\frac{k_5+k_6}{\sqrt{k_6}}\right)Fe^{k_6b}}{2k_5e^{k_5b}}$$

$(4.2.3.5) - (4.2.3.4)$;

$$2k_5\frac{D}{\sqrt{k_5}}e^{-k_5b} = (k_5 - k_6)\frac{F}{\sqrt{k_6}}e^{k_6b}$$

$$D = \frac{\sqrt{k_5}\left(\frac{k_5-k_6}{\sqrt{k_6}}\right)Fe^{k_6b}}{2k_5e^{-k_5b}}$$

แทน $C$ และ $D$ ใน (4.2.3.1) และ (4.2.3.2) จะได้ว่า

$$\frac{A}{\sqrt{k_4}}e^{k_4a} + \frac{B}{\sqrt{k_4}}e^{-k_4a} = \frac{\left(\frac{k_5+k_6}{\sqrt{k_6}}\right)Fe^{k_6b}}{2k_5e^{k_5(b-a)}} + \frac{\left(\frac{k_5-k_6}{\sqrt{k_6}}\right)Fe^{k_6b}}{2k_5e^{-k_5(b-a)}} \tag{4.2.3.6}$$

$$k_4\frac{A}{\sqrt{k_4}}e^{k_4a} - k_4\frac{B}{\sqrt{k_4}}e^{-k_4a} = \frac{\left(\frac{k_5+k_6}{\sqrt{k_6}}\right)Fe^{k_6b}}{2e^{k_5(b-a)}} - \frac{\left(\frac{k_5-k_6}{\sqrt{k_6}}\right)Fe^{k_6b}}{2e^{-k_5(b-a)}} \tag{4.2.3.7}$$

$k_4 \times (4.2.3.6)$;

$$k_4\frac{A}{\sqrt{k_4}}e^{k_4a} + k_4\frac{B}{\sqrt{k_4}}e^{-k_4a} = k_4\frac{\left(\frac{k_5+k_6}{\sqrt{k_6}}\right)Fe^{k_6b}}{2k_5e^{k_5(b-a)}} + k_4\frac{\left(\frac{k_5-k_6}{\sqrt{k_6}}\right)Fe^{k_6b}}{2k_5e^{-k_5(b-a)}} \tag{4.2.3.8}$$

(4.2.3.8) + (4.2.3.7);

$$2k_4\frac{A}{\sqrt{k_4}}e^{k_4a}=\frac{Fe^{k_6b}}{e^{k_5(b-a)}}\left[k_4\frac{\left(\frac{k_5+k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2k_5}+\frac{\left(\frac{k_5+k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2}\right]+\frac{Fe^{k_6b}}{e^{-k_5(b-a)}}\left[k_4\frac{\left(\frac{k_5-k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2k_5}-\frac{\left(\frac{k_5-k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2}\right]$$

$$A=\frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6b}}{2k_4e^{k_4a}}\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(k_4\frac{\left(\frac{k_5+k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2k_5}+\frac{\left(\frac{k_5+k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(k_4\frac{\left(\frac{k_5-k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2k_5}-\frac{\left(\frac{k_5-k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2}\right)\right]$$

$$A=\frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6b}}{2k_4e^{k_4a}}\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{\left(\frac{k_5+k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2}\right)\left(\frac{k_4}{k_5}+1\right)+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{\left(\frac{k_5-k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2}\right)\left(\frac{k_4}{k_5}-1\right)\right]$$

$$A=\frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6b}}{2k_4e^{k_4a}}\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{(k_5+k_6)}{2\sqrt{k_6}}\right)\left(\frac{k_4}{k_5}+1\right)+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{(k_5-k_6)}{2\sqrt{k_6}}\right)\left(\frac{k_4}{k_5}-1\right)\right]$$

$$A=\frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6b}}{2k_4e^{k_4a}}\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_4k_5+k_5^2+k_4k_6+k_5k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_4k_5-k_5^2-k_4k_6+k_5k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\right]$$

$$A=\frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6b}}{2k_4e^{k_4a}}\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left[\left(\frac{k_4k_5+k_5k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)+\left(\frac{k_5^2+k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left[\left(\frac{k_4k_5+k_5k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)-\left(\frac{k_5^2+k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\right]\right]$$

$$A=\frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6b}}{2k_4e^{k_4a}}\left[\left(\frac{k_4k_5+k_5k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\left(\frac{k_5^2+k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)-\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\right]\right]$$

$$A=\frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6b}}{2k_4e^{k_4a}}\left[\left(\frac{k_4k_5+k_5k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\left[e^{-k_5(b-a)}+e^{k_5(b-a)}\right]+\left(\frac{k_5^2+k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\left[e^{-k_5(b-a)}-e^{k_5(b-a)}\right]\right]$$

$$A=\frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6b}}{2k_4e^{k_4a}}\left[\left(\frac{k_4k_5+k_5k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\cosh k_5(b-a)-\left(\frac{k_5^2+k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\sinh k_5(b-a)\right]$$

$$F=\frac{2k_4e^{k_4a}A}{\sqrt{k_4}e^{k_6b}\left[\left(\frac{k_4k_5+k_5k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\cosh k_5(b-a)-\left(\frac{k_5^2+k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\sinh k_5(b-a)\right]}$$

$$\frac{F}{A}=\frac{2k_4e^{k_4a}}{\sqrt{k_4}e^{k_6b}\left[\left(\frac{k_4k_5+k_5k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\cosh k_5(b-a)-\left(\frac{k_5^2+k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\sinh k_5(b-a)\right]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร โดยใช้ผลเฉลยที่ได้จากวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$T=\left|\frac{F}{A}\right|^2$$

$$=\frac{4k_4^2e^{2k_4a}}{k_4e^{2k_6b}\left[\left(\frac{k_4k_5+k_5k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)^2\cosh^2 k_5(b-a)+\left(\frac{k_5^2+k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)^2\sinh^2 k_5(b-a)\right]^2}\,(4.2.3.8.a)$$

$(4.2.3.8)-(4.2.3.7)$;

$$2k_4\frac{B}{\sqrt{k_4}}e^{-k_4a}=\frac{Fe^{k_6b}}{e^{k_5(b-a)}}\left[k_4\frac{\left(\frac{k_5+k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2k_5}-\frac{\left(\frac{k_5+k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2}\right]+\frac{Fe^{k_6b}}{e^{-k_5(b-a)}}\left[k_4\frac{\left(\frac{k_5-k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2k_5}+\frac{\left(\frac{k_5-k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2}\right]$$

$$\begin{aligned}B=\frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6b}}{2k_4e^{-k_4a}}\Bigg[&\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(k_4\frac{\left(\frac{k_5+k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2k_5}-\frac{\left(\frac{k_5+k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2}\right)\\&+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(k_4\frac{\left(\frac{k_5-k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2k_5}+\frac{\left(\frac{k_5-k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

$$B = \frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6 b}}{2k_4 e^{-k_4 a}}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{\left(\frac{k_5+k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2}\right)\left(\frac{k_4}{k_5}-1\right) \\ +\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{\left(\frac{k_5-k_6}{\sqrt{k_6}}\right)}{2}\right)\left(\frac{k_4}{k_5}+1\right)\end{array}\right]$$

$$B = \frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6 b}}{2k_4 e^{-k_4 a}}\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{(k_5+k_6)}{2\sqrt{k_6}}\right)\left(\frac{k_4}{k_5}-1\right)+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{(k_5-k_6)}{2\sqrt{k_6}}\right)\left(\frac{k_4}{k_5}+1\right)\right]$$

$$B = \frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6 b}}{2k_4 e^{-k_4 a}}\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_4k_5-k_5^2+k_4k_6-k_5k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left(\frac{k_4k_5+k_5^2-k_4k_6-k_5k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\right]$$

$$B = \frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6 b}}{2k_4 e^{-k_4 a}}\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)\left[\left(\frac{k_4k_5-k_5k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)-\left(\frac{k_5^2-k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\left[\left(\frac{k_4k_5-k_5k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)+\left(\frac{k_5^2-k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\right]\right]$$

$$B = \frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6 b}}{2k_4 e^{-k_4 a}}\left[\left(\frac{k_4k_5-k_5k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\left[\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\left(\frac{k_5^2-k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\left[-\left(\frac{1}{e^{k_5(b-a)}}\right)+\left(\frac{1}{e^{-k_5(b-a)}}\right)\right]\right]$$

$$B = \frac{\sqrt{k_4}Fe^{k_6 b}}{2k_4 e^{-k_4 a}}\left[\left(\frac{k_4k_5-k_5k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\left[e^{-k_5(b-a)}+e^{k_5(b-a)}\right]+\left(\frac{k_5^2-k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\left[-e^{-k_5(b-a)}+e^{k_5(b-a)}\right]\right]$$

$$B = F\frac{\sqrt{k_4}e^{k_6 b}}{2k_4 e^{k_4 a}}\left[\left(\frac{k_4k_5-k_5k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\cosh k_5(b-a)+\left(\frac{k_5^2-k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\sinh k_5(b-a)\right]$$

$$B = \frac{2k_4e^{k_4 a}A}{\sqrt{k_4}e^{k_6 b}\left[\left(\frac{k_4k_5+k_5k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\cosh k_5(b-a)-\left(\frac{k_5^2+k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\sinh k_5(b-a)\right]}$$
$$\times\frac{\sqrt{k_4}e^{k_6 b}}{2k_4 e^{k_4 a}}\left[\left(\frac{k_4k_5-k_5k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\cosh k_5(b-a)+\left(\frac{k_5^2-k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\sinh k_5(b-a)\right]$$

$$B=\frac{A\left[\left(\frac{k_4k_5-k_5k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\cosh k_5(b-a)+\left(\frac{k_5^2-k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\sinh k_5(b-a)\right]}{\left[\left(\frac{k_4k_5+k_5k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\cosh k_5(b-a)-\left(\frac{k_5^2+k_4k_6}{2k_5\sqrt{k_6}}\right)\sinh k_5(b-a)\right]}$$

$$\frac{B}{A}=\frac{\left[\left(\frac{k_4k_5-k_5k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\cosh k_5(b-a)+\left(\frac{k_5^2-k_4k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\sinh k_5(b-a)\right]}{\left[\left(\frac{k_4k_5+k_5k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\cosh k_5(b-a)-\left(\frac{k_5^2+k_4k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\sinh k_5(b-a)\right]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร โดยใช้ผลเฉลยที่ได้จากวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$R=\left|\frac{B}{A}\right|^2$$
$$=\frac{\left[\left(\frac{k_4k_5-k_5k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\cosh k_5(b-a)+\left(\frac{k_5^2-k_4k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\sinh k_5(b-a)\right]^2}{\left[\left(\frac{k_4k_5+k_5k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\cosh k_5(b-a)-\left(\frac{k_5^2+k_4k_6}{k_5\sqrt{k_6}}\right)\sinh k_5(b-a)\right]^2} \qquad (4.2.3.8.b)$$

**กรณี $\boldsymbol{E>V_i, i=1,2,3}$**

จาก (3.1.7) ผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$X(x)\approx\frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}}e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int\hbar k(x)dx}=\frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}}e^{\pm i\int k(x)dx}=\frac{U}{\sqrt{k(x)}}e^{\pm i\int k(x)dx}$$

โดยที่ $U=\frac{S}{\sqrt{\hbar}}$ เป็นค่าคงตัว

ดังนั้นจะได้ว่า

$$X_{\mathrm{I}}(x)=\frac{A}{\sqrt{k_7}}e^{i\int k_7dx}+\frac{B}{\sqrt{k_7}}e^{-i\int k_7dx}$$

$$X_{\mathrm{II}}(x)=\frac{C}{\sqrt{k_8}}e^{i\int k_8dx}+\frac{D}{\sqrt{k_5}}e^{-i\int k_8dx}$$

$$X_{\mathrm{III}}(x)=\frac{F}{\sqrt{k_9}}e^{i\int k_9dx}$$

โดยที่ $k_7^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_1)$, $k_8^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_2)$, $k_9^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_3)$

จะได้ว่าเงื่อนไขขอบเขตคือ

$$\frac{A}{\sqrt{k_7}}e^{ik_7a}+\frac{B}{\sqrt{k_7}}e^{-ik_7a}=\frac{C}{\sqrt{k_8}}e^{ik_8a}+\frac{D}{\sqrt{k_8}}e^{-ik_8a} \tag{4.2.3.9}$$

$$k_7\frac{A}{\sqrt{k_7}}e^{ik_7a}-k_7\frac{B}{\sqrt{k_7}}e^{-ik_7a}=k_8\frac{C}{\sqrt{k_8}}e^{ik_8a}-k_8\frac{D}{\sqrt{k_8}}e^{-ik_8a} \tag{4.2.3.10}$$

$$\frac{C}{\sqrt{k_8}}e^{ik_8b}+\frac{D}{\sqrt{k_8}}e^{-ik_8b}=\frac{F}{\sqrt{k_9}}e^{ik_9b} \tag{4.2.3.11}$$

$$k_8\frac{C}{\sqrt{k_8}}e^{ik_8b}-k_8\frac{D}{\sqrt{k_8}}e^{-ik_8b}=k_9\frac{F}{\sqrt{k_9}}e^{ik_9b} \tag{4.2.3.12}$$

$k_8 \times$ (4.2.3.11);
$$k_8\frac{C}{\sqrt{k_8}}e^{ik_8b}+k_8\frac{D}{\sqrt{k_8}}e^{-ik_8b}=k_8\frac{F}{\sqrt{k_9}}e^{ik_9b} \tag{4.2.3.13}$$

(4.2.3.12) + (4.2.3.13);
$$2k_8\frac{C}{\sqrt{k_8}}e^{ik_8b}=(k_8+k_9)\frac{F}{\sqrt{k_9}}e^{ik_9b}$$

$$C=\frac{\sqrt{k_8}\left(\frac{k_8+k_9}{\sqrt{k_9}}\right)Fe^{ik_9b}}{2k_8e^{ik_8b}}$$

(4.2.3.13) − (4.2.3.12);

$$2k_8\frac{D}{\sqrt{k_8}}e^{-ik_8b}=(k_8-k_9)\frac{F}{\sqrt{k_9}}e^{ik_9b}$$

$$D=\frac{\sqrt{k_8}\left(\frac{k_8-k_9}{\sqrt{k_9}}\right)Fe^{ik_9b}}{2k_8e^{-ik_8b}}$$

แทน $C$ และ $D$ ใน (4.2.3.9) และ (4.2.3.10) จะได้ว่า

$$\frac{A}{\sqrt{k_7}}e^{ik_7a}+\frac{B}{\sqrt{k_7}}e^{-ik_7a}=\frac{\left(\frac{k_8+k_9}{\sqrt{k_9}}\right)Fe^{ik_9b}}{2k_8e^{ik_8(b-a)}}+\frac{\left(\frac{k_8-k_9}{\sqrt{k_9}}\right)Fe^{ik_9b}}{2k_8e^{-ik_8(b-a)}} \tag{4.2.3.14}$$

$$k_7\frac{A}{\sqrt{k_7}}e^{ik_7a}-k_7\frac{B}{\sqrt{k_7}}e^{-ik_7a}=\frac{\left(\frac{k_8+k_9}{\sqrt{k_9}}\right)Fe^{ik_9b}}{2e^{ik_8(b-a)}}-\frac{\left(\frac{k_8-k_9}{\sqrt{k_9}}\right)Fe^{ik_9b}}{2e^{-ik_8(b-a)}} \tag{4.2.3.15}$$

$k_7 \times (4.2.3.14)$;

$$k_7 \frac{A}{\sqrt{k_7}} e^{ik_7 a} + k_7 \frac{B}{\sqrt{k_7}} e^{-ik_7 a} = k_7 \frac{\left(\frac{k_8 + k_9}{\sqrt{k_9}}\right) F e^{ik_9 b}}{2k_8 e^{ik_8(b-a)}} + k_7 \frac{\left(\frac{k_8 - k_9}{\sqrt{k_9}}\right) F e^{ik_9 b}}{2k_8 e^{-ik_8(b-a)}} \quad (4.2.3.16)$$

$(4.2.3.16) + (4.2.3.15)$;

$$2k_7 \frac{A}{\sqrt{k_7}} e^{ik_7 a} = \frac{F e^{ik_9 b}}{e^{ik_8(b-a)}} \left[ k_7 \frac{\left(\frac{k_8 + k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2k_8} + \frac{\left(\frac{k_8 + k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2} \right] + \frac{F e^{ik_9 b}}{e^{-ik_8(b-a)}} \left[ k_7 \frac{\left(\frac{k_8 - k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2k_8} - \frac{\left(\frac{k_8 - k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2} \right]$$

$$A = \frac{\sqrt{k_7} F e^{ik_9 b}}{2k_7 e^{ik_7 a}} \left[ \left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right) k_7 \frac{\left(\frac{k_8 + k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2k_8} + \frac{\left(\frac{k_8 + k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2} + \left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right) \left( k_7 \frac{\left(\frac{k_8 - k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2k_8} - \frac{\left(\frac{k_8 - k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2} \right) \right]$$

$$A = \frac{\sqrt{k_7} F e^{ik_9 b}}{2k_7 e^{ik_7 a}} \left[ \left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right) \left( \frac{\left(\frac{k_8 + k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2} \right) \left(\frac{k_7}{k_8} + 1\right) + \left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right) \left( \frac{\left(\frac{k_8 - k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2} \right) \left(\frac{k_7}{k_8} - 1\right) \right]$$

$$A = \frac{\sqrt{k_7} F e^{ik_9 b}}{2k_7 e^{ik_7 a}} \left[ \left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right) \left( \frac{k_7 k_8 + k_8^2 + k_7 k_9 + k_8 k_9}{2k_8 \sqrt{k_9}} \right) + \left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right) \left( \frac{k_7 k_8 - k_8^2 - k_7 k_9 + k_8 k_9}{2k_8 \sqrt{k_9}} \right) \right]$$

$$A = \frac{\sqrt{k_7} F e^{ik_9 b}}{2k_7 e^{ik_7 a}} \left[ \left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right) \left[ \left( \frac{k_7 k_8 + k_8 k_9}{2k_8 \sqrt{k_9}} \right) + \left( \frac{k_8^2 + k_7 k_9}{2k_8 \sqrt{k_9}} \right) \right] + \left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right) \left[ \left( \frac{k_7 k_8 + k_8 k_9}{2k_8 \sqrt{k_9}} \right) - \left( \frac{k_8^2 + k_7 k_9}{2k_8 \sqrt{k_9}} \right) \right] \right]$$

$$A = \frac{\sqrt{k_7} F e^{ik_9 b}}{2k_7 e^{ik_7 a}} \left[ \left( \frac{k_7 k_8 + k_8 k_9}{2k_8 \sqrt{k_9}} \right) \left[ \left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right) + \left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right) \right] + \left( \frac{k_8^2 + k_7 k_9}{2k_8 \sqrt{k_9}} \right) \left[ \left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right) - \left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right) \right] \right]$$

$$A = \frac{\sqrt{k_7} F e^{ik_9 b}}{2k_7 e^{ik_7 a}} \left[ \left( \frac{k_7 k_8 + k_8 k_9}{2k_8 \sqrt{k_9}} \right) \left[ e^{-ik_8(b-a)} + e^{ik_8(b-a)} \right] + \left( \frac{k_8^2 + k_7 k_9}{2k_8 \sqrt{k_9}} \right) \left[ e^{-ik_8(b-a)} - e^{ik_8(b-a)} \right] \right]$$

$$A = \frac{\sqrt{k_7} F e^{ik_9 b}}{2k_7 e^{ik_7 a}} \left[ \left( \frac{k_7 k_8 + k_8 k_9}{k_8 \sqrt{k_9}} \right) \cos k_8(b-a) - \left( \frac{k_8^2 + k_7 k_9}{k_8 \sqrt{k_9}} \right) i \sin k_8(b-a) \right]$$

$$F = \frac{2k_7 e^{ik_7 a} A}{\sqrt{k_7} e^{ik_9 b}\left[\left(\frac{k_7 k_8 + k_8 k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)\cos k_8(b-a) - \left(\frac{k_8^2 + k_7 k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right) i\sin k_8(b-a)\right]}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{2k_7 e^{ik_7 a}}{\sqrt{k_7} e^{ik_9 b}\left[\left(\frac{k_7 k_8 + k_8 k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)\cos k_8(b-a) - \left(\frac{k_8^2 + k_7 k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right) i\sin k_8(b-a)\right]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร โดยใช้ผลเฉลยที่ได้จากวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$T = \left|\frac{F}{A}\right|^2$$

$$= \frac{4k_7^2}{k_7\left[\left(\frac{k_7 k_8 + k_8 k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)^2 \cos^2 k_8(b-a) + \left(\frac{k_8^2 + k_7 k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)^2 \sin^2 k_8(b-a)\right]} \qquad (4.2.3.16.a)$$

$(4.2.3.16) - (4.2.3.15)$;

$$2k_7 \frac{B}{\sqrt{k_7}} e^{-ik_7 a} = \frac{F e^{ik_9 b}}{e^{ik_8(b-a)}}\left[k_7 \frac{\left(\frac{k_8 + k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2k_8} - \frac{\left(\frac{k_8 + k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2}\right] + \frac{F e^{ik_9 b}}{e^{-ik_8(b-a)}}\left[k_7 \frac{\left(\frac{k_8 - k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2k_8} + \frac{\left(\frac{k_8 - k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2}\right]$$

$$B = \frac{\sqrt{k_7} F e^{ik_9 b}}{2k_7 e^{-ik_7 a}}\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)\left(k_7 \frac{\left(\frac{k_8 + k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2k_8} - \frac{\left(\frac{k_8 + k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2}\right) + \left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\left(k_7 \frac{\left(\frac{k_8 - k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2k_8} + \frac{\left(\frac{k_8 - k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2}\right)\right]$$

$$B = \frac{\sqrt{k_7} F e^{ik_9 b}}{2k_7 e^{-ik_7 a}}\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{\left(\frac{k_8 + k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2}\right)\left(\frac{k_7}{k_8} - 1\right) + \left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{\left(\frac{k_8 - k_9}{\sqrt{k_9}}\right)}{2}\right)\left(\frac{k_7}{k_8} + 1\right)\right]$$

$$B = \frac{\sqrt{k_7} F e^{ik_9 b}}{2k_7 e^{-ik_7 a}}\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{(k_8 + k_9)}{2\sqrt{k_9}}\right)\left(\frac{k_7}{k_8} - 1\right) + \left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{(k_8 - k_9)}{2\sqrt{k_9}}\right)\left(\frac{k_7}{k_8} + 1\right)\right]$$

$$B = \frac{\sqrt{k_7} F e^{ik_9 b}}{2k_7 e^{-ik_7 a}}\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{k_7 k_8 - k_8^2 + k_7 k_9 - k_8 k_9}{2k_8\sqrt{k_9}}\right) + \left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\left(\frac{k_7 k_8 + k_8^2 - k_7 k_9 - k_8 k_9}{2k_8\sqrt{k_9}}\right)\right]$$

$$B=\frac{\sqrt{k_7}Fe^{ik_9b}}{2k_7e^{-ik_7a}}\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)\left[\left(\frac{k_7k_8-k_8k_9}{2k_8\sqrt{k_9}}\right)-\left(\frac{k_8^2-k_7k_9}{2k_8\sqrt{k_9}}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\left[\left(\frac{k_7k_8-k_8k_9}{2k_8\sqrt{k_9}}\right)+\left(\frac{k_8^2-k_7k_9}{2k_8\sqrt{k_9}}\right)\right]\right]$$

$$B=\frac{\sqrt{k_7}Fe^{ik_9b}}{2k_7e^{-ik_7a}}\left[\left(\frac{k_7k_8-k_8k_9}{2k_8\sqrt{k_9}}\right)\left[\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)+\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\left(\frac{k_8^2-k_7k_9}{2k_8\sqrt{k_9}}\right)\left[-\left(\frac{1}{e^{ik_8(b-a)}}\right)+\left(\frac{1}{e^{-ik_8(b-a)}}\right)\right]\right]$$

$$B=\frac{\sqrt{k_7}Fe^{ik_9b}}{2k_7e^{-ik_7a}}\left[\left(\frac{k_7k_8-k_8k_9}{2k_8\sqrt{k_9}}\right)\left[e^{-ik_8(b-a)}+e^{ik_8(b-a)}\right]+\left(\frac{k_8^2-k_7k_9}{2k_8\sqrt{k_9}}\right)\left[-e^{-ik_8(b-a)}+e^{ik_8(b-a)}\right]\right]$$

$$B=F\,\frac{\sqrt{k_7}e^{ik_9b}}{2k_7e^{-ik_7a}}\left[\left(\frac{k_7k_8-k_8k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)\cos k_8(b-a)+\left(\frac{k_8^2-k_7k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)i\sin k_8(b-a)\right]$$

$$B=\frac{2k_7e^{ik_7a}A}{\sqrt{k_7}e^{ik_9b}\left[\left(\frac{k_7k_8+k_8k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)\cos k_8(b-a)-\left(\frac{k_8^2+k_7k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)i\sin k_8(b-a)\right]}$$
$$\times\frac{\sqrt{k_7}e^{ik_9b}}{2k_7e^{-ik_7a}}\left[\left(\frac{k_7k_8-k_8k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)\cos k_8(b-a)+\left(\frac{k_8^2-k_7k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)i\sin k_8(b-a)\right]$$

$$B=\frac{e^{2ik_7a}A\left[\left(\frac{k_7k_8-k_8k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)\cos k_8(b-a)+\left(\frac{k_8^2-k_7k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)i\sin k_8(b-a)\right]}{\left[\left(\frac{k_7k_8+k_8k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)\cos k_8(b-a)-\left(\frac{k_8^2+k_7k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)i\sin k_8(b-a)\right]}$$

$$B=\frac{A\left[\left(\frac{k_7k_8-k_8k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)\cos k_8(b-a)+\left(\frac{k_8^2-k_7k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)i\sin k_8(b-a)\right]}{\left[\left(\frac{k_7k_8+k_8k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)\cos k_8(b-a)-\left(\frac{k_8^2+k_7k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)i\sin k_8(b-a)\right]}$$

$$\frac{B}{A}=\frac{\left[\left(\frac{k_7k_8-k_8k_9}{2k_8\sqrt{k_9}}\right)\cos k_8(b-a)+\left(\frac{k_8^2-k_7k_9}{2k_8\sqrt{k_9}}\right)i\sin k_8(b-a)\right]}{\left[\left(\frac{k_7k_8+k_8k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)\cos k_8(b-a)-\left(\frac{k_8^2+k_7k_9}{k_8\sqrt{k_9}}\right)i\sin k_8(b-a)\right]}$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร โดยใช้ผลเฉลยที่ได้จากวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2$$
$$= \frac{[(k_7k_8 - k_8k_9)^2 \cos^2 k_8(b-a) + (k_8^2 - k_7k_9)^2 \sin^2 k_8(b-a)]}{[(k_7k_8 + k_8k_9)^2 \cos^2 k_8(b-a) + (k_8^2 + k_7k_9)^2 \sin^2 k_8(b-a)]} \qquad (4.2.3.16.b)$$

ต่อไปจะเป็นการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี

ในกรณี $\boldsymbol{E} < V(x)$ จาก (3.1.17) จะได้ว่า

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b \sqrt{V(x)-E}dx\right)$$

$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left[\int_{-\infty}^{a}\sqrt{V_1-E}dx + \int_a^b\sqrt{V_2-E}dx + \int_b^{\infty}\sqrt{V_3-E}dx\right]\right)$$

$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left[\left[(\sqrt{V_1-E})x\right]_{-\infty}^{a} + \left[(\sqrt{V_2-E})x\right]_a^b + \left[(\sqrt{V_3-E})x\right]_b^{\infty}\right]\right)$$

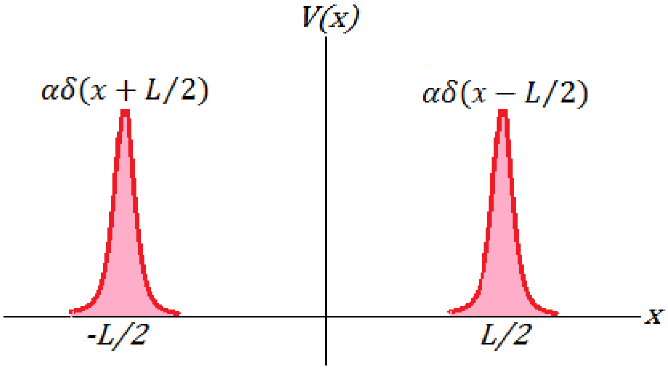
$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left[\left[(\sqrt{V_1-E})a + (\sqrt{V_1-E})\infty\right]\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left[(\sqrt{V_2-E})b - (\sqrt{V_2-E})a\right] + \left[(\sqrt{V_3-E})\infty - (\sqrt{V_3-E})b\right]\right]\right)$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\begin{bmatrix} a(\sqrt{V_1-E} - \sqrt{V_2-E}) + b(\sqrt{V_2-E} - \sqrt{V_3-E}) \\ +\infty(\sqrt{V_1-E} + \sqrt{V_3-E}) \end{bmatrix}\right) \qquad (4.2.3.16.c)$$

### 4.2.4 พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน

$$V(x) = \alpha\{\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2)\}$$




**ภาพที่ 4.9** พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน

หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b \sqrt{V(x) - E}dx\right)$$

$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\int_{L/2-\epsilon}^{L/2+\epsilon} \sqrt{\alpha\delta(x - L/2) - E}dx + \int_{-L/2-\epsilon}^{-L/2-\epsilon} \sqrt{\alpha\delta(x + L/2) - E}dx\right)\right)$$

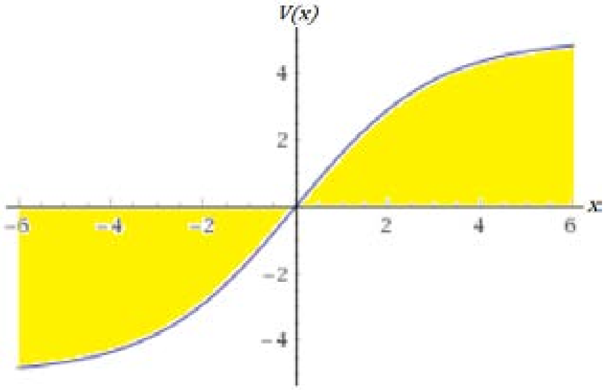
$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\int_{L/2-\epsilon}^{L/2+\epsilon} \sqrt{\alpha\delta(x - L/2) - E}dx + \int_{-L/2-\epsilon}^{-L/2-\epsilon} \sqrt{\alpha\delta(x + L/2) - E}dx\right)\right)$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}(2\epsilon(1 - E) + \alpha)\right) \qquad (4.2.4.1)$$

### 4.2.5 พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์

$$V(x) = V_{+\infty} \tanh(x/L)$$




**ภาพที่ 4.10** พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ เมื่อ $V_{+\infty} = 5$ และ $L = 3$

หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b \sqrt{V(x) - E}dx\right)$$

$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b \sqrt{V_{+\infty}\tanh(x/L) - E}dx\right)$$

$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}L\sqrt{V_{+\infty}}\int_a^b \sqrt{\tanh(x/L) - E/V_{+\infty}}\,d(x/L)\right)$$

ให้ $y = \tanh(x/L)$ และ $dy = \operatorname{sech}^2 x\, d(x/L)$

$$\int_{\tanh(a/L)}^{\tanh(b/L)} \sqrt{y - E/V_{+\infty}}\frac{dy}{1 - y^2}$$

ให้ $u = \sqrt{y - E/V_{+\infty}}$ และ $du = \frac{1}{2\sqrt{y - E/V_{+\infty}}}dy$

$$\int_{\sqrt{\tanh(a/L) - E/V_{+\infty}}}^{\sqrt{\tanh(b/L) - E/V_{+\infty}}} 2u^2 \frac{1}{1 - (u^2 + E/V_{+\infty})^2}du$$

$$= \sqrt{E/V_{+\infty} - 1}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{E/V_{+\infty} - 1}}\right) - \sqrt{E/V_{+\infty} + 1}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{E/V_{+\infty} + 1}}\right)\Bigg|_{\sqrt{\tanh(a/L) - E/V_{+\infty}}}^{\sqrt{\tanh(b/L) - E/V_{+\infty}}}$$

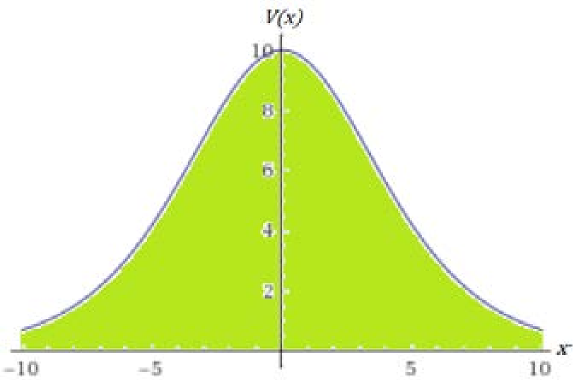
$$= \sqrt{E/V_{+\infty} - 1}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\tanh(b/L) - E/V_{+\infty}}{\sqrt{E/V_{+\infty} - 1}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\tanh(a/L) - E/V_{+\infty}}{\sqrt{E/V_{+\infty} - 1}}\right)\right]$$
$$- \sqrt{E/V_{+\infty} + 1}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\tanh(b/L) - E/V_{+\infty}}}{\sqrt{E/V_{+\infty} + 1}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\tanh(a/L) - E/V_{+\infty}}}{\sqrt{E/V_{+\infty} + 1}}\right)\right]$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}L\sqrt{V_{+\infty}}\left[\sqrt{E/V_{+\infty} - 1}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\tanh(b/L) - E/V_{+\infty}}{\sqrt{E/V_{+\infty} - 1}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\tanh(a/L) - E/V_{+\infty}}{\sqrt{E/V_{+\infty} - 1}}\right)\right] - \sqrt{E/V_{+\infty} + 1}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\tanh(b/L) - E/V_{+\infty}}}{\sqrt{E/V_{+\infty} + 1}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\tanh(a/L) - E/V_{+\infty}}}{\sqrt{E/V_{+\infty} + 1}}\right)\right]\right]\right) \tag{4.2.5.1}$$

### 4.2.6 พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง

$$V(x) = V_e\,\mathrm{sech}^2(x/L)$$




**ภาพที่ 4.11** พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง เมื่อ $V_e = 10$ และ $L = 5$

หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b \sqrt{V(x) - E}dx\right)$$

$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b \sqrt{V_e\,\mathrm{sech}^2(x/L) - E}\,dx\right)$$

$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}L\sqrt{V_e}\int_a^b \sqrt{\mathrm{sech}^2(x/L) - E/V_e}\,d(x/L)\right)$$

ให้ $z = \mathrm{sech}(x/L)$ และ $dz = -\mathrm{sech}(x/L)\tanh\left(\frac{x}{L}\right)d(x/L)$

$$\int_{\mathrm{sech}(a/L)}^{\mathrm{sech}(b/L)} \sqrt{z^2 - E/V_e}\,\frac{dz}{-z(1-z^2)}$$

ให้ $w = z^2$ และ $dw = 2zdz$

$$\int_{\mathrm{sech}^2(a/L)}^{\mathrm{sech}^2(b/L)} -\sqrt{\frac{w - E/V_e}{1-w^2}}\frac{1}{2w}\,dw$$

ให้ $u = \sqrt{w - E/V_e}$ และ $du = \frac{1}{2\sqrt{w-E/V_e}}dw$

$$\int_{\sqrt{\mathrm{sech}^2(a/L)-E/V_e}}^{\sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}} -\left(1-\frac{E/V_e}{u^2+E/V_e}\right)\frac{1}{\sqrt{1-(u^2+E/V_e)}}\,du$$

$$= \int_{\sqrt{\mathrm{sech}^2(a/L)-E/V_e}}^{\sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}} -\frac{1}{\sqrt{1-(u^2+E/V_e)}}\,du + \int_{\sqrt{\mathrm{sech}^2(a/L)-E/V_e}}^{\sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}} \left(\frac{E/V_e}{u^2+E/V_e}\right)\frac{1}{\sqrt{1-(u^2+E/V_e)}}\,du$$

$$= -\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{-E/V_e - u^2 + 1}}\right) + \sqrt{E/V_e}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{E/V_e}\sqrt{-E/V_e-u^2+1}}\right)\Bigg|_{\sqrt{\mathrm{sech}^2(a/L)-E/V_e}}^{\sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}}$$

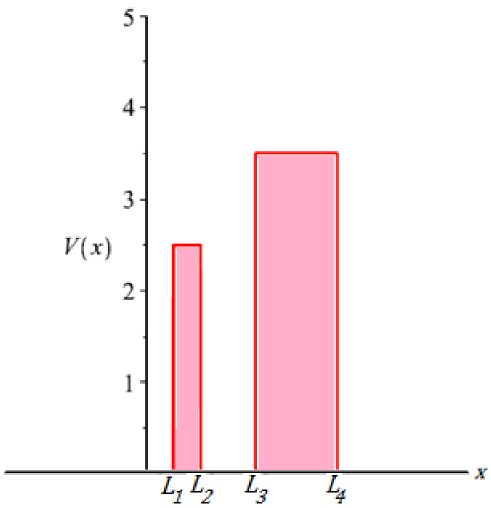
$$\begin{aligned}
&= -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}}{\sqrt{-E/V_e - \sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}^{\,2} + 1}}\right) \\
&\quad + \sqrt{E/V_e}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}}{\sqrt{E/V_e}\sqrt{-E/V_e - \sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}^{\,2} + 1}}\right) \\
&\quad + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(a/L)-E/V_e}}{\sqrt{-E/V_e - \sqrt{\mathrm{sech}^2(a/L)-E/V_e}^{\,2} + 1}}\right) \\
&\quad - \sqrt{E/V_e}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(a/L)-E/V_e}}{\sqrt{E/V_e}\sqrt{-E/V_e - \sqrt{\mathrm{sech}^2(a/L)-E/V_e}^{\,2} + 1}}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}L\sqrt{V_e}\left[-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}}{\sqrt{\tanh^2(b/L)}}\right)\right.\right.$$
$$+\sqrt{E/V_e}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}}{\sqrt{E/V_e}\sqrt{\tanh^2(b/L)}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(a/L)-E/V_e}}{\sqrt{\tanh^2(a/L)}}\right)$$
$$\left.\left.-\sqrt{E/V_e}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(a/L)-E/V_e}}{\sqrt{E/V_e}\sqrt{\tanh^2(a/L)}}\right)\right]\right) \tag{4.2.6.1}$$

### 4.2.7 พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<L_1\\ V_1, & L_1\le x\le L_2\\ 0, & L_2<x<L_3\\ V_2, & L_3\le x\le L_4\\ 0, & x>L_4\end{cases}$$




**ภาพที่ 4.12** พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า $L_1 = 1,\ L_2 = 2,\ L_3 = 4$ และ $L_4 = 7$ (เพชรอาภา, ไตรทศ และกุลภัทร, 2562)

หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b\sqrt{V(x)-E}dx\right)$$

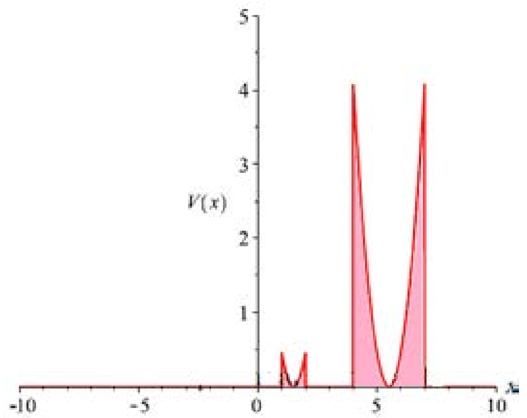
$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{V_0 - E}dx + \int_{L_3}^{L_4}\sqrt{V_1 - E}dx\right)\right)$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left((L_2 - L_1)\sqrt{V_1 - E} + (L_4 - L_3)\sqrt{V_2 - E}\right)\right) \qquad (4.2.7.1)$$

### 4.2.8 พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < L_1 \\ (1/2)ab^2(x-c)^2, & L_1 \le x \le L_2 \\ 0, & L_2 < x < L_3 \\ (1/2)ab^2(x-d)^2, & L_3 \le x \le L_4 \\ 0, & x > L_4 \end{cases}$$




**ภาพที่ 4.13** พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก เมื่อ $L_1 = 1,\ L_2 = 2,\ L_3 = 4,\ L_4 = 7,$ $a = 3,\ b = 1.1,\ c = 1.5$ และ $d = 5.5$ (เพชรอาภา, ไตรทศ และกุลภัทร, 2562)

หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b\sqrt{V(x) - E}dx\right)$$

$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{(1/2)ab^2(x-c)^2 - E}dx + \int_{L_3}^{L_4}\sqrt{(1/2)ab^2(x-d)^2 - E}dx\right)\right)$$

$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}(1/2)ab^2\left(\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{(x-c)^2 - E/(1/2)ab^2}\,d(x-c)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{L_3}^{L_4}\sqrt{(x-d)^2 - E/(1/2)ab^2}\,d(x-d)\right)\right)$$

ให้ $y = x - c$ และ $z = x - d$

$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}(1/2)ab^2\left(\int_{L_1-c}^{L_2-c}\sqrt{y^2 - E/(1/2)ab^2}\,dy + \int_{L_3-d}^{L_4-d}\sqrt{z^2 - E/(1/2)ab^2}\,dz\right)\right)$$

$$= exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}(1/2)ab^2\left(\frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2 - E/(1/2)ab^2}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.- E/(1/2)ab^2\log\left(\sqrt{y^2 - E/(1/2)ab^2} + y\right)\right)\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}\left(z\sqrt{z^2 - E/(1/2)ab^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.- E/(1/2)ab^2\log\left(\sqrt{z^2 - E/(1/2)ab^2} + z\right)\right)\right)\right)$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก โดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$T \approx exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}(1/2)ab^2\left(\frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2 - E/(1/2)ab^2}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.- E/(1/2)ab^2\log\left(\sqrt{y^2 - E/(1/2)ab^2} + y\right)\right)\Bigg|_{L_1-c}^{L_2-c}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(z\sqrt{z^2 - E/(1/2)ab^2}\right.$$
$$- E/(1/2)ab^2\log\left(\sqrt{z^2 - E/(1/2)ab^2}\right.$$
$$\left.\left.\left.+ z\right)\right)\Bigg|_{L_3-d}^{L_4-d}\right) \qquad (4.2.8.1)$$

**ความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ**

**โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี**

| **ชนิดของพลังงานศักย์** | $\mathbf{Transmission}(\boldsymbol{T})$ | $\mathbf{Reflection}(\boldsymbol{R}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{T}$ |
|---|---|---|
| สี่เหลี่ยมจัตุรัส | $exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\ (\sqrt{L-E})L\right)$ | $1 - exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\ (\sqrt{L-E})L\right)$ |
| สี่เหลี่ยมผืนผ้า | $exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\ [2a\sqrt{V_0-E}]\right)$ | $1 - exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\ [2a\sqrt{V_0-E}]\right)$ |
| สี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร | $exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}[a(\sqrt{V_1-E}-\sqrt{V_2-E})+b(\sqrt{V_2-E}-\sqrt{V_3-E}) + \infty(\sqrt{V_1-E}+\sqrt{V_3-E})]\right)$ | $1 - exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}[a(\sqrt{V_1-E}-\sqrt{V_2-E})+b(\sqrt{V_2-E}-\sqrt{V_3-E}) + \infty(\sqrt{V_1-E}+\sqrt{V_3-E})]\right)$ |
| ดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน | $exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}(2(1-E)\epsilon)+\alpha\right)$ | $1 - exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}(2(1-E)\epsilon)+\alpha\right)$ |
| ไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ | $exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}L\sqrt{V_{+\infty}}\left[\sqrt{E/V_{+\infty}-1}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\tanh(b/L)-E/V_{+\infty}}{\sqrt{E/V_{+\infty}-1}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\tanh(a/L)-E/V_{+\infty}}{\sqrt{E/V_{+\infty}-1}}\right)\right] - \sqrt{E/V_{+\infty}+1}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\tanh(b/L)-E/V_{+\infty}}}{\sqrt{E/V_{+\infty}+1}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\tanh(a/L)-E/V_{+\infty}}}{\sqrt{E/V_{+\infty}+1}}\right)\right]\right]\right)$ | $1 - exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}L\sqrt{V_{+\infty}}\left[\sqrt{E/V_{+\infty}-1}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\tanh(b/L)-E/V_{+\infty}}{\sqrt{E/V_{+\infty}-1}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\tanh(a/L)-E/V_{+\infty}}{\sqrt{E/V_{+\infty}-1}}\right)\right] - \sqrt{E/V_{+\infty}+1}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\tanh(b/L)-E/V_{+\infty}}}{\sqrt{E/V_{+\infty}+1}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\tanh(a/L)-E/V_{+\infty}}}{\sqrt{E/V_{+\infty}+1}}\right)\right]\right]\right)$ |

| | | |
|---|---|---|
| ไฮเพอร์โบลิก ซีแคนต์กำลังสอง | $exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}L\sqrt{V_e}\left[-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}}{\sqrt{\tanh^2(b/L)}}\right) + \sqrt{E/V_e}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}}{\sqrt{E/V_e}\sqrt{\tanh^2(b/L)}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(a/L)-E/V_e}}{\sqrt{\tanh^2(a/L)}}\right) - \sqrt{E/V_e}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(a/L)-E/V_e}}{\sqrt{E/V_e}\sqrt{\tanh^2(a/L)}}\right)\right]\right)$ | $1-exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}L\sqrt{V_e}\left[-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}}{\sqrt{\tanh^2(b/L)}}\right) + \sqrt{E/V_e}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(b/L)-E/V_e}}{\sqrt{E/V_e}\sqrt{\tanh^2(b/L)}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(a/L)-E/V_e}}{\sqrt{\tanh^2(a/L)}}\right) - \sqrt{E/V_e}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{sech}^2(a/L)-E/V_e}}{\sqrt{E/V_e}\sqrt{\tanh^2(a/L)}}\right)\right]\right)$ |
| ดับเบิล สี่เหลี่ยมผืนผ้า | $exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left((L_2-L_1)\sqrt{V_1-E}+(L_4-L_3)\sqrt{V_2-E}\right)\right)$ | $1-exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left((L_2-L_1)\sqrt{V_1-E}+(L_4-L_3)\sqrt{V_2-E}\right)\right)$ |
| ดับเบิลกำแพง พาราโบลิก | $exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}(1/2)ab^2\left(\frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2-E/(1/2)ab^2} - E/(1/2)ab^2\log\left(\sqrt{y^2-E/(1/2)ab^2} + y\right)\right)\Big\|_{L_1-c}^{L_2-c}\right) + \frac{1}{2}\left(z\sqrt{z^2-E/(1/2)ab^2} - E/(1/2)ab^2\log\left(\sqrt{z^2-E/(1/2)ab^2} + z\right)\right)\Big\|_{L_3-d}^{L_4-d}\right)$ | $1-exp\left(-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}(1/2)ab^2\left(\frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2-E/(1/2)ab^2} - E/(1/2)ab^2\log\left(\sqrt{y^2-E/(1/2)ab^2} + y\right)\right)\Big\|_{L_1-c}^{L_2-c}\right) + \frac{1}{2}\left(z\sqrt{z^2-E/(1/2)ab^2} - E/(1/2)ab^2\log\left(\sqrt{z^2-E/(1/2)ab^2} + z\right)\right)\Big\|_{L_3-d}^{L_4-d}\right)$ |

**ตารางที่ 4.3** ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี

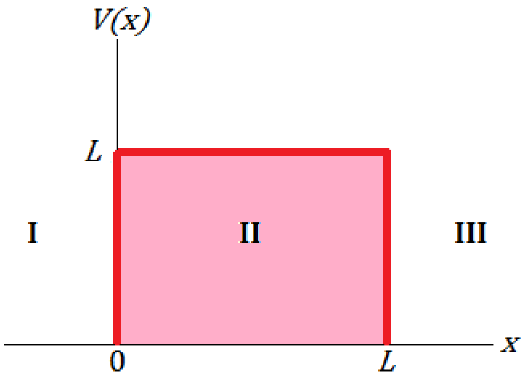
จากตารางที่ 4.3 ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี สังเกตเห็นได้ว่าวิธีนี้สามารถใช้ในการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของพลังงานศักย์ที่ใช้ในการศึกษาทั้งหมด ได้แก่ พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง และพลังงานศักย์แบบผสม ได้แก่ พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก เนื่องจากมีสูตรที่ง่ายต่อการคำนวณ และเป็นสูตรที่ใช้ในการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนที่ได้จากการหาผลเฉลยโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีในบทที่ 3

## 4.3 วิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

วิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2x2 มิติ พิจารณาจากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ $r$ และ $t$ โดยใช้ทฤษฎีการกระเจิงแสง และนำไปสู่การคำนวณหาความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคที่ส่งผ่านและสะท้อนกลับ

### 4.3.1 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส

$$V(x) = \begin{cases} L, & 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{L} \\ 0, & x < 0, x > L \end{cases}$$




**ภาพที่ 4.14** พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส

หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้สูตรของวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

**กรณี $\boldsymbol{E} > V(x)$**

$$T \ge \operatorname{sech}^2[\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta dx]$$

$$\vartheta(x) = \frac{\sqrt{(X''(x))^2 + [k^2(x) - (X'(x)]^2}}{2|X'(x)|}$$

$$k^2(x) = \begin{cases} \dfrac{2m[E-L]}{\hbar^2}, & 0 \le x \le L \\ \dfrac{2mE}{\hbar^2} & , x < 0, x > L \end{cases}$$

$$\vartheta(\mathrm{x}) = \frac{|k^2(x) - k_0^2|}{2k_0}$$

$$T \ge \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_0^L |k^2(x) - k_0^2| dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_0^L \left|\frac{2m[E-L]}{\hbar^2} - \frac{2mE}{\hbar^2}\right| dx\right]$$

$$= \text{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_0^L \left|\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2mL}{\hbar^2} - \frac{2mE}{\hbar^2}\right| dx\right]$$

$$= \text{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_0^L \left|-\frac{2mL}{\hbar^2}\right| dx\right]$$

$$= \text{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_0^L \frac{2m}{\hbar^2}|L|dx\right]$$

$$= \text{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^L |L|dx\right]$$

$$= \text{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\frac{2m}{\hbar^2}[|L|x]_0^L\right]$$

$$= \text{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\frac{2mL^2}{\hbar^2}\right]$$

$$= \text{sech}^2\left[\frac{1}{2\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}\frac{2mL^2}{\hbar^2}\right]$$

$$= \text{sech}^2\left[\frac{2mL^2}{2\hbar\sqrt{2mE}}\right]$$

$$= \text{sech}^2\left[\frac{2mL^2 \times \sqrt{2mE}}{2\hbar\sqrt{2mE} \times \sqrt{2mE}}\right]$$

$$= \text{sech}^2\left[\frac{2mL^2 \times \sqrt{2mE}}{2\hbar(2mE)}\right]$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ คือ

$$T \geq \text{sech}^2\left[\frac{L^2\sqrt{2mE}}{2\hbar E}\right] \tag{4.3.1.1}$$

**กรณี $\boldsymbol{E} < V(x)$**

หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยใช้สูตรของวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

$$T \geq \text{sech}^2\left[\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta dx\right]$$

$$\vartheta(x) = \frac{\sqrt{(X''(x))^2 + [k^2(x) - (X'(x)]^2}}{2|X'(x)|}$$

$$k^2(x) = \begin{cases} \dfrac{2m[L-E]}{\hbar^2}, & 0 \le x \le L \\ -\dfrac{2mE}{\hbar^2} & , x < 0, x > L \end{cases}$$

$$\vartheta(\mathrm{x}) = \frac{\left|k^2(x) - k_0^2\right|}{2k_0}$$

$$T \ge \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_0^L \left|k^2(x) - k_0^2\right| dx\right]$$

$$T \ge \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_0^L \left|\frac{2m[L-E]}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right| dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_0^L \left|\frac{2mL}{\hbar^2} - \frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right| dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_0^L \left|\frac{2mL}{\hbar^2}\right| dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_0^L \frac{2m}{\hbar^2}|L| dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^L |L| dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\frac{2m}{\hbar^2}[|L|x]_0^L\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\frac{2mL|L|}{\hbar^2}\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2\dfrac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}}\frac{2mL^2}{\hbar^2}\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{2mL^2}{2\hbar\sqrt{-2mE}}\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{2mL^2 \times \sqrt{-2mE}}{2\hbar\sqrt{-2mE} \times \sqrt{-2mE}}\right]$$

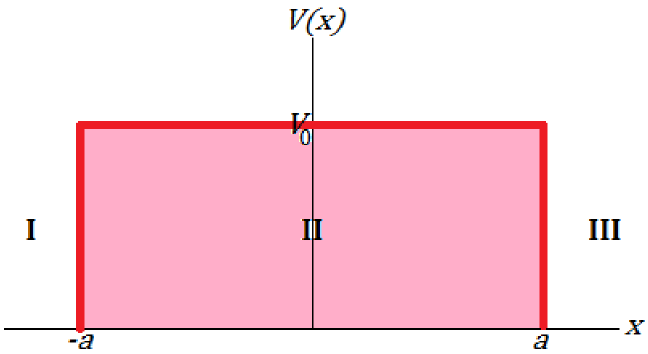
$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{2mL^2 \times \sqrt{-2mE}}{-2\hbar(2mE)}\right]$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ คือ

$$T \ge \operatorname{sech}^2\left[-i\frac{L^2\sqrt{2mE}}{2\hbar E}\right] \qquad (4.3.1.2)$$

### 4.3.2 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & |x| \le a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$




**ภาพที่ 4.15** พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า

หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้สูตรของวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

**กรณี** $\boldsymbol{E} > V(x)$

$$T \ge \operatorname{sech}^2[\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta dx]$$

$$\vartheta(x) = \frac{\sqrt{(X''(x))^2 + [k^2(x) - (X'(x)]^2}}{2|X'(x)|}$$

$$k^2(x) = \begin{cases} \dfrac{2m[E - V_0]}{\hbar^2}, & |x| \le a \\ \dfrac{2mE}{\hbar^2} & , |x| > a \end{cases}$$

$$\vartheta(\mathrm{x}) = \frac{|k^2(x) - k_0^2|}{2k_0}$$

$$T \ge \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_{-a}^{a}|k^2(x) - k_0^2|dx\right]$$

$$T \ge \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_{-a}^{a}\left|\frac{2m[E - V_0]}{\hbar^2} - \frac{2mE}{\hbar^2}\right|dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_{-a}^{a}\left|-\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right|dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\frac{2m}{\hbar^2}\int_{-a}^{a}|V_0|dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\frac{2m}{\hbar^2}[|V_0|x]_{-a}^{a}\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\frac{2m}{\hbar^2}(2|V_0|a)\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{2m(2|V_0|a) \times \sqrt{2mE}}{2\hbar\sqrt{2mE} \times \sqrt{2mE}}\right]$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ คือ

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[\frac{(2|V_0|a)\sqrt{2mE}}{2\hbar E}\right] \tag{4.3.2.1}$$

**กรณี** $\boldsymbol{E} < V(x)$

หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้สูตรของวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

$$T \geq \operatorname{sech}^2[\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta dx]$$

$$\vartheta(x) = \frac{\sqrt{(X''(x))^2 + [k^2(x) - (X'(x)]^2}}{2|X'(x)|}$$

$$k^2(x) = \begin{cases} \frac{2m[V_0 - E]}{\hbar^2}, & |x| \leq a \\ -\frac{2mE}{\hbar^2} & ,|x| > a \end{cases}$$

$$\vartheta(x) = \frac{\left|k^2(x) - k_0^2\right|}{2k_0}$$

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_{-a}^{a}\left|k^2(x) - k_0^2\right|dx\right]$$

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_{-a}^{a}\left|\frac{2m[V_0 - E]}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right|dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\int_{-a}^{a}\left|\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right|dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\frac{2m}{\hbar^2}\int_{-a}^{a}|V_0|dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\frac{2m}{\hbar^2}[|V_0|x]_{-a}^{a}\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_0}\frac{2m}{\hbar^2}(2|V_0|a)\right]$$

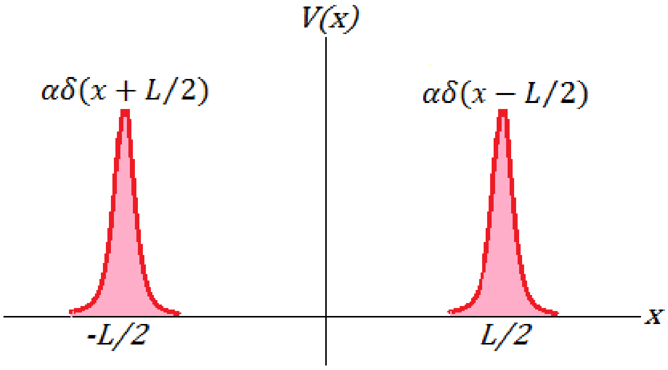
$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{2m(2|V_0|a) \times \sqrt{-2mE}}{2\hbar\sqrt{-2mE} \times \sqrt{-2mE}}\right]$$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ คือ

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[-i\frac{(2|V_0|a)\sqrt{2mE}}{2\hbar E}\right] \tag{4.3.2.2}$$

**4.3.3 พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน**

$$V(x) = \alpha\{\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2)\}$$




**ภาพที่ 4.16** พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน

หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

**กรณี $\boldsymbol{E} > V(x)$**

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta dx\right]$$

$$\vartheta(x) = \frac{\sqrt{(X''(x))^2 + [k^2(x) - (X'(x)]^2}}{2|X'(x)|}$$

$$k^2(x) = \frac{2m[E - V(x)]}{\hbar^2}$$

$$k^2(x) = \frac{2m[E - \alpha[\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2)]]}{\hbar^2}$$

$$X'(x) = k_{\pm\infty} = \frac{\sqrt{2m(E - V_{\pm\infty})}}{\hbar}$$

เนื่องจาก $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$ ดังนั้น $\delta(x - L/2) = \begin{cases} 0, & x \neq L/2 \\ \infty, & x = L/2 \end{cases}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$X'(x) = k_{\pm\infty} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\vartheta(x) = \frac{|k^2(x) - k_{\pm\infty}^2|}{2k_{\pm\infty}}$$

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\int_{-\infty}^{\infty} |k^2(x) - k_{\pm\infty}^2| dx\right]$$

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2m[E-\alpha[\delta(x-L/2)+\delta(x+L/2)]]}{\hbar^2}-\frac{2mE}{\hbar^2}\right|dx\right]$$

$$=\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{2m}{\hbar^2}\alpha[\delta(x-L/2)-\frac{2m}{\hbar^2}\alpha[\delta(x+L/2)-\frac{2mE}{\hbar^2}\right|dx\right]$$

$$=\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|-\frac{2m}{\hbar^2}\alpha[\delta(x-L/2)-\frac{2m}{\hbar^2}\alpha[\delta(x+L/2)\right|dx\right]$$

$$=\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2m}{\hbar^2}|\alpha||\delta(x-L/2)+\delta(x+L/2)|dx\right]$$

$$=\operatorname{sech}^2\left[\frac{\frac{2m}{\hbar^2}|\alpha|}{2k_{\pm\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}|\delta(x-L/2)+\delta(x+L/2)|dx\right]$$

$$=\operatorname{sech}^2\left[\frac{\frac{2m}{\hbar^2}|\alpha|}{2k_{\pm\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-L/2)+\delta(x+L/2)dx\right]$$

$$=\operatorname{sech}^2\left[\frac{\frac{2m}{\hbar^2}|\alpha|}{2k_{\pm\infty}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-L/2)dx+\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x+L/2)\,dx\right]\right]$$

(เนื่องจาก $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$ ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-L/2)dx=1$ และ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x+L/2)dx=1$)

$$=\operatorname{sech}^2\left[\frac{\frac{2m}{\hbar^2}|\alpha|}{2k_{\pm\infty}}(2)\right]$$

$$=\operatorname{sech}^2\left[\frac{\frac{2m|\alpha|}{\hbar^2}}{\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}\right]$$

$$=\operatorname{sech}^2\left[\frac{2m|\alpha|}{\hbar\sqrt{2mE}}\right]$$

เนื่องจาก $\operatorname{sech}(-x)=\operatorname{sech}(x)$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ คือ

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[\frac{2m\alpha}{\hbar\sqrt{2mE}}\right] \tag{4.3.3.1}$$

**กรณี $\boldsymbol{E} < V(x)$**

หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน โดยใช้สูตรของวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

$$T \geq \operatorname{sech}^2[\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta dx]$$

$$\vartheta(x) = \frac{\sqrt{(X''(x))^2 + [k^2(x) - (X'(x)]^2}}{2|X'(x)|}$$

$$k^2(x) = \frac{2m[V(x) - E]}{\hbar^2}$$

$$k^2(x) = \frac{2m[\alpha[\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2)] - E]}{\hbar^2}$$

$$X'(x) = k_{\pm\infty} = \frac{\sqrt{2m(V_{\pm\infty} - E)}}{\hbar}$$

เนื่องจาก $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$ ดังนั้น $\delta(x - L/2) = \begin{cases} 0, & x \neq L/2 \\ \infty, & x = L/2 \end{cases}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$X'(x) = k_{\pm\infty} = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

$$\vartheta(x) = \frac{\left|k^2(x) - k_{\pm\infty}^2\right|}{2k_{\pm\infty}}$$

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|k^2(x) - k_{\pm\infty}^2\right| dx\right]$$

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{2m[\alpha[\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2)] - E]}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right| dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{2m}{\hbar^2}\alpha[\delta(x - L/2) + \frac{2m}{\hbar^2}\alpha[\delta(x + L/2) - \frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right| dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{2m}{\hbar^2}\alpha[\delta(x - L/2) + \frac{2m}{\hbar^2}\alpha[\delta(x + L/2)\right| dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2m}{\hbar^2}|\alpha||\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2)| dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{\frac{2m}{\hbar^2}|\alpha|}{2k_{\pm\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2)| dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{\frac{2m}{\hbar^2}|\alpha|}{2k_{\pm\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - L/2) + \delta(x + L/2) dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{\frac{2m}{\hbar^2}|\alpha|}{2k_{\pm\infty}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-L/2)dx+\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x+L/2)\,dx\right]\right]$$

(เนื่องจาก $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1$ ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-L/2)dx = 1$ และ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x+L/2)dx = 1$)

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{\frac{2m}{\hbar^2}|\alpha|}{2k_{\pm\infty}}(2)\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{\frac{2m|\alpha|}{\hbar^2}}{\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}}\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{2m|\alpha|}{\hbar i\sqrt{2mE}}\right]$$

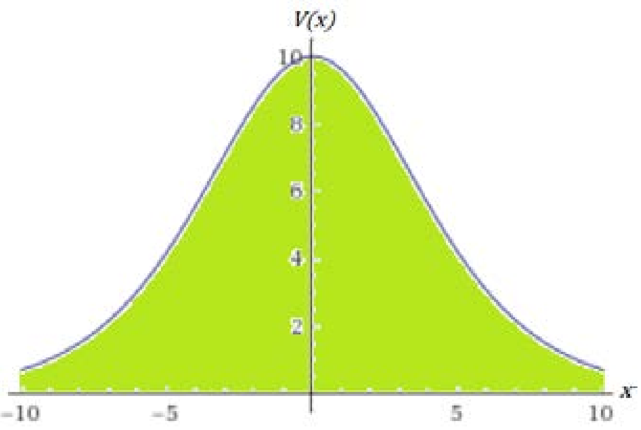
เนื่องจาก $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech}(x)$

ดังนั้นจะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ คือ

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[-i\frac{2m\alpha}{\hbar\sqrt{2mE}}\right] \tag{4.3.3.2}$$

### 4.3.4 พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง

$$V(x) = V_e\operatorname{sech}^2(x/L)$$




**ภาพที่ 4.17** พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง เมื่อ $V_e = 10$ และ $L = 5$

หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง โดยใช้สูตรของวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

$$T \geq \operatorname{sech}^2[\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta dx]$$

$$\vartheta(x) = \frac{\sqrt{(X''(x))^2 + [k^2(x) - (X'(x)]^2}}{2|X'(x)|}$$

$$k^2(x) = \frac{2m[E - V(x)]}{\hbar^2}$$

$$k^2(x) = \frac{2m[E - V_e \operatorname{sech}^2(x/L)]}{\hbar^2}$$

$$X'(x) = k_{\pm\infty} = \frac{\sqrt{2m(E - V_{\pm\infty})}}{\hbar}$$

เนื่องจาก

$$\operatorname{sech}^2 x/L + \tanh^2 x/L = 1$$

$$\operatorname{sech}^2 x/L = 1 - \tanh^2 x/L$$

$$\operatorname{sech}^2 x/L = 1 - \left(\frac{e^{x/L} - e^{-x/L}}{e^{x/L} + e^{-x/L}}\right)^2$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$X'(x) = k_{\pm\infty} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\vartheta(x) = \frac{\left|k^2(x) - k_{\pm\infty}^2\right|}{2k_{\pm\infty}}$$

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|k^2(x) - k_{\pm\infty}^2\right|dx\right]$$

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2m[E - V_e \operatorname{sech}^2(x/L)]}{\hbar^2} - \frac{2mE}{\hbar^2}\right|dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|-\frac{2mV_e \operatorname{sech}^2(x/L)]}{\hbar^2}\right|dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\frac{2m}{\hbar^2}|V_e|\int_{-\infty}^{\infty}|\operatorname{sech}^2(x/L)|dx\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\frac{2m}{\hbar^2}|V_e|L[\tanh x/L]_{x=-\infty}^{x=\infty}\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\frac{2m}{\hbar^2}|V_e|L\left[\frac{\sinh x/L}{\cosh x/L}\right]_{x=-\infty}^{x=\infty}\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\frac{2m}{\hbar^2}|V_e|L\left[\frac{\sinh x/L}{\cosh x/L}\right]_{x=-\infty}^{x=\infty}\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}\frac{2m}{\hbar^2}|V_e|L\left[\frac{e^{x/L} - e^{-x/L}}{e^{x/L} + e^{-x/L}}\right]_{x=-\infty}^{x=\infty}\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}\frac{2m}{\hbar^2}|V_e|L(2)\right]$$

$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{\sqrt{2mE}}\frac{m}{\hbar}|V_e|L(2)\right]$$
$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{\sqrt{2mE}}\cdot\frac{\sqrt{2mE}}{\sqrt{2mE}}\frac{m}{\hbar}|V_e|L(2)\right]$$
$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{2mE}}{2E}\frac{2L}{\hbar}|V_e|\right]$$
$$= \operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{2mE}}{\sqrt{4E^2}}\frac{2L}{\hbar}|V_e|\right]$$
$$= \operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{2mE}{4E^2}}\frac{2L}{\hbar}|V_e|\right]$$

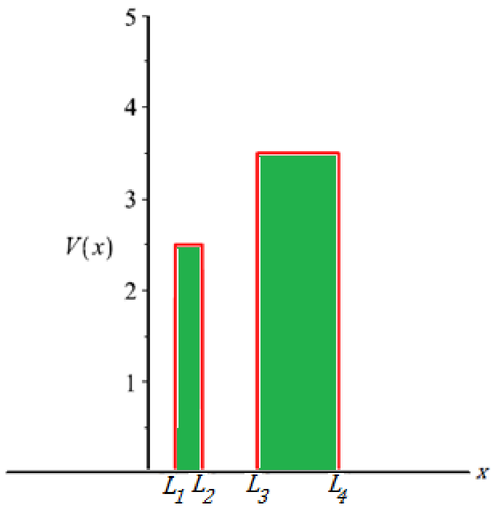
ดังนั้นจะได้ว่า

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{m}{2E}}\frac{2L}{\hbar}|V_e|\right] \tag{4.3.4.1}$$

โดยที่ สมการ (4.3.4.1) คือ ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

### 4.3.5 พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < L_1 \\ V_1, & L_1 \leq x \leq L_2 \\ 0, & L_2 < x < L_3 \\ V_2, & L_3 \leq x \leq L_4 \\ 0, & x > L_4 \end{cases}$$




**ภาพที่ 4.18** พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า $L_1 = 1,\ L_2 = 2,\ L_3 = 4$ และ $L_4 = 7$ (เพชรอาภา, ไตรทศ และกุลภัทร, 2562)

หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้สูตรของวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

$$T \geq \mathrm{sech}^2\left[\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta dx\right]$$

$$\vartheta(x) = \frac{\sqrt{(X''(x))^2 + [k^2(x) - (X'(x))^2]^2}}{2|X'(x)|}$$

$$k^2(x) = \frac{2m[E - V(x)]}{\hbar^2}$$

$$\vartheta(x) = \frac{\left|k^2(x) - k_{\pm\infty}^2\right|}{2k_{\pm\infty}}$$

$$T \geq \mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|k^2(x) - k_{\pm\infty}^2\right|dx\right]$$

$$T \geq \mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\left(\int_{L_1}^{L_2}\left|\frac{2m[E - V_1]}{\hbar^2} - \frac{2mE}{\hbar^2}\right|dx + \int_{L_3}^{L_4}\left|\frac{2m[E - V_2]}{\hbar^2} - \frac{2mE}{\hbar^2}\right|dx\right)\right]$$

$$= \mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\frac{2m}{\hbar^2}\left(|V_1|(L_2 - L_1) + |V_2|(L_4 - L_3)\right)\right]$$

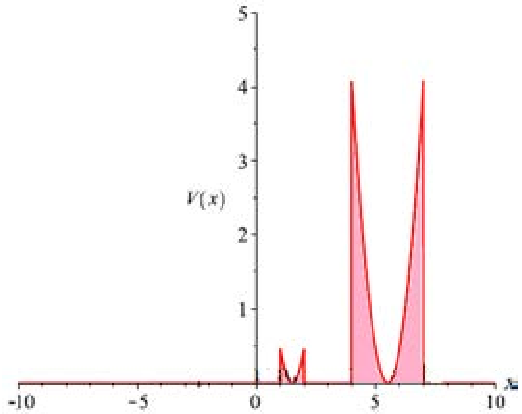
ดังนั้นจะได้ว่า

$$T \geq \mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{\sqrt{2mE}}\frac{m}{\hbar}\left(|V_1|(L_2 - L_1) + |V_2|(L_4 - L_3)\right)\right] \qquad (4.3.5.1)$$

โดยที่ สมการ (4.3.5.1) คือ ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

### 4.3.6 พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<L_1\\ (1/2)ab^2(x-c)^2, & L_1\le x\le L_2\\ 0, & L_2<x<L_3\\ (1/2)ab^2(x-d)^2, & L_3\le x\le L_4\\ 0, & x>L_4\end{cases}$$




**ภาพที่ 4.19** พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก เมื่อ $L_1=1,\ L_2=2,\ L_3=4,$ $L_4=7, a=3,\ b=1.1,\ c=1.5$ และ $d=5.5$ (เพชรอาภา, ไตรทศ และกุลภัทร, 2562)

หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก โดยใช้สูตรของวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

$$T\ge \operatorname{sech}^2[\int_{-\infty}^{\infty}\vartheta dx]$$

$$\vartheta(x)=\frac{\sqrt{(X''(x))^2+[k^2(x)-(X'(x))^2]^2}}{2|X'(x)|}$$

$$k^2(x)=\frac{2m[E-V(x)]}{\hbar^2}$$

$$\vartheta(x)=\frac{|k^2(x)-k_{\pm\infty}^2|}{2k_{\pm\infty}}$$

$$T\ge \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}|k^2(x)-k_{\pm\infty}^2|dx\right]$$

$$T\ge \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\left(\int_{L_1}^{L_2}\left|\frac{2m[E-(1/2)ab^2(x-c)^2]}{\hbar^2}-\frac{2mE}{\hbar^2}\right|d(x-c)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{L_3}^{L_4}\left|\frac{2m[E-(1/2)ab^2(x-d)^2]}{\hbar^2}-\frac{2mE}{\hbar^2}\right|d(x-d)\right)\right]$$
$$=\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\frac{2m}{\hbar^2}\left(|(1/6)ab^2(x-c)^3|_{L_1}^{L_2}+|(1/6)ab^2(x-d)^3|_{L_3}^{L_4}\right)\right]$$
$$=\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2k_{\pm\infty}}\frac{2m}{\hbar^2}\begin{pmatrix}|(1/6)ab^2[(L_2-c)^3-(L_1-c)^3]|\\+|(1/6)ab^2[(L_4-d)^3-(L_3-d)^3]|\end{pmatrix}\right]$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$T \geq \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{\sqrt{2mE}}\frac{m}{\hbar}(1/6)ab^2(|(L_2-c)^3-(L_1-c)^3|+|(L_4-d)^3-(L_3-d)^3|)\right] \quad (4.3.6.1)$$

โดยที่ สมการ (4.3.6.1) คือ ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

**ความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ**

| ชนิดของพลังงานศักย์ | $\mathbf{Transmission}(\boldsymbol{T})$ เมื่อ $E < V$ | $\mathbf{Transmission}(\boldsymbol{T})$ เมื่อ $E > V$ |
|---|---|---|
| พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส | $T \geq \operatorname{sech}^2\left[-i\frac{L^2\sqrt{2mE}}{2\hbar E}\right]$ | $T \geq \operatorname{sech}^2\left[\frac{L^2\sqrt{2mE}}{2\hbar E}\right]$ |
| พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า | $T \geq \operatorname{sech}^2\left[-i\frac{(2\|V_0\|a)\sqrt{2mE}}{2\hbar E}\right]$ | $T \geq \operatorname{sech}^2\left[\frac{(2\|V_0\|a)\sqrt{2mE}}{2\hbar E}\right]$ |
| พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน | $T \geq \operatorname{sech}^2\left[-i\frac{2m\alpha}{\hbar\sqrt{2mE}}\right]$ | $T \geq \operatorname{sech}^2\left[\frac{2m\alpha}{\hbar\sqrt{2mE}}\right]$ |
| พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง | $T \geq \operatorname{sech}^2\left[-i\sqrt{\frac{m}{2E}}\frac{2L}{\hbar}\|V_e\|\right]$ | $T \geq \operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{m}{2E}}\frac{2L}{\hbar}\|V_e\|\right]$ |
| พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า | $T \geq \operatorname{sech}^2\left[\begin{matrix}-i\frac{1}{\sqrt{2mE}}\frac{m}{\hbar}\\ \begin{pmatrix}\|V_1\|(L_2-L_1)\\+\|V_2\|(L_4-L_3)\end{pmatrix}\end{matrix}\right]$ | $T \geq \operatorname{sech}^2\left[\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{2mE}}\frac{m}{\hbar}\\ \begin{pmatrix}\|V_1\|(L_2-L_1)\\+\|V_2\|(L_4-L_3)\end{pmatrix}\end{matrix}\right]$ |
| พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก | $T \geq \operatorname{sech}^2\left[\begin{matrix}-i\frac{1}{\sqrt{2mE}}\frac{m}{\hbar}(1/6)ab^2\\ \begin{pmatrix}\|(L_2-c)^3-(L_1-c)^3\|\\+\|(L_4-d)^3-(L_3-d)^3\|\end{pmatrix}\end{matrix}\right]$ | $T \geq \operatorname{sech}^2\left[\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{2mE}}\frac{m}{\hbar}(1/6)ab^2\\ \begin{pmatrix}\|(L_2-c)^3-(L_1-c)^3\|\\+\|(L_4-d)^3-(L_3-d)^3\|\end{pmatrix}\end{matrix}\right]$ |

**ตารางที่ 4.4** ความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

**ความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ ขนาด 2X2 มิติ**

| **ชนิดของพลังงานศักย์** | $\mathbf{Reflection}(\boldsymbol{R})$ เมื่อ $E < V$ | $\mathbf{Reflection}(\boldsymbol{R})$ เมื่อ $E > V$ |
|---|---|---|
| พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส | $R \leq \tanh^2\left[-i\frac{L^2\sqrt{2mE}}{2\hbar E}\right]$ | $R \leq \tanh^2\left[\frac{L^2\sqrt{2mE}}{2\hbar E}\right]$ |
| พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า | $R \leq \tanh^2\left[-i\frac{(2\lvert V_0\rvert a)\sqrt{2mE}}{2\hbar E}\right]$ | $R \leq \tanh^2\left[\frac{(2\lvert V_0\rvert a)\sqrt{2mE}}{2\hbar E}\right]$ |
| พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน | $R \leq \tanh^2\left[-i\frac{2m\alpha}{\hbar\sqrt{2mE}}\right]$ | $R \leq \tanh^2\left[\frac{2m\alpha}{\hbar\sqrt{2mE}}\right]$ |
| พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง | $R \leq \tanh^2\left[-i\sqrt{\frac{m}{2E}}\frac{2L}{\hbar}\lvert V_e\rvert\right]$ | $R \leq \tanh^2\left[\sqrt{\frac{m}{2E}}\frac{2L}{\hbar}\lvert V_e\rvert\right]$ |
| พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า | $R \leq \tanh^2\left[\begin{matrix}-i\frac{1}{\sqrt{2mE}}\frac{m}{\hbar}\\ \left(\begin{matrix}\lvert V_1\rvert(L_2-L_1)\\ +\lvert V_2\rvert(L_4-L_3)\end{matrix}\right)\end{matrix}\right]$ | $R \leq \tanh^2\left[\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{2mE}}\frac{m}{\hbar}\\ \left(\begin{matrix}\lvert V_1\rvert(L_2-L_1)\\ +\lvert V_2\rvert(L_4-L_3)\end{matrix}\right)\end{matrix}\right]$ |
| พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก | $R \leq \tanh^2\left[\begin{matrix}-i\frac{1}{\sqrt{2mE}}\frac{m}{\hbar}(1/6)ab^2\\ \left(\begin{matrix}\lvert(L_2-c)^3-(L_1-c)^3\rvert\\ +\lvert(L_4-d)^3-(L_3-d)^3\rvert\end{matrix}\right)\end{matrix}\right]$ | $R \leq \tanh^2\left[\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{2mE}}\frac{m}{\hbar}(1/6)ab^2\\ \left(\begin{matrix}\lvert(L_2-c)^3-(L_1-c)^3\rvert\\ +\lvert(L_4-d)^3-(L_3-d)^3\rvert\end{matrix}\right)\end{matrix}\right]$ |

**ตารางที่ 4.5** ความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

จากตารางที่ 4.4 และ 4.5 ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ วิธีนี้เหมาะสมกับพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง และพลังงานศักย์แบบผสม ได้แก่ พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก แต่ไม่เหมาะสมกับพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร และพลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ เนื่องจากค่า $V_\infty$ และ $V_{-\infty}$ มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้นจึงไม่สามารถหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติได้

# บทที่ 5

# ข้อสรุปจากการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้จะกล่าวถึงข้อสรุปจากการวิจัยในบทที่ 3 และบทที่ 4 และข้อเสนอแนะอื่น ๆ ในการหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ และการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

## 5.1 ข้อสรุป

จากบทที่ 3 สามารถหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และใช้วิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ ในการหาค่าความสัมพันธ์ของความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน

จากบทที่ 4 การหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ จะเห็นได้ว่าค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนที่ได้จากแต่ละวิธีแตกต่างกัน พลังงานศักย์ต่างกันจะเหมาะสมกับวิธีที่แตกต่างกัน ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า และพลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามารถหาค่าความน่าจะเป็นได้ทั้ง 3 วิธี คือ วิธีผลเฉลยแม่นตรง วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ เนื่องจากเป็นพลังงานศักย์ที่มีศักย์เป็นค่าคงที่ และง่ายต่อการคำนวณ พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร สามารถหาค่าความน่าจะเป็นได้เพียง 2 วิธี คือ วิธีผลเฉลยแม่นตรงและวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และไม่สามารถหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ ได้เนื่องจากค่า $V_\infty$ และ $V_{-\infty}$ มีค่าไม่เท่ากัน พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ สามารถหาค่าความน่าจะเป็นได้เพียงวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และไม่สามารถหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน โดยวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ ได้เนื่องจากค่า $V_\infty$ และ $V_{-\infty}$ มีค่าไม่เท่ากัน พลังงานศักย์แบบไฮเพอร์โบลิกซีแคนต์กำลังสอง และพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก สามารถหาค่าความน่าจะเป็นได้ 2 วิธี คือ การประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีและวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ ดังนั้นจะเห็นได้ว่าพลังงานศักย์แต่ละแบบอาจจะไม่สามารถหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนได้ทุกวิธี แต่สังเกตได้ว่าพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ ที่ศึกษานั้นสามารถหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีได้ทั้งหมดเนื่องจากมีสูตรที่ง่ายต่อการคำนวณ และเป็นสูตรที่ใช้ในการคำนวณหาค่าความ

น่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนที่ได้จากการหาผลเฉลยโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีในบทที่ 3 ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าจากการศึกษาพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ นั้น วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีเหมาะกับระบบที่พลังงานศักย์มีค่าเกือบจะคงที่ เป็นวิธีการสำคัญในการหาคำตอบแบบประมาณ เช่น ปัญหาการแผ่กระจายของคลื่นที่มีความถี่สูงมากหรือความยาวคลื่นสั้นมาก (เพชรอาภา, 2556) จากการศึกษาพลังงานศักย์ที่เป็นค่าคงที่ ไม่ว่าจะเป็นพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้วิธีผลเฉลยแม่นตรง และใช้วิธีผลเฉลยที่ได้จากวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ในการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน จะเห็นได้ว่าค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนเท่ากัน และถึงแม้คำตอบที่ได้จากสูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีจะเป็นค่าประมาณแต่มีความแม่นยำใกล้เคียงกับวิธีผลเฉลยแม่นตรง

## 5.2 ข้อเสนอแนะ

- นำเทคนิคการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ เพื่อหาค่าความน่าจะเป็นในระบบที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น ไม่ว่าจะเป็นในระบบที่มากกว่า 1 มิติ และสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา
- เลือกพลังงานศักย์แบบผสมที่ไม่สามารถหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนโดยวิธีผลเฉลยแม่นตรงได้
- เลือกพลังงานศักย์ที่มีความซับซ้อนยิ่งขึ้น ยกตัวอย่างเช่น
    1. Inverse Square root potential $V(r) = -\alpha/\sqrt{r}$
    2. Combination of three potentials $V(r) = -\alpha r^{-1} + \beta r + kr^2$ ซึ่งประกอบด้วย Colulomb, linear และ harmonic potentials

# รายการอ้างอิง

[1]. พรชัย สาตรวาหา. (2550). สมการเชิงอนุพันธ์. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์.

[2]. นรา จิรภัทรพิมล. (2553). กลศาสตร์ควอนตัม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: แอคทีฟ พริ้นท์ จำกัด.

[3]. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ. (2553). ทฤษฎีควอนตัมพื้นฐาน. แหล่งที่มา: http://facstaff.swu.ac.th/pongkaew/book-quatum-5-1-53.pdf[15 กรกฎาคม 2561]

[4]. อุษณีย์. (2557). สมการคลื่น. แหล่งที่มา: https://usanee1.files.wordpress.com/2014/04/wave3.pdf[24 มิถุนายน 2561]

[5]. เพชรอาภา บุญเสริม. (2553). วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์และวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี. วารสารวิทยาศาสตร์ มข., 41(1), 101-111.

[6]. Boonserm, P. (2009). Transfer matrix representation. Rigorous Bounds on Transmission, Reflection, and Bogoliubov Coefficients, Ph. D. Thesis, Victoria University of Wellington [arxiv:0907.0045 [math-ph]]. 23-30.

[7]. Ngampitipan, T. and Boonserm, P. (2012), Reflection and Transmission Resonances and Accuracy of the WKB Method, In: Proceedings of 2nd Regional Conference on Applied and Engineering Mathematics, Universiti Malaysia Perlis 30-31 May (2012). 116-213.

[8]. Boonserm, P, Ngampitipan, T and Sansuk, K. (2019), Reflection and transmission coefficients from the superposition of various potentials, In: Proceedings of 2nd International Conference on Applied and Industrial Mathematics and statistics, Pahang Malaysia 23-25 July (2019). 1-10.

# ภาคผนวก

# ภาคผนวก ก

# แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal

# ปีการศึกษา 2561

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย) วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์ โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ) Mathematical Methods for Schrödinger Equation using the WKB approximation and 2X2 transfer matrix techniques

อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เพชรอาภา บุญเสริม

ผู้ดำเนินการ นางสาวกุลภัทร แสนสุข เลขประจำตัวนิสิต 5833503023
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

---

**หลักการและเหตุผล**

สมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหรือสมการคลื่นที่ขึ้นกับตำแหน่งและเวลา ซึ่งอยู่ในรูปของพลังงานรวมโดยเกิดจากผลรวมระหว่างพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ ซึ่งสมการชเรอดิงเงอร์แบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ

1. สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}X(x) + V(x)X(x) = EX(x)$$

โดยที่ $\hbar$ คือ ค่าคงตัวของพลังค์, $X(x)$ คือ ฟังก์ชันคลื่น และ $V(x)$ คือ พลังงานศักย์
โดยสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

2. สมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}X(x,t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x,t) + V(x)X(x,t)$$

สมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหรือสมการคลื่น สามารถหาผลเฉลยออกมาเป็นฟังก์ชันคลื่น

และฟังก์ชันคลื่นสามารถอธิบายพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของคลื่นได้ และพบว่าสมการชเรอดิงเงอร์สามารถทำนายสมบัติของอะตอมไฮโดรเจนได้อย่างแม่นยำ นอกจากนั้นสามารถใช้สมการชเรอดิงเงอร์ได้อย่างกว้างขวางทั้งในฟิสิกส์อะตอม ฟิสิกส์นิวเคลียร์ และฟิสิกส์สถานะของแข็ง (เพชรอาภา, 2556)

ในหัวข้อถัดไปจะศึกษาการหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา โดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และใช้วิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน

**1. วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB)**

วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB) ถูกค้นพบโดย Wentzel-Kramers-Brillouin ใช้ในการหาผลเฉลยซึ่งนำมาใช้กับกรณีที่พลังงานศักย์มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ เมื่อตำแหน่งเปลี่ยนไป (Slowly varying function of position) การเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ นั่นคือ พลังงานศักย์จะมีค่าเปลี่ยนไปน้อยมากในช่วงที่ความยาวเปลี่ยนไปหลายช่วงของความยาวคลื่นเดอบรอยล์ (พงษ์แก้ว, 2553) พิจารณาจากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]X(x)$$

ดังนั้น สามารถเขียนผลเฉลยได้ในรูป $X(x) = B(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}$

ซึ่ง $B(x) = \frac{S}{\sqrt{G'(x)}}$

โดยที่ $S$ เป็นค่าคงตัว

และทำการประมาณสมการให้

$$\hbar^2\frac{B''(x)}{B(x)} \ll G'(x)^2$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$G'(x)^2 = 2m[E - V(x)]$$

$$G(x) = \pm\int p(x)dx$$

จะได้ว่าผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติโดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB) คือ

$$X(x) \approx \frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}} e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int \hbar k(x)dx} = \frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}} e^{\pm i\int k(x)dx}$$

โดยที่ $S$ เป็นค่าคงตัว

ผลเฉลยที่ได้สามารถใช้ในการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน โดยพลังงานศักย์ที่จะศึกษาเพื่อหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ ได้แก่ พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส, พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก, พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน และพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร

**2. วิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ**

วิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ พิจารณาจากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ $r$ และ $t$ โดยใช้ทฤษฎีการกระเจิงแสง และนำไปสู่การคำนวณหาความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคที่ส่งผ่านและสะท้อนกลับ (เพชรอาภา, 2552)

พิจารณาจากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}X(x) + V(x)X(x) = EX(x)$$

ให้ $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]$

ในกรณีที่พลังงานศักย์เป็นค่าคงที่จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x) + k^2X(x) = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยเป็น $X(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

เพื่อง่ายต่อการคำนวณ จึงจะพิจารณาที่ $V(x) = 0$ ดังนั้นจะได้ว่าผลเฉลย คือ

$$X_L(x) = A_L e^{ikx} + B_L e^{-ikx}$$

$$X_R(x) = A_R e^{ikx} + B_R e^{-ikx}$$

<u>พิจารณาการเคลื่อนที่จากฝั่งซ้าย</u>

ดังนั้นจะได้ว่าผลเฉลย คือ

$$X_L(x) = e^{ikx} + r_L e^{-ikx}$$

$$X_R(x) = t_L e^{ikx}$$

และผลเฉลยสังยุค คือ

$$X_L^*(x) = e^{-ikx} + r_L^* e^{ikx}$$

$$X_R^*(x) = t_L^* e^{-ikx}$$

ซึ่งจะได้ว่าความสัมพันธ์เชิงเส้นของสัมประสิทธิ์ $r_L, r_L^*, t_L^*$ และ $t_L$ จะอยู่ในรูป

$$N = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_L^*} & -\frac{r_L^*}{t_L^*} \\ -\frac{r_L}{t_L} & \frac{1}{t_L} \end{bmatrix}$$

<u>พิจารณาการเคลื่อนที่จากฝั่งขวา</u>

ดังนั้นจะได้ว่าผลเฉลยคือ $\quad X_L(x) = t_R e^{-ikx}$

$$X_R(x) = e^{-ikx} + r_R e^{ikx}$$

และผลเฉลยสังยุค คือ

$$X_L{}^*(x) = t_R^* e^{ikx}$$

$$X_R{}^*(x) = e^{ikx} + r_R^* e^{-ikx}$$

ซึ่งจะได้ว่าความสัมพันธ์เชิงเส้นของสัมประสิทธิ์ $r_R, r_R^*, t_R^*$ และ $t_R$ จะอยู่ในรูป

$$N = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_R^*} & \frac{r_R}{t_R} \\ \frac{r_R^*}{t_R^*} & \frac{1}{t_R} \end{bmatrix}$$

จากการเคลื่อนที่จากฝั่งซ้ายและฝั่งขวา จะได้ว่า

$$N = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_L^*} & -\frac{r_L^*}{t_L^*} \\ -\frac{r_L}{t_L} & \frac{1}{t_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_R^*} & \frac{r_R}{t_R} \\ \frac{r_R^*}{t_R^*} & \frac{1}{t_R} \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ว่า $\quad t_L = t_R$ และ $-r_L = r_R$

ดังนั้นจึงให้ $|t_L|^2 = |t_R|^2 = T$ โดยที่ $T$ คือ ความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคที่ส่งผ่าน และ

$|r_L|^2 = |r_R|^2 = R$ โดยที่ $R$ คือ ความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคที่สะท้อนกลับ
เนื่องจากผลรวมของความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนมีค่าเท่ากับ 1
ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $T + R = 1$

## วัตถุประสงค์

ศึกษาสมการชเรอดิงเงอร์ หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ และหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของคลื่นด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

## ขอบเขตของโครงงาน

หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาใน 1 มิติ และคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของคลื่นโดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

## วิธีการดำเนินงาน

### ก. แผนการศึกษา

1. ศึกษาที่มาของกลศาสตร์ควอนตัม
2. ศึกษาสมการชเรอดิงเงอร์
3. หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และใช้วิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ หาความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน
4. หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ
5. เปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2$X$2 มิติ กับผลเฉลยแม่นตรง
6. จัดทำสรุป
7. จัดทำเอกสารเพื่อนำเสนอโครงงานเป็นรูปเล่ม
8. เตรียมส่งเล่มโครงงานฉบับสมบูรณ์

**ข. ระยะเวลาที่ศึกษา**

| ขั้นตอนการศึกษา | ปี 2561 | | | | | | | ปี 2562 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | มิ.ย. | ก.ค. | ส.ค. | ก.ย. | ต.ค. | พ.ย. | ธ.ค. | ม.ค. | ก.พ. | มี.ค. | เม.ย. |
| 1. ศึกษาที่มาของกลศาสตร์ควอนตัม | | | | | | | | | | | |
| 2. ศึกษาสมการชเรอดิงเงอร์ | | | | | | | | | | | |
| 3. หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และใช้วิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ หาความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน | | | | | | | | | | | |
| 4. หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีและวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ | | | | | | | | | | | |
| 5. เปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติกับผลเฉลยแม่นตรง | | | | | | | | | | | |
| 6. จัดทำสรุป | | | | | | | | | | | |
| 7. จัดทำเอกสารเพื่อนำเสนอโครงงานเป็นรูปเล่ม | | | | | | | | | | | |
| 8. เตรียมส่งเล่มโครงงานฉบับสมบูรณ์ | | | | | | | | | | | |

## ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ก. ประโยชน์ต่อตัวนิสิตที่ทำโครงงาน

- สามารถหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

ข. ประโยชน์ที่ได้จากโครงงานที่พัฒนาขึ้น

- สามารถนำเทคนิคการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และวิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ เพื่อหาค่าความน่าจะเป็นในระบบที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น

## อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. คอมพิวเตอร์
2. เครื่องพิมพ์
3. โปรแกรมเอกสาร Microsoft Office Word
4. โปรแกรมนำเสนอ Microsoft Office PowerPoint
5. โปรแกรม Maple

## งบประมาณ

1. ค่าปริ้นท์งาน 100 บาท
2. ค่าถ่ายเอกสาร 60 บาท
3. กระดาษ A4 110 บาท
4. ค่าเย็บรูปเล่ม 150 บาท
5. ค่า External harddisk 2,190 บาท
6. ค่าหนังสือ 350 บาท
7. ค่าแผ่นซีดี 1 กล่อง 290 บาท

## เอกสารอ้างอิง

[1]. พรชัย สาตรวาหา. (2550). สมการเชิงอนุพันธ์. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์.

[2]. นรา จิรภัทรพิมล. (2553). กลศาสตร์ควอนตัม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: แอคทีฟ พริ้นท์ จำกัด.

[3]. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ. (2553). ทฤษฎีควอนตัมพื้นฐาน. แหล่งที่มา: http://facstaff.swu.ac.th/pongkaew/book-quatum-5-1-53.pdf[15 กรกฎาคม 2561]

[4]. อุษณีย์. (2557). สมการคลื่น. แหล่งที่มา: https://usanee1.files.wordpress.com/2014/04/wave3.pdf[24 มิถุนายน 2561]

[5]. เพชรอาภา บุญเสริม. (2553). วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์และวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี. วารสารวิทยาศาสตร์ มข., 41(1), 101-111.

[6]. Boonserm, P. (2009). Transfer matrix representation. Rigorous Bounds on Transmission, Reflection, and Bogoliubov Coefficients, Ph. D. Thesis, Victoria University of Wellington [arxiv:0907.0045 [math-ph]]. 23-30.

[7]. Ngampitipan, T. and Boonserm, P. (2012), Reflection and Transmission Resonances and Accuracy of the WKB Method, In: Proceedings of 2nd Regional Conference on Applied and Engineering Mathematics, Universiti Malaysia Perlis 30-31 May (2012). 116-213.

# ภาคผนวก

## 1. สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

จากสมการคลื่นใน 1 มิติ คือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{1}$$

แทนสมการ (1) ในสมการคลื่นใน 1 มิติ จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 \, [X(x)T(t)]}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 [X(x)T(t)]}{\partial x^2}$$

$$X(x)\frac{d^2 \, T(t)}{dt^2} = c^2 T(t)\frac{d^2 X(x)}{dx^2} \tag{2}$$

หารตลอดสมการด้วย $X(x)T(t)$

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d^2 \, T(t)}{dt^2} = \frac{c^2}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2}$$

เนื่องจากสมการทางซ้ายเป็นฟังก์ชันของ $t$ และสมการทางขวาเป็นฟังก์ชันของ $x$ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองข้างเป็นค่าคงตัว จากการคำนวณหาผลเฉลยของ $u(x,t)$ พบว่าถ้า $k < 0$ ให้ $k = -a^2, a > 0$ จะได้

ผลเฉลยที่สอดคล้องกับปัญหาขอบและค่าเริ่มต้น

ดังนั้น

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d^2 \, T(t)}{dt^2} = -a^2 \tag{3}$$

ให้ $a = \omega$ จะได้ว่า

$$\frac{d^2 \, T(t)}{dt^2} = -T(t)\omega^2 \tag{4}$$

$$\frac{d^2 \, T(t)}{dt^2} + T(t)\omega^2 = 0$$

มีผลเฉลยเป็น $$T(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \tag{5}$$

แทนสมการ (5) ในสมการ (2)

$$X(x)\frac{d^2\ [c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t]}{dt^2} = c^2[c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t]\ \frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

$$X(x)[-\omega^2 c_1\cos\omega t - \omega^2 c_2\sin\omega t] = c^2[c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t]\ \frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

$$-\omega^2 X(x)[c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t] = c^2[c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t]\ \frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

$$-\omega^2 X(x) = c^2\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

จัดรูปใหม่ และให้ $c = v$ จะได้ว่า

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}X(x) \qquad (6)$$

ดังนั้น

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 f^2}{f^2\lambda^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2 2m[E - V(x)]}{h^2} = \frac{4\pi^2 2m[E - V(x)]}{4\pi^2\hbar^2}$$

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{2m[E - V(x)]}{\hbar^2} \qquad (7)$$

แทนสมการ (7) ในสมการ (6)

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{2m[E - V(x)]}{\hbar^2}\ X(x)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = EX(x) - V(x)X(x)$$

จะได้สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + V(x)X(x) = EX(x)$$

**2. สมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา**

พิจารณาจากคลื่นระนาบ

$$X(x,t) = A\sin\tfrac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

โดยที่ $A$ คือ แอมพลิจูดของคลื่น

ดังนั้น คลื่นทั้ง 2 ขบวนเคลื่อนที่ไปพร้อมกัน จะได้ว่า

$$X(x,t) = \{X_1(x,t),\ X_2(x,t)\}$$

$$= \left\{A\,sin\frac{2\pi}{\lambda}[(x-vt)+\frac{\pi}{2}],A\,sin\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right\}$$

เนื่องจาก $sin(x+\frac{\pi}{2}) = cos(x)$

ดังนั้นจะได้ว่า $X(x,t) = \left\{A\,cos\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\,,\ A\,sin\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right\}$

ซึ่งสามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นได้ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน นั่นคือ

$$X(x,t) = A\,cos\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt) + iA\,sin\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)$$

เนื่องจาก $e^{i\emptyset} = cos\,\emptyset + i\,sin\,\emptyset$

ดังนั้น $X(x,t) = Ae^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)}$

หรือ $X(x,t) = Ae^{i2\pi(\frac{x}{\lambda}-ft)}$

โดยที่ $A$ คือ แอมพลิจูดของคลื่น, λ คือ ความยาวคลื่น และ $f$ คือ ความถี่ของคลื่น

เนื่องจาก ความยาวคลื่นของเดอบรอยล์ $\lambda = \frac{h}{p}$ และทฤษฎีของพลังค์ $E = hf$ ฟังก์ชันคลื่นจะได้ว่า

$$X(x,t) = Ae^{i2\pi\left(\frac{xp}{h}-\frac{E}{h}t\right)} \qquad (8)$$

ให้ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ เป็นเลขคลื่นหรือค่าคงตัวของการแผ่ และ $\omega = 2\pi f$ เป็นความเร็วเชิงมุม จะได้ว่า $k = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar}$ และ $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi E}{h}$ แทนในสมการ (8)

จะได้ว่า $X(x,t) =$
$Ae^{i(kx-\omega t)}$ (9)

ตามพอสซูเลตในข้อที่ 1 นั่นคือ ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของอนุภาคคือฟังก์ชันคลื่น โดยที่คุณสมบัติต่าง ๆ ของการเคลื่อนที่ของอนุภาคเช่น ค่าโมเมนตัมและค่าพลังงานนั้น สามารถหาได้จากฟังก์ชันคลื่น
(นรา, 2553)

ดังนั้น หาอนุพันธ์เทียบ $t$ ของฟังก์ชันคลื่นจากสมการ (9) จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial t}X(x,t) = (-i\omega)Ae^{i(kx-\omega t)} \tag{10}$$

คูณ $i\hbar$ ตลอดทั้งสมการ (10) จะได้ว่า

$$(i\hbar)\frac{\partial}{\partial t}X(x,t) = (i\hbar)(-i\omega)Ae^{i(kx-\omega t)}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}X(x,t) = \hbar\omega Ae^{i(kx-\omega t)}$$

เนื่องจาก $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi E}{h}$ ดังนั้น $E = \hbar\omega$ จะได้ว่า

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}X(x,t) = EAe^{i(kx-\omega t)}$$

จากสมการ (9) จะได้ว่า

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}X(x,t) = EX(x,t) \tag{11}$$

โดยที่ $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ เป็นตัวดำเนินการพลังงาน

และอนุพันธ์อันดับสองเทียบ $x$ ของฟังก์ชันคลื่นจากสมการ (9) จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial x}X(x,t) = (ik)Ae^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x,t) = (ik)^2Ae^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x,t) = -k^2Ae^{i(kx-\omega t)}$$

จาก

$$k = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x,t) = -(\frac{p}{\hbar})^2Ae^{i(kx-\omega t)}$$

จัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$p^2 X(x,t) = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x,t) \tag{12}$$

และเมื่อแทน

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

ในสมการ (11) จะได้ว่า

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} X(x,t) = \left[\frac{p^2}{2m} + V(x)\right] X(x,t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} X(x,t) = \frac{p^2}{2m} X(x,t) + V(x)X(x,t) \tag{13}$$

แทนสมการ (12) ในสมการ (13) จะได้สมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} X(x,t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x,t) + V(x)X(x,t)$$

**3. วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB)**

พิจารณาจากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}} \frac{d^2}{dx^2} X(x) + V(x)X(x) = EX(x)$$

จัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dx^2} X(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] X(x) \tag{14}$$

ดังนั้น สามารถเขียนผลเฉลยได้ในรูป

$$X(x) = B(x) e^{\frac{i}{\hbar} G(x)} \tag{15}$$

หาอนุพันธ์อันดับสองของสมการ (15) เทียบกับ $x$

$$\frac{d}{dx} X(x) = \frac{i}{\hbar} G'(x) B(x) e^{\frac{i}{\hbar} G(x)} + B'(x) e^{\frac{i}{\hbar} G(x)}$$

$$= (\frac{i}{\hbar} G'(x) B(x) + B'(x)) e^{\frac{i}{\hbar} G(x)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x) = \frac{i}{\hbar}G'(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}\left(\frac{i}{\hbar}G'(x)B(x) + B'(x)\right) + (\frac{i}{\hbar}G''(x)B(x) + \frac{i}{\hbar}G'(x)B'(x) + B''(x))e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}$$

$$= \frac{-1}{\hbar^2}G'(x)^2B(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} + \frac{i}{\hbar}G'(x)B'(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} + \frac{i}{\hbar}G''(x)B(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} + \frac{i}{\hbar}G'(x)B'(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} + B''(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}$$

$$= \frac{-1}{\hbar^2}G'(x)^2B(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} + \frac{2i}{\hbar}G'(x)B'(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} + \frac{i}{\hbar}G''(x)B(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}+B''(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x) = [\frac{-1}{\hbar^2}G'(x)^2B(x) + \frac{2i}{\hbar}G'(x)B'(x) + \frac{i}{\hbar}G''(x)B(x)+B''(x)]e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} \tag{16}$$

แทนสมการ (15) และ (16) ในสมการ (14)

$$[\frac{-1}{\hbar^2}G'(x)^2B(x) + \frac{2i}{\hbar}G'(x)B'(x) + \frac{i}{\hbar}G''(x)B(x)+B''(x)]e^{\frac{i}{\hbar}G(x)} = -\frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]B(x)e^{\frac{i}{\hbar}G(x)}$$

พิจารณาโดยการเทียบส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน

$$\frac{-1}{\hbar^2}G'(x)^2B(x)+B''(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]B(x)$$

$$\frac{-1}{\hbar^2}G'(x)^2B(x) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]B(x) = -B''(x)$$

$$-G'(x)^2B(x) + 2m[E - V(x)]B(x) = -\hbar^2B''(x)$$

$$-G'(x)^2 + 2m[E - V(x)] = -\hbar^2\frac{B''(x)}{B(x)}$$

$$G'(x)^2 = 2m[E - V(x)]+\hbar^2\frac{B''(x)}{B(x)} \tag{17}$$

พิจารณาโดยการเทียบส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน

$$\frac{2}{\hbar}G'(x)B'(x) + \frac{1}{\hbar}G''(x)B(x) = 0$$

$$\frac{1}{\hbar}G''(x)B(x) = -\frac{2}{\hbar}G'(x)B'(x)$$

$$G''(x)B(x) = -2G'(x)B'(x)$$

คูณ $B(x)$ ตลอดทั้งสมการ

$$G''(x)B(x)^2 = -2G'(x)B'(x)B(x)$$

$$G''(x)B(x)^2 + 2G'(x)B'(x)B(x) = 0$$

$$(B(x)^2G'(x))' = 0$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$B(x)^2G'(x) = C$$

$$B(x) = \frac{S}{\sqrt{G'(x)}} \tag{18}$$

โดยที่ $S = \sqrt{C}$ และ $S$ เป็นค่าคงตัว

ทำการประมาณสมการ (17) ให้

$$\hbar^2 \frac{B''(x)}{B(x)} \ll G'(x)^2$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$G'(x)^2 = 2m[E - V(x)]$$

เนื่องจากความยาวคลื่นของเดอบรอยล์

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m[E - V(x)]}}$$

จะได้ว่า

$$p(x) = \sqrt{2m[E - V(x)]}$$

ดังนั้น

$$G'(x)^2 = p(x)^2$$

$$G'(x) = \pm p(x)$$

$$G(x) = \pm \int p(x)dx \tag{19}$$

แทนสมการ (18) และ (19) ในสมการ (15)

จะได้ว่าผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติโดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB) คือ

$$X(x) = \frac{S}{\sqrt{G'(x)}} e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx} = \frac{S}{\sqrt{p(x)}} e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx}$$

จากสมการ (14) ให้

$$k^2(x) = \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)] = \frac{G'(x)^2}{\hbar^2} = \frac{p(x)^2}{\hbar^2}$$

ดังนั้นสรุปได้ว่าผลเฉลยคือ

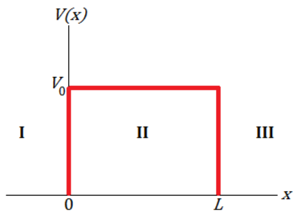
$$X(x) \approx \frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar}\int \hbar k(x)dx} = \frac{S}{\sqrt{\hbar k(x)}} e^{\pm i\int k(x)dx}$$

โดยที่ $S$ เป็นค่าคงตัว

ผลเฉลยที่ได้สามารถใช้ในการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน โดยพลังงานศักย์ที่จะศึกษาเพื่อหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ ได้แก่

1. พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส

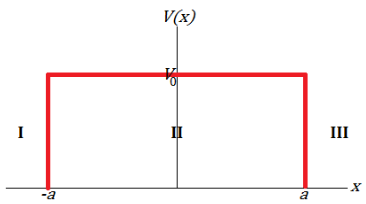
$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 \leq x \leq L \\ 0, & x < 0, x > L \end{cases}$$




(a)

2. พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก

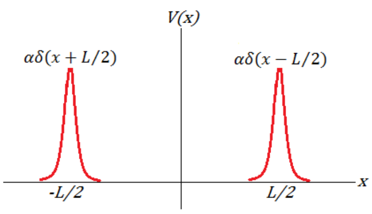
$$V(x) = \begin{cases} V_0, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$




(b)

3. พลังงานศักย์แบบดับเบิลเดลต้าฟังก์ชัน

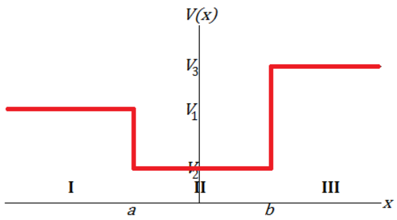
$$V(x) = \alpha\{\delta(x - L/2) + \delta(x + L/2)\}$$




(c)

4. พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมจัตุรัสอสมมาตร

$$V(x)=\begin{cases} V_1, & x<a \\ V_2, & a<x<b \\ V_3, & x>b \end{cases}$$




(d)

## 4. วิธีเมทริกซ์ทรานสเฟอร์ขนาด 2X2 มิติ

จากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\frac{d^2}{dx^2}X(x)+V(x)X(x)=EX(x)$$

จัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\frac{d^2}{dx^2}X(x)=EX(x)-V(x)X(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x)=-\frac{2\mathrm{m}}{\hbar^2}[EX(x)-V(x)X(x)]$$

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x)+\frac{2\mathrm{m}}{\hbar^2}[E-V(x)]X(x)=0$$

ให้ $k^2=\frac{2\mathrm{m}}{\hbar^2}[E-V(x)]$

จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x)+k^2X(x)=0$$

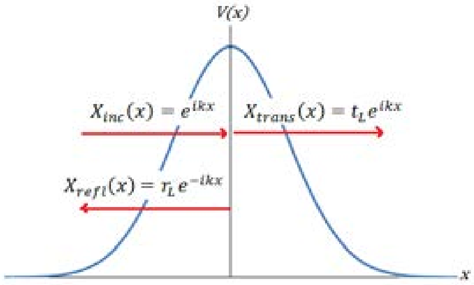
ดังนั้นผลเฉลยเป็น $X(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$

เพื่อง่ายต่อการคำนวณ จึงจะพิจารณาที่ $V(x)=0$ ดังนั้นจะได้ว่าผลเฉลย คือ

$$X_L(x)=A_Le^{ikx}+B_Le^{-ikx}$$

$$X_R(x)=A_Re^{ikx}+B_Re^{-ikx}$$

<u>พิจารณาการเคลื่อนที่จากทางฝั่งซ้าย</u>




ดังนั้น ผลเฉลยของฝั่งซ้ายจะได้ว่า

$$X_L(x) = e^{ikx} + r_L e^{-ikx}$$

และฝั่งขวาจะได้ว่า

$$X_R(x) = t_L e^{ikx}$$

โดยที่ $r_L$ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนของการเคลื่อนที่จากฝั่งซ้าย และ $t_L$ คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของการเคลื่อนที่จากฝั่งซ้าย

เนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง
ดังนั้น ความสัมพันธ์เชิงเส้นของสัมประสิทธิ์ $r_L$ และ $t_L$ จึงสามารถอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} t_L \\ 0 \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} 1 \\ r_L \end{bmatrix} \qquad (20)$$

และเมทริกซ์ $N$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $2 \times 2$

เนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์เป็นจริง ดังนั้น ผลเฉลยสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนของสมการนี้ก็เป็นผลเฉลยเช่นเดียวกัน

ผลเฉลยสังยุคของกรณีนี้คือ

$$X_L^*(x) = e^{-ikx} + r_L^* e^{ikx}$$

$$X_R^*(x) = t_L^* e^{-ikx}$$

โดยที่ $r_L^*$ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนของการเคลื่อนที่จากฝั่งซ้าย และ $t_L^*$ คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของการเคลื่อนที่จากฝั่งซ้าย

ความสัมพันธ์เชิงเส้นของสัมประสิทธิ์ $r_L^*$ และ $t_L^*$ จึงสามารถอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 0 \\ t_L^* \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} r_L^* \\ 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

และเมทริกซ์ $N$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $2 \times 2$

จากสมการ (20) และ (21) จะได้ว่า

$$N = \begin{bmatrix} t_L & 0 \\ 0 & t_L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_L^* \\ r_L & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$N = \frac{1}{1 - r_L r_L^*} \begin{bmatrix} t_L & 0 \\ 0 & t_L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -r_L^* \\ -r_L & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{1}{1 - r_L r_L^*} \begin{bmatrix} t_L & -t_L r_L^* \\ -t_L^* r_L & t_L^* \end{bmatrix} \tag{22}$$

เนื่องจากความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคนั้นสามารถหาได้จากฟังก์ชันคลื่น

โดยที่ $|X(x)|^2 = X^*(x)X(x)$ ดังนั้น สมการชเรอดิงเงอร์ก็มีความเกี่ยวข้องกับกระแสความหนาแน่น นั่นคือ

$$\mathfrak{I} = \frac{\hbar}{2mi}(X^*(x)\frac{\partial X(x)}{\partial x} - \frac{\partial X^*(x)}{\partial x}X(x))$$

เมื่อ $X(x) = e^{ikx} + r_L e^{-ikx}$ จะได้ว่า

$$= \frac{\hbar}{2mi}(e^{-ikx} + r_L^* e^{ikx}\left(ike^{ikx} - r_L ike^{-ikx}\right) + ike^{-ikx} - r_L^* ike^{ikx}\left(e^{ikx} + r_L e^{-ikx}\right))$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}(ik - ikr_L e^{-2ikx} + ikr_L^* e^{2ikx} - r_L r_L^* ik + ik + ikr_L e^{-2ikx} - ik\, r_L^* e^{2ikx} - r_L r_L^* ik)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}(2ik - 2ik|r_L|^2) = \frac{\hbar}{2mi}2ik(1 - |r_L|^2)$$

$$= \frac{\hbar k}{m}(1 - |r_L|^2) \tag{23}$$

และในทำนองเดียวกันเมื่อ $X(x) = t_L e^{ikx}$ จะได้ว่า

$$\mathfrak{I} = \frac{\hbar^2}{2mi}(X^*(x)\frac{\partial X(x)}{\partial x} - \frac{\partial X^*(x)}{\partial x}X(x))$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}(t_L^* e^{-ikx}\left(ikt_L e^{ikx}\right) + ikt_L^* e^{-ikx}(t_L e^{ikx}))$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}(2ikt_L^*t_L) = \frac{\hbar k}{m}|t_L|^2 \tag{24}$$

จากสมการ (23) และ (24) จะได้ว่า

$$\frac{\hbar k}{m}(1 - |r_L|^2) = \frac{\hbar k}{m}|t_L|^2$$

$$|t_L|^2 + |r_L|^2 = 1$$

จากสมการ (22) จะได้ว่า

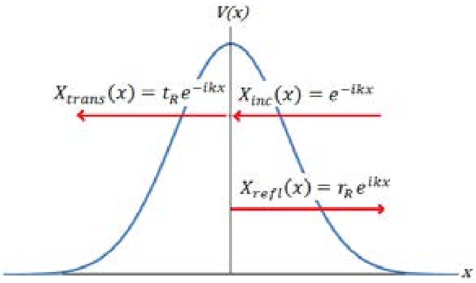
$$N = \frac{1}{1 - r_L r_L^*}\begin{bmatrix} t_L & -t_L r_L^* \\ -t_L^* r_L & t_L^* \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{1}{1 - |r_L|^2}\begin{bmatrix} t_L & -t_L r_L^* \\ -t_L^* r_L & t_L^* \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{1}{|t_L|^2}\begin{bmatrix} t_L & -t_L r_L^* \\ -t_L^* r_L & t_L^* \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_L^*} & -\frac{r_L^*}{t_L^*} \\ -\frac{r_L}{t_L} & \frac{1}{t_L} \end{bmatrix} \tag{25}$$

<u>พิจารณาการเคลื่อนที่จากฝั่งขวา</u>




ผลเฉลยของฝั่งซ้าย คือ

$$X_L(x) = t_R e^{-ikx}$$

และผลเฉลยฝั่งขวา จะได้ว่า

$$X_R(x) = e^{-ikx} + r_R e^{ikx}$$

โดยที่ $r_R$ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนของการเคลื่อนที่จากฝั่งขวา และ $t_R$ คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของการเคลื่อนที่จากฝั่งขวา

เนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

ดังนั้น ความสัมพันธ์เชิงเส้นของสัมประสิทธิ์ $r_{\mathrm{R}}$ และ $t_{\mathrm{R}}$ จึงสามารถอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$N\begin{bmatrix}0\\t_R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_R\\1\end{bmatrix} \tag{26}$$

และเมทริกซ์ $N$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $2\times 2$

เนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์เป็นจริง ดังนั้น ผลเฉลยสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนของสมการนี้ก็เป็นผลเฉลยเช่นเดียวกัน

ผลเฉลยสังยุคของกรณีนี้คือ

$$X_L{}^*(x)=t_R^*e^{ikx}$$

$$X_R{}^*(x)=e^{ikx}+r_R^*e^{-ikx}$$

โดยที่ $r_R^*$ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนของการเคลื่อนที่จากฝั่งขวา และ $t_R^*$ คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของการเคลื่อนที่จากฝั่งขวา

ความสัมพันธ์เชิงเส้นของสัมประสิทธิ์ $r_R^*$ และ $t_R^*$ จึงสามารถอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$N\begin{bmatrix}t_R^*\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\r_R^*\end{bmatrix} \tag{27}$$

และเมทริกซ์ $N$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $2\times 2$

จากสมการ (26) และ (27) จะได้ว่า

$$N=\begin{bmatrix}1 & r_R\\ r_R^* & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_R^* & 0\\ 0 & t_R\end{bmatrix}^{-1}$$

$$N=\frac{1}{t_Rt_R^*}\begin{bmatrix}1 & r_R\\ r_R^* & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_R & 0\\ 0 & t_R^*\end{bmatrix}$$

$$N=\frac{1}{t_Rt_R^*}\begin{bmatrix}t_R & r_Rt_R^*\\ r_R^*t_R & t_R^*\end{bmatrix}$$

$$N=\begin{bmatrix}\frac{1}{t_R^*} & \frac{r_R}{t_R}\\ \frac{r_R^*}{t_R^*} & \frac{1}{t_R}\end{bmatrix} \tag{28}$$

จากสมการ $(25)$ และ $(28)$

$$N = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{t_L^*} & -\dfrac{r_L^*}{t_L^*} \\ -\dfrac{r_L}{t_L} & \dfrac{1}{t_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{t_R^*} & \dfrac{r_R}{t_R} \\ \dfrac{r_R^*}{t_R^*} & \dfrac{1}{t_R} \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ว่า $t_L = t_R$ และ $-r_L = r_R$

ดังนั้น จึงให้ $|t_L|^2 = |t_R|^2 = T$ โดยที่ $T$ คือ ความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคที่ส่งผ่าน และ

$|r_L|^2 = |r_R|^2 = R$ โดยที่ $R$ คือ ความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคที่สะท้อนกลับ

เนื่องจากผลรวมของความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนเท่ากับ $1$
ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $T + R = 1$

# ประวัติผู้เขียน


นางสาวกุลภัทร  แสนสุข

นิสิตภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย


**ระดับการศึกษา**

- จบการศึกษาประถมศึกษาจากโรงเรียนบ้านหนองจิก
- จบการศึกษามัธยมศึกษาจากโรงเรียนสารคามพิทยาคม