บทที่ 1

บทนำ

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ชิ้นส่วนของเครื่องจักรกลและโครงสร้างโดยทั่วไปนั้น มักจะถูกกระทำด้วยภาระที่มีขนาดเปลี่ยนแปลงตามเวลา ซึ่งอาจก่อให้เกิดความเสียหายทางกลเนื่องมาจากความล้าโดยปรากฏออกมาในรูปของรอยร้าว (Crack) ถ้าชิ้นส่วนดังกล่าวยังคงอยู่ภายใต้ภาระเปลี่ยนแปลงต่อไป จะทำให้เกิดการเติบโตของรอยร้าวขึ้น จนกระทั่งชิ้นส่วนเกิดความเสียหายในที่สุด

การทำนายอายุความล้าของชิ้นส่วนและโครงสร้างต่างๆ ที่อยู่ภายใต้ความล้า จึงเป็นสิ่งที่มีความจำเป็นในงานอุตสาหกรรมต่างๆ เพราะช่วยให้วิศวกรสามารถประเมินอายุการใช้งานที่เหลืออยู่ของชิ้นส่วน และโครงสร้างที่ตรวจพบรอยร้าวได้ ซึ่งจะเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการซ่อมบำรุงและการผลิต เนื่องจากทำให้สามารถที่จะวางแผนช่วงเวลาในการหยุดเครื่องจักรนั้นได้อย่างถูกต้อง ช่วยลดความสูญเสียทั้งเวลาและค่าใช้จ่ายได้เป็นอย่างมาก นอกจากนี้แล้วยังสามารถทำให้เกิดความมั่นใจได้ว่าเครื่องจักรที่ใช้งานอยู่นั้นจะมีความปลอดภัย ไม่ก่อให้เกิดความขัดข้องอย่างรุนแรงจนทำให้เกิดอันตรายต่อชีวิตและทรัพย์สินได้

แนวทางที่ใช้ในการเข้าถึงปัญหาความล้าโดยทั่วไปนั้นมีอยู่หลายแนวทาง จากการศึกษาพบว่า แนวทางของกลศาสตร์การแตกหัก (Fracture mechanics approach) นั้นเป็นแนวทางที่เหมาะสมในการวิเคราะห์นี้ เนื่องจากแนวทางนี้มีข้อได้เปรียบกว่าแนวทางการเข้าถึงปัญหาความล้าอื่นๆ เพราะว่าแนวทางกลศาสตร์การแตกหักนั้น จะพิจารณาถึงลักษณะและขนาดของภาระที่มากระทำต่อชิ้นงาน กับความยาวรอยร้าวที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน ซึ่งปริมาณทั้งสองนี้เป็นปริมาณทางกายภาพที่มีความสัมพันธ์กัน โดยแนวทางนี้จะอาศัยพารามิเตอร์ต่างๆ ที่พัฒนาขึ้น เพื่อแสดงถึงความสัมพันธ์ดังกล่าว ทำให้สามารถที่จะเข้าถึงพฤติกรรมของการเติบโตของรอยร้าวได้เป็นอย่างดี

ในปัจจุบันนี้ การวิเคราะห์ปัญหาต่างๆ ทางวิศวกรรมโดยทั่วไปนั้น นิยมที่จะนำเอาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาทำการวิเคราะห์ปัญหาเหล่านี้ เนื่องจากวิธีการนี้สามารถช่วยในการออกแบบได้โดยไม่จำเป็นต้องมีการสร้างต้นแบบขึ้น และยังสามารถที่จะลดเวลาและต้นทุนที่ใช้ในการออกแบบได้ ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้จะนำเอาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้ในการวิเคราะห์หาค่าความเค้นที่เกิดขึ้นบนชิ้นงานที่มีรอยร้าว รวมถึงพารามิเตอร์ซึ่งแสดงถึงระดับ

ความรุนแรงของความเค้นที่เกิดขึ้นที่บริเวณปลายรอยร้าว เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณอายุความล้าต่อไป

หลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยทั่วไปจะเริ่มจากการแบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ซึ่งในแต่ละเอลิเมนต์จะประกอบไปด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่างๆ จากนั้นจะทำการเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element interpolation function) นำไปสร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ แล้วนำสมการที่ได้นั้นมาประกอบกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม จากนั้นจะทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ที่เหมาะสม แล้วจึงแก้ระบบสมการนั้น เพื่อหาค่าตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่างๆ และเพื่อความแม่นยำของผลลัพธ์ จึงจำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กจำนวนมาก ซึ่งทำให้เปลืองหน่วยความจำ และเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณมากโดยไม่จำเป็น ดังนั้นจึงได้มีการนำระเบียบวิธีการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (Adaptive meshing technique) มาใช้ร่วมกัน เพื่อทำให้การแก้ปัญหามีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

งานวิทยานิพนธ์นี้จะขอนำเสนอ การนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบกับการนำเอาระเบียบวิธีการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาประยุกต์ใช้ร่วมกัน เพื่อวิเคราะห์ความเค้นที่เกิดขึ้นในชิ้นงานที่มีรอยร้าว และพารามิเตอร์ที่แสดงถึงระดับความรุนแรงของความเค้นบริเวณปลายรอยร้าว เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณหาอายุความล้าที่เหลืออยู่ของชิ้นงานต่อไป โดยจะทำการตรวจสอบผลลัพธ์ของพารามิเตอร์ดังกล่าวที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับมาตรฐานของ ASTM (American Society for Testing and Material) สำหรับชิ้นงานที่มีอยู่ในมาตรฐาน และจะทำการตรวจสอบผลการทำนายอายุที่เหลืออยู่ของชิ้นงานนี้กับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1. เพื่อประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาของแข็งยืดหยุ่นได้ (Elastic solids) ที่มีรอยร้าว
2. เพื่อประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้น และโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้สามารถทำการคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์
3. เพื่อนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการทำนายอายุความล้าที่เหลืออยู่ของชิ้นงานที่มีรอยร้าวภายใต้สภาวะความเครียดระนาบได้

4. เพื่อศึกษาระเบียบวิธีการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ และนำไปใช้ร่วมกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นอย่างมีประสิทธิภาพ

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1. ศึกษาพฤติกรรมการเติบโตของรอยร้าวเนื่องจากความล้า ในบริเวณที่ 2 ของเส้นโค้งอัตราการเติบโตของรอยร้าว สำหรับทดสอบมาตรฐานแบบ CT (Compact tension specimen) และแบบคานที่มีจุดกดสามจุด (3-point bending specimen) โดยในการศึกษานี้จะพิจารณาอยู่ในขอบเขตของการประยุกต์แนวทางกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear elastic fracture mechanics) กับปัญหาความล้า และจะพิจารณาภายใต้ลักษณะของภาระที่มากระทำต่อรอยร้าวในรูปแบบเปิด (Opening mode) เป็นหลัก เนื่องจากภาระในลักษณะนี้จะเป็นรูปแบบที่นำไปสู่ความเสียหายต่อชิ้นงานที่มีรอยร้าวมากกว่าภาระในรูปแบบอื่น
2. ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals) ของกัลเลอร์คิน (Galerkin) [1] เพื่อนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำหรับวิเคราะห์ปัญหาของแข็งยืดหยุ่นได้ (Elastic solids) ที่มีรอยร้าว โดยการคำนวณจะตั้งอยู่บนรากฐานของการยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear elasticity)
3. สามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไปประยุกต์ เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการทำนายอายุความล้าที่เหลืออยู่ของชิ้นงานที่มีรอยร้าวภายใต้สภาวะความเครียดระนาบได้
4. สามารถนำระเบียบวิธีการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาประยุกต์ใช้ร่วมกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ
5. ตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น กับผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลอง

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

ในวิทยานิพนธ์นี้จะสามารถแบ่งขั้นตอนการดำเนินงานได้ดังนี้

1.4.1 ขั้นตอนการดำเนินการทดลอง

- ศึกษาและทำความเข้าใจในทฤษฎีทางกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้น
- ศึกษาการใช้งานของเครื่องทดสอบความล้า
- ทำการทดสอบหาอัตราการเติบโตของรอยร้าวเนื่องจากความล้าด้วยชิ้นทดสอบมาตรฐานแบบ CT (Compact tension specimen) และแบบคานดัดสามจุดกด (3-point bending specimen)
- ทำการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบ เพื่อหาสมการแสดงอัตราการเติบโตของรอยร้าวจากข้อมูลที่ได้จากการทดสอบ โดยใช้รูปแบบของ Paris [2]

1.4.2 ขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

- ศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในปัญหาของแข็งที่มีความยืดหยุ่นที่มีรอยร้าวได้ ทั้งนี้เพื่อให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายทางกายภาพของระบบสมการอย่างชัดเจน
- ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ โดยใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกัลเลอร์คิน
- ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้น ด้วยภาษาฟอร์แทรน (Fortran) โดยที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้สามารถทำการคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลได้
- ตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยนำไปแก้ปัญหาพื้นฐานที่ทราบผลลัพธ์แม่นตรง เพื่อก่อให้เกิดความมั่นใจก่อนที่จะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปใช้แก้ปัญหาที่ซับซ้อนต่อไป
- ศึกษาและทำความเข้าใจในระเบียบวิธีการปรับขนาดของเอลิเมนต์ และนำมาประยุกต์ใช้กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น เพื่อให้การวิเคราะห์ปัญหาของแข็งยืดหยุ่นที่มีรอยร้าวได้อย่างมีประสิทธิภาพ

1.4.3 สรุปผลที่เกิดขึ้น รวมทั้งข้อเสนอแนะ

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์

1. ก่อให้เกิดความเข้าใจพื้นฐานในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันต่อไป
2. สามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไปประยุกต์ใช้ เพื่อทำนายอายุความล้าของของแข็งยืดหยุ่นได้ที่มีรอยร้าวในสภาวะความเครียดระนาบได้
3. สามารถใช้เป็นแนวทางเริ่มต้นในการศึกษาและพัฒนาระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการทำนายอายุความล้าของชิ้นงานที่มีรอยร้าว ซึ่งมีรูปร่างลักษณะซับซ้อนขึ้นได้
4. สามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เพื่อลดหน่วยความจำ (Ram) และเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลได้

1.6 ปริทัศน์วรรณกรรม

S. K. Chan, I. S. Tuba และ W. K. Wilson (1970), [3] ได้ทำการศึกษาการหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น (Stress intensity factor) ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งลักษณะของเอลิเมนต์ที่ใช้เป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ และทำการหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นด้วยวิธีการประมาณจากค่าการเคลื่อนตัวของจุดต่อบนรอยร้าว (Displacement extrapolation method) สำหรับการศึกษานี้ได้แบ่งบริเวณที่สนใจออกเป็นสองส่วน คือ ส่วนในเป็นบริเวณที่ใกล้ปลายรอยร้าว และส่วนนอกเป็นบริเวณที่เหลือทั้งหมด ซึ่งพบว่า หากขนาดของเอลิเมนต์ในส่วนในมีขนาดเล็ก จะส่งผลให้เส้นโค้งการประมาณค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นมีความเบี่ยงเบนที่บริเวณปลายรอยร้าวลดลง และเมื่อลดขนาดของเอลิเมนต์ที่ส่วนนอกลง จะทำให้เส้นโค้งการประมาณค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยแม่นตรง (Exact solution) มากยิ่งขึ้น

D. M. Tracy (1971), [4] ได้ทำการศึกษาเอลิเมนต์ที่ปลายรอยร้าวชนิดใหม่ที่สามารถแสดงความเค้นในลักษณะของ $\frac{1}{\sqrt{r}}$ ซิงกูลาริตี้ ($\frac{1}{\sqrt{r}}$ singularity) ที่ปลายรอยร้าวในวัสดุยืดหยุ่นได้ โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งเกิดจากไอโซพาราเมตริกเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อมาทำการยุบด้านลงด้านหนึ่งเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม และจากการยุบด้านในลักษณะดังกล่าวจะก่อให้เกิดความเค้นในรูปแบบของ $\frac{1}{\sqrt{r}}$ ซิงกูลาริตี้ได้ ณ จุดต่อที่ทำการยุบมารวมกัน จากนั้นจึงนำค่าการเคลื่อนตัวที่ได้ไปคำนวณหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น และเมื่อนำค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นที่ได้ไปเปรียบเทียบกับทางทฤษฎี จะพบว่าค่าดังกล่าวมีความสอดคล้องกัน

G. P. Anderson, V. L. Ruggles และ G. S. Stibor (1971), [5] ได้ทำการศึกษาปัญหารอยร้าวในสองมิติ เพื่อหาค่าพลังงานความเครียด (Strain energy) ที่เกิดขึ้นด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยลักษณะของเอลิเมนต์ที่ใช้เป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ และเมื่อทำเปรียบเทียบค่าพลังงานความเครียดที่คำนวณได้กับทางทฤษฎีแล้ว พบว่าความถูกต้องของพลังงานความเครียดที่ได้นี้ไม่ได้ขึ้นอยู่กับจำนวนของเอลิเมนต์ แต่ขึ้นอยู่กับการแบ่งเอลิเมนต์ที่เหมาะสม และสามารถคำนวณหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานความเครียดต่อพื้นที่ผิวหน้ารอยร้าวกับค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น ซึ่งวิธีการหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นในวิธีนี้มีข้อดีคือ ไม่จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์เป็นจำนวนมากในการคำนวณ

R. D. Henshell และ K. G. Shaw (1975), [6] ได้ทำการศึกษาการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น โดยการใช้ไอโซพาราเมตริกเอลิเมนต์แบบแปดจุดต่อ และทำการย้ายจุดต่อที่กลางด้านของเอลิเมนต์สองด้านที่ติดกับปลายรอยร้าวไป ณ ตำแหน่งหนึ่งในสี่ของความยาวด้านเข้าใกล้ปลายรอยร้าว (Quarter-point) ซึ่งเอลิเมนต์ชนิดนี้จะก่อให้เกิดลักษณะความเค้นในเอลิเมนต์เช่นเดียวกับผลเฉลยแม่นตรงของ Westergaard [2] สำหรับชิ้นงานที่มีรอยร้าว ทำให้สามารถใช้ค่าผลเฉลยของความเค้นในเอลิเมนต์ที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาคำนวณหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นได้ และจากค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นที่ได้นี้ เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยทางทฤษฎี พบว่าค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นมีสอดคล้องกัน

R. S. Barsoum (1976,1977), [7,8] ได้ศึกษาการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น โดยใช้เอลิเมนต์แบบซิงกูลาร์ไอโซพาราเมตริกเอลิเมนต์อันดับสอง (Singular quadratic isoparametric element) ทั้งใน 2 มิติ และ 3 มิติ ซึ่งเอลิเมนต์ชนิดนี้จะก่อให้เกิดค่าซิงกูลาริตี้ในความเค้นของเอลิเมนต์เช่นเดียวกับทางทฤษฎีกลศาสตร์การแตกหักยืดหยุ่นเชิงเส้น ทำให้สามารถใช้เอลิเมนต์ชนิดต่าง ๆ เหล่านี้ในการหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น ซึ่งสามารถหาได้จากทั้งภาระทางกลและภาระทางความร้อน และจากการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์เหล่านี้กับผลเฉลยทางทฤษฎี พบว่าค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นมีค่าที่สอดคล้องกัน

I. S. Raju และ J. C. Newman, Jr. (1977), [9] ได้ทำการศึกษาการใช้ระเบียบวิธี ไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์หาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นที่เกิดขึ้นในชิ้นงานรอยร้าวที่มีความหนาใน 3 มิติ โดยในการวิจัยนี้ได้ใช้ซิงกูลาริตี้เอลิเมนต์ (Singularity element) ซึ่งมีลักษณะเป็นไอโซพาราเมตริกเอลิเมนต์ปริซึมแบบหกจุดต่อที่บริเวณหน้าของรอยร้าว (Crack front) และใช้สแคว์รูทเอลิเมนต์ (Square-root element) ในบริเวณถัดจาก ซิงกูลาริตี้เอลิเมนต์ เนื่องจากเอลิเมนต์ทั้งสองชนิดนี้จะทำให้เกิดค่าซิงกูลาริตี้ในความเค้นของ เอลิเมนต์เช่นเดียวกับในทางทฤษฎี จากนั้นทำการหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นด้วยการวิธีการวิเคราะห์แรง ทำให้สามารถตัดข้อสมมุติฐานของความเค้นระนาบ หรือความเครียดระนาบออกไปได้

P. P. Lynn และ A. R. Ingraffea (1978), [10] ได้ทำการศึกษาเอลิเมนต์ที่อยู่ระหว่างเอลิเมนต์สำหรับปลายรอยร้าวและเอลิเมนต์อื่นๆ ทั่วไป (Transition elements) โดยที่เอลิเมนต์สำหรับปลายรอยร้าวเป็นไอโซพาราเมตริกเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบแปดจุดต่อที่ยุบด้านหนึ่งไปรวมอยู่ที่ปลายรอยร้าว และเลื่อนจุดกึ่งกลางของด้านที่ติดกับปลายรอยร้าวไปที่ตำแหน่งหนึ่งในสี่ของด้านเข้าใกล้ปลายรอยร้าว และสำหรับเอลิเมนต์ถัดจากเอลิเมนต์สำหรับปลายรอย

ร้าวนี้เป็นไอโซพาราเมตริกเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบแปดจุดต่อที่เลื่อนจุดต่อที่กลางด้านไปไว้ตำแหน่งที่เหมาะสม ซึ่งจากการศึกษาพบว่าการใช้เอลิเมนต์ชนิดนี้ร่วมด้วยในการวิเคราะห์หาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นนี้ จะให้ค่าที่ถูกต้องมากกว่าการไม่ใช้เอลิเมนต์ชนิดนี้ในการคำนวณเมื่อขนาดของเอลิเมนต์สำหรับปลายรอยร้าวมีขนาดเล็ก

M. A. Hussain, J. D. Vasilakis และ S. L. Pu (1981), [11] ได้ทำการศึกษาเอลิเมนต์ที่อยู่ถัดจากเอลิเมนต์สำหรับปลายรอยร้าวเช่นกัน โดยมีลักษณะของเอลิเมนต์เป็นไอโซพาราเมตริกเอลิเมนต์อันดับสองและสาม เพื่อเพิ่มความเป็นซิงกูลาริตี้ในบริเวณถัดจากปลายรอยร้าว ซึ่งจากการศึกษาพบว่าเมื่อทำการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ดังกล่าวแล้ว ผลการคำนวณค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นจะมีความถูกต้องมากขึ้นในบางรูปแบบเท่านั้น

V. Banthia (1985), [12] ได้ทำการศึกษาการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการคืบ (Creep) ซึ่งโดยทั่วไปแล้วปัญหาการคืบจะเกิดความเครียดในลักษณะของ $\frac{1}{r}$ ซิงกูลาริตี้โดยประมาณ โดยเอลิเมนต์ที่สามารถแสดงความเครียดในลักษณะดังกล่าวได้คือ ไอโซพาราเมตริกเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบแปดจุดต่อที่ทำการยุบด้านหนึ่งมารวมกันที่ตำแหน่งปลายรอยร้าว จากนั้นปล่อยให้จุดต่อทั้งสามที่ยุบมานี้ สามารถเคลื่อนตัวได้อย่างอิสระต่อกัน ซึ่งพบว่าเอลิเมนต์ดังกล่าวนี้สามารถแสดงลักษณะของการคืบได้เป็นอย่างดี หากกำหนดขนาดของเอลิเมนต์สำหรับปลายรอยร้าว และตำแหน่งการคำนวณของจุดเกาส์ได้อย่างเหมาะสม

C. Manu (1986), [13] ได้ทำการศึกษาผลของการใช้เอลิเมนต์แบบไอโซพาราเมตริกอันดับสองเป็นเอลิเมนต์ระหว่างเอลิเมนต์สำหรับปลายรอยร้าวกับเอลิเมนต์อื่นๆ ทั่วไป ซึ่งพบว่าหากมีการกำหนดอัตราส่วนระหว่างขนาดของเอลิเมนต์สำหรับปลายรอยร้าวกับเอลิเมนต์ชนิดดังกล่าวในค่าที่เหมาะสมแล้ว จะทำให้การประมาณค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นมีความแม่นยำสูง

P. R. Heyliger (1988), [14] ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลของการใช้เอลิเมนต์แบบปกติ (Conventional element) กับเอลิเมนต์แบบผสม (Mixed element) ในการแก้ปัญหารอยร้าวในวัตถุยืดหยุ่นได้ โดยเอลิเมนต์แบบปกติที่ใช้เป็นไอโซพาราเมตริกเอลิเมนต์อันดับสองแบบสี่เหลี่ยมและสามเหลี่ยม ส่วนเอลิเมนต์แบบผสมจะมีลักษณะเช่นเดียวกับเอลิเมนต์แบบปกติ แต่การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์แบบผสมนี้จะนำเอาความเค้นที่จุดต่อเข้าร่วมเป็นตัวไม่ทราบค่าในสมการด้วย จากการศึกษาพบว่าการใช้เอลิเมนต์แบบผสมจะสามารถคำนวณค่าพลังงานความเครียดได้แม่นยำกว่าเอลิเมนนต์แบบปกติ และการคำนวณ

ค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นด้วยวิธีการอินทิกรัลหาค่า J จากเอลิเมนต์แบบผสมจะให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องมากขึ้น

L. Banks-Sills (1991), [15] ได้ทำการศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหารอยร้าวในวัตถุยืดหยุ่นได้ทั้งใน 2 มิติ และ 3 มิติ โดยลักษณะของเอลิเมนต์ที่ใช้เป็นไอโซพาราเมตริกเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบแปดจุดต่อ และเก้าจุดต่อ สำหรับปัญหา 2 มิติ และใช้ไอโซพาราเมตริกเอลิเมนต์ปริซึมสี่เหลี่ยมแบบยี่สิบจุดต่อ และยี่สิบเจ็ดจุดต่อ สำหรับปัญหา 3 มิติ ซึ่งจากการศึกษาพบว่าเอลิเมนต์ที่เหมาะสมแก่การประยุกต์ใช้ต่อไปคือ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบแปดจุดต่อ และเอลิเมนต์ปริซึมสี่เหลี่ยมแบบยี่สิบจุดต่อ

X. B. Lin และ R. A. Smith (1997,1999), [16,17] ได้ทำการศึกษาการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับแสดงการเติบโตของรอยร้าวเนื่องจากความล้าทั้งในภาชนะความดัน [16] และในแผ่นแบน [17] โดยในงานวิจัยนี้ได้ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่มีหลายอันดับความเป็นอิสระ (Multiple degree of freedom) เพื่อใช้ในการทำนายการเติบโตของพื้นผิวรอยร้าวเนื่องจากภาระความล้า โดยในการวิเคราะห์นี้มีกระบวนการดังนี้คือ เริ่มจากการวิเคราะห์เพื่อหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นที่จุดต่างๆ ในแนวหน้ารอยร้าว (Crack front) ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ใน 3 มิติ จากนั้นทำการคำนวณหาการเติบโตของรอยร้าวที่เพิ่มขึ้นของจุดต่างๆ เหล่านี้ ด้วยความสัมพันธ์ของการเติบโตของรอยร้าวภายใต้ความล้า และเมื่อหาค่าการเติบโตที่เพิ่มขึ้นของรอยร้าวที่จุดต่างๆ ที่หน้ารอยร้าวแล้ว จะทำการสร้างหน้ารอยร้าวขึ้นมาใหม่ ด้วยวิธีการประมาณแบบเส้นโค้งกำลังสาม (Cubic spline) จากนั้นจะทำการสร้างขอบเขตของปัญหา (model) ขึ้นใหม่โดยอัตโนมัติ แล้วทำการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น และทำการคำนวณหาการเติบโตของรอยร้าวที่เพิ่มขึ้นที่จุดต่างๆ ในแนวหน้ารอยร้าวอีกครั้ง ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งความยาวรอยร้าวที่ได้ถึงค่าความยาวรอยร้าววิกฤต ซึ่งจากระเบียบวิธีดังกล่าวข้างต้นนี้ ทำให้สามารถคำนวณหาอายุความล้าที่เกิดขึ้นได้

A. Yavari, E. T. Mayer, Jr. และ S. Sarkani (1999), [18] ได้ทำการศึกษาผลของการใช้เอลิเมนต์ที่อยู่ระหว่างเอลิเมนต์สำหรับปลายรอยร้าวและเอลิเมนต์อื่นๆ ทั่วไป ซึ่งเป็นเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมแปดจุดต่อ และเก้าจุดต่อ จะพบว่าเอลิเมนต์ทั้งสองชนิดนี้จะให้ลักษณะของความเค้นเป็นแบบ $\frac{1}{\sqrt{r}}$ ซิงกูลาริตี้ เมื่อขนาดของเอลิเมนต์มีขนาดใหญ่ ดังนั้นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบแปดจุดต่อจึงเหมาะสมแก่การใช้งานมากกว่า เนื่องจากเอลิเมนต์ชนิดนี้มีองศาความอิสระ (Degree of freedom) น้อยกว่า

G. V. Guinea, J. Planas และ M. Elices (2000), [19] ได้ทำการศึกษาวิธีการคำนวณหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นด้วยวิธีการประมาณของค่าการเคลื่อนตัวใน 2 มิติ โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อที่มีการเลื่อนจุดต่อกลางด้านที่ติดกับปลายรอยร้าวเข้ามาที่ตำแหน่งหนึ่งในสี่ของด้าน และจากการศึกษาพบว่า ถ้าขนาดของเอลิเมนต์ที่ปลายรอยร้าวมีขนาดเล็กมาก การเรียงตัวของเอลิเมนต์ที่ปลายรอยร้าวจะมีผลต่อการคำนวณหาค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น คือ หากมีเอลิเมนต์เรียงอยู่เป็นจำนวนมากจะคำนวณได้คำตอบที่ถูกต้องยิ่งขึ้น นอกจากนี้ยังมีผลที่เกิดจากสถานะของความเค้น (State of stress) คือ ในกรณีความเค้นระนาบ (Plane strain) การคำนวณค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นที่ได้จะมีความผิดพลาดมากขึ้น เมื่ออัตราส่วนปัวส์ซง (Poisson's ratio) มีค่าสูงขึ้น