บทที่ 2

แนวคิดและทฤษฎี

แนวความคิดในทางสถิติเกี่ยวกับการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนสำหรับตัวแบบข้ามกลุ่ม 2 ปัจจัยเชิงสุ่ม กรณีข้อมูลมีลักษณะสมดุล สามารถทำการประมาณค่าได้หลายวิธี โดยในการวิจัยครั้งนี้จะทำการศึกษาการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดและวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบมอนติคาร์โล ซึ่งรายละเอียดต่างๆ ได้แสดงไว้ในหัวข้อถัดไป

2.1 ข้อสมมติของตัวแบบข้ามกลุ่ม 2 ปัจจัยเชิงสุ่ม

การวิจัยครั้งนี้ทำการศึกษาการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนที่มีรูปแบบเชิงเส้นตรง (Linear model) ที่ใช้แทนค่าสังเกตแต่ละค่าในแผนการทดลองที่กำหนด เป็นตัวแบบผลบวกดังนี้

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad \text{โดยที่} \quad \begin{aligned} i &= 1,\dots,a \\ j &= 1,\dots,b \\ k &= 1,\dots,n \end{aligned}$$

เมื่อ Y_{ijk} แทนค่าสังเกตที่ k ระดับที่ i ของปัจจัย A และระดับที่ j ของปัจจัย B

μ แทนค่าเฉลี่ยรวม

α_i แทนผลกระทบระดับที่ i ของปัจจัย A

β_j แทนผลกระทบระดับที่ j ของปัจจัย B

γ_{ij} แทนผลกระทบร่วมระดับที่ i ของปัจจัย A และระดับที่ j ของปัจจัย B

ε_{ijk} แทนความคลาดเคลื่อนของค่าสังเกตที่ k ระดับที่ i ของปัจจัย A และระดับที่ j ของปัจจัย B

a แทนจำนวนระดับของปัจจัย A

b แทนจำนวนระดับของปัจจัย B

n แทนจำนวนค่าสังเกตในแต่ละวิธีการทดลองผสม

ดังนั้นจำนวนค่าสังเกตรวมคือ abn

ตัวประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนที่คำนวณภายใต้ตัวแบบที่เขียนในรูปเวคเตอร์ได้ดังนี้

ตัวแบบ $\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{1}\mu + Z_1 \underset{\sim}{\alpha} + Z_2 \underset{\sim}{\beta} + Z_3 \underset{\sim}{\gamma} + Z_4 \underset{\sim}{\varepsilon}$

เมื่อ $\underset{\sim}{Y}$ คือเวคเตอร์ของค่าสังเกต N จำนวน มีขนาด N×1

$\underset{\sim}{1}$ คือเวคเตอร์ที่มีสมาชิกเป็น 1 มีขนาด N×1

μ คือค่า scalar

Z_i คือเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นสัมประสิทธิ์ของผลกระทบเชิงสุ่ม มีขนาด N×m_i เมื่อ i = 1, 2, 3

Z_4 คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix)

$\underset{\sim}{\alpha}$ คือเวคเตอร์ของผลกระทบเชิงสุ่มของปัจจัย A มีขนาด m_1×1

$\underset{\sim}{\beta}$ คือเวคเตอร์ของผลกระทบเชิงสุ่มของปัจจัย B มีขนาด m_2×1

$\underset{\sim}{\gamma}$ คือเวคเตอร์ของผลกระทบเชิงสุ่มร่วมระหว่างปัจจัย A และปัจจัย B มีขนาด m_3×1

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ คือเวคเตอร์ของผลกระทบเชิงสุ่มของความคลาดเคลื่อน มีขนาด N×1

โดยที่ $\underset{\sim}{\alpha} \sim N(\underset{\sim}{0}, \sigma_\alpha^2 I_{m_1})$ เมื่อ a = m_1

$\underset{\sim}{\beta} \sim N(\underset{\sim}{0}, \sigma_\beta^2 I_{m_2})$ เมื่อ b = m_2

$\underset{\sim}{\gamma} \sim N(\underset{\sim}{0}, \sigma_\gamma^2 I_{m_3})$ เมื่อ ab = m_3

$\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N(\underset{\sim}{0}, \sigma_\gamma^2 I_N)$ เมื่อ abn = N

ดังนั้น $E(\underset{\sim}{Y}) = \underset{\sim}{1}\mu = \underset{\sim}{\mu}$

$$Var(\underset{\sim}{Y}) = V$$

$$= Z_1Z_1'\sigma_\alpha^2 + Z_2Z_2'\sigma_\beta^2 + Z_3Z_3'\sigma_\gamma^2 + Z_4Z_4'\sigma_\varepsilon^2$$

ดังนั้น จะได้ว่าองค์ประกอบความแปรปรวนคือ σ_α^2, σ_β^2, σ_γ^2 และ σ_ε^2

2.2 การกำหนดค่าสมมติเบื้องต้นสำหรับค่าองค์ประกอบความแปรปรวน

ในการวิจัยครั้งนี้ทำการกำหนดค่าสมมติเบื้องต้นสำหรับการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวน โดยการสร้างสมการที่สมมติให้ค่าเฉลี่ยกำลังสอง (Mean Square) ของสาเหตุความแปรปรวนเป็นค่าประมาณของค่าคาดหวังของค่าเฉลี่ยกำลังสอง (Expected Mean Square) ที่หาได้จากตารางที่ 1.1 จากนั้นใช้หลักการคำนวณทางคณิตศาสตร์เพื่อคำนวณหาค่าองค์ประกอบความแปรปรวน ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$E(MSE) = \sigma_\varepsilon^2$$

ค่าประมาณของ σ_ε^2 คือ MSE

$$\begin{aligned} E(MSAB) &= \sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_\gamma^2 \\ E(MSAB) - E(MSE) &= (\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_\gamma^2) - \sigma_\varepsilon^2 \\ &= n\sigma_\gamma^2 \end{aligned}$$

ค่าประมาณของ σ_γ^2 คือ $\dfrac{MSAB - MSE}{n}$

$$\begin{aligned} E(MSA) &= \sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_\gamma^2 + bn\sigma_\alpha^2 \\ E(MSA) - E(MSAB) &= (\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_\gamma^2 + bn\sigma_\alpha^2) - (\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_\gamma^2) \\ &= bn\sigma_\alpha^2 \end{aligned}$$

ค่าประมาณของ σ_α^2 คือ $\dfrac{MSA - MSAB}{bn}$

$$\begin{aligned} E(MSB) &= \sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_\gamma^2 + an\sigma_\beta^2 \\ E(MSB) - E(MSAB) &= (\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_\gamma^2 + an\sigma_\beta^2) - (\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_\gamma^2) \\ &= an\sigma_\beta^2 \end{aligned}$$

ค่าประมาณของ σ_β^2 คือ $\dfrac{MSB - MSAB}{an}$

จะได้ว่า ค่าสมมติเบื้องต้นของ σ_ε^2 คือ MSE

ค่าสมมติเบื้องต้นของ σ_γ^2 คือ $\dfrac{MSAB - MSE}{n}$

ค่าสมมติเบื้องต้นของ σ_α^2 คือ $\dfrac{MSA - MSAB}{bn}$

ค่าสมมติเบื้องต้นของ σ_β^2 คือ $\dfrac{MSB - MSAB}{an}$

2.3 การประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

เนื่องจากทราบว่า $\underset{\sim}{Y} \sim N(\mu, V)$ ซึ่ง Searle , Cassell และ McCalloch* ได้แสดงวิธีการหาตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดไว้ โดยพบว่า y_i และ y_j เป็นอิสระซึ่งกันและกัน ดังนั้นจึงสามารถเขียนฟังก์ชันความควรจะเป็น (Likelihood Function) ได้ดังนี้

$$L \quad = \quad L(\mu, V \mid \underset{\sim}{Y}) \quad = \quad \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{1}\mu\right)' V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{1}\mu\right)\right]}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |V|^{\frac{1}{2}}}$$

กรณีข้อมูลมีลักษณะสมดุล N = abn สมการลอการิทึมของฟังก์ชันความควรจะเป็นสามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \ell &= \log\left\{L(\mu, V \mid \underset{\sim}{Y})\right\} \\ &= -\frac{N}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log|V| - \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{1}\mu\right)' V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{1}\mu\right) \end{aligned}$$

วิธีความควรจะเป็นสูงสุดนั้น มีจุดประสงค์คือเพื่อหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ ℓ มีค่ามากที่สุด โดยทำการหาอนุพันธ์ (Differentiate) เทียบกับพารามิเตอร์ $\mu, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_\gamma^2$, σ_ε^2 แล้วให้ผลลัพธ์มีค่าเท่ากับ 0 ซึ่งสามารถหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ $\mu, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \sigma_\gamma^2$, σ_ε^2 ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \underset{\sim}{1}' V^{-1} \underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}' V^{-1} \underset{\sim}{1}\mu = 0$$

$$\mu = \overline{Y} \qquad \text{.....(1)}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\alpha^2} = -\frac{1}{2} tr\left(V^{-1} Z_1 Z_1'\right) + \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{1}\mu\right)' V^{-1} Z_1 Z_1' V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{1}\mu\right) = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

---

* Searle , S.R. , Cassella , G. And McCalloch,E.C. Variance Components. (New York : John Wiley & Sons , 1992) , pp.234

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_{\beta}^{2}} = -\frac{1}{2}tr\left(V^{-1}Z_2Z_2'\right)+\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{Y}-1\underset{\sim}{\mu}\right)'V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y}-1\underset{\sim}{\mu}\right) = 0 \quad .....(3)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_{\gamma}^{2}} = -\frac{1}{2}tr\left(V^{-1}Z_3Z_3'\right)+\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{Y}-1\underset{\sim}{\mu}\right)'V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y}-1\underset{\sim}{\mu}\right) = 0 \quad .....(4)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_{\varepsilon}^{2}} = -\frac{1}{2}tr\left(V^{-1}Z_4Z_4'\right)+\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{Y}-1\underset{\sim}{\mu}\right)'V^{-1}Z_4Z_4'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y}-1\underset{\sim}{\mu}\right) = 0 \quad .....(5)$$

เนื่องจากการแก้สมการในสมการที่ (2), (3), (4) และ (5) ไม่สามารถแก้สมการได้โดยตรง ดังนั้นจึงจำเป็นต้องอาศัยวิธีการประมาณเข้ามาช่วย ซึ่งวิธีการประมาณนั้นมีหลายวิธี เช่น วิธี Newton-Raphson , วิธี Iterative และ Method of Scoring โดยในการวิจัยครั้งนี้เลือกใช้วิธี Newton-Raphson เนื่องจากเป็นวิธีที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย ซึ่งจะต้องนำค่าสมมติเบื้องต้นสำหรับค่าองค์ประกอบความแปรปรวนแทนค่าลงในสมการที่ (1) แล้วแก้สมการหาค่า μ จากนั้นนำค่า μ ที่ได้มาแทนลงในสมการที่ (2), (3), (4) และ (5) ซึ่งจะทำให้สามารถหาค่าองค์ประกอบความแปรปรวนได้

การหาค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนของวิธีความควรจะเป็นสูงสุด ด้วยวิธี Newton-Raphson มีหลักการดังนี้

$$\text{กำหนดให้} \quad \underset{\sim}{\theta} = \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha}^{2} \\ \sigma_{\beta}^{2} \\ \sigma_{\gamma}^{2} \\ \sigma_{\varepsilon}^{2} \end{bmatrix}$$

การหาอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivatives) ในสมการลอการิทึมของฟังก์ชันความควรจะเป็น ℓ เทียบกับพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\theta}$ เรียกว่า Efficient Scores และจะนำ Efficient Scores มาเป็นสมาชิกของเวคเตอร์ $U(\underset{\sim}{\theta})$ และเป็นเวคเตอร์ขนาด 4×1

$$\text{โดย} \quad \underset{\sim}{U}(\theta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\alpha^2} \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\beta^2} \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\gamma^2} \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\alpha^2} = -\frac{1}{2}tr\left(V^{-1}Z_1Z_1'\right)+\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{1}\mu\right)'V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{1}\mu\right)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\beta^2} = -\frac{1}{2}tr\left(V^{-1}Z_2Z_2'\right)+\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{1}\mu\right)'V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{1}\mu\right)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\gamma^2} = -\frac{1}{2}tr\left(V^{-1}Z_3Z_3'\right)+\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{1}\mu\right)'V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{1}\mu\right)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = -\frac{1}{2}tr\left(V^{-1}Z_4Z_4'\right)+\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{1}\mu\right)'V^{-1}Z_4Z_4'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{1}\mu\right)$$

การหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง (Second Partial Derivatives) ในสมการลอการิทึมของฟังก์ชันความควรจะเป็น ℓ เทียบกับพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\theta}$ และจะนำผลที่ได้มาเป็นสมาชิกของเมทริกซ์ $H(\underset{\sim}{\theta})$ โดยเรียกเมทริกซ์นี้ว่า Hassian Matrix และเป็นเมทริกซ์ขนาด 4×4

$$\text{โดย} \quad H(\underset{\sim}{\theta}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\alpha^2 \partial \sigma_\alpha^2} & \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\alpha^2 \partial \sigma_\beta^2} & \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\alpha^2 \partial \sigma_\gamma^2} & \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\alpha^2 \partial \sigma_\varepsilon^2} \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\beta^2 \partial \sigma_\alpha^2} & \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\beta^2 \partial \sigma_\beta^2} & \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\beta^2 \partial \sigma_\gamma^2} & \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\beta^2 \partial \sigma_\varepsilon^2} \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\lambda^2 \partial \sigma_\alpha^2} & \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\lambda^2 \partial \sigma_\beta^2} & \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\lambda^2 \partial \sigma_\gamma^2} & \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\lambda^2 \partial \sigma_\varepsilon^2} \\ \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\varepsilon^2 \partial \sigma_\alpha^2} & \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\varepsilon^2 \partial \sigma_\beta^2} & \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\varepsilon^2 \partial \sigma_\gamma^2} & \dfrac{\partial \ell}{\partial \sigma_\varepsilon^2 \partial \sigma_\varepsilon^2} \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\alpha^2 \partial \sigma_\alpha^2} = \frac{1}{2} tr\left(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_1Z_1'\right) - \left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)'V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\alpha^2 \partial \sigma_\beta^2} = \frac{1}{2} tr\left(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_2Z_2'\right) - \left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)'V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)$$

$$= \frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\beta^2 \partial \sigma_\alpha^2}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\alpha^2 \partial \sigma_\gamma^2} = \frac{1}{2} tr\left(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_3Z_3'\right) - \left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)'V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)$$

$$= \frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\gamma^2 \partial \sigma_\alpha^2}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\alpha^2 \partial \sigma_\varepsilon^2} = \frac{1}{2} tr\left(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_4Z_4'\right) - \left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)'V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_4Z_4'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)$$

$$= \frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\varepsilon^2 \partial \sigma_\alpha^2}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\beta^2 \partial \sigma_\beta^2} = \frac{1}{2} tr\left(V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_2Z_2'\right) - \left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)'V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\beta^2 \partial \sigma_\gamma^2} = \frac{1}{2} tr\left(V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_3Z_3'\right) - \left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)'V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)$$

$$= \frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\gamma^2 \partial \sigma_\beta^2}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\beta^2 \partial \sigma_\varepsilon^2} = \frac{1}{2} tr\left(V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_4Z_4'\right) - \left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)'V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_4Z_4'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)$$

$$= \frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\varepsilon^2 \partial \sigma_\beta^2}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\gamma^2 \partial \sigma_\gamma^2} = \frac{1}{2} tr\left(V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}Z_3Z_3'\right) - \left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)'V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\gamma^2 \partial \sigma_\varepsilon^2} = \frac{1}{2} tr\left(V^{-1} Z_3 Z_3' V^{-1} Z_4 Z_4'\right) - \left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)' V^{-1} Z_3 Z_3' V^{-1} Z_4 Z_4' V^{-1} \left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)$$

$$= \frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\varepsilon^2 \partial \sigma_\gamma^2}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma_\varepsilon^2 \partial \sigma_\varepsilon^2} = \frac{1}{2} tr\left(V^{-1} Z_4 Z_4' V^{-1} Z_4 Z_4'\right) - \left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)' V^{-1} Z_4 Z_4' V^{-1} Z_4 Z_4' V^{-1} \left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{1}\mu\right)$$

พิจารณาหาเวคเตอร์ $U(\hat{\underset{\sim}{\theta}})$ ซึ่งเป็นเวคเตอร์ Efficient Scores ของ $\underset{\sim}{\theta}$ ที่ทำการประมาณด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด โดยใช้ Taylor Series กระจาย $U(\underset{\sim}{\theta})$ รอบ $\underset{\sim}{\theta}^*$ ซึ่ง $\underset{\sim}{\theta}^*$ อยู่ใกล้ๆกับ $\hat{\underset{\sim}{\theta}}$ จะได้ว่า

$$U(\hat{\underset{\sim}{\theta}}) \approx U(\underset{\sim}{\theta}^*) + H(\underset{\sim}{\theta}^*)\left(\hat{\underset{\sim}{\theta}} - \underset{\sim}{\theta}^*\right)$$

จากนิยามของวิธีความควรจะเป็นสูงสุดของ $\underset{\sim}{\theta}$ จะได้ว่า

$$\left.\frac{\partial \ell}{\partial \underset{\sim}{\theta}}\right|_{\hat{\underset{\sim}{\theta}}} = 0 \quad \text{และ} \quad U(\hat{\underset{\sim}{\theta}}) = 0$$

ดังนั้น $\hat{\underset{\sim}{\theta}} = \underset{\sim}{\theta}^* - H^{-1}(\underset{\sim}{\theta}^*)U(\underset{\sim}{\theta}^*)$

ซึ่งจะนำไปสู่การประมาณค่า $\hat{\underset{\sim}{\theta}}$ โดยการกระทำซ้ำ และค่าประมาณของ $\hat{\underset{\sim}{\theta}}$ ณ รอบที่ m+1 คือ

$$\hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(m+1)} = \hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(m)} - (H^{-1}(\underset{\sim}{\theta}))^{(m)} (U(\underset{\sim}{\theta}))^{(m)}$$

สำหรับ m = 0, 1, ... ซึ่ง $\hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(0)}$ เป็นเวคเตอร์เริ่มต้นของตัวประมาณ

ถ้าค่าผลต่างระหว่าง $\hat{\underset{\sim}{\theta}}$ ในรอบที่ m กับรอบที่ m+1 มีค่าน้อยมากจนถือว่าไม่แตกต่างกัน โดยกำหนดเกณฑ์ดังนี้คือ $\left|\theta^{(m)} - \theta^{(m+1)}\right| < 0.000001$ ดังนั้นค่า $\hat{\underset{\sim}{\theta}}^{(m+1)}$ จะเป็นค่าที่ยอมรับได้

นั่นคือ ค่าประมาณพารามิเตอร์องค์ประกอบความแปรปรวนของวิธีความควรจะเป็นสูงสุดคือ

$$\hat{\sigma}^2_{\sim ML} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^2_{\alpha} \\ \hat{\sigma}^2_{\beta} \\ \hat{\sigma}^2_{\gamma} \\ \hat{\sigma}^2_{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

2.4 การประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบมอนติคาร์โล

วิธีมอนติคาร์โลเป็นวิธีที่นิยมใช้ในการหาคำตอบทางสถิติ โดยเป็นการสร้างข้อมูลตัวอย่างสุ่มจากตัวแบบตามค่าของพารามิเตอร์ โดยพิจารณาการสุ่มเป็นค่าพารามิเตอร์ตั้งต้นในตัวแบบและกระทำซ้ำจนกระทั่งครบจำนวน P ครั้ง เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์องค์ประกอบความแปรปรวน ในการวิจัยครั้งนี้ศึกษาการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนสำหรับตัวแบบข้ามกลุ่ม 2 ปัจจัยเชิงสุ่ม ภายใต้พื้นฐานของวิธีความควรจะเป็นสูงสุด ซึ่งมีรายละเอียดของขั้นตอนการประมาณค่า ซึ่งอธิบายได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 นำค่าพารามิเตอร์ $\hat{\sigma}^2_{\alpha},\hat{\sigma}^2_{\beta},\hat{\sigma}^2_{\gamma},\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}$ ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด มาเป็นค่าพารามิเตอร์ตั้งต้นในตัวแบบข้ามกลุ่ม 2 ปัจจัยเชิงสุ่ม

โดยที่ $\underset{\sim}{\alpha} \sim N(\underset{\sim}{0},\hat{\sigma}^2_{\alpha}\mathbf{I}_{m_1})$ เมื่อ a = m_1

$\underset{\sim}{\beta} \sim N(\underset{\sim}{0},\hat{\sigma}^2_{\beta}\mathbf{I}_{m_2})$ เมื่อ b = m_2

$\underset{\sim}{\gamma} \sim N(\underset{\sim}{0},\hat{\sigma}^2_{\gamma}\mathbf{I}_{m_3})$ เมื่อ ab = m_3

$\underset{\sim}{\varepsilon} \sim N(\underset{\sim}{0},\hat{\sigma}^2_{\gamma}\mathbf{I}_{N})$ เมื่อ abn = N

ดังนั้นจะได้ค่า $\underset{\sim}{Y}$ คือ $\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{1}\mu + Z_1\underset{\sim}{\alpha} + Z_2\underset{\sim}{\beta} + Z_3\underset{\sim}{\gamma} + Z_4\underset{\sim}{\varepsilon}$

ขั้นที่ 2 จำลองเซตข้อมูล $(y_1,y_2,\ldots,y_N)$ โดยกระทำซ้ำ 400 ครั้ง และประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\sigma}^2_{\alpha},\hat{\sigma}^2_{\beta},\hat{\sigma}^2_{\gamma},\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}$ ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดในแต่ละเซตข้อมูลทุกรอบของการกระทำซ้ำ แสดงผลดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2.1 แสดงการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\sigma}^2_\alpha, \hat{\sigma}^2_\beta, \hat{\sigma}^2_\gamma, \hat{\sigma}^2_\varepsilon$ ของการกระทำซ้ำ 400 ครั้ง

จำนวนครั้ง	$(y_1, y_2, \ldots, y_N)$	$\hat{\sigma}^2_\alpha, \hat{\sigma}^2_\beta, \hat{\sigma}^2_\gamma, \hat{\sigma}^2_\varepsilon$
1	$(y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{1,N})$	$\hat{\sigma}^2_{1,\alpha}, \hat{\sigma}^2_{1,\beta}, \hat{\sigma}^2_{1,\gamma}, \hat{\sigma}^2_{1,\varepsilon}$
2	$(y_{2,1}, y_{2,2}, \ldots, y_{2,N})$	$\hat{\sigma}^2_{2,\alpha}, \hat{\sigma}^2_{2,\beta}, \hat{\sigma}^2_{2,\gamma}, \hat{\sigma}^2_{2,\varepsilon}$
⋮	⋮	⋮
400	$(y_{400,1}, y_{400,2}, \ldots, y_{400,N})$	$\hat{\sigma}^2_{400,\alpha}, \hat{\sigma}^2_{400,\beta}, \hat{\sigma}^2_{400,\gamma}, \hat{\sigma}^2_{400,\varepsilon}$

ขั้นที่ 3 คำนวณหาค่าเฉลี่ยของตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดแบบมอนติคาร์โล ของ $\hat{\sigma}^2_\alpha, \hat{\sigma}^2_\beta, \hat{\sigma}^2_\gamma, \hat{\sigma}^2_\varepsilon$ ที่ได้จากการกระทำซ้ำ 400 ครั้ง ซึ่งได้ผลดังนี้

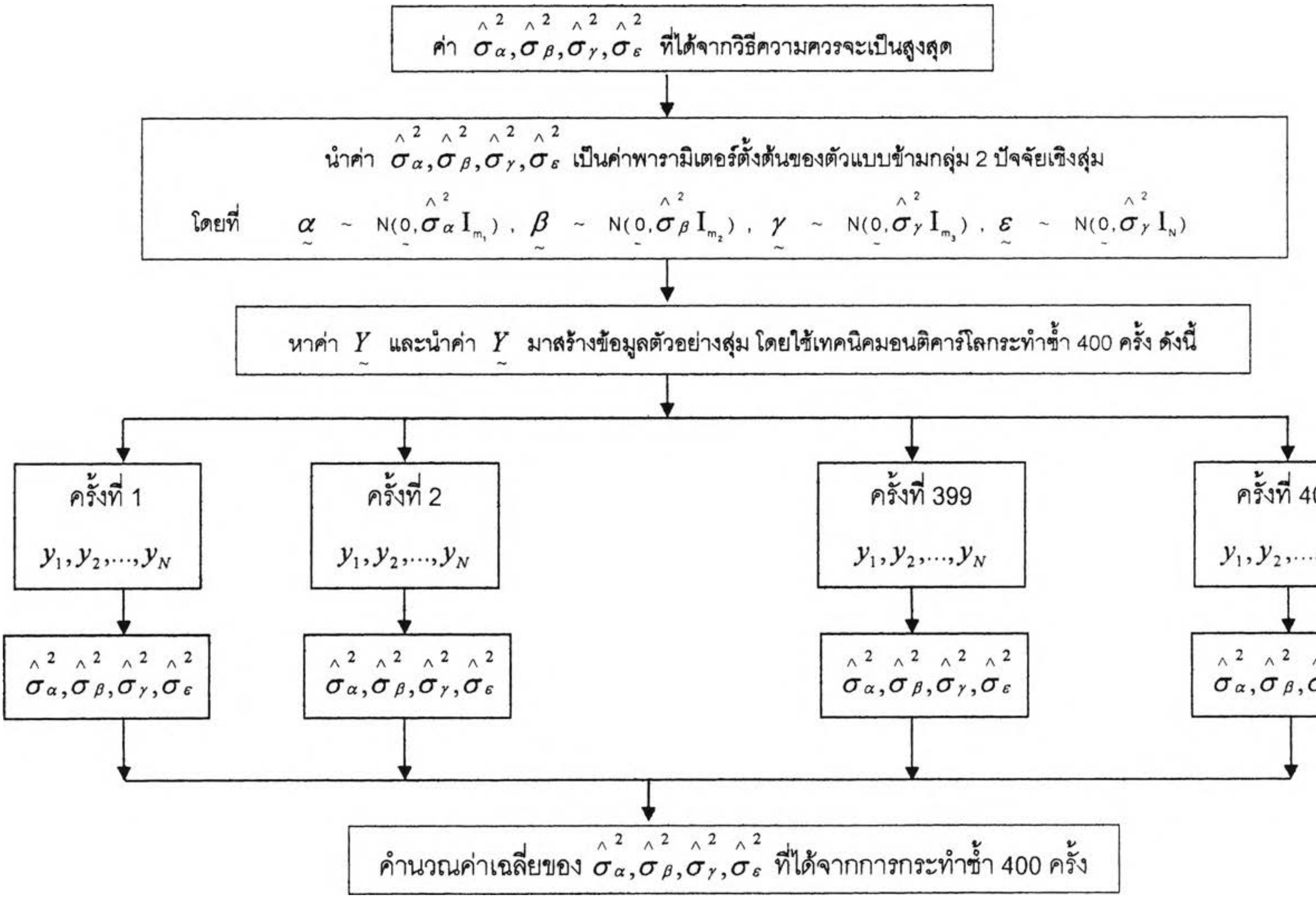
$$\hat{\underset{\sim MC}{\sigma}}^2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\sum_{i=1}^{400} \hat{\sigma}^2_\alpha}{400} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{400} \hat{\sigma}^2_\beta}{400} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{400} \hat{\sigma}^2_\gamma}{400} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{400} \hat{\sigma}^2_\varepsilon}{400} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^{2*}_\alpha \\ \hat{\sigma}^{2*}_\beta \\ \hat{\sigma}^{2*}_\gamma \\ \hat{\sigma}^{2*}_\varepsilon \end{bmatrix}$$

นั่นคือ ค่าประมาณพารามิเตอร์องค์ประกอบความแปรปรวนของวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบมอนติคาร์โลคือ

$$\hat{\sigma}^2_{\sim MC} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{\alpha}^{2*} \\ \hat{\sigma}_{\beta}^{2*} \\ \hat{\sigma}_{\gamma}^{2*} \\ \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2*} \end{bmatrix}$$

จากขั้นตอนดังกล่าวข้างต้น สามารถแสดงแผนผังขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์องค์ประกอบความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์องค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบมอนติคาร์โลได้ดังนี้

2.1 แผนผังขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวประมาณพารามิเตอร์องค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีความควร
แบบมอนติคาร์โล



2.5 การประมาณค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์องค์ประกอบความแปรปรวน

เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ ขอเสนอทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการประมาณค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ดังนี้

ทฤษฎีบท ให้ $y_1, y_2, \ldots, y_N \sim f(y|\theta)$ และให้ $\mathrm{I}(\underset{\sim}{\theta}) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(y|\theta)\right]$ เป็นข้อสนเทศของฟิชเชอร์ (the Fisher information) สำหรับ $\underset{\sim}{\theta}$ ภายใต้เงื่อนไขทั่วไป และสำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่ $\hat{\underset{\sim}{\theta}}$ เป็นตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\theta}$ ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย $\underset{\sim}{\theta}$ และค่าความแปรปรวน I^{-1} นั่นคือ

$$\hat{\underset{\sim}{\theta}} \sim \mathrm{N}(\underset{\sim}{\theta}, \mathrm{I}^{-1})$$

จากทฤษฎีข้างต้นสามารถประยุกต์ใช้กับตัวแบบข้ามกลุ่ม 2 ปัจจัยเชิงสุ่ม นั่นคือ $\hat{\underset{\sim}{\theta}}$ เป็นตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดของ $\underset{\sim}{\theta}$ มีการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ย $\underset{\sim}{\theta}$ และค่าความแปรปรวน I^{-1} เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ และสามารถหาเมทริกซ์ข้อสนเทศ (the information matrix) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{4\times4}(\underset{\sim}{\theta}) &= (\mathrm{I}_{ij}(\underset{\sim}{\theta})) \\
&= E\left[\frac{\partial\ell}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial\ell}{\partial\theta_j}\right] \\
&= -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]
\end{aligned}$$

$$\mathrm{I}(\underset{\sim}{\theta}) = \begin{bmatrix}
-E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\alpha^2\sigma_\alpha^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\alpha^2\sigma_\gamma^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\alpha^2\sigma_\varepsilon^2}\right] \\
-E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\beta^2\sigma_\alpha^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\beta^2\sigma_\beta^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\beta^2\sigma_\gamma^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\beta^2\sigma_\varepsilon^2}\right] \\
-E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\gamma^2\sigma_\alpha^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\gamma^2\sigma_\beta^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\gamma^2\sigma_\gamma^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\gamma^2\sigma_\varepsilon^2}\right] \\
-E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\varepsilon^2\sigma_\alpha^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\varepsilon^2\sigma_\beta^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\varepsilon^2\sigma_\gamma^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\varepsilon^2\sigma_\varepsilon^2}\right]
\end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $E(\underset{\sim}{Y}) = \underset{\sim}{1}\mu = \underset{\sim}{\mu}$ จึงทำให้ทราบว่า $E(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{\mu}) = 0$ ดังนั้นสามารถหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ผ่านเมทริกซ์ข้อสนเทศได้
เมื่อ

$$-E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\alpha^2\sigma_\alpha^2}\right] = -\frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_1Z_1') + tr(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}V)$$

$$= \frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_1Z_1')$$

$$-E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\alpha^2\sigma_\beta^2}\right] = -\frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_2Z_2') + tr(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}V)$$

$$= \frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_2Z_2')$$

$$= -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\beta^2\sigma_\alpha^2}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\alpha^2\sigma_\gamma^2}\right] = -\frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_3Z_3') + tr(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}V)$$

$$= \frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_3Z_3')$$

$$= -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\gamma^2\sigma_\alpha^2}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\alpha^2\sigma_\varepsilon^2}\right] = -\frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_4Z_4') + tr(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_4Z_4'V^{-1}V)$$

$$= \frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_1Z_1'V^{-1}Z_4Z_4')$$

$$= -E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\varepsilon^2\sigma_\alpha^2}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2\ell}{\partial\sigma_\beta^2\sigma_\beta^2}\right] = -\frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_2Z_2') + tr(V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}V)$$

$$= \frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_2Z_2')$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial\sigma_\beta^2\sigma_\gamma^2}\right] = -\frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_3Z_3') + tr(V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}V)$$

$$= \frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_3Z_3')$$

$$= -E\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial\sigma_\gamma^2\sigma_\beta^2}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial\sigma_\beta^2\sigma_\varepsilon^2}\right] = -\frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_4Z_4') + tr(V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_4Z_4'V^{-1}V)$$

$$= \frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_2Z_2'V^{-1}Z_4Z_4')$$

$$= -E\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial\sigma_\varepsilon^2\sigma_\beta^2}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial\sigma_\gamma^2\sigma_\gamma^2}\right] = -\frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}Z_3Z_3') + tr(V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}V)$$

$$= \frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}Z_3Z_3')$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial\sigma_\gamma^2\sigma_\varepsilon^2}\right] = -\frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}Z_4Z_4') + tr(V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}Z_4Z_4'V^{-1}V)$$

$$= \frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_3Z_3'V^{-1}Z_4Z_4')$$

$$= -E\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial\sigma_\varepsilon^2\sigma_\gamma^2}\right]$$

$$-E\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial\sigma_\varepsilon^2\sigma_\varepsilon^2}\right] = -\frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_4Z_4'V^{-1}Z_4Z_4') + tr(V^{-1}Z_4Z_4'V^{-1}Z_4Z_4'V^{-1}V)$$

$$= \frac{1}{2}tr(V^{-1}Z_4Z_4'V^{-1}Z_4Z_4')$$

จากนั้นสามารถหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ ด้วยการคำนวณหาค่าอินเวอร์ส (Inverse) ของเมทริกซ์ข้อสนเทศ

2.6 เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณทั้ง 2 วิธี

การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนสำหรับตัวแบบข้ามกลุ่ม 2 ปัจจัยเชิงสุ่มด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดและวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบมอนติคาร์โล จะทำการพิจารณาโดยการเปรียบเทียบขนาด และทำการถ่วงน้ำหนักเวคเตอร์องค์ประกอบความแปรปรวนด้วยเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมขององค์ประกอบความแปรปรวน ระหว่างค่าประมาณขององค์ประกอบความแปรปรวนที่ทำการศึกษากับค่าจริงขององค์ประกอบความแปรปรวนแต่ละตัว ซึ่งเรียกเกณฑ์นี้ว่า "ระยะทางมาหาลาโนบิสเฉลี่ย" (Mahalanobis Distance) โดยทำการสมมติให้องค์ประกอบความแปรปรวนแต่ละตัวเป็นอิสระซึ่งกันและกัน โดยมีหลักการดังนี้

กำหนดให้ $\underset{\sim}{\theta}$ เป็นเวคเตอร์ค่าจริงขององค์ประกอบความแปรปรวน

$\hat{\underset{\sim}{\theta}}_{ML}$ เป็นเวคเตอร์ค่าประมาณขององค์ประกอบความแปรปรวนจากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

$\hat{\underset{\sim}{\theta}}_{MC}$ เป็นเวคเตอร์ค่าประมาณขององค์ประกอบความแปรปรวนจากวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบมอนติคาร์โล

Σ_{ML} เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมจากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด ซึ่งเป็นเมทริกซ์สมมาตรและมีขนาด 4×4

Σ_{MC} เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมจากวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบมอนติคาร์โล ซึ่งเป็นเมทริกซ์สมมาตรและมีขนาด 4×4

ซึ่ง $$\underset{\sim}{\theta} = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\beta^2 \\ \sigma_\gamma^2 \\ \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\underset{\sim}{\theta}}_{ML} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^2_{\alpha ML} \\ \hat{\sigma}^2_{\beta ML} \\ \hat{\sigma}^2_{\gamma ML} \\ \hat{\sigma}^2_{\varepsilon ML} \end{pmatrix}, \quad \hat{\underset{\sim}{\theta}}_{MC} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^2_{\alpha MC} \\ \hat{\sigma}^2_{\beta MC} \\ \hat{\sigma}^2_{\gamma MC} \\ \hat{\sigma}^2_{\varepsilon MC} \end{pmatrix}$$

โดยที่ $$\Sigma = I^{-1}(\hat{\underset{\sim}{\theta}})$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} Var(\hat{\sigma}^2_\alpha) & Cov(\hat{\sigma}^2_\alpha,\hat{\sigma}^2_\beta) & Cov(\hat{\sigma}^2_\alpha,\hat{\sigma}^2_\gamma) & Cov(\hat{\sigma}^2_\alpha,\hat{\sigma}^2_\varepsilon) \\ Cov(\hat{\sigma}^2_\beta,\hat{\sigma}^2_\alpha) & Var(\hat{\sigma}^2_\beta) & Cov(\hat{\sigma}^2_\beta,\hat{\sigma}^2_\gamma) & Cov(\hat{\sigma}^2_\beta,\hat{\sigma}^2_\varepsilon) \\ Cov(\hat{\sigma}^2_\gamma,\hat{\sigma}^2_\alpha) & Cov(\hat{\sigma}^2_\gamma,\hat{\sigma}^2_\beta) & Var(\hat{\sigma}^2_\gamma) & Cov(\hat{\sigma}^2_\gamma,\hat{\sigma}^2_\varepsilon) \\ Cov(\hat{\sigma}^2_\varepsilon,\hat{\sigma}^2_\alpha) & Cov(\hat{\sigma}^2_\varepsilon,\hat{\sigma}^2_\beta) & Cov(\hat{\sigma}^2_\varepsilon,\hat{\sigma}^2_\gamma) & Var(\hat{\sigma}^2_\varepsilon) \end{bmatrix}$$

ระยะทางมาหาลาโนบิสเฉลี่ยของวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

$$Ma_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sqrt{\left[\underset{\sim ML}{\hat{\theta}} - \underset{\sim}{\theta}\right]' \Sigma_{ML}^{-1}\left[\underset{\sim ML}{\hat{\theta}} - \underset{\sim}{\theta}\right]}}{m}$$

ระยะทางมาหาลาโนบิสเฉลี่ยของวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบมอนติคาร์โล

$$Ma_{MC} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sqrt{\left[\underset{\sim MC}{\hat{\theta}} - \underset{\sim}{\theta}\right]' \Sigma_{MC}^{-1}\left[\underset{\sim MC}{\hat{\theta}} - \underset{\sim}{\theta}\right]}}{m}$$

เมื่อ m คือ จำนวนครั้งของการกระทำซ้ำในแต่ละการทดลอง (ที่ทำให้ค่าประมาณมีค่าเป็นบวก) ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้กำหนดให้ m มีค่าเท่ากับ 500

ดังนั้นถ้าวิธีการใดให้ค่าระยะทางมาหาลาโนบิสเฉลี่ยต่ำกว่าก็จะเป็นวิธีการประมาณที่เหมาะสมกว่าในภาพรวมของการประมาณ กล่าวคือค่าองค์ประกอบความแปรปรวนที่ได้โดยรวมแล้วมีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงขององค์ประกอบความแปรปรวนมากกว่านั่นเอง