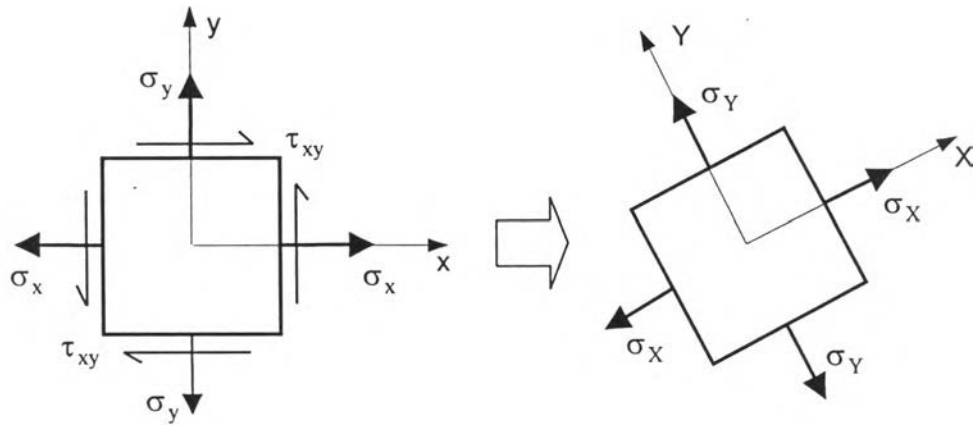
บทที่ 7

เทคนิคการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น ขนาดของเอลิเมนต์จะมีผลต่อความแม่นยำของผลเฉลย โดยการใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็ก จะส่งผลให้คำตอบที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้น แต่การใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กเป็นจำนวนมาก จะทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและหน่วยความจำ (Ram) ของคอมพิวเตอร์เป็นจำนวนมาก ดังนั้นจึงมีการนำเอาเทคนิคการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อแก้ไขปัญหาดังกล่าว โดยเทคนิคการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินี้ จะทำการปรับขนาดของเอลิเมนต์ให้มีขนาดที่เหมาะสม ซึ่งทำให้ผลเฉลยที่ได้มีความแม่นยำโดยไม่จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์เป็นจำนวนมาก โดยในบทนี้จะกล่าวถึงหลักการของเทคนิคการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

7.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

หลักการของเทคนิคการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ คือ จะทำการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของคำตอบสูง และใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น โดยหลักการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ ดังกล่าว จะทำการประยุกต์หลักการของการหาค่าความเค้นหลักในแนวแกนหลัก (Principal stress) ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง (Solid mechanics,[36]) ดังรูปที่ 7.1 กล่าวคือที่ตำแหน่งใดๆบนระนาบของแกน x-y จะประกอบด้วยความเค้นอยู่สองประเภทคือความเค้นดั้งฉาก (Normal Stress) และความเค้นเฉือน (Shear Stress) และหากหมุนแกนที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ตำแหน่งที่สนใจ ค่าของความเค้นดั้งฉากและความเค้นเฉือนก็จะเปลี่ยนแปลงไปอย่างมีระบบ ถ้าหากหมุนแกนจนพบตำแหน่งที่มีเฉพาะความเค้นดั้งฉาก ไม่มีความเค้นเฉือน แกนนั้นจะเรียกว่าแกนหลัก ใช้สัญลักษณ์ X-Y ความเค้นดั้งฉากที่เกิดขึ้นจะเรียกว่าความเค้นตามแนวแกนหลักจะมีอยู่ 2 ค่า และค่ามากในสองค่านี้จะเป็นค่าของความเค้นดั้งฉากที่มากที่สุด ที่เป็นไปได้ ณ ตำแหน่งนั้นๆ สามารถเขียนความสัมพันธ์ของความเค้นในรูปแบบ 2 มิติ สำหรับแนวแกนทั่วไปเมื่อเปรียบเทียบกับแนวแกนหลักได้ดังสมการที่ (7.1)



รูปที่ 7.1 ความเค้นที่ตำแหน่งใดๆเปรียบเทียบกับความเค้นที่แนวแกนหลัก

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_X & 0 \\ 0 & \sigma_Y \end{bmatrix} \qquad (7.1)$$

ในลักษณะเดียวกัน เทคนิคการปรับเปลี่ยนขนาดเอลิเมนต์ที่อาศัยการเปลี่ยนแปลงความชันของคำตอบเป็นตัวกำหนดขนาดของเอลิเมนต์ โดยสามารถเขียนในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ลำดับที่ 2 ได้ดังสมการที่ (7.2) และโดยอาศัยหลักการเดียวกับการหาความเค้นตามแนวแกนหลัก อัตราการเปลี่ยนแปลงความชันก็สามารถหาแนวแกนหลักได้เช่นกัน และจะเกิดค่ามากที่สุดของแต่ละเอลิเมนต์ที่จะนำไปเป็นตัวกำหนดความสัมพันธ์ของขนาดเอลิเมนต์บนโดเมนปัญหา

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \qquad (7.2)$$

โดย Φ_i คือฟังก์ชันคำตอบของปัญหาที่ใช้เป็นตัวกำหนดความสัมพันธ์ของขนาดเอลิเมนต์

i คือจุดต่อหลักบนโดเมนปัญหา

เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อจะมีฟังก์ชันการประมาณภายในของคำตอบเป็นแบบเชิงเส้น (Linear) ซึ่งสามารถเขียนลักษณะการกระจายตัวของคำตอบได้ดังนี้

$$\Phi(x,y) = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \underset{(1x3)}{\lfloor N \rfloor} \underset{(3x1)}{\{ \Phi \}} \qquad (7.3)$$

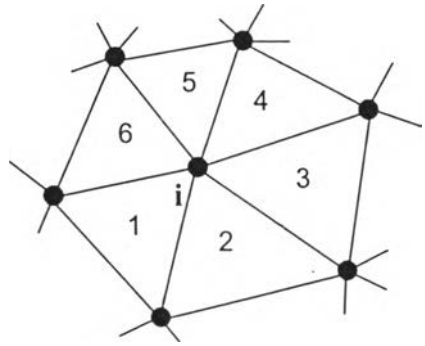
และเนื่องจากฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้นจึงไม่สามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองได้โดยทางตรง ดังนั้นในการหาค่าต่างๆของสมการที่ (7.2) ซึ่งอยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับที่สองนั้นสามารถกระทำได้โดยทางอ้อม [37] โดยเริ่มจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของคำตอบเมื่อเทียบกับแกน x ของสมการ (7.3)

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] \{ \Phi_i \} \qquad (7.4)$$

ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ได้จะเป็นค่าหนึ่งที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ต่างๆทั่วทั้งโดเมน หลังจากนั้นจะทำการแปลงค่าผลเฉลยของเอลิเมนต์ต่างๆให้เป็นผลเฉลยที่จุดต่อ ก่อให้เกิดสนามของค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของคำตอบบนจุดต่อทั่วทั้งโดเมน วิธีในการแปลงดังกล่าวสามารถกระทำได้โดยหาค่าเฉลี่ยในรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$u_i = \frac{\sum (u_e)_n}{n} \qquad (7.5)$$

โดย u_i คือผลเฉลยใดๆบนจุดต่อ u_e คือผลเฉลยใดๆบนเอลิเมนต์
i คือหมายเลขจุดต่อ n คือจำนวนเอลิเมนต์ที่ล้อมรอบจุดต่อ i



รูปที่ 7.2 การเรียงตัวของเอลิเมนต์รอบจุดต่อ i

ตัวอย่างเช่น ผลเฉลยของค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของจุดต่อ i ที่มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ 6 เอลิเมนต์ดังรูปที่ 7.2 สามารถหาได้จาก

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial x}\right)_1 + \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial x}\right)_2 + \cdots + \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial x}\right)_6}{6} \qquad (7.6)$$

หลังจากได้สนามของค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของคำตอบที่อยู่บนจุดต่อทั่วทั้งโดเมน ก็จะเริ่มทำการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สอง โดยสามารถเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในแบบเชิงเส้นบนเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมของค่าอนุพันธ์ดังกล่าวได้ในรูป

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} = \lfloor N \rfloor \left\{ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right\} \qquad (7.7)$$

ดังนั้นค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของคำตอบเทียบกับแกน x และแกน y สามารถเขียนได้ตามลำดับดังนี้

$$\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x^2} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \left\{ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right\} \qquad (7.8ก)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial y \partial x} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \left\{ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right\} \qquad (7.8ข)$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของคำตอบเมื่อเทียบกับแกน y ซึ่งก่อให้เกิดค่าอนุพันธ์อันดับที่สองเมื่อเทียบกับแกน x และy ตามลำดับดังนี้

$$\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x \partial y} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \left\{ \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right\} \qquad (7.9ก)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial y^2} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \left\{ \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right\} \qquad (7.9ข)$$

สมการที่ (7.8ก,ข) และ (7.9ก,ข) เป็นค่าอนุพันธ์อันดับที่สองที่เกิดบนเอลิเมนต์ สามารถหาค่าเหล่านี้ที่กระจายบนจุดต่อต่างๆได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ผ่านมา โดยใช้สมการ (7.5) ซึ่งสุดท้ายก็จะได้ค่าทั้งสี่ของเมตริกซ์ทางด้านซ้ายของสมการที่ (7.2)

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้ค่าความเค้นแบบ Von mises เป็นตัวกำหนดความสัมพันธ์ของขนาด กล่าวคือบริเวณที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันของความเค้น (Stress gradient)

สูง บริเวณนั้นควรจะมีความถี่ของเอลิเมนต์มากกว่าบริเวณที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันของความเค้นต่ำ โดยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติจะใช้ค่าของคำตอบที่จุดต่อหลัก (Main node) ซึ่งก็คือจุดต่อที่มุมของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั่นเอง ดังนั้นเพื่อที่จะประยุกต์เข้ากับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ที่ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ เพื่อคำนวณหาค่าความเค้นจึงจะใช้เฉพาะค่าความเค้นที่จุดต่อมุมที่คำนวณได้มาใช้ในการประยุกต์หาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม โดยสามารถเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในของคำตอบความเร็วแบบเชิงเส้น (Linear interpolation function)บนเอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$\Phi_e(x,y) = N_1\Phi_1 + N_2\Phi_2 + N_3\Phi_3 \qquad (7.10)$$

โดย N_i , $i = 1,2,3$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

Φ_i , $i = 1,2,3$ คือผลของความเค้นที่จุดต่อหลักบนเอลิเมนต์ที่คำนวณจากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนทำการปรับขนาด

$$N_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y \qquad i = 1,2,3 \qquad (7.11)$$

โดยที่

$$a_1 = (x_2y_3 - x_3y_2)/2A \qquad b_1 = (y_2 - y_3)/2A \qquad c_1 = (x_3 - x_2)/2A$$
$$a_2 = (x_3y_1 - x_1y_3)/2A \qquad b_2 = (y_3 - y_1)/2A \qquad c_2 = (x_1 - x_3)/2A \qquad (7.12)$$
$$a_3 = (x_1y_2 - x_2y_1)/2A \qquad b_3 = (y_1 - y_2)/2A \qquad c_3 = (x_2 - x_1)/2A$$

และ A คือพื้นที่ของเอลิเมนต์ที่พิจารณา

$$A = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right] \qquad (7.13)$$

ในการหาค่าตัวแปรต่างๆทางด้านซ้ายของสมการ (7.2) ซึ่งก็คือ $\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x\partial y}$ และ. $\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y\partial x}$ จะเริ่มจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเอลิเมนต์ใดๆ คือ $\frac{\partial\Phi_e}{\partial x}$ และ $\frac{\partial\Phi_e}{\partial y}$ ในลักษณะเดียวกับสมการ (7.4)

$$\frac{\partial\Phi_e}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x}\Phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x}\Phi_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x}\Phi_3 \qquad (7.14)$$

โดยที่ $\frac{\partial N_1}{\partial x} = b_1$, $\frac{\partial N_2}{\partial x} = b_2$, $\frac{\partial N_3}{\partial x} = b_3$

ดังนั้น
$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} = b_1\Phi_1 + b_2\Phi_2 + b_3\Phi_3$$
$$= \frac{1}{2A}\left[(y_2 - y_3)\Phi_1 + (y_3 - y_1)\Phi_2 + (y_1 - y_2)\Phi_3\right] \quad (7.15ก)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + c_3\Phi_3$$
$$= \frac{1}{2A}\left[(x_2 - x_3)\Phi_1 + (x_3 - x_1)\Phi_2 + (x_1 - x_2)\Phi_3\right] \quad (7.15ข)$$

ค่าของ $\frac{\partial \Phi_e}{\partial x}$ และ $\frac{\partial \Phi_e}{\partial y}$ คือค่าอนุพันธ์ของเอลิเมนต์ ดังนั้นในการหา $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}$ และ $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}$ ที่เป็นค่าอนุพันธ์ที่จุดต่อ จึงต้องทำการหาค่าเฉลี่ยโดยการกระจายค่าสู่จุดต่อต่างๆของเอลิเมนต์ที่วางตัวอยู่รอบจุดต่อนั้น สามารถเขียนในรูปทั่วไปหากจุดต่อ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ n เอลิเมนต์ คือ

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \Phi_{e1}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{e2}}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial \Phi_{en}}{\partial x}}{n} \quad (7.16ก)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \Phi_{e1}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{e2}}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial \Phi_{en}}{\partial y}}{n} \quad (7.16ข)$$

สำหรับค่าอนุพันธ์อันดับที่สองหาได้ในทำนองเดียวกับสมการ (7.8) และ (7.9)

$$\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial x}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial x}\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}$$
$$= b_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + b_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + b_3\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \quad (7.17ก)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial N_2}{\partial y}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial y}\frac{\partial \Phi_3}{\partial y}$$
$$= c_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + c_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + c_3\frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \quad (7.17ข)$$

$$\frac{\partial^2\Phi_e}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi_e}{\partial y}\right)=\frac{\partial N_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}+\frac{\partial N_2}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}+\frac{\partial N_3}{\partial x}\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}$$
$$=b_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}+b_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}+b_3\frac{\partial\Phi_3}{\partial y} \qquad (7.17ค)$$

$$\frac{\partial^2\Phi_e}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi_e}{\partial x}\right)=\frac{\partial N_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial N_3}{\partial y}\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}$$
$$=c_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+c_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+c_3\frac{\partial\Phi_3}{\partial x} \qquad (7.17ง)$$

โดยที่ $\frac{\partial^2\Phi_e}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\Phi_e}{\partial y\partial x}$

หลังจากนั้นกระจายค่าอนุพันธ์ลำดับสองของเอลิเมนต์ไปสู่จุดต่อต่างๆของเอลิเมนต์

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial^2\Phi_{e1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_{e2}}{\partial x^2}+\cdots+\frac{\partial^2\Phi_{en}}{\partial x^2}}{n} \qquad (7.18ก)$$

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2}=\frac{\frac{\partial^2\Phi_{e1}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi_{e2}}{\partial y^2}+\cdots+\frac{\partial^2\Phi_{en}}{\partial y^2}}{n} \qquad (7.18b)$$

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y\partial x}=\frac{\frac{\partial^2\Phi_{e1}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\Phi_{e2}}{\partial x\partial y}+\cdots+\frac{\partial^2\Phi_{en}}{\partial x\partial y}}{n} \qquad (7.18c)$$

เมื่อจุดต่อที่ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ n เอลิเมนต์

ค่าของ $\frac{\partial^2\Phi_e}{\partial X^2}$ และ $\frac{\partial^2\Phi_e}{\partial Y^2}$ สามารถหาได้จากสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยหลักการหาค่าที่แนวแกนหลักนี้จะเหมือนกับการหาค่าความเค้นตามแนวแกนหลัก คือจะทำการหาค่าเจาะจง (Eigenvalue) ของเมตริกซ์ความเค้นที่แนวแกน x-y ใดๆ ซึ่งสูตรสำเร็จจะอยู่ในรูปของการถอดค่ารากที่สอง ซึ่งสามารถเขียนในรูปอย่างง่ายคือ

$$\text{ค่าเจาะจง} = \frac{\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2}}{2}\right)^2 + \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x \partial y}} \qquad (7.19)$$

ค่ามากที่สุดของค่าเจาะจงทั้งสองจะถูกเลือกมาเป็นตัวที่ใช้กำหนดขนาดของเอลิเมนต์นั้นๆ โดยกำหนดให้

$$\lambda = \max\left(\left|\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial Y^2}\right|\right) \qquad (7.20)$$

ในการกำหนดขนาดที่เหมาะสมของแต่ละเอลิเมนต์นั้นสามารถหาได้โดย

$$h^2\lambda \;=\; \text{ค่าคงที่} \;=\; h_{min}^2\lambda_{max} \qquad (7.21)$$

โดย ค่าของ h_{min} คือค่าขนาดเอลิเมนต์ที่เล็กที่สุดที่ยอมรับได้โดยผู้ใช้เป็นผู้กำหนด
ค่าของ λ_{max} คือค่า λ ที่มากที่สุดบนโดเมนปัญหา

7.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับประยุกต์การปรับขนาดเอลิเมนต์

ในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาของแข็งยืดหยุ่นได้ที่มีรอยร้าวนั้น จะมีโปรแกรมที่เกี่ยวข้อง 3 โปรแกรมด้วยกันดังนี้

1. โปรแกรม BUILT

เป็นโปรแกรมที่ใช้สำหรับสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่มีเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ โดยการรับข้อมูลที่กำหนดพื้นผิวของแบบจำลองจากผู้ใช้รวมทั้งขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมจากโปรแกรมในข้อที่ 2

2. โปรแกรม SPACE

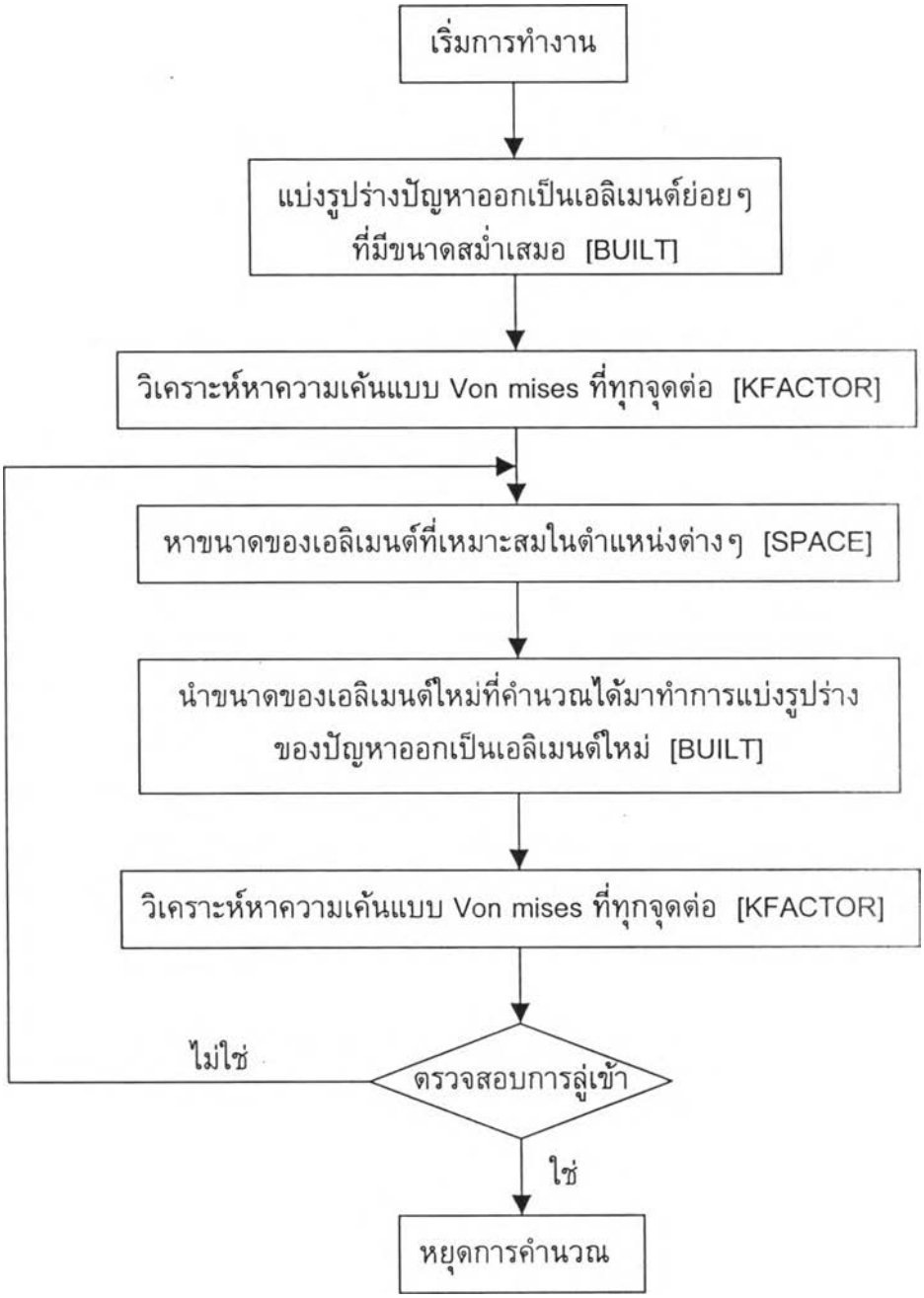
เป็นโปรแกรมที่ใช้คำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมบนโดเมนปัญหาดังที่ได้อธิบายในหัวข้อ 7.1 โดยการรับข้อมูลทั้งจากผู้ใช้เป็นผู้กำหนดค่าตัวแปรต่างๆที่จำเป็น และข้อมูลที่คำนวณได้จากโปรแกรมในข้อ 3 โดยผลการคำนวณจะถูกใช้เป็นข้อมูลนำเข้าในโปรแกรม BUILT เพื่อสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

3. โปรแกรม KFACTOR

เป็นโปรแกรมสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาของแข็งยืดหยุ่นได้ที่มีรอยร้าว ซึ่งผลลัพธ์จะอยู่ในรูปของค่าการเคลื่อนตัว และค่าความเค้นที่จุดต่อ โดยข้อมูลความเค้นแบบ Von mises ที่คำนวณได้จะถูกใช้สำหรับการคำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมโดยโปรแกรม SPACE

ลำดับขั้นตอนในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาของแข็งยืดหยุ่นได้ที่มีรอยร้าวโดยใช้โปรแกรมทั้ง 3 ข้างต้น มีดังนี้

1. สร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดเอลิเมนต์เท่ากันและกระจายโดยสม่ำเสมอตลอดโดเมนปัญหา โดยใช้โปรแกรม BUILT
2. ใช้โปรแกรม KFACTOR วิเคราะห์หาผลของความเค้นแบบ Von mises จากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม BUILT ในขั้นตอนที่ 1
3. ใช้โปรแกรม SPACE เพื่อหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมโดยใช้ผลของความเร็วลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 เป็นตัวกำหนด
4. สร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์อีกครั้งโดยใช้ผลของขนาดเอลิเมนต์ที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 3
5. วิเคราะห์ปัญหารอยร้าวโดยโปรแกรม KFACTOR โดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ผ่านการปรับขนาดครั้งแรกเรียบร้อยแล้ว
6. ตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงของค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้น (K) ที่ได้เมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการวิเคราะห์ โดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในรอบก่อนหน้านี้ หากผลที่ได้มีความแตกต่างกันมากเกินกว่าค่าที่ยอมรับได้ ให้นำผลของความเค้นแบบ Von mises ในครั้งหลังนี้ไปใช้ในการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมใหม่ในขั้นตอนที่ 3 ทำเช่นนี้เรื่อยไปจนการเปลี่ยนแปลงของค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นที่ได้มีการเปลี่ยนแปลงอยู่ในค่าที่ยอมรับได้ เมื่อเปรียบเทียบกับค่าตัวประกอบความเข้มของความเค้นในการคำนวณครั้งก่อน



รูปที่ 7.3 ลำดับขั้นตอนการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

7.2.1 โปรแกรม BUILT

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ BUILT นี้ ประกอบด้วยโปรแกรมหลัก และ 38 โปรแกรมย่อย ซึ่งสามารถแบ่งการทำงานของโปรแกรมออกเป็นส่วนใหญ่ๆ ได้ 4 ส่วน ดังนี้

1. โปรแกรมหลัก [Main Program] เป็นส่วนหลักของโปรแกรม ทำหน้าที่เรียกโปรแกรมย่อยต่างๆ ให้ทำงานตามลำดับ คือ อ่านข้อมูลจากไฟล์ข้อมูลนำเข้า สร้างจุดต่อของเอลิเมนต์ และเอลิเมนต์ พร้อมทั้งแสดงผลลัพธ์ลงในไฟล์ต่างๆ ด้วย

2. ส่วนการอ่านข้อมูล เป็นส่วนที่ทำหน้าที่อ่านข้อมูลจากไฟล์ข้อมูลนำเข้า ประกอบด้วย โปรแกรมย่อย [Subroutine INPUT] ซึ่งใช้ในการอ่านข้อมูลในครั้งแรกของการทำงานเป็นช่วงที่ยังไม่ได้ทำการปรับขนาดของเอลิเมนต์ (Initial mesh) และโปรแกรมย่อย [Subroutine INPUTBG INPUTSG INPUTSF INPSP] ซึ่งใช้ในการอ่านข้อมูลหลังจากได้รับการคำนวณเพื่อปรับขนาดของเอลิเมนต์แล้ว (Remeshing)

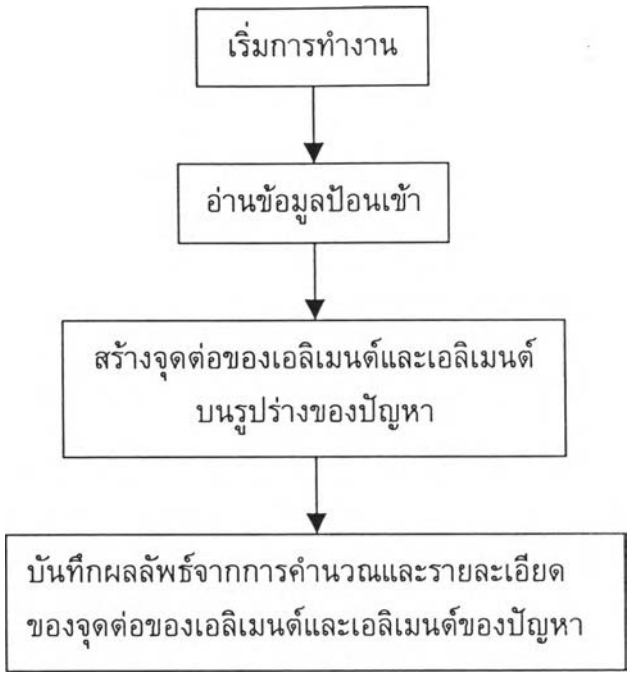
3. ส่วนการสร้างจุดต่อของเอลิเมนต์และเอลิเมนต์ เป็นส่วนที่ทำหน้าที่สร้างจุดต่อของเอลิเมนต์และเอลิเมนต์บนรูปร่างของปัญหา โดยสามารถแสดงลำดับที่สำคัญในการทำงานได้ดังนี้

   3.1 โปรแกรมย่อย [Subroutine GENIS] เป็นส่วนเริ่มต้นของการทำงานในช่วงนี้ ซึ่งทำหน้าที่สร้างจุดต่อของเอลิเมนต์ลงบนขอบของปัญหา

   3.2 โปรแกรมย่อย [Subroutine GENSF] เป็นส่วนที่ทำหน้าที่สร้างจุดต่อของเอลิเมนต์ และเอลิเมนต์บนทุกพื้นผิวของรูปร่างปัญหา โดยสร้างต่อเนื่องจากจุดต่อของเอลิเมนต์ที่อยู่บนขอบ

   3.3 โปรแกรมย่อย [Subroutine GLNUM] เป็นส่วนที่ทำหน้าที่รวมข้อมูลของจุดต่อของเอลิเมนต์ของปัญหา ก่อนที่จะนำไปแสดงผลลัพธ์ในไฟล์ข้อมูลที่ได้

4. ส่วนแสดงผลลัพธ์ เป็นส่วนที่ทำหน้าที่แสดงผลลัพธ์จากการคำนวณลงในไฟล์ต่างๆ เพื่อนำไปใช้แสดงผลบนโปรแกรมกราฟฟิกทั่วไป ประกอบด้วย โปรแกรมย่อย [Subroutine SIZE CONDITION OUTBG OUTSG OUTSF DATAGRAPHIC]



รูปที่ 7.4 ลำดับการทำงานของโปรแกรม BUILT

7.2.2 รายละเอียดของโปรแกรม BUILT

รายละเอียดของโปรแกรม BUILT ที่อยู่ในรูปแบบของภาษาฟอร์แทรน สามารถศึกษาได้จากหนังสืออ้างอิง [31]

7.2.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม BUILT

ไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม BUILT จะเป็นข้อมูลที่ใช้สร้างขอบเขตของปัญหา เพื่อที่จะให้โปรแกรมทำการแบ่งขอบเขตนั้น ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ โดยส่วนประกอบของข้อมูลสามารถจำแนกได้เป็น 4 ส่วน ดังนี้

ส่วนที่ 1 ข้อมูลแสดงจำนวนขอบและพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดแรก	คำอธิบายจำนวนและจำนวนพื้นผิว	
บรรทัดต่อไป	จำนวนขอบและพื้นผิวของปัญหา	
ตัวอย่างเช่น	nis	nsf
	5	1

ส่วนที่ 2 ข้อมูลองค์ประกอบของเส้นขอบ

บรรทัดแรก คำอธิบายคำจำกัดความของขอบปัญหา

บรรทัดที่ 2 ประกอบไปด้วยตัวสองตัว ตัวแรกคือหมายเลขประจำขอบ ส่วนเลขตัวที่สองคือจำนวนจุดที่ใช้ในการสร้างขอบนั้นๆ

บรรทัดต่อไป ตำแหน่งพิกัดของจุดที่จะใช้สร้างขอบนั้นๆ ซึ่งจะมีจำนวนจุดแสดงพิกัดเท่ากับเลขตัวที่สองของบรรทัดที่ 2

ตัวอย่างเช่น
```
edge  definition
1     2
0.          0.          0.
2.5         0.          0.
```

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่แสดงข้างต้น คือขอบที่ 1 ซึ่งใช้จุดพิกัดสองจุดในการสร้างขอบนั้น โดยจุดพิกัดสองจุดดังกล่าวคือ จุด (0,0) และจุด (5.5,0) แต่ในกรณีที่ขอบดังกล่าวเป็นเส้นโค้งก็จำเป็นต้องใช้จำนวนจุดพิกัดเพิ่มขึ้นเพื่อใช้ในการสร้างขอบดังกล่าวให้สมบูรณ์

ส่วนที่ 3 ข้อมูลจุดพิกัดที่มุมของบริเวณที่สามารถล้อมรอบพื้นผิวทั้งหมดของปัญหา

บรรทัดแรก คำอธิบายจุดพิกัดที่ล้อมรอบพื้นผิวทั้งหมดของปัญหา

บรรทัดที่ 2 เลขประจำพื้นผิวของปัญหาและจำนวนจุดพิกัดที่ล้อมรอบพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดต่อไป เป็นตำแหน่งจุดพิกัดที่มุมของพื้นที่ๆ ล้อมรอบพื้นผิวของปัญหา

ตัวอย่างเช่น
```
surface  support  point
1        2        2
0.          0.          0.
50.         0.          0.
0.          50.         0.
50.         50.         0.
```

ส่วนที่ 4 ข้อมูลการเรียงลำดับของขอบที่จะประกอบเป็นพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดแรก คำอธิบายลำดับของขอบที่ประกอบเป็นพื้นผิว

บรรทัดที่ 2 เลขตัวแรกระบุหมายเลขประจำพื้นผิว เลขตัวหลังระบุจำนวนขอบที่จะประกอบเป็นพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดต่อไป ลำดับหมายเลขประจำขอบที่เรียงกัน ซึ่งเป็นขอบพื้นผิวของปัญหา

ตัวอย่างเช่น face boundary

1 5

1 2 3 4 5

7.2.4 ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม BUILT

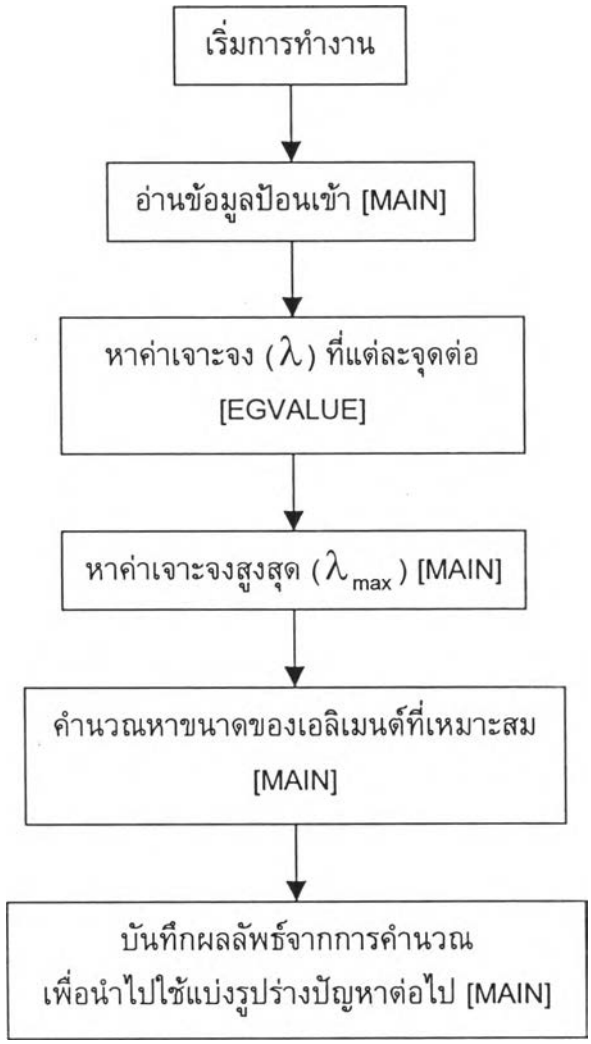
ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม BUILT นั้นมีอยู่หลายไฟล์ด้วยกัน แต่ส่วนใหญ่จะเป็นไฟล์ที่เก็บข้อมูลสำหรับใช้เป็นข้อมูลนำเข้าในรอบต่อไปของการปรับเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์ โดยชื่อไฟล์ผลลัพธ์จะมีชื่อเหมือนไฟล์ข้อมูลนำเข้า และนามสกุลของไฟล์ผลลัพธ์จะมีหมายเลขชุดที่ผู้ใช้เป็นผู้กำหนด เพื่อแยกจากกันอย่างชัดเจนสำหรับไฟล์คำตอบในรอบต่างๆ ของการปรับขนาดของเอลิเมนต์ โดยข้อมูลที่สำคัญที่จะใช้นำไปเป็นข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม KFACTOR เพื่อทำการวิเคราะห์ปัญหารอยร้าว ก็คือ ข้อมูลที่เก็บตำแหน่งพิกัดของจุดต่อต่างๆ และการจัดเรียงจุดต่อของแต่ละเอลิเมนต์

7.2.5 โปรแกรม SPACE

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ SPACE ประกอบด้วยโปรแกรมหลัก และ 1 โปรแกรมย่อย โดยมีขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมดังนี้

1. อ่านข้อมูลนำเข้า ซึ่งประกอบด้วย ชื่อของปัญหา (Problem name) ตัวเลขกำกับชุดของปัญหา (Version number) ข้อมูลรายละเอียดของรูปแบบของปัญหาที่จะนำมาทำการปรับขนาดของเอลิเมนต์ใหม่ เช่น จำนวนจุดต่อหลัก (Main node) จำนวนเอลิเมนต์ ค่าความเค้นแบบ Von mises ที่จุดต่อหลัก ตำแหน่งของจุดต่อ และลำดับการเรียงของจุดต่อของแต่ละเอลิเมนต์ ค่าขนาดของเอลิเมนต์ใหญ่สุดที่ยอมได้
2. หาค่าเจาะจง (Eigenvalue) ของแต่ละจุดต่อ ดังที่กล่าวไว้แล้วข้างต้น โดยการเรียกใช้โปรแกรมย่อย [Subroutine EGVALUE] ซึ่งจะทำการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองของค่าที่นำมาใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการพิจารณาปรับขนาดของเอลิเมนต์ โดยในที่นี้คือค่าความเค้นแบบ Von mises ที่จุดต่อหลัก จากนั้นนำมาหาค่าในแกนหลัก (Principal values) ที่แต่ละจุดต่อ ซึ่งจะมีค่าในแกนหลักเกิดขึ้นสองค่า ค่าที่มากที่สุดระหว่างสองค่าดังกล่าวจะถูกเลือกออกมา โดยค่าที่ถูกเลือกออกมานี้จะถูกเรียกว่า ค่าเจาะจงที่แต่ละจุดต่อ

3. นำค่าเจาะจง (λ) ของทุกจุดต่อหลักมาทำการหาค่าที่มากที่สุด โดยค่าที่ได้นี้จะกำหนดให้เป็นค่าเจาะจงสูงสุด (λ_{max}) ของปัญหาดังที่กล่าวไว้ข้าวต้น
4. นำค่าเจาะจงของแต่ละจุดต่อ และค่าเจาะจงสูงสุดไปทำการหาขนาดของเอลิเมนต์ในตำแหน่งต่างๆ ของปัญหา
5. นำขนาดของเอลิเมนต์ที่ตำแหน่งต่างๆ ที่คำนวณได้นี้ ไปเขียนลงในไฟล์ผลลัพธ์เพื่อนำไปใช้ในการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเป็นเอลิเมนต์ใหม่ต่อไปด้วยโปรแกรม BUILT



รูปที่ 7.5 ลำดับการทำงานของโปรแกรม SPACE

7.2.6 รายละเอียดของโปรแกรม SPACE

รายละเอียดของโปรแกรม SPACE ที่อยู่ในรูปแบบของภาษาฟอร์แทรน สามารถศึกษาได้จากหนังสืออ้างอิง [31]

7.2.7 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม SPACE

ไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม SPACE จะประกอบด้วยกัน 4 ไฟล์ โดยจะอยู่ในรูปแบบของนามสกุล *.N_ , *.L_ , *.DIM และ *.V_ โดยที่เครื่องหมาย * คือชื่อของปัญหา และเครื่องหมาย _ คือหมายเลขที่ระบุชุดของการปรับเปลี่ยนขนาด สำหรับในสามไฟล์แรกนั้นจะได้มาจากโปรแกรม BUILT ส่วนในไฟล์สุดท้ายเป็นข้อมูลของคำตอบที่จุดต่อหลักที่หาได้จากการคำนวณของโปรแกรม KFACTOR

7.2.8 ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม SPACE

โปรแกรม SPACE จะสร้างไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์เพื่อเก็บข้อมูลขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมในตำแหน่งต่างๆ ไว้ในไฟล์ที่มีนามสกุล *.r_ ซึ่งจะเป็นไฟล์ข้อมูลในการนำเข้าของโปรแกรม BUILT เพื่อนำไปปรับขนาดของเอลิเมนต์ในรอบถัดไป โดยตัวอย่างของไฟล์ดังกล่าวแสดงได้ดังรูปที่ 7.6

```
20
 1        .60000000E+01
 2        .10000000E+01
 3        .60000000E+01
 4        .60000000E+01
 5        .60000000E+01
 6        .60000000E+01
 7        .60000000E+01
 8        .60000000E+01
 9        .60000000E+01
10        .60000000E+01
11        .57068801E+01
12        .38743718E+01
13        .18049524E+01
14        .14462751E+01
15        .13458667E+01
16        .15276604E+01
17        .28695310E+01
18        .41574403E+01
19        .58448007E+01
20        .60000000E+01
```

รูปที่ 7.6 รูปแบบของผลลัพธ์ตัวอย่างที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม SPACE