บทที่ 2
ทฤษฎีและตัวสถิติที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงข้อสมมติของตัวแบบถดถอยโลจิสติค วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด วิธีการถ่วงน้ำหนัก และวิธีปรับแก้เบื้องต้น

2.1 ข้อสมมติทั่วไปของตัวแบบถดถอยโลจิสติค

ในการวิจัยครั้งนี้ข้อมูลที่นำมาพิจารณาจะเป็น $(X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}, ..., X_{pi}, Y_i)$; i=1,2,...,m ซึ่ง Y_i เป็นตัวแปรตามที่มีการแจกแจงแบบทวินามด้วยพารามิเตอร์ n_i และ $\pi(x_i)$ และ X_i เป็นตัวแปรอิสระร่วมกัน p ตัวแปร ซึ่งความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่สนใจคือ $\pi(x_i)$

ดังนั้นจะทำการแปลงค่า $\pi(x_i)$ จากช่วง (0,1) เป็นค่าของ logit $(\pi(x_i))$ ที่อยู่ในช่วง $(-\infty,\infty)$ ซึ่งฟังก์ชันการแปลงโลจิสติคของ $\pi(x_i)$ คือ

$$\text{logit } (\pi(x_i)) = \ln\left[\frac{\pi(x_i)}{1-\pi(x_i)}\right] = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + ... + \beta_p x_{pi} \qquad (2.1)$$

$$\left(\frac{\pi(x_i)}{1-\pi(x_i)}\right) = e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + ... + \beta_p x_{pi}}$$

$$\pi(x_i) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + ... + \beta_p x_{pi}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + ... + \beta_p x_{pi}}}$$

สามารถเขียนสมการถดถอยโลจิสติคในรูปเมทริกซ์คือ

$$H(X) = XB$$

เมื่อ $$H(X)=\begin{bmatrix} h(x_1) \\ h(x_2) \\ \vdots \\ h(x_m) \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$X=\begin{bmatrix} 1 & x_{12} & x_{21} & \cdots & x_{p1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1m} & x_{2m} & \cdots & x_{pm} \end{bmatrix}_{m\times(p+1)} \qquad B=\beta=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}_{(p+1)\times 1}$$

ลอการิทึมธรรมชาติของฟังก์ชันความควรจะเป็นสูงสุดในสมการถดถอยโลจิสติค ซึ่งมีฟังก์ชันความควรจะเป็นของ β คือ

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{m}(\pi(x_i))^{y_i}(1-\pi(x_i))^{n_i-y_i}$$

$$l(\beta)=\ln L(\beta)=\sum_{i=1}^{m}\{y_i\ln\pi(x_i)+(n_i-y_i)\ln(1-\pi(x_i))\}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\{y_i\ln\pi(x_i)+n_i\ln(1-\pi(x_i))-y_i\ln(1-\pi(x_i))\}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{y_i\ln\left(\frac{\pi(x_i)}{1-\pi(x_i)}\right)+n_i\ln(1-\pi(x_i))\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}y_i\ln\left[\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_px_{pi}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_px_{pi}}}\cdot\frac{1}{1-\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}\ldots+\beta_px_{pi}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_px_{pi}}}}\right]+\sum_{i=1}^{m}n_i\ln\left[1-\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_px_{pi}}}{1+e^{\beta+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_px_{pi}}}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{m}y_i(\beta_0+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_px_{pi})-\sum_{i=1}^{m}n_i\ln\left(1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_px_{pi}}\right) \tag{2.2}$$

2.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดมีจุดประสงค์เพื่อหาตัวประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้ $l(\beta)$ มีค่ามากที่สุด โดยหาอนุพันธ์เทียบกับพารามิเตอร์ $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ แล้วให้ผลลัพธ์มีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้สมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น p+1 สมการ ซึ่งสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ด้วยวิธี Newton – Raphson

วิธี Newton – Raphson จะหาอนุพันธ์ย่อยของ $l(\beta)$ เทียบกับ $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ เรียกว่า Efficient scores ซึ่งเป็นสมาชิกของเวกเตอร์ $U(B)$ ที่มีมิติ (p+1)x1

$$U(B) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \dfrac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_p} \end{bmatrix}$$

กำหนดเมทริกซ์ $H(B)$ เรียกว่า Hessian matrix มีมิติ (p+1)x(p+1) ซึ่งมีสมาชิกเป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ $l(\beta)$

โดยที่สมาชิกตัวที่ (j,k) คือ $\dfrac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_k}$; j,k = 0,1,2,…,p

สามารถหาเวกเตอร์ $U(\hat{B})$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ประมาณด้วยความควรจะเป็นสูงสุดของ $U(B)$ ที่ใช้ Taylor series กระจาย $U(B)$ รอบ B^* ซึ่ง B^* อยู่ใกล้ๆ $\hat{B}$ จะได้ว่า

$$U(\hat{B}) \approx U(B^*) + H(B^*)(\hat{B} - B^*)$$

โดยนิยามของตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดของ B จะได้ว่า

$$\left.\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_j}\right|_{\hat{\beta}} = 0 \quad \text{สำหรับ } j = 0,1,2,\ldots,p$$

และ $U(\hat{B}) = 0$

ดังนั้น $$\hat{B} = B^{*} - H^{-1}(B^{*})U(B^{*})$$

ซึ่งชี้นำให้มีการประมาณ $\hat{B}$ โดยการคำนวณซ้ำๆ ซึ่งค่าประมาณ $\hat{B}$ ณ รอบที่ r+1 คือ

$$\hat{B}_{r+1} = \hat{B}_r - H^{-1}(B_r)U(B_r) \tag{2.3}$$

สำหรับ r = 0,1,2,... ซึ่งเวกเตอร์ $\hat{B}_0$ เป็นเวกเตอร์ของตัวประมาณเริ่มต้น

2.2.1 วิธี Newton – Raphson **สำหรับตัวแปรอธิบาย 3 ตัว**

ข้อมูลประกอบด้วยค่าสังเกตที่เป็นอิสระ m ค่า คือ $(x_{1i},x_{2i},x_{3i},y_i)$; i = 1,2,...,m ตัวแบบเชิงเส้นโลจิสติค คือ

$$\text{logit}(\pi(x_i)) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i}$$

เมื่อ $$\pi(x_i) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}$$

หาค่าพารามิเตอร์ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ จากการคำนวณซ้ำด้วยวิธี Newton-Raphson ด้วยสมการ

$$\hat{B}_{r+1} = \hat{B}_r - H^{-1}(B_r)U(B_r)$$

เมื่อ

$$B=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix} \quad , \quad U(B)=\begin{bmatrix}\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_0}\\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1}\\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_2}\\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_3}\end{bmatrix}$$

และ

$$H(B)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_3}\\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1^2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_3}\\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2^2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2 \partial \beta_3}\\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_3 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_3 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_3 \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_3^2}\end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

สมาชิกในเวกเตอร์ $U(B)$ และในเมทริกซ์ $H(B)$ หาได้จากอนุพันธ์ของ $l(\beta)$ เทียบกับ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ จากสมการ (2.2) จะได้ค่า $l(\beta)$ สำหรับตัวแปรอิสระ 3 ตัว

$$l(\beta)=\sum_{i=1}^{m} y_i(\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i})-\sum_{i=1}^{m} n_i\left(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}\right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_0}=\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-n_i\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(y_i-n_i\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{m}\left(y_i x_{1i} - n_i x_{1i} \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(y_i x_{1i} - n_i x_{1i}\pi(x_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_{1i}(y_i - n_i\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{m}\left(y_i x_{2i} - n_i x_{2i} \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(y_i x_{2i} - n_i x_{2i}\pi(x_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_{2i}(y_i - n_i\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_3} = \sum_{i=1}^{m}\left(y_i x_{3i} - n_i x_{3i} \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(y_i x_{3i} - n_i x_{3i}\pi(x_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_{3i}(y_i - n_i\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i \left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}} - \left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}} \right)^2 \right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} n_i \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} \left(x_{1i} \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}} - x_{1i}\left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}} \right)^2 \right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i}\left(x_{2i}\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}} - x_{2i}\left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}\right)^2\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i}\left(x_{3i}\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}} - x_{3i}\left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}\right)^2\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_1} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i\left(x_{1i}\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}} - x_{1i}\left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}\right)^2\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_2} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i\left(x_{2i}\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}} - x_{2i}\left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}\right)^2\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i\left(x_{3i}\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}} - x_{3i}\left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}\right)^2\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_2} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}\left(x_{2i}\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}} - x_{2i}\left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}\right)^2\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} x_{2i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}\left(x_{3i}\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}} - x_{3i}\left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}\right)^2\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i}\left(x_{3i}\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}} - x_{3i}\left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}\right)^2\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i} x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

นำสมาชิกของเวกเตอร์ $U(B)$ และในเมทริกซ์ $H(B)$ ที่หามาได้ไปแทนในสมการ(2.4) ดังนั้นคำนวณหาค่า $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ ได้จากสมการ

$$\hat{B}_{r+1} = \hat{B}_r - H^{-1}(B_r)U(B_r)$$

เมื่อ

$$B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \qquad U(B) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m}(y_i - n_i\pi(x_i)) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{1i}(y_i - n_i\pi(x_i)) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{2i}(y_i - n_i\pi(x_i)) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{3i}(y_i - n_i\pi(x_i)) \end{bmatrix}$$

และ

$$H(B) = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{m} n_i\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

ถ้าค่าผลต่างระหว่าง $\hat{B}$ ในรอบที่ r กับรอบที่ r+1 มีค่าน้อยมากจนถือว่าไม่แตกต่างกัน โดยกำหนดเกณฑ์ว่า $|B_r - B_{r+1}| < 0.0000001$ ค่า $\hat{B}_{r+1}$ นั้นจะเป็นค่าที่ยอมรับได้

2.2.2 วิธี Newton – Raphson สำหรับตัวแปรอธิบาย 5 ตัว

ข้อมูลประกอบด้วยค่าสังเกตที่เป็นอิสระ m ค่า คือ $(x_{1i},x_{2i},x_{3i},x_{4i},x_{5i},y_i)$; i = 1,2,...,m ตัวแบบเชิงเส้นโลจิสติค คือ

$$\text{logit}(\pi(x_i)) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \beta_4 x_{4i} + \beta_5 x_{5i}$$

เมื่อ $$\pi(x_i) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}+\beta_4x_{4i}+\beta_5x_{5i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}+\beta_4x_{4i}+\beta_5x_{5i}}}$$

หาค่าพารามิเตอร์ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ จากการคำนวณซ้ำด้วยวิธี Newton-Raphson ด้วยสมการ

$$\hat{B}_{r+1} = \hat{B}_r - H^{-1}(B_r)U(B_r)$$

เมื่อ

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} \quad , \quad U(B) = \begin{bmatrix} \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_5} \end{bmatrix}$$

และ

$$H(B) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_5} \\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_5 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_5 \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_5^2} \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

สมาชิกในเวกเตอร์ $U(B)$ และในเมทริกซ์ $H(B)$ หาได้จากอนุพันธ์ของ $l(\beta)$ เทียบกับ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ จากสมการ (2.2) จะได้ค่า $l(\beta)$ สำหรับตัวแปรอิสระ 5 ตัว

$$l(\beta)=\sum_{i=1}^{m} y_i\left(\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_5 x_{5i}\right)-\sum_{i=1}^{m} n_i\left(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_5 x_{5i}}\right)$$

หาอนุพันธ์ของ $l(\beta)$ เทียบกับ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ ได้ในรูป

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_j}=\sum_{i=1}^{m} x_{ji}\left(y_i-n_i \pi(x_i)\right)$$

ซึ่งทำให้ได้

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_0}=\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-n_i \pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1}=\sum_{i=1}^{m} x_{1i}\left(y_i-n_i \pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_2}=\sum_{i=1}^{m} x_{2i}\left(y_i-n_i \pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_3}=\sum_{i=1}^{m} x_{3i}\left(y_i-n_i \pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_4}=\sum_{i=1}^{m} x_{4i}\left(y_i-n_i \pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_5}=\sum_{i=1}^{m} x_{5i}\left(y_i-n_i \pi(x_i)\right)$$

และสามารถหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ได้ในรูป

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_j^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{ij}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{ji} x_{ki} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

ซึ่งทำให้ได้

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_3^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_4^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{4i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_5^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{5i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_2} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_4} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{4i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{5i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_2} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} x_{2i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} x_{3i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_4} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} x_{4i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} x_{5i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i} x_{3i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_4} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i} x_{4i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i} x_{5i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_4} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_3} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i} x_{4i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_3} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i} x_{5i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_4} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{4i} x_{5i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

นำสมาชิกของเวกเตอร์ $U(B)$ และในเมทริกซ์ $H(B)$ ที่หามาได้ไปแทนในสมการ(2.6) ดังนั้นคำนวณหาค่า $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4, \hat{\beta}_5$ ได้จากสมการ

$$\hat{B}_{r+1} = \hat{B}_r - H^{-1}(B_r)U(B_r)$$

เมื่อ

$$B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} , \qquad U(B) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m}(y_i - n_i\pi(x_i)) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{1i}(y_i - n_i\pi(x_i)) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} x_{5i}(y_i - n_i\pi(x_i)) \end{bmatrix}$$

และ

$$H(B) = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{m} n_i\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{5i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

ถ้าค่าผลต่างระหว่าง $\hat{B}$ ในรอบที่ r กับรอบที่ r+1 มีค่าน้อยมากจนถือว่าไม่แตกต่างกัน โดยกำหนดเกณฑ์ว่า $|B_r - B_{r+1}| < 0.0000001$ ค่า $\hat{B}_{r+1}$ นั้นจะเป็นค่าที่ยอมรับได้

2.2.3 วิธี Newton – Raphson สำหรับตัวแปรอธิบาย 7 ตัว

ข้อมูลประกอบด้วยค่าสังเกตที่เป็นอิสระ m ค่า คือ $(x_{1i},x_{2i},x_{3i},x_{4i},x_{5i},x_{6i},x_{7i},y_i)$; $i = 1,2,\ldots,m$ ตัวแบบเชิงเส้นโลจิสติค คือ

$$\text{logit}(\pi(x_i)) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \beta_4 x_{4i} + \beta_5 x_{5i} + \beta_6 x_{6i} + \beta_7 x_{7i}$$

เมื่อ $$\pi(x_i) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}+\beta_4 x_{4i}+\beta_5 x_{5i}+\beta_6 x_{6i}+\beta_7 x_{7i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}+\beta_4 x_{4i}+\beta_5 x_{5i}+\beta_6 x_{6i}+\beta_7 x_{7i}}}$$

หาค่าพารามิเตอร์ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$ จากการคำนวณซ้ำด้วยวิธี Newton-Raphson ด้วยสมการ

$$\hat{B}_{r+1} = \hat{B}_r - H^{-1}(B_r)U(B_r)$$

เมื่อ

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \end{bmatrix} , \qquad U(B) = \begin{bmatrix} \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_7} \end{bmatrix}$$

และ

$$H(B) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_7} \\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_7} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_7 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_7 \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_7^2} \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

สมาชิกในเวกเตอร์ $U(B)$ และในเมทริกซ์ $H(B)$ หาได้จากอนุพันธ์ของ $l(\beta)$ เทียบกับ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$ จากสมการ (2.2) จะได้ค่า $l(\beta)$ สำหรับตัวแปรอิสระ 7 ตัว

$$l(\beta)=\sum_{i=1}^{m} y_i(\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_7 x_{7i})-\sum_{i=1}^{m} n_i\left(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_7 x_{7i}}\right)$$

หาอนุพันธ์ของ $l(\beta)$ เทียบกับ $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6,\beta_7$ ได้ในรูป

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_j}=\sum_{i=1}^{m} x_{ji}(y_i-n_i\pi(x_i))$$

ซึ่งทำให้ได้

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_0}=\sum_{i=1}^{m}(y_i-n_i\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1}=\sum_{i=1}^{m} x_{1i}(y_i-n_i\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_2}=\sum_{i=1}^{m} x_{2i}(y_i-n_i\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_3}=\sum_{i=1}^{m} x_{3i}(y_i-n_i\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_4}=\sum_{i=1}^{m} x_{4i}(y_i-n_i\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_5}=\sum_{i=1}^{m} x_{5i}(y_i-n_i\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_6}=\sum_{i=1}^{m} x_{6i}(y_i-n_i\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_7}=\sum_{i=1}^{m} x_{7i}(y_i-n_i\pi(x_i))$$

และสามารถหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ได้ในรูป

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_j^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{ij}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{ji} x_{ki} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

ซึ่งทำให้ได้

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_3^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_4^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{4i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_5^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{5i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_6^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{6i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_7^2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{7i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_1} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_2} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_4} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{4i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{5i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_6} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_6\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{6i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_7} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_7\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{7i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_2} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} x_{2i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} x_{3i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_4} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} x_{4i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} x_{5i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_6} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_6\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} x_{6i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_7} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_7\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i} x_{7i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i} x_{3i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_4} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i} x_{4i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i} x_{5i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_6} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_6\partial\beta_2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i} x_{6i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_7} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_7\partial\beta_2} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{2i} x_{7i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_4} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_3} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i} x_{4i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_3} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i} x_{5i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_6} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_6\partial\beta_3} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i} x_{6i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_7} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_7\partial\beta_3} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{3i} x_{7i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_4} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{4i} x_{5i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_6} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_6\partial\beta_4} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{4i} x_{6i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_7} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_7\partial\beta_4} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{4i} x_{7i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_6} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_6\partial\beta_5} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{5i} x_{6i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_7} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_7\partial\beta_5} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{5i} x_{7i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_6\partial\beta_7} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_7\partial\beta_6} = -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{6i} x_{7i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

นำสมาชิกของเวกเตอร์ $U(B)$ และในเมทริกซ์ $H(B)$ ที่หามาได้ไปแทนในสมการ(2.8) ดังนั้นคำนวณหาค่า $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$ ได้จากสมการ

$$\hat{B}_{r+1} = \hat{B}_r - H^{-1}(B_r)U(B_r)$$

เมื่อ

$$B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \end{bmatrix} , \qquad U(B) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m}(y_i - n_i\pi(x_i)) \\ \sum_{i=1}^{m}x_{1i}(y_i - n_i\pi(x_i)) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m}x_{7i}(y_i - n_i\pi(x_i)) \end{bmatrix}$$

และ

$$H(B) = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{m} n_i\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{7i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}x_{7i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{7i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{1i}x_{7i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & -\sum_{i=1}^{m} n_i x_{7i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

ถ้าค่าผลต่างระหว่าง $\hat{B}$ ในรอบที่ r กับรอบที่ r+1 มีค่าน้อยมากจนถือว่าไม่แตกต่างกัน โดยกำหนดเกณฑ์ว่า $|B_r - B_{r+1}| < 0.0000001$ ค่า $\hat{B}_{r+1}$ นั้นจะเป็นค่าที่ยอมรับได้

2.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการถ่วงน้ำหนัก

วิธีการถ่วงน้ำหนักนี้จะเป็นการถ่วงน้ำหนักข้อมูล เมื่อแทนความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สนใจของประชากร($\bar{\pi}(x_i)$) และตัวอย่าง ($\bar{\bar{\pi}}(x_i)$)

ในปี 1977 Maski และ Lerman แสดงการถ่วงน้ำหนักที่ขึ้นกับปัจจัยภายนอกของการสุ่มตัวอย่างของตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุด (Weight Exogenous Sampling Maximum-Likelihood Estimator) ที่มีความสัมพันธ์กันอย่างง่าย

ดังนั้นลอการิทึมธรรมชาติของฟังก์ชันความควรจะเป็นของ β โดยวิธีการถ่วงน้ำหนักคือ

$$L_w(\beta) = \prod_{i=1}^{m} \left(\pi(x_i)\right)^{w_1 y_i} \left(1-\pi(x_i)\right)^{w_0(n_i - y_i)}$$

$$l_w(\beta) = \ln L_w(\beta) = \sum_{i=1}^{m} \{w_1 y_i \ln \pi(x_i) + w_0(n_i - y_i)\ln(1-\pi(x_i))\}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{ w_1 y_i \ln\left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}}}\right) + w_0(n_i - y_i)\ln\left(1-\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}}}\right)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{ w_1 y_i \ln\left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}}}\right) + w_0(n_i - y_i)\ln\left(\frac{1}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}}}\right)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{ w_1 y_i \left(\ln e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}} - \ln(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}})\right) - w_0(n_i - y_i)\ln\left(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}}\right)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{ w_1 y_i \left((\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}) - \ln(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}})\right) - w_0(n_i - y_i)\ln\left(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}}\right)\right\} \quad (2.10)$$

โดยที่ w_1 เป็นการถ่วงน้ำหนักในกรณีที่สนใจ ซึ่ง $w_1 = \dfrac{\bar{\pi}(x_i)}{\bar{\bar{\pi}}(x_i)}$

w_0 เป็นการถ่วงน้ำหนักในกรณีที่ไม่สนใจซึ่ง $w_0 = \dfrac{(1-\bar{\pi}(x_i))}{(1-\bar{\bar{\pi}}(x_i))}$

วิธี Newton – Raphson จะหาอนุพันธ์ย่อยของ $l_w(\beta)$ เทียบกับ $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ เรียกว่า Efficient scores ซึ่งเป็นสมาชิกของเวกเตอร์ $U_w(B)$ ที่มีมิติ (p+1)x1

$$U_w(B) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \dfrac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_p} \end{bmatrix}$$

กำหนดเมทริกซ์ $H_w(B)$ เรียกว่า Hessian matrix มีมิติ (p+1)x(p+1) ซึ่งมีสมาชิกเป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ $l_w(\beta)$

โดยที่สมาชิกตัวที่ (j,k) คือ $\dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_k}$; j,k = 0,1,2,…,p

สามารถหาเวกเตอร์ $U_w(\hat{B})$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ประมาณด้วยความควรจะเป็นสูงสุดของ $U_w(B)$ ที่ใช้ Taylor series กระจาย $U_w(B)$ รอบ B^* ซึ่ง B^* อยู่ใกล้ๆ $\hat{B}$ จะได้ว่า

$$U_w(\hat{B}) \approx U_w(B^*) + H_w(B^*)(\hat{B} - B^*)$$

โดยนิยามของตัวความควรจะเป็นสูงสุดของ B จะได้ว่า

$$\left.\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_j}\right|_{\hat{\beta}} = 0 \quad \text{สำหรับ } j = 0,1,2,\ldots,p$$

และ $U_w(\hat{B}) = 0$

ดังนั้น $$\hat{B} = B^* - H^{-1}{}_w(B^*)U_w(B^*)$$

ซึ่งชี้นำให้มีการประมาณ $\hat{B}$ โดยการคำนวณซ้ำๆ ซึ่งค่าประมาณ $\hat{B}$ ณ รอบที่ r+1 คือ

$$\hat{B}_{r+1} = \hat{B}_r - H_w^{-1}(B_r)U_w(B_r) \tag{2.11}$$

สำหรับ r = 0,1,2,... ซึ่งเวกเตอร์ $\hat{B}_0$ เป็นเวกเตอร์ของตัวประมาณเริ่มต้น

2.3.1 **วิธี** Newton – Raphson **สำหรับตัวแปรอธิบาย 3 ตัว**

ข้อมูลประกอบด้วยค่าสังเกตที่เป็นอิสระ m ค่า คือ $(x_{1i},x_{2i},x_{3i},y_i)$; i = 1,2,...,m ตัวแบบเชิงเส้นโลจิสติค คือ

$$\text{logit}(\pi(x_i)) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i}$$

เมื่อ $\pi(x_i) = \dfrac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}$

หาค่าพารามิเตอร์ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ จากการคำนวณซ้ำด้วยวิธี Newton-Raphson ด้วยสมการ

$$\hat{B}_{r+1} = \hat{B}_r - H^{-1}{}_w(B_r)U_w(B_r)$$

เมื่อ

$$B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad , \quad U_w(B) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \dfrac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \dfrac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_2} \\ \dfrac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_3} \end{bmatrix}$$

และ
$$H_w(B)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_0} & \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_2} & \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_3} \\ \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_0} & \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_1^2} & \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_2} & \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_3} \\ \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_0} & \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_2^2} & \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_3} \\ \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_0} & \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_2} & \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_3^2} \end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

สมาชิกในเวกเตอร์ $U_w(B)$ และในเมทริกซ์ $H_w(B)$ หาได้จากอนุพันธ์ของ $l_w(\beta)$ เทียบกับ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ จากสมการ (2.11) จะได้ค่า $l_w(\beta)$ สำหรับตัวแปรอิสระ 3 ตัว

$$l_w(\beta)=\sum_{i=1}^{m}\left\{w_1 y_i\left((\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i})-\ln(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}})\right)-w_0(n_i-y_i)\ln\left(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial\beta_0}=\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i\left[1-\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}-\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}\right]-w_0(n_i-y_i)\left[\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}\right]\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i\left[\frac{1}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}\right]-w_0(n_i-y_i)\left[\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}\right]\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i(1-\pi(x_i))-w_0(n_i-y_i)\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial\beta_1}=\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i x_{1i}\left[1-\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}\right]-w_0(n_i-y_i)x_{1i}\left[\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}\right]\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i x_{1i}(1-\pi(x_i))-w_0(n_i-y_i)x_{1i}\pi(x_i)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}x_{1i}\left(w_1 y_i(1-\pi(x_i))-w_0(n_i-y_i)\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i x_{2i}\left[1-\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}\right] - w_0(n_i - y_i)x_{2i}\left[\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}\right]\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i x_{2i}\left(1-\pi(x_i)\right) - w_0\left(n_i - y_i\right)x_{2i}\pi(x_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_{2i}\left(w_1 y_i\left(1-\pi(x_i)\right) - w_0\left(n_i - y_i\right)\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_3} = \sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i x_{3i}\left[1-\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}\right] - w_0(n_i - y_i)x_{3i}\left[\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}\right]\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i x_{3i}\left(1-\pi(x_i)\right) - w_0\left(n_i - y_i\right)x_{3i}\pi(x_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_{3i}\left(w_1 y_i\left(1-\pi(x_i)\right) - w_0\left(n_i - y_i\right)\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial \beta_0^2} = \sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i\left[\frac{-e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}})^2}\right] - w_0(n_i - y_i)\left[\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}})^2}\right]\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i\left(1-\pi(x_i)\right)\pi(x_i) + w_0\left(n_i - y_i\right)\left(1-\pi(x_i)\right)\pi(x_i)\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)\left(w_1 y_i + w_0\left(n_i - y_i\right)\right)$$

$$\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial \beta_1^2} = \sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i x_{1i}\left[\frac{-(x_{1i})e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}})^2}\right] - w_0(n_i - y_i)x_{1i}\left[\frac{(x_{1i})e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}})^2}\right]\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i x_{1i}^2\left(1-\pi(x_i)\right)\pi(x_i) + w_0\left(n_i - y_i\right)x_{1i}^2\left(1-\pi(x_i)\right)\pi(x_i)\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} x_{1i}^2\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)\left(w_1 y_i + w_0\left(n_i - y_i\right)\right)$$

$$\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial \beta_2^2}=\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i x_{2i}\left[\frac{-(x_{2i})e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}})^2}\right]-w_0(n_i-y_i)x_{2i}\left[\frac{(x_{2i})e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}})^2}\right]\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i x_{2i}^2(1-\pi(x_i))\pi(x_i)+w_0(n_i-y_i)x_{2i}^2(1-\pi(x_i))\pi(x_i)\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}x_{2i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial \beta_3^2}=\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i x_{3i}\left[\frac{-(x_{3i})e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}})^2}\right]-w_0(n_i-y_i)x_{3i}\left[\frac{(x_{3i})e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}})^2}\right]\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i x_{3i}^2(1-\pi(x_i))\pi(x_i)+w_0(n_i-y_i)x_{3i}^2(1-\pi(x_i))\pi(x_i)\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}x_{3i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial \beta_0\partial \beta_1}=\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial \beta_1\partial \beta_0}=\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i\left[\frac{-(x_{1i})e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}})^2}\right]-w_0(n_i-y_i)\left[\frac{(x_{1i})e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}})^2}\right]\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i x_{1i}(1-\pi(x_i))\pi(x_i)+w_0(n_i-y_i)x_{1i}(1-\pi(x_i))\pi(x_i)\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}x_{1i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial \beta_0\partial \beta_2}=\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial \beta_2\partial \beta_0}=\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i\left[\frac{-(x_{2i})e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}})^2}\right]-w_0(n_i-y_i)\left[\frac{(x_{2i})e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}})^2}\right]\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i x_{2i}(1-\pi(x_i))\pi(x_i)+w_0(n_i-y_i)x_{2i}(1-\pi(x_i))\pi(x_i)\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}x_{2i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_3}=\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_0}=\sum_{i=1}^{m}\left(w_1y_i\left[\frac{-(x_{3i})e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}})^2}\right]-w_0(n_i-y_i)\left[\frac{(x_{3i})e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}})^2}\right]\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\left(w_1y_ix_{3i}(1-\pi(x_i))\pi(x_i)+w_0(n_i-y_i)x_{3i}(1-\pi(x_i))\pi(x_i)\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_2}=\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_1}=\sum_{i=1}^{m}\left(w_1y_ix_{1i}\left[\frac{-(x_{2i})e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}})^2}\right]-w_0(n_i-y_i)x_{1i}\left[\frac{(x_{2i})e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}})^2}\right]\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\left(w_1y_ix_{1i}x_{2i}(1-\pi(x_i))\pi(x_i)+w_0(n_i-y_i)x_{1i}x_{2i}(1-\pi(x_i))\pi(x_i)\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}x_{1i}x_{2i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_3}=\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_1}=\sum_{i=1}^{m}\left(w_1y_ix_{1i}\left[\frac{-(x_{3i})e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}})^2}\right]-w_0(n_i-y_i)x_{1i}\left[\frac{(x_{3i})e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}})^2}\right]\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\left(w_1y_ix_{1i}x_{3i}(1-\pi(x_i))\pi(x_i)+w_0(n_i-y_i)x_{1i}x_{3i}(1-\pi(x_i))\pi(x_i)\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}x_{1i}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_3}=\frac{\partial l_w^2(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_2}=\sum_{i=1}^{m}\left(w_1y_ix_{2i}\left[\frac{-(x_{3i})e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}})^2}\right]-w_0(n_i-y_i)x_{2i}\left[\frac{(x_{3i})e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}}}{(1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}})^2}\right]\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\left(w_1y_ix_{2i}x_{3i}(1-\pi(x_i))\pi(x_i)+w_0(n_i-y_i)x_{2i}x_{3i}(1-\pi(x_i))\pi(x_i)\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}x_{2i}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

นำสมาชิกของเวกเตอร์ $U_w(B)$ และในเมทริกซ์ $H_w(B)$ ที่หามาได้ไปแทนในสมการ (2.11) ดังนั้นคำนวณหาค่า $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ ได้จากสมการ

$$\hat{B}_{r+1} = \hat{B}_r - H^{-1}_w(B_r)U_w(B_r)$$

เมื่อ

$$B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad , \quad U_w(B) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m}\left(w_1 y_i\left(1-\pi(x_i)\right) - w_0(n_i - y_i)\pi(x_i)\right) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{1i}\left(w_1 y_i\left(1-\pi(x_i)\right) - w_0(n_i - y_i)\pi(x_i)\right) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{2i}\left(w_1 y_i\left(1-\pi(x_i)\right) - w_0(n_i - y_i)\pi(x_i)\right) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{3i}\left(w_1 y_i\left(1-\pi(x_i)\right) - w_0(n_i - y_i)\pi(x_i)\right) \end{bmatrix}$$

และ

$$H_w(B) = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{m}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i)) & \cdots & -\sum_{i=1}^{m}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{i=1}^{m}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i)) & \cdots & -\sum_{i=1}^{m}x_{3i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i)) \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

ถ้าค่าผลต่างระหว่าง $\hat{B}$ ในรอบที่ r กับรอบที่ r+1 มีค่าน้อยมากจนถือว่าไม่แตกต่างกัน โดยกำหนดเกณฑ์ว่า $|B_r - B_{r+1}| < 0.0000001$ ค่า $\hat{B}_{r+1}$ นั้นจะเป็นค่าที่ยอมรับได้

2.3.2 **วิธี Newton – Raphson สำหรับตัวแปรอธิบาย 5 ตัว**

ข้อมูลประกอบด้วยค่าสังเกตที่เป็นอิสระ m ค่า คือ $(x_{1i},x_{2i},x_{3i},x_{4i},x_{5i},y_i)$; i = 1,2,…,m ตัวแบบเชิงเส้นโลจิสติค คือ

$$\text{logit}(\pi(x_i)) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \beta_4 x_{4i} + \beta_5 x_{5i}$$

เมื่อ $\pi(x_i) = \dfrac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}+\beta_4 x_{4i}+\beta_5 x_{5i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}+\beta_4 x_{4i}+\beta_5 x_{5i}}}$

หาค่าพารามิเตอร์ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ จากการคำนวณซ้ำด้วยวิธี Newton-Raphson ด้วยสมการ

$$\hat{B}_{r+1} = \hat{B}_r - H^{-1}{}_w(B_r)U_w(B_r)$$

เมื่อ

$$B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} \qquad U_w(B) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \dfrac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_5} \end{bmatrix}$$

และ

$$H_w(B) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0^2} & \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_5} \\ \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_5 \partial \beta_0} & \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_5 \partial \beta_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_5^2} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

สมาชิกในเวกเตอร์ $U_w(B)$ และในเมทริกซ์ $H_w(B)$ หาได้จากอนุพันธ์ของ $l_w(\beta)$ เทียบกับ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ จากสมการ (2.10) จะได้ค่า $l_w(\beta)$สำหรับตัวแปรอิสระ 5 ตัว

$$l_w(\beta) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ w_1 y_i \left((\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_5 \beta_{5i}) - \ln(1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_5 x_{5i}}) \right) - w_0 (n_i - y_i) \ln\left(1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_5 x_{5i}}\right) \right\}$$

หาอนุพันธ์ของ $l_w(\beta)$เทียบกับ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ ได้ในรูป

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{m} x_{ji} \left(w_1 y_i (1 - \pi(x_i)) - w_0 (n_i - y_i) \pi(x_i) \right)$$

ซึ่งทำให้ได้

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{m} \left(w_1 y_i (1 - \pi(x_i)) - w_0 (n_i - y_i) \pi(x_i) \right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{m} x_{1i} \left(w_1 y_i (1 - \pi(x_i)) - w_0 (n_i - y_i) \pi(x_i) \right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{m} x_{2i} \left(w_1 y_i (1 - \pi(x_i)) - w_0 (n_i - y_i) \pi(x_i) \right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_3} = \sum_{i=1}^{m} x_{3i} \left(w_1 y_i (1 - \pi(x_i)) - w_0 (n_i - y_i) \pi(x_i) \right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_4} = \sum_{i=1}^{m} x_{4i} \left(w_1 y_i (1 - \pi(x_i)) - w_0 (n_i - y_i) \pi(x_i) \right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_5} = \sum_{i=1}^{m} x_{5i} \left(w_1 y_i (1 - \pi(x_i)) - w_0 (n_i - y_i) \pi(x_i) \right)$$

และสามารถหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ได้ในรูป

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_j^2} = -\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = -\sum_{i=1}^{m} x_{ji} x_{ki} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

ซึ่งทำให้ได้

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0^2} = -\sum_{i=1}^{m} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_1^2} = -\sum_{i=1}^{m} x_{1i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_2^2} = -\sum_{i=1}^{m} x_{2i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_3^2} = -\sum_{i=1}^{m} x_{3i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_4^2} = -\sum_{i=1}^{m} x_{4i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_5^2} = -\sum_{i=1}^{m} x_{5i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} = \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} x_{1i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_2}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_0}=-\sum_{i=1}^{m}x_{2i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_3}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_0}=-\sum_{i=1}^{m}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_4}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_0}=-\sum_{i=1}^{m}x_{4i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_5}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_0}=-\sum_{i=1}^{m}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_2}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_1}=-\sum_{i=1}^{m}x_{1i}x_{2i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_3}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_1}=-\sum_{i=1}^{m}x_{1i}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_4}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_1}=-\sum_{i=1}^{m}x_{1i}x_{4i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_5}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_1}=-\sum_{i=1}^{m}x_{1i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_3}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_2}=-\sum_{i=1}^{m}x_{2i}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_4}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_2}=-\sum_{i=1}^{m}x_{2i}x_{4i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_5}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_2}=-\sum_{i=1}^{m}x_{2i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_4}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_3}=-\sum_{i=1}^{m}x_{3i}x_{4i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_3} = -\sum_{i=1}^{m} x_{3i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_4} = -\sum_{i=1}^{m} x_{4i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

นำสมาชิกของเวกเตอร์ $U_w(B)$ และในเมทริกซ์ $H_w(B)$ ที่หามาได้ไปแทนในสมการ (2.14) ดังนั้นคำนวณหาค่า $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4, \hat{\beta}_5$ ได้จากสมการ

$$\hat{B}_{r+1} = \hat{B}_r - H^{-1}{}_w(B_r)U_w(B_r)$$

เมื่อ

$$B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} , \qquad U_w(B) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} (w_1 y_i(1-\pi(x_i)) - w_0(n_i - y_i)\pi(x_i)) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{1i}(w_1 y_i(1-\pi(x_i)) - w_0(n_i - y_i)\pi(x_i)) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} x_{5i}(w_1 y_i(1-\pi(x_i)) - w_0(n_i - y_i)\pi(x_i)) \end{bmatrix}$$

และ

$$H_w(B) = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{m} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i)) & \cdots & -\sum_{i=1}^{m} x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{i=1}^{m} x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i)) & \cdots & -\sum_{i=1}^{m} x_{5i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i)) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

ถ้าค่าผลต่างระหว่าง $\hat{B}$ ในรอบที่ r กับรอบที่ r+1 มีค่าน้อยมากจนถือว่าไม่แตกต่างกัน โดยกำหนดเกณฑ์ว่า $|B_r - B_{r+1}| < 0.0000001$ ค่า $\hat{B}_{r+1}$ นั้นจะเป็นค่าที่ยอมรับได้

2.3.3 **วิธี** Newton – Raphson **สำหรับตัวแปรอธิบาย 7 ตัว**

ข้อมูลประกอบด้วยค่าสังเกตที่เป็นอิสระ m ค่า คือ ($x_{1i},x_{2i},x_{3i},x_{4i},x_{5i},x_{6i},x_{7i},y_i$) ; i = 1,2,...,m ตัวแบบเชิงเส้นโลจิสติค คือ

$$\text{logit}(\pi(x_i)) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \beta_4 x_{4i} + \beta_5 x_{5i} + \beta_6 x_{6i} + \beta_7 x_{7i}$$

เมื่อ $\pi(x_i) = \dfrac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \beta_4 x_{4i} + \beta_5 x_{5i} + \beta_6 x_{6i} + \beta_7 x_{7i}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \beta_4 x_{4i} + \beta_5 x_{5i} + \beta_6 x_{6i} + \beta_7 x_{7i}}}$

หาค่าพารามิเตอร์ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7$ จากการคำนวณซ้ำด้วยวิธี Newton-Raphson ด้วยสมการ

$$\hat{B}_{r+1} = \hat{B}_r - H^{-1}{}_w(B_r)U_w(B_r)$$

เมื่อ

$$B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \end{bmatrix} , \qquad U_w(B) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \dfrac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_7} \end{bmatrix}$$

และ

$$H_w(B) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0^2} & \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_7} \\ \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_7} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_7 \partial \beta_0} & \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_7 \partial \beta_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_7^2} \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

สมาชิกในเวกเตอร์ $U_w\,(B)$ และในเมทริกซ์ $H_w\,(B)$ หาได้จากอนุพันธ์ของ $l_w(\beta)$ เทียบกับ $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6,\beta_7$ จากสมการ (2.10) จะได้ค่า $l_w(\beta)$ สำหรับตัวแปรอิสระ 7 ตัว

$$l_w(\beta)=\sum_{i=1}^{m}\left\{w_1y_i\left((\beta_0+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_7x_{7i})-\ln(1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_7x_{7i}})\right)-w_0(n_i-y_i)\ln\left(1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_7x_{7i}}\right)\right\}$$

หาอนุพันธ์ของ $l_w(\beta)$ เทียบกับ $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6,\beta_7$ ได้ในรูป

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial\beta_j}=\sum_{i=1}^{m}x_{ji}\left(w_1y_i\left(1-\pi(x_i)\right)-w_0\left(n_i-y_i\right)\pi(x_i)\right)$$

ซึ่งทำให้ได้

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial\beta_0}=\sum_{i=1}^{m}\left(w_1y_i\left(1-\pi(x_i)\right)-w_0\left(n_i-y_i\right)\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial\beta_1}=\sum_{i=1}^{m}x_{1i}\left(w_1y_i\left(1-\pi(x_i)\right)-w_0\left(n_i-y_i\right)\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial\beta_2}=\sum_{i=1}^{m}x_{2i}\left(w_1y_i\left(1-\pi(x_i)\right)-w_0\left(n_i-y_i\right)\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial\beta_3}=\sum_{i=1}^{m}x_{3i}\left(w_1y_i\left(1-\pi(x_i)\right)-w_0\left(n_i-y_i\right)\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial\beta_4}=\sum_{i=1}^{m}x_{4i}\left(w_1y_i\left(1-\pi(x_i)\right)-w_0\left(n_i-y_i\right)\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial\beta_5}=\sum_{i=1}^{m}x_{5i}\left(w_1y_i\left(1-\pi(x_i)\right)-w_0\left(n_i-y_i\right)\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_6} = \sum_{i=1}^{m} x_{6i}\left(w_1 y_i \left(1-\pi(x_i)\right) - w_0\left(n_i - y_i\right)\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l_w(\beta)}{\partial \beta_7} = \sum_{i=1}^{m} x_{7i}\left(w_1 y_i \left(1-\pi(x_i)\right) - w_0\left(n_i - y_i\right)\pi(x_i)\right)$$

และสามารถหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ได้ในรูป

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_j^2} = -\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)\left(w_1 y_i + w_0\left(n_i - y_i\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = -\sum_{i=1}^{m} x_{ji} x_{ki} \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)\left(w_1 y_i + w_0\left(n_i - y_i\right)\right)$$

ซึ่งทำให้ได้

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0^2} = -\sum_{i=1}^{m} \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)\left(w_1 y_i + w_0\left(n_i - y_i\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_1^2} = -\sum_{i=1}^{m} x_{1i}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)\left(w_1 y_i + w_0\left(n_i - y_i\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_2^2} = -\sum_{i=1}^{m} x_{2i}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)\left(w_1 y_i + w_0\left(n_i - y_i\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_3^2} = -\sum_{i=1}^{m} x_{3i}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)\left(w_1 y_i + w_0\left(n_i - y_i\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_4^2} = -\sum_{i=1}^{m} x_{4i}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)\left(w_1 y_i + w_0\left(n_i - y_i\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_5^2} = -\sum_{i=1}^{m} x_{5i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_6^2} = -\sum_{i=1}^{m} x_{6i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_7^2} = -\sum_{i=1}^{m} x_{7i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} = \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} x_{1i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_2} = \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_2 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} x_{2i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_3} = \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_3 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} x_{3i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_4} = \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_4 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} x_{4i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_5} = \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_5 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} x_{5i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_6} = \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_6 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} x_{6i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_7} = \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_7 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{m} x_{7i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} = \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} = -\sum_{i=1}^{m} x_{1i} x_{2i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_3} = \frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial \beta_3 \partial \beta_1} = -\sum_{i=1}^{m} x_{1i} x_{3i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_4}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_1}=-\sum_{i=1}^{m} x_{1i}x_{4i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_5}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_1}=-\sum_{i=1}^{m} x_{1i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_6}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_6\partial\beta_1}=-\sum_{i=1}^{m} x_{1i}x_{6i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_7}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_7\partial\beta_1}=-\sum_{i=1}^{m} x_{1i}x_{7i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_3}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_2}=-\sum_{i=1}^{m} x_{2i}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_4}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_2}=-\sum_{i=1}^{m} x_{2i}x_{4i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_5}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_2}=-\sum_{i=1}^{m} x_{2i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_6}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_6\partial\beta_2}=-\sum_{i=1}^{m} x_{2i}x_{6i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_7}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_7\partial\beta_2}=-\sum_{i=1}^{m} x_{2i}x_{7i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_4}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_3}=-\sum_{i=1}^{m} x_{3i}x_{4i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_5}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_3}=-\sum_{i=1}^{m} x_{3i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_6}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_6\partial\beta_3}=-\sum_{i=1}^{m} x_{3i}x_{6i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0(n_i - y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_7}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_7\partial\beta_3}=-\sum_{i=1}^{m}x_{3i}x_{7i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_5}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_4}=-\sum_{i=1}^{m}x_{4i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_6}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_6\partial\beta_4}=-\sum_{i=1}^{m}x_{4i}x_{6i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_7}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_7\partial\beta_4}=-\sum_{i=1}^{m}x_{4i}x_{7i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_6}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_6\partial\beta_5}=-\sum_{i=1}^{m}x_{5i}x_{6i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_7}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_7\partial\beta_5}=-\sum_{i=1}^{m}x_{5i}x_{7i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

$$\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_6\partial\beta_7}=\frac{\partial^2 l_w(\beta)}{\partial\beta_7\partial\beta_6}=-\sum_{i=1}^{m}x_{6i}x_{7i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1y_i+w_0(n_i-y_i))$$

นำสมาชิกของเวกเตอร์ $U_w(B)$ และในเมทริกซ์ $H_w(B)$ ที่หามาได้ไปแทนในสมการ (2.14) ดังนั้นคำนวณหาค่า $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4, \hat{\beta}_5, \hat{\beta}_6, \hat{\beta}_7$ ได้จากสมการ

$$\hat{B}_{r+1}=\hat{B}_r-H^{-1}{}_w(B_r)U_w(B_r)$$

เมื่อ

$$B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \end{bmatrix} \qquad U_w(B) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} (w_1 y_i (1-\pi(x_i)) - w_0 (n_i - y_i) \pi(x_i)) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{1i} (w_1 y_i (1-\pi(x_i)) - w_0 (n_i - y_i) \pi(x_i)) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} x_{7i} (w_1 y_i (1-\pi(x_i)) - w_0 (n_i - y_i) \pi(x_i)) \end{bmatrix}$$

และ

$$H_w(B) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0 (n_i - y_i)) & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_{7i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0 (n_i - y_i)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} x_{7i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0 (n_i - y_i)) & \cdots & \sum_{i=1}^{m} x_{7i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i))(w_1 y_i + w_0 (n_i - y_i)) \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

ถ้าค่าผลต่างระหว่าง $\hat{B}$ ในรอบที่ r กับรอบที่ r+1 มีค่าน้อยมากจนถือว่าไม่แตกต่างกัน โดยกำหนดเกณฑ์ว่า $|B_r - B_{r+1}| < 0.0000001$ ค่า $\hat{B}_{r+1}$ นั้นจะเป็นค่าที่ยอมรับได้

2.4 การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีปรับแก้เบื้องต้น

วิธีปรับแก้เบื้องต้นนี้จะเป็นการคำนวณที่ใช้วิธีความควรจะเป็นสูงสุด เมื่อทราบค่าเฉลี่ยความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สนใจของประชากรคือ $\bar{\pi}(x_i)$ และค่าเฉลี่ยความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สนใจของตัวอย่าง $\bar{\bar{\pi}}(x_i)$

กำหนดให้ X,Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น คือ P(X,Y) และ x,y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น P(x,y) และให้ P(x| y) = P(X | Y) แม้ว่า P(x) , P(y) และ P(y| x) ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ P(X) , P(Y) และ P(Y| X) ตามลำดับ ซึ่งจุดมุ่งหมายในการวิเคราะห์เพื่ออนุมานเกี่ยวกับ P(Y | X)

ดังนั้น $P(Y|X) = \dfrac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)} = P(y|x)\left[\dfrac{P(Y)P(x)}{P(y)P(X)}\right]$

ซึ่งสามารถประมาณ P(Y| X) ที่เป็น iid sample จาก P(X,Y) หรือจาก P(x,y)

ให้ C และ c เป็นตัวอย่างสุ่มที่มีขนาด n จาก P(X,Y) และ P(x,y) ตามลำดับ ดังนั้น เมื่อ $n \to \infty$

$$P(Y|X,C) = \frac{P(X|Y,C)P(Y|C)}{P(X|C)} \xrightarrow{D} P(X|Y)\frac{P(Y)}{P(X)} = P(Y|X)$$

แต่

$$P(y|x,c) = \frac{P(x|y,c)P(y|c)}{P(x|c)} \xrightarrow{D} P(x|y)\frac{P(y)}{P(x)} = P(y/x) \xrightarrow{D}\!\!\!\!\!\!/\;\; P(Y|X)$$

เมื่อ $\xrightarrow{D}$, $\not\xrightarrow{D}$ คือการลู่เข้าและไม่ลู่เข้าในการแจกแจง

กำหนดให้

$$A_y = \frac{P(Y|C)}{P(y|c)}$$ เป็นฟังก์ชันของ y

$$B = \frac{P(x|c)}{P(X|C)} = \left[\sum_{all y} P(y|x,c)A_y\right]^{-1}$$ เป็น constant normalization factor

$$P(y|x,c)A_yB = \frac{P(x|y,c)P(y|c)}{P(x|c)}A_yB = P(x|y,c)\frac{P(Y|C)}{P(X|C)} \xrightarrow{D} \frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)} = P(Y|X)$$

ดังนั้น

$$P(y|x,c) \xrightarrow{D} P(x|y) = P(X|Y)$$

$P(Y|C) \xrightarrow{D} P(Y)$ และ $P(X|C) \xrightarrow{D} P(X)$

การปรับแก้ของการแจกแจงหน่วยตัวอย่างคือ

$$P(y|x,c)A_yB \xrightarrow{D} P(Y|X)$$

สำหรับ Binary Model

ให้ $P(Y=1) = \pi(x_i)$, $P(y=1) = \bar{\pi}(x_i)$

$A_1 = \frac{\pi(x_i)}{\bar{\pi}(x_i)}$, $A_0 = \frac{(1-\pi(x_i))}{(1-\bar{\pi}(x_i))}$ และ

$$B^{-1} = P(y=1|x,c)\frac{\pi(x_i)}{\bar{\pi}(x_i)} + [1-P(y=1|x,c)]\frac{(1-\pi(x_i))}{(1-\bar{\pi}(x_i))}$$ เป็น Correction factor

ดังนั้น

$$P(y=1|x,c)A_1B = \frac{P(y=1|x,c)\left(\bar{\pi}(x_i)\bar{\hat{\pi}}(x_i)\right)}{P(y=1|x,c)\left(\bar{\pi}(x_i)\bar{\hat{\pi}}(x_i)\right)+\left[1-P(y=1|x,c)\right]\dfrac{\left(1-\bar{\pi}(x_i)\right)}{\left(1-\bar{\hat{\pi}}(x_i)\right)}}$$

$$=\left[1+\left(\frac{1}{P(y=1|x,c)}-1\right)\left(\frac{1-\bar{\pi}(x_i)}{\bar{\pi}(x_i)}\right)\left(\frac{\bar{\hat{\pi}}(x_i)}{1-\bar{\hat{\pi}}(x_i)}\right)\right]^{-1}$$

และใน logistic regression

$$P(y=1|x,c)=\frac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_px_{pi}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_px_{pi}}}$$

จะได้

$$P(y=1|x,c)A_1B=\frac{e^{(\beta_0+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_px_{pi})-\ln\left[\left(\frac{1-\bar{\pi}(x_i)}{\bar{\pi}(x_i)}\right)\left(\frac{\bar{\hat{\pi}}(x_i)}{1-\bar{\hat{\pi}}(x_i)}\right)\right]}}{1+e^{(\beta_0+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_px_{pi})-\ln\left[\left(\frac{1-\bar{\pi}(x_i)}{\bar{\pi}(x_i)}\right)\left(\frac{\bar{\hat{\pi}}(x_i)}{1-\bar{\hat{\pi}}(x_i)}\right)\right]}}$$

ดังนั้นในการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ จะใช้ค่า

$$\pi_{pc}(x_i)=\frac{e^{(\beta_0+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_px_{pi})-\ln\left[\left(\frac{1-\bar{\pi}(x_i)}{\bar{\pi}(x_i)}\right)\left(\frac{\bar{\hat{\pi}}(x_i)}{1-\bar{\hat{\pi}}(x_i)}\right)\right]}}{1+e^{(\beta_0+\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_px_{pi})-\ln\left[\left(\frac{1-\bar{\pi}(x_i)}{\bar{\pi}(x_i)}\right)\left(\frac{\bar{\hat{\pi}}(x_i)}{1-\bar{\hat{\pi}}(x_i)}\right)\right]}}$$

ซึ่งสามารถหาค่าพารามิเตอร์จากการคำนวณซ้ำด้วยวิธี Newton-Raphson เหมือนกับวิธีความควรจะเป็นสูงสุด