การทำให้เป็นบรรทัดฐานของจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดแบบทำควบคู่กัน

นายนิธิชัย อนันตะเศรษฐกูล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2548
ISBN 974-53-2516-3

ON-THE-FLY MINIMUM WEIGHT NUMBER NORMALIZATION

Mr. Nitichai Anantasetkul

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Computer Science
Department of Computer Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2005
ISBN 974-53-2516-3

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การทำให้เป็นบรรทัดฐานของจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดแบบทำควบคู่กัน
โดย	นายนิธิชัย อนันตะเศรษฐกูล
สาขาวิชา	วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(อาจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. อรรถวิทย์ สุดแสง)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร. อาทิตย์ ทองทักษ์)

นิธิชัย อนันตะเศรษฐกูล : การทำให้เป็นบรรทัดฐานของจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดแบบทำควบคู่กัน. (ON-THE-FLY MINIMUM WEIGHT NUMBER NORMALIZATION) อ. ที่ปรึกษา : อ.ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์, 57 หน้า. ISBN 974-53-2516-3.

ในการคำนวณเลขคณิตคอมพิวเตอร์ จำนวนของดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์มีผลต่อความเร็วในการคำนวณอย่างเห็นได้ชัด ดังนั้นประเด็นที่น่าสนใจคือการหารูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดเพื่อจะส่งผลให้การคำนวณมีความเร็วยิ่งขึ้น ที่ผ่านมามีงานวิจัยทางด้านนี้มากมายซึ่งเวลาที่ใช้ในการคำนวณเป็นเวลาเชิงเส้นตรง เช่น การแปลงชุดตัวเลขโดยหน้าต่างการเลื่อนไหล โดย ฟิลิบ และเบิรก์ ในปี ค.ศ. 2004 แนวคิดของงานวิจัยนี้คือลดจำนวนของดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์ให้ได้มากที่สุด อัลกอริทึมในการแปลงโดยหน้าต่างการเลื่อนไหลนี้ถูกพิสูจน์แล้วว่าผลลัพธ์ที่ได้อยู่ในรูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดโดยมีพารามิเตอร์คือ ขอบเขตล่าง ขอบเขตบน เลขฐาน และขนาดของหน้าต่าง การแปลงนี้ทำจากขวาไปซ้ายซึ่งเป็นการแปลงแบบลำดับส่งผลให้มีความเร็วเป็นเวลาเชิงเส้นตรง

งานวิจัยนี้ได้เสนอกระบวนการการแปลงแบบขนานโดยอาศัยสถาปัตยกรรมการแปลงแบบทำควบคู่กัน และนำมาประยุกต์ใช้กับระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมาย เราได้เสนอวิธีการแปลงที่เรียกว่า การทำให้เป็นบรรทัดฐาน สำหรับระบบเลขฐานที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง ซึ่งมีความเร็วเป็นเวลาลอการิทึม ประกอบกับบทพิสูจน์เพื่อแสดงให้เห็นว่าการทำให้เป็นบรรทัดฐานนี้ทำงานถูกต้อง

ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์.................... ลายมือชื่อนิสิต....นิธิชัย อนันตะเศรษฐกูล..........
สาขาวิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์.............. ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา..........................
ปีการศึกษา 2548..................................

4670354321 : MAJOR COMPUTER SCIENCE

KEY WORD: REDUNDANT NUMBER SYSTEM / MINIMUM WEIGHT REPRESENTATION / DEGIT SET CONVERSION / PARALLEL COMPUTING / NORMALIZATION

NITICHAI ANANTASETKUL : ON-THE-FLY MINIMUM WEIGHT NUMBER NORMALIZATION. THESIS ADVISOR: ATHASIT SURARERKS, Ph.D., 57 pp. ISBN 974-53-2516-3.

Performing some arithmetic operations in computer system, number of nonzero digits can have an effect on the time used for the computation. Therefore the number representation in the form of minimum weight which we are interested is due to the benefit in term of increasing the computational speed. There are several researches studied on minimum weight digit set conversion for which the time complexity is linear on the length of the input bit-string. Recently technique proposed in this area is a sliding window conversion algorithm by Phillips and Burgess in 2004. The idea is to minimize the number of nonzero digits in the bit-string. The sliding window algorithm has been proven that the result bit-string has a possible minimum weight by specifying some parameters: lower bound, upper bound, base, and window size. The conversion algorithm processes from right to left and results to the complexity.

This thesis introduces a conversion process in parallel manner by applying on-the-fly architecture combining with a redundant number system. We have proposed a minimum weight normalization algorithm for all bases greater than or equal to two along with the proof for the algorithm. It is also shown in the thesis that our method can be performed with the logarithmic time complexity on the length of the input.

Department Computer Engineering........... Student's signature...N. Anantasetkul

Field of study Computer Science.............. Advisor's signature..........

Academic year 2005..............................

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลือจาก อาจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ อาจารย์ที่ปรึกษา ซึ่งเป็นผู้ให้แนวทาง และคำปรึกษา ตลอดจนเป็นผู้ตรวจทานแก้ไข จนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ขอขอบพระคุณท่าน อาจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ เป็นอย่างสูงที่ให้ความเมตตาแก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด

ขอขอบพระคุณ รศ. ดร. สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล อาจารย์ ดร. อรรถวิทย์ สุดแสง อาจารย์ ดร. อาทิตย์ ทองทักษ์ คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำในการแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้มีคุณภาพยิ่งขึ้น วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ไม่อาจจะสำเร็จได้หากไม่ได้รับความกรุณาจากทุกท่าน

ท้ายนี้ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ญาติสนิท และมิตรสหายทุกคน ที่เป็นกำลังใจ คอยดูแลห่วงใย และให้การสนับสนุนแก่ผู้วิจัยในทุกๆ ด้านเสมอมา จนผู้วิจัยสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญภาพ

ภาพที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ความก้าวหน้าทางด้านเลขคณิตคอมพิวเตอร์ (computer arithmetic) ในช่วงเวลากว่า 3 ทศวรรษที่ผ่านมาส่งผลต่อประสิทธิภาพการทำงานของดิจิทัลคอมพิวเตอร์ฮาร์ดแวร์ (digital computer hardware) ในทางบวกอย่างต่อเนื่อง ความก้าวหน้าทางด้านเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์อย่างต่อเนื่องนี้ คงจะปฏิเสธไม่ได้ว่าเป็นผลมาจากทฤษฎีที่คิดค้นขึ้น การวิจัย และความพยายามในการสร้างเครื่องมือต่างๆ ที่ช่วยแปลงจากสถาปัตยกรรมคอมพิวเตอร์บนกระดาษมาเป็นอุปกรณ์คอมพิวเตอร์ต่างๆ ในปัจจุบันระบบการแทนจำนวน (number representation system) เป็นหัวข้อที่สำคัญในเลขคณิตคอมพิวเตอร์ ระบบการแทนจำนวนได้ถูกพัฒนาและจำแนกเป็นประเภทต่างๆ มากมายโดยผู้เชี่ยวชาญทางด้านคอมพิวเตอร์เพื่อให้สามารถนำไปใช้ในวงจรคอมพิวเตอร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ การเลือกระบบการแทนจำนวนที่เหมาะสมจะมีผลต่อค่าใช้จ่ายในการทำให้เกิดผล (implement) และเวลาที่ใช้ในการคำนวณทางด้านคณิตศาสตร์

ในทางคณิตศาสตร์ ระบบจำนวน (number system) นับว่าเป็นหัวใจหลักในการคำนวณไม่ว่าจะเป็นการบวก ลบ คูณ หาร การเลือกระบบจำนวนที่เหมาะสมมาใช้งานจะมีผลกระทบอย่างมากต่อประสิทธิภาพของการคำนวณไม่ว่าจะเป็นความเร็วในการคำนวณ หรือ ความยากง่ายในการคำนวณ

เพื่อเป็นการเพิ่มประสิทธิภาพด้านความเร็วในการคำนวณ ระบบจำนวนซ้ำซ้อน (redundant number system) จึงได้ถูกพัฒนาขึ้น คุณสมบัติเฉพาะที่จำนวนหนึ่งๆ สามารถเขียนได้หลายแบบ ซึ่งสามารถลดการเกิดสายการแพร่ของตัวทด (carry propagation chain) สามารถทำให้เกิดการคำนวณแบบขนาน (parallel computation) โดยระบบจำนวนซ้ำซ้อนที่เป็นที่นิยมมากคือ ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายของอเวเซียนีส (Avizienis's signed-digit number system) [1] ซึ่งถูกเสนอในปี ค.ศ. 1961

อย่างไรก็ดี ผลกระทบที่มีต่อความเร็วของการคำนวณ ประการหนึ่งคือค่าน้ำหนัก (weight) ของจำนวนโดยค่าน้ำหนักนี้คือจำนวนของตัวเลขที่ไม่เป็นศูนย์ (nonzero digit) นั่นคือในกรณีที่จำนวนมีค่าน้ำหนักน้อย เวลาที่ใช้ในการคำนวณก็จะน้อยตามไปด้วย แนวความคิดที่จะทำให้จำนวนหนึ่งๆ มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดคือการแปลงจำนวนนั้นให้อยู่ในรูปของจำนวนที่มีจำนวน

ของดิจิต (digit) ที่ไม่เป็นศูนย์น้อยที่สุด หรืออีกนัยหนึ่งคือแปลงให้อยู่ในรูปของจำนวนที่มีจำนวนของดิจิตที่เป็นศูนย์มากที่สุด

งานวิจัยนี้มุ่งเน้นการแปลงชุดตัวเลขซ้ำซ้อนให้อยู่ในชุดตัวเลขเดียวกันบนเลขฐานจำนวนเต็มใดๆที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง โดยที่ผลลัพธ์ที่ได้ต้องอยู่ในรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด ในงานวิจัยที่ผ่านมาจะพบว่าการแปลงจำนวนทำจากขวาไปซ้าย ดังนั้นเวลาที่ใช้ในการแปลงจึงเป็นเวลาเชิงเส้นตรง $O(n)$ งานวิจัยนี้สนใจการแปลงแบบขนานโดยอาศัยสถาปัตยกรรมการแปลงแบบทำควบคู่กัน (on-the-fly) ซึ่งส่งผลให้เวลาในการคำนวณเป็นเวลาลอการิทึม $O(\log n)$ แนวคิดการแปลงชุดตัวเลขแบบทำควบคู่กันนี้ถูกเสนอเมื่อปี ค.ศ. 1994 โดยคอร์เนอรับ [2] เพื่อแปลงชุดตัวเลขซ้ำซ้อนไปเป็นชุดตัวเลขไม่ซ้ำซ้อนซึ่งเพิ่มความเร็วจากเวลาเชิงเส้นตรงไปเป็นเวลาลอการิทึม

จากงานวิจัยที่ผ่านมา การแปลงจำนวนให้อยู่ในรูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดสำหรับการคำนวณแบบทำควบคู่กันยังไม่ได้รับการพัฒนา อีกทั้งการคำนวณแบบทำควบคู่กันที่ถูกเสนอยังไม่ได้มีการคำนึงถึงผลลัพธ์ที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด ดังนั้น ในงานวิจัยนี้ จึงสนใจการทำให้เป็นบรรทัดฐานของจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดโดยอาศัยสถาปัตยกรรมการแปลงชุดตัวเลขแบบทำควบคู่กัน

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

พัฒนาอัลกอริทึมการทำให้เป็นบรรทัดฐานของชุดตัวเลขจากระบบจำนวนซ้ำซ้อนบนฐานจำนวนเต็มใดๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง ให้อยู่ในรูปของระบบจำนวนซ้ำซ้อนเดียวกันโดยที่ค่าน้ำหนักของรูปแบบการแทนจำนวนที่เป็นผลลัพธ์ต้องมีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด โดยอาศัยสถาปัตยกรรมการแปลงชุดตัวเลขแบบทำควบคู่กัน

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1. พัฒนาอัลกอริทึมการทำให้เป็นบรรทัดฐานของรูปแบบการแทนจำนวนแบบขนานสำหรับระบบจำนวนซ้ำซ้อน บนฐานจำนวนเต็มใดๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง ไปอยู่ในรูปของระบบจำนวนซ้ำซ้อนเดียวกันโดยที่ค่าน้ำหนักของรูปแบบการแทนจำนวนที่เป็นผลลัพธ์ต้องมีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

2. ค่าเชิงตัวเลขของจำนวนนำเข้าและจำนวนนำออกที่ได้ต้องเท่ากัน

3. การแปลงชุดตัวเลขทำได้ในกรณีที่จำนวนนั้นสามารถแสดงได้ในระบบจำนวนทั้งสองระบบ

4. ระบบจำนวนซ้ำซ้อนบนฐานจำนวนเต็มใดๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับสองจะอ้างอิงระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมาย

5. ชุดตัวเลขที่ใช้เป็นชุดตัวเลขซ้ำซ้อนมากที่สุดและมีคุณสมบัติสมมาตร

6. ค่าตัวทดที่ใช้ต้องเป็นค่าตัวทดที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้

7. อัลกอริทึมนี้จะวัดผลความถูกต้องโดยการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เท่านั้น

1.4 ขั้นตอนและวิธีดำเนินการวิจัย

1. ศึกษาทฤษฎีเกี่ยวกับระบบจำนวนที่ใช้ในงานวิจัย

2. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวกับระบบจำนวนซ้ำซ้อนบนฐานจำนวนเต็มใดๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับสองแบบมีเครื่องหมาย

3. ศึกษาวิธีการแปลงชุดตัวเลขของระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมาย

4. ศึกษาคุณสมบัติของรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

5. ออกแบบแนวคิดและอัลกอริทึมการทำให้เป็นบรรทัดฐานของรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดแบบทำควบคู่กันสำหรับระบบจำนวนซ้ำซ้อน

6. พิสูจน์แนวคิดและอัลกอริทึมการทำให้เป็นบรรทัดฐานของรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดให้ทำงานได้อย่างถูกต้อง

7. สรุปผลและจัดทำวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1. ได้อัลกอริทึมการทำให้เป็นบรรทัดฐานของรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดแบบใหม่ที่มีลักษณะการทำงานแบบขนานโดยอาศัยสถาปัตยกรรมการแปลงชุดตัวเลขแบบทำควบคู่กัน

2. สามารถนำวิธีการทำให้เป็นบรรทัดฐานของรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดนี้ไปเป็นแนวทางในการปรับปรุงตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์ต่างๆ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่อยู่ในรูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้นี้จะเพิ่มความเร็วให้กับการคำนวณเมื่อถูกนำไปใช้

1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์

ส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์นี้ได้รับการตีพิมพ์เป็นผลงานวิชาการในหัวข้อเรื่องดังต่อไปนี้

1. "On-the-fly Minimum Weight Binary Number Normalization Algorithm" โดย นิธิชัย อนันตะเศรษฐกูล และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ National Computer Science and Engineering Conference (NCSEC2005)
2. "On-the-fly Minimum Weight Normalization for Signed-digit Number System" โดย นิธิชัย อนันตะเศรษฐกูล และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ 10th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE10)

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องไปพร้อมๆกัน โดยจะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องพร้อมอ้างอิงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องที่มีความสำคัญและเกี่ยวข้องกับทฤษฎีนั้นๆ ซึ่งประกอบไปด้วย ระบบจำนวน (number system) ระบบจำนวนซ้ำซ้อน (redundant number system) การแปลงชุดตัวเลข (digit set conversion) แบบต่างๆ เช่น การแปลงแบบเชื่อมตรง (on-line) และการแปลงแบบขนาน (parallel) และค่าน้ำหนักเลขคณิต (arithmetic weight) ทฤษฎีหลักที่จะนำมาประยุกต์ใช้ในงานวิจัยนี้คือ สถาปัตยกรรมการแปลงชุดตัวเลขแบบทำควบคู่กัน (on-the-fly conversion architecture) และรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด (minimum weight number representation) สำหรับฐานที่มากกว่าหรือเท่ากับสองโดยอ้างอิงรูปแบบการแทนจำนวนที่เรียกว่าจีนาฟ (generalized nonadjacent form : GNAF) ซึ่งเป็นหลักการสำคัญของงานวิจัยนี้

2.1 ระบบจำนวน (Number system)

ระบบจำนวน (β, D) ประกอบด้วยเลขฐาน (base) β โดยที่ β สามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $\|\beta\| > 1$ และ ชุดตัวเลขแบบจำกัด (finite digit set) D โดยที่สมาชิกในชุดตัวเลขที่เรียกว่า ดิจิต (digit) สามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้มีจำนวนเต็ม X โดยที่ X สามารถแสดงได้ในระบบจำนวนเลขฐาน β ด้วยชุดตัวเลขแบบจำกัด D ดังนี้

$$X = (x_n x_{n-1} \cdots x_0 . x_{-1} x_{-2} \cdots)_\beta$$

ซึ่ง $x_i \in D$ โดยที่ $n \in \mathrm{Z}$, $i \le n$ โดยค่าเชิงตัวเลข (numerical value) ของ X บนฐาน β สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\|X\| = \sum_{i=n}^{-\infty} x_i \beta^i \tag{2.1}$$

ซึ่งค่าเชิงตัวเลขทั้งหมดที่แสดงได้สามารถเขียนให้อยู่รูปของเซต $\mathrm{P}[\beta, D]$ ได้ดังนี้

$$\mathrm{P}_n^m[\beta, D] = \{X = (x_n x_{n-1} \cdots x_{m+1} x_m)_\beta | x_i \in D, m \le i \le n\}$$
$$\mathrm{P}_n[\beta, D] = \{X = (x_n x_{n-1} \cdots)_\beta | x_i \in D, i \le n\}$$

โดย $\mathrm{P}_n^m[\beta, D]$ และ $\mathrm{P}_n[\beta, D]$ เท่ากับ เซตจำกัดและเซตไม่จำกัด ตามลำดับ โดยที่ n เป็นเลขชี้กำลังสูงสุด และ m เป็นเลขชี้กำลังต่ำสุด

ในระบบเลขฐานจำนวนเต็ม β ที่มีชุดตัวเลขอยู่ในรูป $C = \{c \in Z \mid 0 \le c \le |\beta| - 1\}$ เรียกว่า ชุดตัวเลขคาโนนิคอล (canonical digit set) ตัวอย่างเช่น สำหรับระบบเลขฐาน 10 จะได้ $\beta = 10$ และ ชุดตัวเลขคาโนนิคอลคือ $\{c \in Z \mid 0 \le c \le 9\}$

2.2 **ระบบจำนวนซ้ำซ้อน** (Redundant number system)

ระบบจำนวน (β, D) มีคุณสมบัติการซ้ำซ้อน (redundant property) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนอย่างน้อยสองจำนวนที่มีรูปแบบที่แตกต่างกัน X_1 และ X_2 แต่ต้องมีค่าเชิงตัวเลขเท่ากัน ซึ่งก็คือ $||X_1|| = ||X_2||$

ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายของอเวเซียนีส (Avizienis's signed-digit number system) [1] ซึ่งได้ถูกเสนอขึ้นเพื่อประโยชน์ในการทำงานแบบขนานโดยที่ออกแบบมาเพื่อลดการเกิดสายการแพร่ของตัวทด (carry propagation chain) ในการบวกกันของเลขคณิต ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมายของอเวเซียนีสก็เป็นระบบจำนวนแบบหนึ่งที่มีคุณสมบัติการซ้ำซ้อน โดยระบบจำนวนแบบนี้หมายถึงระบบจำนวนที่มีชุดตัวเลขแบบจำกัดอยู่ในรูปแบบของ $D = \{-a, -a + 1, \ldots, a\}$ ซึ่งมีฐานเป็น $\beta \ge 2$ โดยที่ a เป็นจำนวนเต็ม $\lceil \beta/2 \rceil \le a \le \beta - 1$ (เพื่อความสะดวกในการเขียน จากนี้ไปอาจแทนดิจิต $-a$ ด้วยสัญลักษณ์ $\bar{a}$ ตามความเหมาะสมสำหรับทุกๆ ดิจิต a)

นิยามที่ 2.1 ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมาย (signed-digit number system) (β, D) บนฐาน β โดยที่ β เป็นจำนวนเต็มบวก $\beta \ge 2$ และ ชุดตัวเลข $D = \{d \in Z \mid a \le d \le b\}$ ซึ่ง a และ b เป็นจำนวนเต็ม $a \le 0 \le b$

ข้อสังเกต จำนวนสมาชิกในชุดตัวเลขแบบจำกัด D คือ $|D| = b - a + 1$ บนฐาน β จะได้ว่า

1. ถ้า $|D| < \beta$ จำนวนบางจำนวนไม่มีในระบบนี้
2. ถ้า $|D| = \beta$ ทุกจำนวนเต็มมีในระบบนี้แต่มีเพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น
3. ถ้า $|D| > \beta$ ระบบนี้มีความซ้ำซ้อน

นิยามที่ 2.2 ประเภทของชุดตัวเลขแบบจำกัด D บนฐาน β

1. ถ้า $|D| = \beta + 1$ แล้ว D จะถูกเรียกว่าเป็นชุดตัวเลขซ้ำซ้อนน้อยที่สุด (minimum redundant digit set)
2. ถ้า $|D| = 2\beta - 1$ แล้ว D จะถูกเรียกว่าเป็นชุดตัวเลขซ้ำซ้อนมากที่สุด (maximum redundant digit set)
3. ถ้า $b = |a|$ ชุดตัวเลข D เป็นชุดตัวเลขสมมาตร (symmetric)

กำหนดให้ β เป็นเลขฐาน โดยที่ β เป็นจำนวนเต็มที่ $\beta \geq 2$ และกำหนดให้ D เป็นชุดตัวเลขที่มีช่วงค่าอยู่ระหว่าง $\{d \in Z \mid a \leq d \leq b\}$ โดย $-a + b \geq \beta$ และ $a \leq 0 \leq b$ ค่าเชิงตัวเลขของจำนวน X จะมีรูปแบบการแสดงค่ามากกว่าหนึ่งแบบ

ตัวอย่างที่ 2.1 *สมมติให้ชุดตัวเลข* D *มีค่าอยู่ในช่วง* $\{\bar{7}, \bar{6}, \ldots, 0, \ldots, 6, 7\}$ *บนเลขฐาน* $\beta = 10$ *และค่าเชิงตัวเลข* $X = 597$ *จะมีรูปแบบการเขียนแทนได้ดังนี้*

$$(6\ \ \bar{1}\ \ 7)_{10} = 6\times10^2 + (-1)\times10^1 + 7\times10^0 = 597$$

$$(6\ \ 0\ \ \bar{3})_{10} = 6\times10^2 + 0\times10^1 + (-3)\times10^0 = 597$$

$$(1\ \ \bar{4}\ \ 0\ \ \bar{3})_{10} = 1\times10^3 + (-4)\times10^2 + 0\times10^1 + (-3)\times10^0 = 597$$

จะเห็นได้ว่ารูปแบบการแทนจำนวน X = 597 สามารถมีได้หลายรูปแบบ □

2.3 การแปลงชุดตัวเลข (Digit set conversion)

การแปลงชุดตัวเลขคือการแปลงจากชุดตัวเลขหนึ่งไปเป็นอีกชุดตัวเลขหนึ่ง ซึ่งได้ถูกศึกษาอย่างละเอียดในงานวิจัย [2, 3] กำหนดให้ D และ E เป็นชุดตัวเลขแบบจำกัดที่ต่างกัน และกำหนดให้ β เป็นเลขฐานที่สามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน การแปลงชุดตัวเลขในระบบเลขฐาน β จากชุดตัวเลข D ไปเป็นชุดตัวเลข E สามารถเขียนเป็นสมการฟังก์ชันดังนี้

$$\lambda : D \rightarrow E \text{ โดยที่ } X \in D, \|\lambda(X)\| = \|X\|$$

ในทางทฤษฎีแล้วปัญหาการแปลงชุดตัวเลขถูกนำไปใช้ในการอธิบายการคำนวณพื้นฐานทางคณิตศาสตร์มากมาย เช่น การบวกสามารถเทียบได้กับการแปลงชุดตัวเลขบนเลขฐานเดียวกัน แต่มีชุดตัวเลขที่ต่างกัน ในลักษณะ $D = \{d \in \mathrm{Z} \mid 2a \le d \le 2b\}$ และ $E = \{e \in \mathrm{Z} \mid a \le e \le b\}$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 2.2 *การบวกเลขสองจำนวนบนระบบเลขฐานสอง X = 0101010 และ Y = 0011010 สามารถพิจารณาเป็นการแปลงชุดตัวเลขบนเลขฐานสองจากชุดตัวเลข {0, 1, 2} ไปยังชุดตัวเลข {0, 1} ได้ โดยแปลงจาก 0112020 ไปเป็น 1000100 ดังแสดงในรูปที่ 2.1*

$X =$	0	1	0	1	0	1	0
$Y =$	0	0	1	1	0	1	0
$X+Y =$	0	1	1	2	0	2	0
ผลลัพธ์	1	0	0	0	1	0	0

รูปที่ 2.1 การบวกเลขสามารถพิจารณาเป็นการแปลงชุดตัวเลขได้ □

2.3.1 **การแปลงแบบเชื่อมตรง** (On-line conversion)

เลขคณิตแบบเชื่อมตรงถูกคิดค้นขึ้นเมื่อปี ค.ศ. 1977 โดยเออเสกโกแวคและไทรเวดี [4] ซึ่งในการคำนวณเลขคณิตแบบเชื่อมตรงนี้ ระบบจำนวนที่ใช้คือ ระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมายของอเวเซียนีส (Avizienis's signed-digit number system) [1]

แนวคิดของการคำนวณแบบเชื่อมตรงคือ การทำงานที่ทุกตัวดำเนินการกระทำไปในทิศทางเดียวกันแบบลำดับ (sequential) ผนวกเข้ากับ การทำงานแบบท่อตรง (pipeline) โดยอาศัยแนวคิดที่ว่า ตัวดำเนินการต่างๆ สามารถเริ่มต้นทำงานได้โดยไม่ต้องรอให้ตัวดำเนินการที่อยู่ในลำดับก่อนหน้าทำเสร็จเสียก่อน นอกจากนี้ การทำงานแบบเชื่อมตรงยังจำเป็นต้องใช้ระบบจำนวนซ้ำซ้อนด้วย และการคำนวณแบบเชื่อมตรง เป็นการคำนวณแบบลำดับเริ่มต้นจาก ดิจิตที่มีนัยสำคัญสูงสุด (most significant digit, MSD) ไปสู่ดิจิตที่มีนัยสำคัญต่ำสุด (least significant digit, LSD) การคำนวณจะกระทำทีละดิจิตจากซ้ายไปขวา

การแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงได้ถูกศึกษาในงานวิจัย [5, 6] โดยในงานวิจัยนี้แสดงให้เห็นว่า การแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงไม่มีความซับซ้อน แต่ประสิทธิภาพในด้านความเร็วอยู่ในระดับเดียวกับการทำงานแบบขนาน

คุณสมบัติที่สำคัญอีกประการหนึ่งของเลขคณิตแบบเชื่อมตรงคือค่าความหน่วงเชื่อมตรง (on-line delay) ϕ ของตัวดำเนินการ ในบางกรณี การคำนวณแบบเชื่อมตรงไม่สามารถจะผลิตดิจิตแรกของคำตอบหรือจำนวนนำออก (output) ได้จากการคำนวณของดิจิตแรกของจำนวนนำเข้า (input) ได้เสมอไป การจะได้คำตอบจำเป็นต้องพิจารณาดิจิตของจำนวนนำเข้ามากกว่าหนึ่งดิจิตในการเริ่มต้นคำนวณ แต่ต่อจากนั้น การคำนวณสามารถทำได้ทีละดิจิต ในกรณีที่จำนวนของดิจิตที่ใช้เพื่อการผลิตดิจิตแรกของคำตอบเป็น $\phi + 1$ ค่าความหน่วงเชื่อมตรงของตัวดำเนินการนั้นจะมีค่าเท่ากับ ϕ

จากงานวิจัย [6] ของฟรูนี่ย์และสุรฤกษ์ จะเห็นได้ว่าในการคำนวณแบบเชื่อมตรงสามารถทำได้แบบต่อเนื่องโดยจำเป็นต้องอาศัยระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมาย เนื่องจากข้อดีของการคำนวณแบบเชื่อมตรงคือ การคำนวณสามารถทำได้โดยไม่จำเป็นต้องรอให้มีจำนวนนำเข้าเข้ามาทั้งหมดก่อนก็สามารถคำนวณหาจำนวนนำออกได้เลย ส่งผลให้เวลาที่ใช้มีความเร็วสูงขึ้น และผลลัพธ์ที่ได้สามารถนำไปคำนวณต่อได้เลย ทำให้การคำนวณอยู่ในรูปแบบการทำงานแบบท่อตรง ข้อดีอีกประการหนึ่งคือเมื่อนำวิธีการนี้มาทำให้เกิดผล (implement) ทรัพยากรที่ใช้ เช่น เรจิสเตอร์ (register) ไม่มีความจำเป็นต้องใช้มากเนื่องจากดิจิตที่ใช้ในการคำนวณมีจำนวนน้อย ขึ้นอยู่กับค่าความหน่วงเชื่อมตรงที่กำหนด ดังนั้นการคำนวณแบบเชื่อมตรงนี้จึงสามารถประหยัดทรัพยากรลงได้มากทีเดียว ส่วนข้อเสียของการคำนวณแบบเชื่อมตรงคือ จำนวนดิจิตของจำนวนนำออกต้องเท่ากับจำนวนดิจิตของจำนวนนำเข้า ดังนั้นถ้าจะนำวิธีนี้มาใช้ในการทำให้เป็นบรรทัดฐานของจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด ผลลัพท์ที่ได้จะไม่มีประสิทธิภาพที่ดี เพราะมีหลายกรณีที่จำนวนดิจิตของจำนวนนำออกจำเป็นต้องมากกว่าจำนวนดิจิตของจำนวนนำเข้าเพื่อให้ได้ผลลัพท์ที่อยู่ในรูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด ดังนั้นวิธีการแปลงชุดตัวเลขแบบเชื่อมตรงนี้จึงไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้ในการทำให้เป็นบรรทัดฐานของจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

2.3.2 **การแปลงแบบขนาน** (Parallel conversion)

การแปลงชุดตัวเลขที่น่าสนใจอีกแบบหนึ่งคือการแปลงชุดตัวเลขแบบขนาน เนื่องจากเวลาที่ใช้ในการคำนวณมีความเร็วสูง โดยที่การแปลงจะทำทีเดียวพร้อมๆ กันสำหรับทุกๆ ดิจิตนำเข้า ซึ่งดิจิตนำออกที่ได้ก็จะได้ในเวลาที่ใกล้เคียงกัน โดยปกติการคำนวณแบบขนานไม่สามารถหาคำตอบได้ในการคำนวณเพียงรอบเดียวเนื่องจากผลกระทบที่อาจเกิดขึ้นได้จากการเกิดสายการ

แพร่ของตัวทด (carry propagation chain) ส่งผลให้ดิจิตทางซ้ายเกิดความเปลี่ยนแปลงขึ้นได้ ดังนั้นการคำนวณแบบขนานจริงจำเป็นต้องทำมากกว่าหนึ่งรอบขึ้นอยู่กับขนาดของจำนวนนำเข้า

2.3.3 **การแปลงโดยหน้าต่างการเลื่อนไหล** (Sliding window conversion)

การแปลงชุดตัวเลขโดยหน้าต่างการเลื่อนไหลนี้ [3] มีวัตถุประสงค์เพื่อให้ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดโดยมีขั้นตอนวิธีการแปลงแบบสามารถกำหนดเลขฐานของจำนวนนำออก ขนาดของหน้าต่างและชุดตัวเลขได้ อีกทั้งยังได้นำชุดตัวเลขแบบมีเครื่องหมายมาใช้ด้วย การแปลงชุดตัวเลขโดยหน้าต่างการเลื่อนไหลเป็นกระบวนการการแปลงที่นำดิจิตที่ติดกันมาจัดกลุ่มรวมกันเพื่อสร้างดิจิตตัวใหม่โดยอาศัยดิจิตในชุดตัวเลขซ้ำซ้อน การแปลงชุดตัวเลขแบบนี้จะช่วยลดจำนวนของดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์โดยเฉลี่ย ซึ่งอยู่ในรูปแบบการแทนจำนวนรูปแบบใหม่ การแปลงชุดตัวเลขโดยหน้าต่างการเลื่อนไหลเป็นการแปลงจากขวาไปซ้าย(ดิจิตที่มีนัยสำคัญต่ำสุดไปยังดิจิตที่มีนัยสำคัญสูงสุด) อัลกอริทึมในการแปลงมีดังต่อไปนี้

/* Perform the conversion $Y = SW_{r,m,l,u}(X)$ */
$Skip = 0$, $carry = 0$
$x_n = 0, x_{n+1} = 0, \ldots, x_{n+m} = 0$
for $i = 0$ to $n - 1$
  if ($skip = 0$) then
    if ($x_i + carry \bmod r = 0$) then
      /* Skip over zero digits */
      $y_i = 0$
    else
      $x = \sum_{j=0}^{m-1} x_{i+j} \times r^j$
      if ($x + carry > u$) then
        /* Must choose a negative digit */
        $y_i = x + carry - r^m$
        $carry = 1$
      elseif (($x_{i+m} = r - 1$) and ($x + carry \geq l + r^m$)) then
        /* Choosing a negative digit may reduce the weight */
        $y_i = x + \text{carry} - r^m$
        $carry = 1$
      else
        /* Choose a positive digit */
        $y_i = x + carry$
        $carry = 0$
      end if
      $skip = m - 1$
    end if
  else
    $y_i = 0$

$skip = skip - 1$
end if
next i
$y_n = carry$

อัลกอริทึมนี้สามารถหารูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดได้โดยการกำหนดค่าพารามิเตอร์ (parameter) ในอัลกอริทึมดังต่อไปนี้

1. ชุดตัวเลข
2. ขนาดของหน้าต่าง

ในระบบจำนวน $(\beta, \quad D)$ การหารูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดโดยวิธีหน้าต่างการเลื่อนไหลขึ้นอยู่กับการกำหนดขนาดของหน้าต่าง แต่ในงานวิจัยนี้ไม่ได้กำหนดว่ารูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดในระบบเกิดจากขนาดของหน้าต่างขนาดเท่าใด

2.4 **ค่าน้ำหนักเลขคณิต** (Arithmetic weight)

ในระบบจำนวนซ้ำซ้อนระบบหนึ่ง จำนวนหนึ่งๆ สามารถมีรูปแบบการแทนได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ ในแต่ละรูปแบบอาจมีค่าน้ำหนักที่แตกต่างกันได้ โดยค่าน้ำหนักของรูปแบบหมายถึงจำนวนของดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์ (nonzero digit) ในการคำนวณบางประเภท เช่นการคูณ ค่าน้ำหนักของจำนวนนำเข้าอาจมีผลต่อความเร็วในการคำนวณด้วย ถ้าค่าน้ำหนักน้อย การคำนวณสามารถทำได้เร็ว ดังนั้น ปัญหาการหารูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักต่ำสุดจึงเป็นปัญหาที่น่าสนใจปัญหาหนึ่ง [3] ค่าน้ำหนักสามารถนิยามได้ดังต่อไปนี้

นิยามที่ 2.3 กำหนดให้ $C(Y)$ เป็นการแทนค่าน้ำหนักของ Y ในระบบจำนวนฐาน β และชุดตัวเลขแบบจำกัด D ดังนั้น C: $D^n \rightarrow Z$ และ $C(Y) = \sum_{i=0}^{n-1} \delta(y_i)$ โดยที่ $\delta(y_i) = 1$ ถ้า $y_i \neq 0$ และ มิฉะนั้น $\delta(y_i) = 0$ ได้นิยามดังต่อไปนี้

1. ค่าน้ำหนักน้อยที่สุดของจำนวนเต็ม $||Y||$ ขนาดไม่เกิน n คือ
   $M(||Y||) = \min\{C(Y_i) \mid Y_i \in y^n \wedge ||Y_i|| = ||Y||\}$
2. เรียก Y ว่าเป็นรูปแบบการแทนค่าน้อยที่สุด (minimal representation) ถ้า $C(Y) = M(||Y||)$
3. เรียกการแปลงชุดตัวเลข $F : x^m \rightarrow y^n$ โดยที่ $m \leq n$ และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก ว่าเป็นการแปลงชุดตัวเลขที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด ถ้า $\forall Y = F(X)$ และ Y แทนค่าน้ำหนักที่น้อยที่สุดของ $||X||$

สำหรับการคำนวณที่ซับซ้อน เช่น การคูณและการยกกำลังสอง ถ้าได้จำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดมาใช้ในการคำนวณ ภาระงานในการคำนวณจะลดลงเป็นอย่างมาก ดังนั้นการหาสูตรการแปลงจำนวนให้อยู่ในรูปที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดจึงเป็นสิ่งสำคัญสำหรับการคำนวณเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 2.3 *ในระบบเลขฐานสอง และชุดตัวเลข* $\{\bar{1},\ 0,\ 1\}$ *รูปแบบการแทนจำนวนของจำนวน* $01111101000101 = 8005_{10}$ *สามารถแสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้*

แบบที่ 1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	มีค่าน้ำหนักเป็น 8
แบบที่ 2	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	$\bar{1}$	$\bar{1}$	มีค่าน้ำหนักเป็น 9
แบบที่ 3	0	1	0	0	0	0	$\bar{1}$	0	1	0	0	0	1	0	1	มีค่าน้ำหนักเป็น 5
แบบที่ 4	0	0	1	1	1	1	1	1	$\bar{1}$	0	0	1	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	มีค่าน้ำหนักเป็น11

จะเห็นได้ว่าค่าเชิงตัวเลขของทั้งสี่แบบมีค่าเท่ากัน และชุดตัวเลขแบบที่ 3 มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดซึ่งมีค่าน้ำหนักเป็น 5 เมื่อเทียบกับรูปแบบอื่น □

ตัวอย่างที่ 2.4 *ในระบบเลขฐานสี่ และชุดตัวเลข* $\{\bar{3},\ \bar{2},\ \bar{1},\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ *รูปแบบการแทนจำนวนของจำนวน* $2\bar{1}3\bar{2}31 = 1965_{10}$ *สามารถแสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้*

แบบที่ 1	2	$\bar{1}$	3	$\bar{2}$	3	1	มีค่าน้ำหนักเป็น 6
แบบที่ 2	2	$\bar{1}$	3	$\bar{1}$	0	$\bar{3}$	มีค่าน้ำหนักเป็น 5
แบบที่ 3	2	0	$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	$\bar{3}$	มีค่าน้ำหนักเป็น 4
แบบที่ 4	2	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	3	1	มีค่าน้ำหนักเป็น 5

จะเห็นได้ว่าค่าเชิงตัวเลขของทั้งสี่แบบมีค่าเท่ากัน และชุดตัวเลขแบบที่ 3 มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดซึ่งมีค่าน้ำหนักเป็น 4 เมื่อเทียบกับรูปแบบอื่น □

2.5 สถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กัน (On-the-fly architecture)

งานวิจัยที่เกี่ยวกับการแปลงชุดตัวเลขนั้นได้ถูกพัฒนาขึ้นโดยนักวิจัยมากมายซึ่งมีวิธีการแปลงที่แตกต่างกันออกไป เช่น การแปลงแบบเชื่อมตรง (on-line conversion) โดยอาศัยอัลกอริทึมแบบเชื่อมตรง [4] มาประยุกต์ใช้ในการคำนวณ และ การแปลงแบบขนาน (parallel conversion) โดยอาศัยเทคนิคแบบทำควบคู่กัน [2, 7] มาช่วยในการแปลง ซึ่งวิธีการหลังนี้เองที่เป็นที่สนใจของงานวิจัยนี้

สถาปัตยกรรมการแปลงแบบทำควบคู่กันเป็นกระบวนการการผลิตดิจิตแบบขนานซึ่งส่งผลให้เวลาที่ใช้เป็นเวลาลอการิทึม $O(\log n)$ ในงานวิจัย [2] ของคอร์เนอรับ สถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กันถูกเสนอขึ้นเพื่อแปลงชุดตัวเลขซ้ำซ้อนให้เป็นชุดตัวเลขไม่ซ้ำซ้อน แนวคิดในเรื่องฟังก์ชันประกอบ (composite function) มีความสำคัญอย่างยิ่งในการจะเข้าใจสถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กัน จะเห็นได้ว่าการแปลงชุดตัวเลขแบบทำควบคู่กันจำเป็นต้องอาศัยระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมายบนเลขฐานเดียวกันเพื่อลดการเกิดสายการแพร่ของตัวทด (carry propagation chain) ระบบจำนวนซ้ำซ้อนที่ใช้นิยมใช้ระหว่างระบบจำนวนซ้ำซ้อนน้อยที่สุดจนถึงระบบจำนวนซ้ำซ้อนมากที่สุดเนื่องจากถ้าใช้มากกว่านี้อาจเกิดปัญหาที่เรียกว่า เลขศูนย์ซ้ำซ้อน (zero redundant) และ อีกปัญหาหนึ่งที่อาจเกิดขึ้นได้คือ เราไม่สามารถระบุได้เลยว่าจำนวนนี้เป็นค่าบวกหรือค่าลบจากดิจิตที่มีนัยสำคัญสูงสุด ข้อดีของการคำนวณแบบทำควบคู่กันคือเป็นการคำนวณแบบขนาน ดังนั้นจึงทำให้การคำนวณมีความเร็วสูงเพราะสำหรับทุกๆ ดิจิตของจำนวนนำเข้าสามารถคำนวณได้พร้อมๆ กัน ข้อดีอีกประการหนึ่งคือจำนวนดิจิตของจำนวนนำออกที่ได้สามารถมีขนาดยาวกว่าจำนวนดิจิตของจำนวนนำเข้า ซึ่งส่งผลให้การทำให้เป็นบรรทัดฐานของจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดสามารถทำได้อย่างมีประสิทธิภาพ ส่วนข้อเสียของการคำนวณแบบทำควบคู่กันคือ ในการแปลงจำเป็นต้องอาศัยทรัพยากรเช่น เรจิสเตอร์ เป็นจำนวนมากขึ้นอยู่กับขนาดของจำนวนนำเข้า ดังนั้นจึงอาจเป็นการสิ้นเปลืองค่าใช้จ่ายมากเกินไปในบางกรณี เนื่องจากการทำควบคู่กัน จำนวนดิจิตของจำนวนนำเข้าต้องมีขนาดจำกัด เพื่อที่จะสามารถจำกัดจำนวนของเรจิสเตอร์ได้ และข้อเสียอีกประการหนึ่งคือ ก่อนที่จะสามารถทำการแปลงชุดตัวเลขแบบทำควบคู่กันได้ จำเป็นต้องทราบจำนวนนำเข้าทั้งหมดก่อน ดังนั้นเมื่อนำมาใช้กับการคำนวณแบบเชื่อมตรงแล้ว เวลาที่ใช้ในการคำนวณจึงอาจไม่มีประสิทธิภาพเพียงพอ

งานวิจัย [7] ของเออเสกโกแวคและแลง นับเป็นงานวิจัยแรกที่ได้นำวิธีการแปลงชุดตัวเลขแบบทำควบคู่กันมาใช้ โดยแปลงจำนวนจากจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมายไปเป็นรูปแบบสัญนิยม (conventional representation) วิธีการแปลงชุดตัวเลขแบบทำควบคู่กันได้อธิบายอย่างละเอียดในงายวิจัย [2] คอเนอรับได้นำเทคนิคการแปลงชุดตัวเลขแบบทำควบคู่กันมาใช้ในการแปลงจากชุดตัวเลขซ้ำซ้อนไปเป็นชุดตัวเลขไม่ซ้ำซ้อนบนระบบเลขฐานเดียวกัน เนื่องจากดิจิตที่มีนัยสำคัญสูงสุดของผลลัพธ์ขึ้นอยู่กับดิจิตที่มีนัยสำคัญต่ำสุดของจำนวนนำเข้า ดังนั้นเวลาที่ใช้ในการส่งผ่านค่าของตัวทดจากดิจิตทางขวาสุดไปหาดิจิตทางซ้ายสุดคือ $\log(n)$ เมื่อ n หมายถึงจำนวนดิจิตของจำนวนนำเข้า จากที่ทราบกันดีว่า การหารจำเป็นต้องทำจากซ้ายไปขวา ดังนั้นจึงเป็นประโยชน์อย่างยิ่งถ้าเราสามารถหาผลลัพธ์ได้แบบพร้อมๆ กัน การหารก็จะสามารถทำได้ การ

แปลงจำนวนให้อยู่ในรูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดโดยทั่วไปมักแปลงจากดิจิตที่มีนัยสำคัญต่ำสุดไปสู่ดิจิตที่มีนัยสำคัญสูงสุด นั่นคือจากขวาไปซ้าย ซึ่งไม่เกิดประโยชน์เท่าที่ควรในเชิงปฏิบัติ ดังนั้นเมื่อนำวิธีการแปลงแบบทำควบคู่กันมาใช้ จึงอาจได้ผลลัพธ์ที่มีประสิทธิภาพมากกว่าเมื่อต้องการหารูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

การคำนวณแบบทำควบคู่กันยังได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับวิธีการอื่นๆ อีกเช่น ในงานวิจัย [8] ของพาฮามิ งานวิจัยนี้ได้กล่าวถึงวิธีการแบบทำควบคู่กันว่าสามารถนำมาใช้ร่วมกับการคำนวณแบบเชื่อมตรงได้ โดยเมื่อได้ผลลัพธ์จากการคำนวณแบบเชื่อมตรงแล้ว เราสามารถนำผลลัพธ์ที่ได้นี้ไปแปลงแบบทำควบคู่กันเพื่อในได้ผลลัพธ์ในชุดตัวเลขที่ต้องการ เนื่องจากผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณแบบเชื่อมตรงมักอยู่ในรูปของจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมาย เราจึงต้องแปลงจำนวนให้อยู่ในรูปของจำนวนไม่ซ้ำซ้อนเสียก่อน เพื่อที่จะได้นำไปทำให้เกิดผลต่อไป ซึ่งในงานวิจัยนี้ใช้ชุดตัวเลข $\{\bar{1},\ 0,\ 1\}$ บนเลขฐานสอง อีกงานวิจัยหนึ่ง [9] เออเสกโกแวคได้เสนอแผนการบวกของผลคูณโดยคูณจากดิจิตที่มีนัยสำคัญสูงสุดไปสู่ดิจิตที่มีนัยสำคัญต่ำสุด ในงานวิจัยนี้ใช้ระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมายบนเลขฐานสี่เท่านั้น โดยมีชุดตัวเลข $\{\bar{2},\ \bar{1},\ 0,\ 1,\ 2\}$ เทคนิคการแปลงชุดตัวเลขแบบทำควบคู่กันได้ถูกนำมาใช้ในการแปลงแบบขนานในครึ่งแรกทางซ้ายของผลลัพธ์ โดยที่ผลลัพธ์อยู่ในรูปของส่วนเติมเต็มของสอง (two's complement) ส่วนครึ่งทางขวาของผลลัพธ์ได้จากวิธีการลดจำนวน (reduction) และอีกงานวิจัยหนึ่ง [10] เออเสกโกแวคได้เสนอวิธีการคำนวณหาค่าเลขยกกำลังโดยทำจากดิจิตที่มีนัยสำคัญสูงสุดไปสู่ดิจิตที่มีนัยสำคัญต่ำสุด ในงานวิจัยนี้ใช้ระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมายบนเลขฐานสี่เช่นกัน จำนวนนำเข้าและจำนวนนำออกอยู่ในรูปของส่วนเติมเต็มของสองแบบจำกัด ขั้นตอนในการคำนวณในครึ่งซ้ายได้นำวิธีการทำควบคู่กันมาใช้ ข้อเสียของงานวิจัยนี้คือ เวลาที่ใช้เป็น n^2

ในการแปลงชุดตัวเลข $D \rightarrow E$ โดยที่ $X \in \mathrm{P}[\beta, D]$ และ $Y \in \mathrm{P}[\beta, E]$ โดย $\|X\| = \|Y\|$ และ $D \neq E$ จะมีนัยสำคัญดังนี้

กำหนดให้ชุดตัวเลข E เป็นชุดตัวเลขไม่ซ้ำซ้อน กำหนดเซต C ให้เป็นเซตของตัวทด c เราสามารถเขียนตัวเลข d ใดๆที่อยู่ในชุดตัวเลข D ซึ่งเป็นชุดตัวเลขซ้ำซ้อนให้อยู่ในรูปสมการของการแปลงจาก $\mathrm{P}[\beta, D]$ ไป $\mathrm{P}[\beta, E]$ ได้เท่ากับ $d = c\beta + e$ โดยที่ $e \in E$ และ $c \in C$ แต่ในปกติก่อนการแปลงจะต้องทำการรวมตัวทดที่ได้มา (incoming carry) เข้ากับ d ก่อน แล้วจึงคิดรวมกับตัวทดที่ส่งออกไป (outgoing carry) ในภายหลัง เพราะฉะนั้นจะได้ ความสัมพันธ์การแปลงระหว่างชุดตัวเลข λ (conversion mapping λ) เป็นฟังก์ชันการแปลงดังต่อไปนี้

$$\lambda : C \times D \rightarrow C \times E$$

เมื่อ C เป็นชุดตัวเลขตัวทด สำหรับบาง (c, d) ใน $C \times D$ มี c' อยู่ใน C และ e อยู่ใน E ที่ซึ่ง

$$\lambda : (c', d) \to (c, e)$$

ซึ่งเราสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$c' + d = c\beta + e$$

เมื่อ β เป็นฐาน จากฟังก์ชันด้านบนสามารถเรียกได้ว่า c' และ c เป็นตัวทดนำเข้าและตัวทดนำออกตามลำดับในแต่ละดิจิตนำเข้า d กำหนดให้ $D = \{0, 1, 2\}$, $E = \{0, 1\}$ และ $\beta = 2$ ฟังก์ชันการแปลงสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงฟังก์ชันการแปลงจาก D ไป E บนเลขฐาน 2

λ		D		
		0	1	2
C	0	00	01	10
	1	01	10	11

ผลลัพธ์ในแต่ละคู่ในตารางที่ 2.1 แทนค่า ce ซึ่ง (c, e) อยู่ใน $C \times E$ โดยการคำนวณในตารางเริ่มจากที่ค่า $c = 0$ จะเห็นว่า ce ที่เป็นไปได้คือ 00, 01 และ 10 เมื่อ $d = 0$, 1 และ 2 ตามลำดับ ดังนั้นตัวทดนำออกเป็นได้ทั้ง 0 และ 1 เราจึงต้องเพิ่มแถวที่ค่า $c = 1$ และผลลัพท์ที่ได้คือ 01, 10 และ 11 ในขณะนี้จากค่า ce ทั้งหมดที่ได้จะเห็นว่าตัวทดที่เกิดขึ้นคือ 0 และ 1 เท่านั้น ดังนั้นตารางนี้จึงสมบูรณ์แล้ว

จากแนวคิดสมการฟังก์ชันการแปลงชุดตัวเลข สามารถเขียนเซตของฟังก์ชันตัวทด C ได้ $\{\sigma_d\}$, $\sigma_d : C \to C$ โดยที่ $d \in D$ เรียกว่า ฟังก์ชันการส่งผ่านตัวทด (carry-transfer function) ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\forall c \in C : \sigma_d(c') = c \text{ โดย } \lambda(c', d) = (c, e)$$

โดยที่ σ_d เป็นฟังก์ชันที่อธิบายเกี่ยวกับการจับคู่ (mapping) ค่าของตัวทดที่เข้ามา (c') ไปยังค่าของตัวทดที่ส่งออกไป (c) โดยผ่านดิจิต d หนึ่งๆ เท่านั้น ซึ่งเราสามารถเขียนฟังก์ชันการจับคู่นี้ผ่าน d ทุกตัวที่อยู่ใน D ได้ดังนี้

$$\sigma_{d_i d_{i-1} \ldots d_j}(c) = \sigma_{d_i}(\sigma_{d_{i-1}}(\cdots \sigma_{d_j}(c) \cdots))$$

เราเรียกฟังก์ชันนี้ว่าเป็นฟังก์ชันประกอบ และจากฟังก์ชันนี้เองทำให้เราสามารถหาค่า c ใดๆได้ โดยกำหนดให้ c_0 เริ่มต้นมีค่าเท่ากับ 0

$$c_i = \sigma_{d_i d_{i-1} \ldots d_j}(0)$$

เมื่อเราสามารถหาฟังก์ชันที่ทำการสร้างตัวทดได้แล้ว ก็สามารถหาฟังก์ชันในการหา e ในลำดับต่อไปสามารถทำได้ด้วย ฟังก์ชันจับคู่ตัวเลข (digit mapping function) $\{\varepsilon_d\}$, $\varepsilon_d : C \to E$ โดยที่ $d \in D$ ซึ่งเราสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$e_i = \varepsilon_{d_i}(\sigma_{d_i d_{i-1} \ldots d_j}(0))$$

ตัวอย่างที่ 2.5 *กำหนดให้ $X = x_7x_6x_5\ldots x_0$ เป็นสายบิตนำเข้าโดยที่ $x_i \in D$ เมื่อ i เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดให้ $X = 10210112$ ฟังก์ชันการแปลงจะทำการผลิตคู่ผลลัพธ์ได้แก่ ตัวทดนำออกและดิจิตที่เป็นผลลัพธ์ที่ต้องการดังสมการต่อไปนี้*

$$c' + d = c\beta + e$$

สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$c_i + x_i = c_{i+1}\beta + y_i$$

โดยที่มีตัวทดนำเข้าเริ่มต้น (c_0) เป็นศูนย์ และ $y_i \in E$ ผลลัพธ์ที่ได้คือ $Y = 11011000$ เมื่อ $\|X\| = \|Y\|$ ทำการแปลง $D = \{0, 1, 2\}$ ไปเป็น $E = \{0, 1\}$ โดย $\beta = 2$ และ $C = \{0, 1\}$ จะได้ c และ e ดังนี้

ค่า c จากสมการฟังก์ชันประกอบ

$$\begin{aligned}
&c_0 = 0\\
&c_1 = \sigma_1\,(c_0) = \sigma_1(0) = 1\\
&c_2 = \sigma_2\sigma_1\,(0) = \sigma_2(1) = 1\\
&c_3 = \sigma_3\ \sigma_2\ \sigma_1\,(0) = \sigma_3(1) = 1\\
&c_4 = \sigma_4\ \sigma_3\ \sigma_2\ \sigma_1\,(0) = \sigma_4(1) = 0\\
&c_5 = \sigma_5\ \sigma_4\ \sigma_3\ \sigma_2\ \sigma_1\,(0) = \sigma_5(0) = 0\\
&c_6 = \sigma_6\ \sigma_5\ \sigma_4\ \sigma_3\ \sigma_2\ \sigma_1\,(0) = \sigma_6(0) = 1\\
&c_7 = \sigma_7\ \sigma_6\ \sigma_5\ \sigma_4\ \sigma_3\ \sigma_2\ \sigma_1\,(0) = \sigma_7(1) = 0
\end{aligned}$$

$$\therefore\ c = (0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0)$$

ค่า e จากสมการฟังก์ชันจับคู่ตัวเลข

$$
\begin{aligned}
e_0 &= \varepsilon_0(c_0) = \varepsilon_0(0) = 0 = y_0 \\
e_1 &= \varepsilon_1(c_1) = \varepsilon_1(1) = 0 = y_1 \\
e_2 &= \varepsilon_2(c_2) = \varepsilon_2(1) = 0 = y_2 \\
e_3 &= \varepsilon_3(c_3) = \varepsilon_3(1) = 1 = y_3 \\
e_4 &= \varepsilon_4(c_4) = \varepsilon_4(0) = 1 = y_4 \\
e_5 &= \varepsilon_5(c_5) = \varepsilon_5(0) = 0 = y_5 \\
e_6 &= \varepsilon_6(c_6) = \varepsilon_6(1) = 1 = y_6 \\
e_7 &= \varepsilon_7(c_7) = \varepsilon_7(0) = 1 = y_7
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ Y = 11011000$$

เพราะฉะนั้น $X = 10210112,\ x_i \in D$ จะถูกแปลงเป็น $Y = 11011000,\ y_i \in E$

กระบวนการการแปลงเป็นแบบขนานโดยอาศัยสถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กันนี้สามารถแสดงให้เห็นในรูปของตารางดังตารางที่ 2.2 สำหรับการคำนวณในรอบแรก (r_1) นำสองกรณีที่เป็นไปได้ของตัวทดนำเข้า (คือ 0 กับ 1) มาคำนวณกับค่า x_i ทั้ง 8 ดิจิต ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ 16 คู่ จับคู่ทั้ง 8 คอลัมน์มาคำนวณหาผลลัพธ์ในรอบที่สอง (r_2) โดยอาศัยแนวคิดของฟังก์ชันประกอบ จับคู่ผลลัพท์ในรอบที่สอง (r_2) กับรอบที่หนึ่ง (r_1) เพื่อคำนวณหาผลลัพท์ในรอบที่สาม (r_3) ดังแสดงในตารางที่ 2.2 ทำซ้ำกระบวนการเดิมจนจบ (r_4)

ตารางที่ 2.2 แสดงตัวอย่างการแปลงแบบทำควบคู่กัน

	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0	c
X	1	0	2	1	0	1	1	2	
r_1	01	00	10	01	00	01	01	10	0
	10	01	11	10	01	10	10	11	1
r_2	01		10		00		10		0
	01		11		01		10		1
r_3	01	01			01	10			0
	01	01			01	10			1
r_4	01	01	10	01					0
	01	01	10	01					1
Y	1	1	0	1	1	0	0	0	

จากตารางที่ 2.2 จะเห็นว่าผลลัพธ์ในแต่ละบล็อกคือ ce ผลลัพธ์ท้ายที่สุด (Y) ได้จากการพิจารณากรณีที่ตัวทดนำเข้า $c' = 0$ ของผลลัพธ์ทางด้านขวาสุดในแต่ละรอบ ซึ่งก็คือ $Y = 11011000$ □

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ชัดว่าเวลาในการคำนวณโดยอาศัยสถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กันส่งผลให้เวลาในการทำงานเป็นเวลาลอการิทึม $O(\log n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนดิจิตของสายบิตนำเข้า

2.6 **รูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด** (Minimum weight representation)

ในระบบจำนวนซ้ำซ้อน รูปแบบที่เราสนใจคือรูปแบบในการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด เพราะเป็นรูปแบบที่ใช้ในการคำนวณทางด้านเลขคณิตได้อย่างมีประสิทธิภาพ เช่น ในเรื่องของการคูณ หรือเลขยกกำลัง เป็นต้น ซึ่งความเร็วของการคำนวณจะขึ้นอยู่กับจำนวนของดิจิตที่ไม่ใช่ศูนย์ และนั่นหมายความว่าจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดคือจำนวนที่มีดิจิตที่ไม่ใช่ศูนย์น้อยที่สุด ดังนั้นจึงน่าสนใจอย่างยิ่งที่เราจะหาวิธีการคำนวณรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด ในงานวิจัย [11] ได้พิสูจน์แล้วว่าค่าน้ำหนักน้อยที่สุดโดยเฉลี่ยของจำนวนเลขฐานสองที่มีความยาว n บิต มีค่าเท่า $n/3$ ของจำนวนดิจิตที่ไม่ใช่ศูนย์

ในงานวิจัย [12] ผู้เขียนได้เสนอทฤษฎีในการคำนวณหาค่าน้ำหนักน้อยที่สุดโดยประมาณโดยอาศัยเทคนิคลูกโซ่สัมพันธ์ของมาร์คอฟ (Markov chain) ในการคำนวณหาสูตรที่สามารถใช้คำนวณหาค่าน้ำหนักน้อยที่สุดของจำนวนใดๆ บนระบบจำนวนซ้ำซ้อนได้ โดยที่ชุดตัวเลขที่ใช้ต้องเป็นชุดตัวเลขคาโนนิคอลแบบมีเครื่องหมาย $\{d \in Z \mid -\beta+1, \ldots, 0, \ldots, \beta-1\}$ ซึ่งก็คือชุดตัวเลขซ้ำซ้อนมากที่สุดแบบสมมาตร เมื่อ β เป็นเลขฐาน โดยสมการการคำนวณหาค่าน้ำหนักโดยประมาณสำหรับสายบิต Y, $M(\|Y\|)$ คือ

$$M(\|Y\|) \approx n(\beta-1)/(\beta+1),$$

เมื่อ $n \to \infty$

และ n คือจำนวนของบิตในสายบิต

สำหรับระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมายบนเลขฐานสอง รูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดได้ถูกเสนอไว้เป็นทฤษฎี [13] คือการหารูปแบบการแทนจำนวนที่ไม่มีดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ติดกัน ชุดตัวเลขที่ใช้มีสมาชิกดังนี้ $\{\bar{1}, 0, 1\}$ อัลกอริทึมในการคำนวณหารูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดนี้ เป็นการทำงานแบบลำดับ (sequential) จากดิจิตที่มีนัยสำคัญต่ำสุดไปยังดิจิตที่มีนัยสำคัญสูงสุด ดังนั้นเวลาในการทำงานจึงอยู่ในรูปของ $O(n)$ เมื่อ n เป็นขนาดของรูปแบบการแทนจำนวน

ในงานวิจัย [14, 15] ได้เสนอรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดบนฐานที่มากกว่าสองบนระบบจำนวนซ้ำซ้อน เราทราบกันแล้วว่าจำนวนหนึ่งๆ สามารถเขียนแทนได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบขึ้นไป จำนวนของรูปแบบนี้จะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับจำนวนดิจิตที่ใช้ในการแทนจำนวนนั้นๆ จากนิยามที่ 2.2 จะเห็นว่า ชุดตัวเลขที่ใช้ในระบบจำนวนซ้ำซ้อนเป็นได้ทั้ง ชุดตัวเลขซ้ำซ้อนน้อยที่สุด ชุดตัวเลขซ้ำซ้อนมากที่สุด และชุดตัวเลขซ้ำซ้อนแบบสมมาตร ดังนั้นเราจึงจำเป็นต้องกำหนดชุดตัวเลขที่เหมาะสมสำหรับงานวิจัยนี้ ในทางทฤษฎีเกี่ยวกับรหัสเลขคณิต (theory of arithmetic codes) [14] สนใจรูปแบบการแทนจำนวนของชุดตัวเลขซ้ำซ้อนมากที่สุดและมีคุณสมบัติสมมาตร ซึ่งมีสมาชิกเป็น $-\beta < d < \beta$ โดยที่ d เป็นสมาชิกในชุดตัวเลข และ β เป็นฐาน ทฤษฎีเกี่ยวกับรหัสเลขคณิตนี้มีรากฐานมาจากแนวคิดเรื่องค่าน้ำหนักเลขคณิต (arithmetic weight) โดยนิยามไว้ว่าค่าน้ำหนักของจำนวนหนึ่งๆคือ จำนวนของดิจิตที่ไม่ใช่ศูนย์ของจำนวนนั้น จากที่ได้กล่าวมาแล้วในระบบเลขฐานสองว่า จำนวนหนึ่งๆจะมีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดก็ต่อเมื่อรูปแบบการแทนจำนวนไม่มีดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ติดกัน รูปแบบนี้เรียกว่า nonadjacent form (NAF) และได้พิสูจน์แล้วใน [14] จากระบบเลขฐานสองจะเห็นว่ารูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดสามารถเขียนได้หลายรูปแบบ แต่รูปแบบที่เรียกว่านาฟ (NAF) มีเพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น ในระบบเลขฐานที่มากกว่าสองก็มีรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดหลายรูปแบบเช่นกัน แต่จะมีรูปแบบเดียวเท่านั้นที่เรียกว่าจีนาฟ (generalized nonadjacent form : GNAF) ในงานวิจัยของเราจะอ้างอิงรูปแบบจีนาฟ (GNAF) เป็นหลักในการหารูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด โดยอาศัยชุดตัวเลขซ้ำซ้อนมากที่สุดแบบสมมาตร

นิยามที่ 2.4 กำหนดให้ $N = \Sigma\ b_i\beta^{\,i}$ เป็นจำนวนเต็มใดๆ โดยที่ N เป็นจีนาฟ ก็ต่อเมื่อสัมประสิทธิ์ (coefficient) b_i ยอมรับโดยกฎดังต่อไปนี้

1. กฎผลบวกจำกัด (limited sum rule) กล่าวคือ $|b_{i+1} + b_i| < \beta$ สำหรับทุกๆ i
2. กฎการลดลงของดิจิต (digit decreasing rule) กล่าวคือ $|b_i| < |b_{i+1}|$ เมื่อ $b_{i+1}b_i < 0$

โดยที่ $|b|$ คือค่าสัมบูรณ์ของ b

จากกฎสองข้อด้านบนจะเห็นว่า กฎผลบวกจำกัดจะถูกนำไปใช้ก็ต่อเมื่อ b_i และ b_{i+1} มีเครื่องหมายเหมือนกัน และกฎการลดลงของดิจิตจะถูกนำไปใช้ก็ต่อเมื่อ b_i และ b_{i+1} มีเครื่องหมายต่างกัน ในการตรวจสอบว่าคำตอบถูกต้องหรือไม่ เราสามารถตรวจสอบได้โดยนำดิจิตคู่ที่ติดกันไปทดสอบกับทั้งสองกฎด้านบน

ตัวอย่างที่ 2.6 *กำหนดให้* $X = x_7x_6x_5\ldots x_0$ *เป็นสายบิตนำเข้าโดยที่* $x_i \in D$, $\beta = 3$ *และ* $D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$ *กำหนดให้* $X_1 = \bar{1}\ \bar{1}\ 0\ \bar{2}\ 1\ 1\ 1$ *และ* $X_2 = 1\ 1\ 1\ \bar{2}\ 0\ \bar{1}\ \bar{1}$ *จากกฎผลบวกจำกัดและกฎการลดลงของดิจิต เราสามารถสร้างเป็นตารางเปรียบเทียบ* x_i *กับ* x_{i+1} *ได้ดังนี้*

ตารางที่ 2.3 แสดงการเปรียบเทียบ x_i กับ x_{i+1} บนเลขฐาน 3

x_i	x_{i+1}
-2	0
-1	0, -1, 2
0	0, ±1, ±2
1	0, 1, -2
2	0

จากตารางที่ 2.3 ให้ตรวจสอบดิจิตที่ละคู่ จะเห็นว่า X_1 เป็นจีนาฟ แต่ X_2 ไม่เป็นจีนาฟ เนื่องจากคู่ $1\bar{2}$ ไม่ผ่านการยอมรับจากตารางเพราะ $x_i = \bar{2}$ และ $x_{i+1} = 1$ ไม่มีในตาราง □

ในงานวิจัยนี้เป็นการออกแบบอัลกอริทึมในระดับแนวคิดเท่านั้น ซึ่งเมื่อนำไปสู่การทำให้เกิดผล ย่อมต้องมีการออกแบบเพิ่มเติมเพื่อให้การทำให้เป็นบรรทัดฐานมีความเหมาะสมและมีประสิทธิภาพในเชิงปฏิบัติ การนับค่าน้ำหนักจะนับดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์ซึ่งมีค่าเป็นหนึ่งหน่วย แต่ในการทำให้เกิดผล จำเป็นต้องลงลึกถึงการนับที่ดิจิตที่เป็นศูนย์กับหนึ่งเท่านั้น ดังนั้น ผลรวมของค่าน้ำหนักของจำนวนหนึ่งๆ จึงไม่รับประกันว่าจะอยู่ในรูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

ในทางทฤษฎีซึ่งกล่าวไว้ในงานวิจัย [3] โดยฟิลิบและเบิรก์ ค่าน้ำหนักของจำนวนๆ หนึ่ง คือ จำนวนของดิจิตที่ไม่ใช่ศูนย์ ซึ่งมีชื่อเรียกอยู่หลายชื่อด้วยกันเช่น ค่าน้ำหนักแฮมมิ่ง (Hamming weight) ค่าน้ำหนักเลขคณิต (arithmetic weight) หรือ ค่าน้ำหนัก (weight) แต่ค่าน้ำหนักแฮมมิ่งนิยมใช้สำหรับดิจิตที่ไม่ใช่ศูนย์ในระบบเลขฐานสอง ส่วนในระบบเลขฐานทั่วไปนิยมใช้คำว่า ค่าน้ำหนัก อย่างเดียว

บทที่ 3

การทำให้เป็นบรรทัดฐานบนเลขฐานสอง

ในบทนี้จะกล่าวถึงอัลกอริทึมในการทำให้เป็นบรรทัดฐานบนเลขฐานสอง โดยอาศัยแนวความคิดการแปลงชุดตัวเลขแบบทำควบคู่กัน (on-the-fly digit set conversion) [2, 7] ซึ่งเป็นสถาปัตยกรรมการทำงานแบบขนาน คุณสมบัติของการแปลงแบบขนานนี้คือสามารถทำงานด้วยความเร็วสูงทำให้สามารถลดเวลาที่ใช้จากเดิมที่เป็นเวลาเชิงเส้นตรง $O(n)$ ไปเป็นเวลาลอการิทึม $O(\log n)$ ซึ่ง n คือจำนวนของดิจิตนำเข้า โดยที่วิธีการแปลงที่ได้นำเสนอในบทนี้จะสามารถผลิตผลลัพท์ให้อยู่ในรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด ซึ่งผลลัพท์จะอยู่ในรูปแบบที่ไม่มีดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ติดกัน อัลกอริทึมการทำให้เป็นบรรทัดฐานบนเลขฐานที่มากกว่าสองจะกล่าวต่อไปในบทที่ 4

3.1 อัลกอริทึมการทำให้เป็นบรรทัดฐานบนเลขฐานสอง (Binary number normalization algorithm)

ปัญหาการทำให้เป็นบรรทัดฐานจัดเป็นปัญหาการแปลงชุดตัวเลขแบบหนึ่งที่เป็นการแปลงจำนวนในระบบเดียวกัน โดยปัญหาในงานวิจัยนี้สามารถกำหนดเป็นตัวแบบ (model) ได้ดังต่อไปนี้

กำหนดให้มีระบบจำนวนซ้ำซ้อนฐานสอง (β, D) โดยที่ $\beta = 2$ เป็นฐาน และ D เป็นชุดตัวเลข ที่ซึ่ง $D = \{\bar{1}, 0, 1\}$ กำหนดให้ $X = x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}...x_0$ โดยที่ $x_i \in D$ เป็นรูปแบบการแทนจำนวนในระบบ (β, D) กระบวนการการทำให้เป็นบรรทัดฐานคือต้องการหา $Y = y_n y_{n-1} y_{n-2}...y_0$ โดยที่ $y_i \in D$ เป็นรูปแบบการแทนจำนวนในระบบ (β, D) และค่าเชิงตัวเลขของ X และ Y ต้องเท่ากัน และ Y เป็นรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด ดังที่ได้ระบุใน [13] ว่า รูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดคือรูปแบบที่ไม่มีดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ติดกัน ฟังก์ชันการทำให้เป็นบรรทัดฐานสามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้

สร้างฟังก์ชันการทำให้เป็นบรรทัดฐาน γ

$$\gamma: \quad D^N \rightarrow D^N$$
$$\gamma: \quad X \rightarrow Y$$

กำหนดให้ σ เป็นฟังก์ชันการแพร่ตัวทด (carry propagation function) ที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด และ α เป็นฟังก์ชันการแปลงดิจิต (digit mapping function) ที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\sigma: \quad D \times C \rightarrow C$$
$$\sigma(x_i, c_{i-1}) = c_i$$

และ $\alpha: \quad D \times C \rightarrow D$

$$\alpha(x_i, c_{i-1}) = y_{i-1}$$

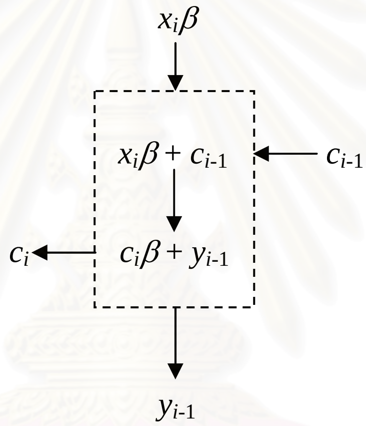
โดยที่ c_i และ c_{i-1} เป็นสมาชิกในชุดตัวเลข C จะได้ว่า

$$x_i\beta + c_{i-1} = c_i\beta + y_{i-1}$$

สำหรับ $1 \le i \le n$, $c_0 = x_0$ และ $x_n = 0$

เนื่องจาก $c_{i-1} = \sigma(\, x_{i-1}, \sigma(\, x_{i-2}, \sigma(\ldots, \sigma(x_1, c_0)\ldots)))$

ดังนั้น $y_{i-1} = \alpha(\, x_i, \sigma(\, x_{i-1}, \sigma(\, x_{i-2}, \sigma(\ldots, \sigma(x_1, c_0)\ldots))))$



รูปที่ 3.1 ตัวแบบการทำให้เป็นบรรทัดฐาน

การทำงานของอัลกอริทึมสามารถอธิบายได้ในรูปที่ 3.1 เนื่องจาก $c_0 = x_0$ ดังนั้น ตัวทดตัวแรก c_0 ที่เป็นไปได้คือ 1, 0 และ -1 เพราะ $x_0 \in D$ ฟังก์ชันการแปลงที่ได้จากการรวม α และ σ เข้าด้วยกันสามารถแสดงได้ในตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 แสดงตารางฟังก์ชันการแปลงบนเลขฐาน 2

$\sigma\alpha$		x_i		
		$\bar{1}$	0	1
c_{i-1}	-1	$\bar{1}\bar{1}$	$0\bar{1}$	01
	0	$\bar{1}0$	00	10
	1	$0\bar{1}$	01	11

ในการจะได้ผลลัพธ์ที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดจำเป็นต้องแปลงตัวเลข 2 ดิจิตคือ c_iy_{i-1} ไปเป็น 3 ดิจิต เพราะในตารางที่ 3.1 จะเห็นได้ว่ามีดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ติดกัน คือ $\bar{1}\bar{1}$ และ 11 ตารางที่ 3.2 แสดงรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดเมื่อแปลงเป็น 3 ดิจิต ซึ่งอยู่ในเซต {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4} จากตารางจะเห็นได้ว่าชุดตัวเลขตัวทดที่เป็นไปได้คือ {-2, -1, 0, 1, 2} เนื่องจาก 2 ดิจิตทางด้านซ้ายกำหนดให้เป็น c_i และดิจิตขวาสุดกำหนดให้เป็น y_{i-1} จากนั้นก็สามารถสร้างฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์เพื่อแสดงรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดได้ดังตารางที่ 3.3 หลังจากที่ตัวทดถูกขยายจาก {-1, 0, 1} ไปเป็น {-2, -1, 0, 1, 2}

ตารางที่ 3.2 แสดงรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

ค่าเชิงตัวเลข	**รูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด**
-4	$\bar{1}00$
-3	$\bar{1}01$
-2	$0\bar{1}0$
-1	$00\bar{1}$
0	000
1	001
2	010
3	$10\bar{1}$
4	100

ตารางที่ 3.3 แสดงตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์บนเลขฐาน 2

$\sigma\alpha$		x_i		
		$\bar{1}$	0	1
c_{i-1}	-2	$\bar{1}00$	$0\bar{1}0$	000
	-1	$\bar{1}01$	$00\bar{1}$	001
	0	$0\bar{1}0$	000	010
	1	$00\bar{1}$	001	$10\bar{1}$
	2	000	010	100

ผลลัพธ์ 3 ดิจิตของจำนวน c_iy_{i-1} จากตารางที่ 3.3 เป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเมื่อทำการแปลง โดยที่ c_i คือตัวเลข 2 ดิจิตแรก และดิจิตสุดท้ายคือ y_{i-1} เช่น เมื่อ $x_i = \bar{1}$ และ $c_{i-1} = -2$ จะได้ $c_i = \bar{1}0$ และ $y_{i-1} = 0$

บทตั้ง (Lemma) ต่อไปนี้แสดงให้เห็นว่าตารางที่ 3.3 ถูกต้อง นั่นคือ ตัวทดต้องอยู่ในช่วง [-2, 2] สำหรับฐาน $\beta = 2$ และชุดตัวเลข $D = \{\bar{1}, 0, 1\}$

บทตั้งที่ 3.1 *กำหนดให้มีรูปแบบการแทนจำนวน* $X = x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}\ldots x_0$ *บนเลขฐานสองอยู่ในชุดตัวเลข* $D = \{\bar{1}, 0, 1\}$ *ตัวทดที่เป็นไปได้ทั้งหมดต้องอยู่ในเซต* $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

บทพิสูจน์ ในการพิสูจน์ ต้องแสดงให้เห็นว่า $-2 \le c_i \le 2$ กำหนดให้ฐาน $\beta = 2$ ให้ $D = \{\bar{1}, 0, 1\}$ เป็นชุดตัวเลข และให้ $X = x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}\ldots x_0$ และ $Y = y_n y_{n-1} y_{n-2}\ldots y_0$ เป็นรูปแบบการแทนจำนวนในชุดตัวเลข D โดยที่ $x_i \in D$ และ $y_i \in D$

จากสมการฟังก์ชันการทำให้เป็นบรรทัดฐาน

$$x_i\beta + c_{i-1} \quad = \quad c_i\beta + y_{i-1}$$

การพิสูจน์จะใช้วิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical induction) บนค่า i

พิจารณาค่า c_0 นั่นคือเมื่อ $i = 0$

เนื่องจาก $c_0 = x_0$ ซึ่ง $x_0 \in [-1, 1]$

ดังนั้น $c_0 \in [-2, 2]$ จริง

สมมติฐานของการพิสูจน์คือ สำหรับทุกๆ i กำหนดให้ c_{i-1} เป็นสมาชิกใน $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

จะต้องแสดงว่า $x_i\beta + c_{i-1}$ ต้องอยู่ในช่วง $[-4, 4]$ และ c_i ต้องเป็นสมาชิกใน C

จาก c_{i-1} เป็นสมาชิกใน C และ $c_i\beta + y_{i-1} = x_i\beta + c_{i-1}$ จะได้ว่า

$$c_i\beta + y_{i-1} \le \max(x_i\beta + c_{i-1}) = 4$$
$$c_i\beta + y_{i-1} \ge \min(x_i\beta + c_{i-1}) = -4$$

จะได้ว่า $c_i\beta + y_{i-1} \in [-4, 4]$

ในการคำนวณค่า c_i และ y_{i-1} สามารถคำนวณได้จากตารางที่ 3.2 โดย สองดิจิตทางซ้ายคือ c_i และดิจิตขวาสุดคือ y_{i-1}

จะเห็นได้ว่า $c_i \in [-2, 2]$

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า $-2 \le c_i \le 2$ สำหรับทุกค่าของ i

สิ้นสุดการพิสูจน์ ■

ต่อจากนี้ การทำให้เป็นบรรทัดฐานที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดสามารถทำได้โดยอาศัยฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์ (ตารางที่ 3.3) และผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเชิงตัวเลขถูกต้อง นั่นคือค่าเชิงตัวเลขของจำนวนนำเข้าและจำนวนนำออกต้องเท่ากัน ซึ่งสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.1 *กำหนดให้มีรูปแบบการแทนจำนวน* $X = x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}...x_0$ *บนเลขฐานสองโดยอยู่ในชุดตัวเลข* $D = \{\bar{1}, 0, 1\}$ *อาศัยตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์บนเลขฐาน 2 (ตารางที่ 3.3) ผลลัพธ์* $Y = y_n y_{n-1} y_{n-2}...y_0$ *เป็นรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด และ* $\|X\| = \|Y\|$

บทพิสูจน์ การพิสูจน์แบ่งเป็นสองส่วน ส่วนที่หนึ่งแสดงให้เห็นว่าค่าเชิงตัวเลขของ X และ Y เท่ากัน ส่วนที่สองแสดงให้เห็นว่าผลลัพท์ Y มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

<u>ส่วนที่ 1</u> พิสูจน์ว่า $\|X\| = \|Y\|$

ต้องแสดงให้เห็นว่า
$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i \beta^i = \sum_{i=0}^{n} y_i \beta^i$$

จากฟังก์ชันการแพร่ตัวทดที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด
$$\sigma(x_1, c_0) = c_1$$

เนื่องจาก $c_0 = x_0$, ดังนั้น $\sigma(x_1, x_0) = c_1$

เมื่อแทนในสมการฟังก์ชันการทำให้เป็นบรรทัดฐาน
$$x_i\beta + c_{i-1} = c_i\beta + y_{i-1}$$

จะได้ว่า
$$x_1\beta + x_0 = c_1\beta + y_0 \tag{3.1}$$

เนื่องจาก $\alpha(x_2, c_1) = \alpha(x_2, \sigma(x_1, x_0)) = y_1$

จะได้ว่า
$$x_2\beta + c_1 = c_2\beta + y_1$$
$$c_1 = c_2\beta + y_1 - x_2\beta \tag{3.2}$$

แทนค่า (3.2) ใน (3.1) จะได้
$$x_1\beta + x_0 = (c_2\beta + y_1 - x_2\beta)\beta + y_0$$
$$x_1\beta + x_0 = c_2\beta^2 + y_1\beta - x_2\beta^2 + y_0$$
$$x_2\beta^2 + x_1\beta + x_0 = c_2\beta^2 + y_1\beta + y_0 \tag{3.3}$$

โดยวิธีการเดียวกัน จะได้
$$\sigma(x_2, c_1) = \sigma(x_2, \sigma(x_1, x_0)) = c_2$$
$$\alpha(x_3, c_2) = \alpha(x_3, \sigma(x_2, \sigma(x_1, x_0)) = y_2$$

แล้ว
$$x_3\beta + c_2 = c_3\beta + y_2$$

นั่นคือ

$$c_2 = c_3\beta + y_2 - x_3\beta \qquad (3.4)$$

แทนค่า (3.4) ใน (3.3) จะได้

$$\begin{aligned}
x_2\beta^2 + x_1\beta + x_0 &= (c_3\beta + y_2 - x_3\beta)\beta^2 + y_1\beta + y_0 \\
x_2\beta^2 + x_1\beta + x_0 &= c_3\beta^3 + y_2\beta^2 - x_3\beta^3 + y_1\beta + y_0 \\
x_3\beta^3 + x_2\beta^2 + x_1\beta + x_0 &= c_3\beta^3 + y_2\beta^2 + y_1\beta + y_0 \\
&\dots
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$x_{n-1}\beta^{n-1} + x_{n-2}\beta^{n-2} + \dots + x_0 = c_{n-1}\beta^{n-1} + y_{n-2}\beta^{n-2} + \dots + y_0 \qquad (3.5)$$

จากสมการฟังก์ชันการทำให้เป็นบรรทัดฐาน

$$x_n\beta + c_{n-1} = c_n\beta + y_{n-1}$$

และ $x_n = 0$ จะได้ว่า

$$c_{n-1} = c_n\beta + y_{n-1} \qquad (3.6)$$

เนื่องจาก $c_{n-1} = [-2, 2]$, จะได้ว่า

$c_n \in \{\bar{1}, 0, 1\}$, และ $y_{n-1} \in \{\bar{1}, 0, 1\}$

ให้ $y_n = c_n$ แล้ว (3.6) สามารถเขียนได้เป็น $c_{n-1} = y_n\beta + y_{n-1}$

แทนค่า c_{n-1} ใน (3.5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
x_{n-1}\beta^{n-1} + x_{n-2}\beta^{n-2} + \dots + x_0 &= (y_n\beta + y_{n-1})\beta^{n-1} + y_{n-2}\beta^{n-2} + \dots + y_0 \\
x_{n-1}\beta^{n-1} + x_{n-2}\beta^{n-2} + \dots + x_0 &= y_n\beta^n + y_{n-1}\beta^{n-1} + y_{n-2}\beta^{n-2} + \dots + y_0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i\beta^i = \sum_{i=0}^{n} y_i\beta^i$$

<u>ส่วนที่ 2</u> พิสูจน์ว่า Y มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

ต้องแสดงให้เห็นว่า Y ไม่มีดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ติดกัน

ให้ $y_i \neq 0$ สำหรับ $0 \leq i \leq n$ ต้องแสดงให้เห็นว่า y_{i+1} และ y_{i-1} มีค่าเท่ากับศูนย์ การพิสูจน์แบ่งเป็นสองกรณี

<u>กรณีที่ 1</u> สมมติให้ $y_i = \bar{1}$

จากตารางที่ 3.3

1) $c_i = 0$, $x_{i+1} = 0$ แล้ว $y_{i+1} = 0$

2) $c_i = 2$, $x_{i+1} = 1$ แล้ว $y_{i+1} = 0$

3) $c_i = 0$, $x_{i+1} = \bar{1}$ แล้ว $y_{i+1} = 0$

<u>กรณีที่ 2</u> สมมติให้ $y_i = 1$

จากตารางที่ 3.3

1) $c_i = 0$, $x_{i+1} = 0$ แล้ว $y_{i+1} = 0$

2) $c_i = 0$, $x_{i+1} = 1$ แล้ว $y_{i+1} = 0$

3) $c_i = -2$, $x_{i+1} = \bar{1}$ แล้ว $y_{i+1} = 0$

จากทั้งสองกรณีจะได้ว่า $y_{i+1} = 0$

เพื่อพิสูจน์ว่า $y_{i-1} = 0$ โดยการพิสูจน์แบบขัดแย้ง (contradiction) สมมติให้ $y_{i-1} \neq 0$ นั่นคือ $y_{i-1} = 1$ หรือ $\bar{1}$ จากการพิสูจน์ข้างต้น ถ้า $y_{i-1} \neq 0$ จะได้ว่า $y_i = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $y_i \neq 0$ ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าไม่มีดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ติดกันใน Y ■

ตัวอย่างที่ 3.1 *กำหนดให้ $D = \{\bar{1}, 0, 1\}$ เป็นชุดตัวเลขซ้ำซ้อนฐานสอง ให้ X เป็นรูปแบบการแทนจำนวนบนฐาน $\beta = 2$ ใน D และ $X = 1100\bar{1}\bar{1}11 = 183_{10}$ จากบทตั้งที่ 3.1 จะได้ว่า $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ เป็นชุดตัวเลขตัวทด ดังนั้นการทำให้เป็นบรรทัดฐานที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดของ $X \rightarrow Y$ โดยอาศัยสถาปัตยกรรมการแปลงแบบทำควบคู่กันสามารถอธิบายได้ดังตารางที่ 3.4*

จากกระบวนการทำให้เป็นบรรทัดฐานโดยอาศัยฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์ (ตารางที่ 3.3) หา $x_i\beta + c_{i-1}$ ในรอบที่หนึ่ง (r_1) เนื่องจาก $x_0 = 1$ ถูกกำหนดให้เป็นตัวทดตัวแรกซึ่งก็คือ c_0 ดังนั้น ค่าที่อยู่ในคอลัมน์ x_0 จึงมีค่าเท่ากับ 0 เมื่อต้องการคำนวณหา $x_i\beta + c_{i-1}$ ในรอบที่หนึ่ง (r_1) ให้ใช้ค่า $x_1 = 1$ คำนวณกับค่าของ c_{i-1} ซึ่งมีสมาชิกที่เป็นไปได้อยู่ในเซต $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ผลลัพท์ที่ได้ในคอลัมน์ x_0 คือ $\{000, 001, 010, 10\bar{1}, 100\}$ ดังแสดงไว้ในตารางที่ 3.4 คำนวณแบบเดิมนี้ไปเรื่อยๆสำหรับคอลัมน์ x_1 ถึง x_7 เพื่อให้ได้ผลลัพท์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด เนื่องจากกระบวนการนี้ทำงานแบบขนาน ดังนั้นทุกคอลัมน์ (x_0 ถึง x_7) จึงคำนวณทีเดียวพร้อมกัน ในรอบที่สอง (r_2) คำนวณต่อโดยวิธีการแบบทำควบคู่กัน วนซ้ำกระบวนการเดิมจนกระทั่งได้ผลลัพท์ในรอบสุดท้าย (r_4) ก็เป็นอันสิ้นสุดกระบวนการ จากนั้นก็พิจารณาหาผลลัพท์ที่อยู่ในรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดที่ต้องการโดยการเลือกดิจิตสุดท้ายของคอลัมน์ขวาสุดในแต่ละรอบของแถวที่

มีค่า $c_{i-1} = 1$ ออกมายกเว้นรอบสุดท้าย (r_4) เพราะรอบสุดท้ายนี้ต้องใช้ผลลัพท์ของทุกคอลัมน์ที่เหลือ (x_4 ถึง x_7) เพื่อเลือกมาเป็นคำตอบ Y ในคอลัมน์ที่ x_7 จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้คือ 0 และยังเหลือตัวทดหน้าสุดคือ 1 ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใส่ 1 ในคอลัมน์ถัดไปทางซ้ายหนึ่งตำแหน่ง ส่งผลให้ Y ยาวกว่า X อยู่หนึ่งตำแหน่ง

ตารางที่ 3.4 แสดงตัวอย่างการทำให้เป็นบรรทัดฐานบนเลขฐาน 2

		x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0		c_{i-1}
X		1	1	0	0	$\bar{1}$	$\bar{1}$	1	1		
r_1		$0\bar{1}0$	000	000	$0\bar{1}0$	$0\bar{1}0$	$\bar{1}00$	$\bar{1}00$	000		-2
		$00\bar{1}$	001	001	$00\bar{1}$	$00\bar{1}$	$\bar{1}01$	$\bar{1}01$	001		-1
		000	010	010	000	000	$0\bar{1}0$	$0\bar{1}0$	010		0
		001	$10\bar{1}$	$10\bar{1}$	001	001	$00\bar{1}$	$00\bar{1}$	$10\bar{1}$		1
		010	100	100	010	010	000	000	100		2
r_2		000		001		$0\bar{1}0$		$0\bar{1}0$			-2
		000		010		$0\bar{1}0$		$0\bar{1}0$			-1
		001		010		$00\bar{1}$		$00\bar{1}$			0
		010		010		000		000			1
		010		$10\bar{1}$		000		000			2
r_3		001	010			$0\bar{1}0$	$\bar{1}01$				-2
		010	$10\bar{1}$			$0\bar{1}0$	$\bar{1}01$				-1
		010	$10\bar{1}$			$00\bar{1}$	$0\bar{1}0$				0
		010	$10\bar{1}$			$00\bar{1}$	$0\bar{1}0$				1
		010	100			$00\bar{1}$	$0\bar{1}0$				2
r_4		010	$10\bar{1}$	010	$00\bar{1}$						-2
		010	$10\bar{1}$	010	$00\bar{1}$						-1
		010	$10\bar{1}$	010	000						0
		010	$10\bar{1}$	010	000						1
		010	$10\bar{1}$	010	000						2
Y	1	0	$\bar{1}$	0	0	$\bar{1}$	0	0	$\bar{1}$		

จากตารางที่ 3.4 จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ Y ที่ได้ไม่มีดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ติดกัน และ $\|X\| = \|Y\| = 183$ ดังนั้น $Y = 10\bar{1}00\bar{1}00\bar{1}$ คือรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดของ X ซึ่งมีค่าน้ำหนักเป็น 4 □

3.2 สรุป

ในบทนี้เราได้กล่าวถึงวิธีการทำให้เป็นบรรทัดฐานบนเลขฐานสองโดยอาศัยสถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กัน เพื่อลดค่าความซับซ้อนของเวลาลงจากความซับซ้อนเชิงเส้นตรง O(n) เหลือเป็นความซับซ้อนเชิงลอการิทึม O(log n) โดยที่ n คือจำนวนของดิจิตนำเข้า และยังได้พิสูจน์ให้เห็นว่า การทำให้เป็นบรรทัดฐานบนเลขฐานสองนี้ทำงานได้อย่างถูกต้อง

บทที่ 4

การทำให้เป็นบรรทัดฐานบนระบบเลขฐานทั่วไป

จุดประสงค์หลักของงานวิจัยชิ้นนี้คือ การเสนออัลกอริทึมในการหารูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดบนระบบเลขฐานที่มากกว่าและเท่ากับสอง ซึ่งเรียกอัลกอริทึมนี้ว่า การทำให้เป็นบรรทัดฐาน โดยนำสถาปัตยกรรมการแปลงแบบทำควบคู่กันมาประยุกต์ใช้ โดยอาศัยชุดตัวเลขคาโนนิคอลแบบมีเครื่องหมาย

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดของอัลกอริทึมในการทำให้เป็นบรรทัดฐานพร้อมบทพิสูจน์ให้เห็นว่าอัลกอริทึมนี้ทำงานได้อย่างถูกต้อง ประกอบกับการอธิบายวิธีการทำงานโดยอาศัยตัวอย่างเพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ

4.1 อัลกอริทึมการทำให้เป็นบรรทัดฐานบนระบบเลขฐานทั่วไป

จากที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 จะเห็นว่า การทำให้เป็นบรรทัดฐานนี้ ประเด็นสำคัญคือต้องหารูปทั่วไป (generic form) ในการผลิตตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์ขึ้นมา จากนั้นก็ใช้ตารางนี้ในการแปลงจำนวนนำเข้าให้อยู่ในรูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดโดยอาศัยแนวคิดแบบทำควบคู่กัน

กำหนดให้ D เป็นชุดตัวเลขซ้ำซ้อนมากที่สุดและมีคุณสมบัติสมมาตร C เป็นเซตของตัวทดและ β เป็นฐานจำนวนเต็มใดๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง จะเห็นว่าฐานสามารถมีค่าเป็นสองก็ได้ แต่ในบทนี้จะเน้นเรื่องฐานที่มากกว่าสอง ดังนั้น จะได้ $D = \{0, \pm1,\ldots, \pm(\beta-1)\}$ ผลลัพท์ที่ได้ในแต่ละช่องในตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์กำหนดให้แทนด้วย $Z_i = x_i\beta + c_{i-1}$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็ม i ค่าของ Z_i สามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้ $\| z_2z_1z_0 \| = z_2\beta^2 + z_1\beta + z_0$ เนื่องจาก $x_i\beta + c_{i-1} = c_i\beta + y_{i-1}$ ดังนั้นจะได้ว่า $z_2\beta + z_1 = c_i$ และ $z_0 = y_{i-1}$ การทำให้เป็นบรรทัดฐานสามารถแสดงได้โดยตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 แสดงตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์สำหรับรูปทั่วไป

$\sigma\alpha$	x_i
c_{i-1}	$z_2z_1z_0$

ต่อไปจะนำเสนอรูปทั่วไปในการหาผลลัพธ์ $z_2z_1z_0$ ในตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์สำหรับรูปทั่วไป ซึ่งเราจะใช้ตารางนี้ในการทำให้เป็นบรรทัดฐานต่อไป

อัลกอริทึมการสร้างตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์ (Algorithm for conversion mapping table generation)

Input: Base β

Digit set $D = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(\beta - 1)\}$

Output: mapping table $(z_2 z_1 z_0)$

Let C be a carry set $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\beta\}$.

For any x_i in D, and for any c_{i-1} in C,

1. compute $Z_i = x_i\beta + c_{i-1}$
2. rewrite Z_i as $z_2\beta^2 + z_1\beta + z_0$ under the following conditions:

   case 1 $Z_i \in [-\beta^2, -\beta^2 + \beta - 1]$, then $z_2 = \bar{1}$, $z_1 = 0$, $z_0 = \beta + c_{i-1}$

   case 2 $Z_i \in [-\beta^2 + \beta, -\beta]$, then $z_2 = 0$, $x_i\beta + c_{i-1} = z_1\beta + z_0$ and $z_0 = z_1 - \varepsilon$ where $2z_1 < \varepsilon < 2z_1 + \beta$

   case 3 $Z_i \in [-\beta + 1, \beta - 1]$, then $z_2 = 0$, $z_1 = 0$, $z_0 = c_{i-1}$

   case 4 $Z_i \in [\beta, \beta^2 - \beta]$, then $z_2 = 0$, $x_i\beta + c_{i-1} = z_1\beta + z_0$ and $z_0 = z_1 - \varepsilon$ where $2z_1 - \beta < \varepsilon < 2z_1$

   case 5 $Z_i \in [\beta^2 - \beta + 1, \beta^2]$, then $z_2 = 1$, $z_1 = 0$, $z_0 = -\beta + c_{i-1}$
3. the mapping of (x_i, c_{i-1}) is $z_2 z_1 z_0$.

ที่มาของ $2z_1 < \varepsilon < 2z_1 + \beta$ ในช่วงที่ 2 (case 2)

ในการหาค่า ε ว่าอยู่ในช่วง $[2z_1, 2z_1 + \beta]$ แบ่งเป็นสองกรณี

<u>กรณีที่ 1</u> คือ หา $2z_1 < \varepsilon$

จากนิยามที่ 2.4 กฎการลดลงของดิจิต กล่าวว่า $|b_i| < |b_{i+1}|$ เมื่อ $b_{i+1}b_i < 0$

เมื่อแทนค่า $b_i = z_0$ และ $b_{i+1} = z_1$ จะได้ว่า $|z_0| < |z_1|$

เนื่องจาก $z_1 z_0 < 0$ ดังนั้น z_0 หรือ z_1 ตัวใดตัวหนึ่งต้องเป็นลบ

เนื่องจาก ช่วงที่ 2 นี้เป็นค่าลบ เพราะฉะนั้นดิจิตที่มีนัยสำคัญสูงกว่าจึงต้องเป็นลบ

ดังนั้น z_1 มีค่าเป็นลบ และ z_0 มีค่าเป็นบวก

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $z_0 < -z_1$

จากที่ได้กำหนดไว้แล้วว่า $z_0 = z_1 - \varepsilon$

ดังนั้น

$$z_1 - \varepsilon < -z_1$$
$$z_1 + z_1 < \varepsilon$$
$$\therefore \quad 2z_1 < \varepsilon$$

<u>กรณีที่ 2</u> คือ หา $\varepsilon < 2z_1 + \beta$

จากนิยามที่ 2.4 กฎผลบวกจำกัด กล่าวว่า $|b_{i+1} + b_i| < \beta$ สำหรับทุกๆ i

เมื่อแทนค่า $b_i = z_0$ และ $b_{i+1} = z_1$ จะได้ว่า $|z_1 + z_0| < \beta$

เนื่องจาก $z_1 z_0 \geq 0$

ดังนั้นทั้ง z_0 และ z_1 มีค่าเป็นลบ เพราะช่วงที่ 2 นี้เป็นค่าลบ

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $z_1 + z_0 > -\beta$

จากที่ได้กำหนดไว้แล้วว่า $z_0 = z_1 - \varepsilon$

ดังนั้น

$$z_1 + z_1 - \varepsilon > -\beta$$
$$2z_1 + \beta > \varepsilon$$
$$\therefore \quad \varepsilon < 2z_1 + \beta$$

รวมทั้งสองกรณีเข้าด้วยกัน

จะได้ $2z_1 < \varepsilon < 2z_1 + \beta$

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ค่า ε อยู่ในช่วง $[2z_1, 2z_1 + \beta]$

ที่มาของ $2z_1 - \beta < \varepsilon < 2z_1$ ในช่วงที่ 4 (case 4)

ในการหาค่า ε ว่าอยู่ในช่วง $[2z_1 - \beta, 2z_1]$ แบ่งเป็นสองกรณี

<u>กรณีที่ 1</u> คือ หา $2z_1 - \beta < \varepsilon$

จากนิยามที่ 2.4 กฎผลบวกจำกัด กล่าวว่า $|b_{i+1} + b_i| < \beta$ สำหรับทุกๆ i

เมื่อแทนค่า $b_i = z_0$ และ $b_{i+1} = z_1$ จะได้ว่า $|z_1 + z_0| < \beta$

เนื่องจาก $z_1 z_0 \geq 0$

ดังนั้นทั้ง z_0 และ z_1 มีค่าเป็นบวก เพราะช่วงที่ 4 นี้เป็นค่าบวก

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $z_1 + z_0 < \beta$

จากที่ได้กำหนดไว้แล้วว่า $z_0 = z_1 - \varepsilon$

ดังนั้น

$$z_1 + z_1 - \varepsilon < \beta$$
$$\therefore \quad 2z_1 - \beta < \varepsilon$$

<u>กรณีที่ 2</u> คือ หา $\varepsilon < 2\, z_1$

จากนิยามที่ 2.4 กฎการลดลงของดิจิต กล่าวว่า $|b_i| < |b_{i+1}|$ เมื่อ $b_{i+1}b_i < 0$

เมื่อแทนค่า $b_i = z_0$ และ $b_{i+1} = z_1$ จะได้ว่า $|\, z_0| < |\, z_1|$

เนื่องจาก $z_1z_0 < 0$ ดังนั้น z_0 หรือ z_1 ตัวใดตัวหนึ่งต้องเป็นลบ

เนื่องจาก ช่วงที่ 4 นี้เป็นค่าบวก เพราะฉะนั้นดิจิตที่มีนัยสำคัญสูงกว่าจึงต้องเป็นบวก

ดังนั้น z_1 มีค่าเป็นบวก และ z_0 มีค่าเป็นลบ

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $-z_0 < z_1$

จากที่ได้กำหนดไว้แล้วว่า $z_0 = z_1 - \varepsilon$

ดังนั้น

$$-z_1 + \varepsilon < z_1$$

$$\therefore \quad \varepsilon < 2\, z_1$$

รวมทั้งสองกรณีเข้าด้วยกัน

จะได้ $2z_1 - \beta < \varepsilon < 2z_1$

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ค่า ε อยู่ในช่วง $[2z_1 - \beta, 2z_1]$

ในการพิสูจน์จะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสองส่วน ส่วนที่หนึ่งต้องแสดงให้เห็นว่าชุดตัวเลขตัวทดต้องอยู่ในเซต $C = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\beta\}$, ขนาดของค่า Z_i ต้องอยู่ในช่วง $[-\beta^2, \beta^2]$ และการแทนค่า Z_i ด้วยดิจิต 3 ดิจิต $z_2z_1z_0$ เพียงพอสำหรับทุกกรณี ส่วนที่สองต้องแสดงให้เห็นว่าค่าเชิงตัวเลขของ X และ Y เท่ากัน และ Y มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

บทตั้งที่ 4.1 *กำหนดให้มีรูปแบบการแทนจำนวน* $X = x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}\ldots x_0$ *บนเลขฐาน* $\beta \geq 2$ *ที่ซึ่ง* x_i *อยู่ในชุดตัวเลข* $D = \{0, \pm 1, \ldots, \pm(\beta - 1)\}$ *เมื่อ* $0 \leq i$ *ตัวทดที่เป็นไปได้ทั้งหมดสำหรับการทำให้เป็นบรรทัดฐานต้องอยู่ในเซต* $C = \{0, \pm 1, \ldots, \pm\beta\}$

บทพิสูจน์ การพิสูจน์ต้องแสดงให้เห็นว่า $-\beta \leq c_i \leq \beta$ และค่าของ Z_i ก็ต้องอยู่ในช่วง $[-\beta^2, \beta^2]$ จะพิสูจน์โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical induction) โดยการวนซ้ำของค่า i

ในกรณีของ $i = 0$, เพราะว่า $c_0 = x_0$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $x_0 \in D$ และ $D \subseteq C$

ดังนั้น $c_0 \in C$

สมมติฐานของการพิสูจน์คือ สำหรับทุกๆ i ถ้า c_{i-1} เป็นสมาชิกใน C แล้ว Z_i อยู่ในช่วง $[-\beta^2, \beta^2]$ และ c_i ต้องเป็นสมาชิกใน C

สมมติให้ c_{i-1} เป็นสมาชิกใน C และ $Z_i = x_i\beta + c_{i-1}$

จะได้ $|Z_i| \le x_i\beta + c_{i-1}$

$$\le \beta(\beta-1) + \beta$$
$$= \beta^2 \in [-\beta^2, \beta^2]$$

จากนิยามด้านบน $c_i = z_2\beta + z_1$

ต่อไปการพิสูจน์จะแบ่งออกเป็น 5 กรณี

<u>กรณีที่ 1</u> $Z_i \in [-\beta^2, -\beta^2 + \beta - 1]$ จากอัลกอริทึมการสร้างตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์จะเห็นได้ชัดว่า $c_i = -\beta$

<u>กรณีที่ 2</u> $Z_i \in [-\beta^2 + \beta, -\beta]$

เนื่องจาก $z_2 = 0$ ดังนั้น $c_i = z_1$

จะได้ว่า
$$-\beta^2 + \beta \le z_1\beta + z_0 - \varepsilon \le -\beta$$
$$-\beta^2 + \beta \le z_1\beta + z_1 - \varepsilon \le -\beta$$
$$-\beta^2 + \beta + \varepsilon \le z_1\beta + z_1 \le -\beta + \varepsilon$$

เนื่องจาก $2z_1 < \varepsilon < 2z_1 + \beta$

ดังนั้นจะได้
$$-\beta^2 + \beta + 2z_1 \le z_1\beta + z_1 \le -\beta + 2z_1 + \beta$$
$$-\beta^2 + \beta + 2z_1 \le z_1\beta + z_1 \le 2z_1$$
$$-\beta^2 + \beta \le z_1\beta - z_1 \le 0$$
$$-\beta(\beta - 1) \le z_1(\beta - 1) \le 0$$
$$-\beta \le z_1 = c_i \le 0$$

<u>กรณีที่ 3</u> $Z_i \in [-\beta + 1, \beta - 1]$ จากอัลกอริทึมการสร้างตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์จะเห็นได้ชัดว่า $c_i = 0$

<u>กรณีที่ 4</u> $Z_i \in [\beta, \beta^2 - \beta]$

เนื่องจาก $z_2 = 0$ ดังนั้น $c_i = z_1$

จะได้ว่า
$$\beta \le z_1\beta + z_0 - \varepsilon \le \beta^2 - \beta$$
$$\beta \le z_1\beta + z_0 - \varepsilon \le \beta^2 - \beta$$
$$\beta + \varepsilon \le z_1\beta + z_1 \le \beta^2 - \beta + \varepsilon$$

เนื่องจาก $2z_1 - \beta < \varepsilon < 2z_1$

ดังนั้นจะได้
$$\beta + 2z_1 - \beta \le z_1\beta + z_1 \le \beta^2 - \beta + 2z_1$$
$$2z_1 \le z_1\beta + z_1 \le \beta^2 - \beta + 2z_1$$

$$0 \le z_1\beta - z_1 \le \beta^2 - \beta$$
$$0 \le z_1(\beta - 1) \le \beta(\beta - 1)$$
$$0 \le z_1 = c_i \le \beta$$

<u>กรณีที่ 5</u> $Z_i \in [\beta^2 - \beta + 1, \beta^2]$ จากอัลกอริทึมการสร้างตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์จะเห็นได้ชัดว่า $c_i = \beta$

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า $C = \{0, \pm 1, \ldots, \pm\beta\}$

สิ้นสุดการพิสูจน์ ■

บทตั้งที่ 4.2 *กำหนดให้มีรูปแบบการแทนจำนวน $X = x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}\ldots x_0$ บนเลขฐาน $\beta \ge 2$ ที่ซึ่ง x_i อยู่ในชุดตัวเลข $D = \{0, \pm 1,\ldots, \pm(\beta - 1)\}$ เมื่อ $0 \le i$ ขนาดของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ในตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์คือ $[-\beta^2, \beta^2]$*

บทพิสูจน์ ในการพิสูจน์ต้องแสดงให้เห็นว่า $-\beta^2 \le x\beta + c \le \beta^2$

การพิสูจน์จะถูกแบ่งเป็นสองกรณี

แนวทางการพิสูจน์จำต้องหาค่าต่ำสุดและสูงสุดที่เป็นไปได้ของค่าในตาราง

ดังนั้นจะได้อสมการ

$$\min(x\beta + c) \le x\beta + c \le \max(x\beta + c)$$

<u>กรณีที่ 1</u> คือ หาค่า $x\beta + c$ เมื่อ x และ c มีค่าต่ำสุด

จากบทตั้งที่ 4.1 จะได้ $\min(c) = -\beta$

แทนค่า $\min(x) = -\beta + 1$ และ $\min(c) = -\beta$ ใน $\min(x\beta + c) \le x\beta + c$

จะได้

$$\begin{aligned} \min(x\beta + c) &\le x\beta + c \\ (-\beta + 1)\beta + (-\beta) &\le \\ -\beta^2 + \beta - \beta &\le \\ \therefore \quad -\beta^2 &\le x\beta + c \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ 2</u> คือ หาค่า $x\beta + c$ เมื่อ x และ c มีค่าสูงสุด

จากบทตั้งที่ 4.1 จะได้ $\max(c) = \beta$

แทนค่า $\max(x) = \beta - 1$ และ $\max(c) = \beta$ ใน $x\beta + c \le \max(x\beta + c)$

จะได้

$$\begin{aligned} x\beta + c &\le \max(x\beta + c) \\ &\le (\beta - 1)\beta + \beta \\ &\le \beta^2 - \beta + \beta \\ \therefore\ x\beta + c &\le \beta^2 \end{aligned}$$

รวมทั้งสองกรณีเข้าด้วยกัน จะได้ $-\beta^2 \le x\beta + c \le \beta^2$
ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ขนาดของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ในตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์คือ $[-\beta^2,\ \beta^2]$ ■

บทตั้งที่ 4.3 *กำหนดให้มีรูปแบบการแทนจำนวน $X = x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}\ldots x_0$ บนเลขฐาน $\beta \ge 2$ ที่ซึ่ง x_i อยู่ในชุดตัวเลข $D = \{0, \pm 1,\ldots, \pm(\beta - 1)\}$ เมื่อ $0 \le i$ จำนวนดิจิตที่ใช้ในการแทนผลลัพธ์ ($x_i\beta + c_{i-1}$) ในแต่ละช่องของตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์จำเป็นต้องใช้อย่างน้อย 3 ดิจิต ซึ่งกำหนดให้เป็น $Z_i = z_2z_1z_0$*

บทพิสูจน์ ในการพิสูจน์เราต้องแสดงให้เห็นว่า $\min(\|z_2z_1z_0\|) < -\beta^2$ และ $\beta^2 < \max(\|z_2z_1z_0\|)$ แนวทางในการพิสูจน์จะแสดงให้เห็นโดยเปรียบเทียบค่าเชิงตัวเลขของ z_1z_0 กับ $z_2z_1z_0$ เพื่อให้เห็นว่า 2 ดิจิตไม่เพียงพอ จำเป็นต้องใช้ 3 ดิจิต
การพิสูจน์จะถูกแบ่งเป็นสองกรณี

<u>กรณีที่ 1</u> คือ แสดงให้เห็นว่า $\min(\|z_2z_1z_0\|) < -\beta^2 < \min(\|z_1z_0\|)$
ต่อจากนี้จะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ส่วน

<u>ส่วนที่ 1</u> แสดงให้เห็นว่า $-\beta^2 < \min(\|z_1z_0\|)$
จากหัวข้อ 2.1 สมการในการหาค่าเชิงตัวเลขของระบบจำนวนคือ

$$\|X\| = \sum_{i=n}^{-\infty} x_i\beta^i$$

ดังนั้น เมื่อแทน X ด้วย z_1z_0 ใน $\|X\| = \sum_{i=n}^{-\infty} x_i\beta^i$
จะได้

$$\|z_1z_0\| = z_1\beta + z_0 \tag{4.1}$$

ดิจิตที่มีค่าต่ำสุดใน D คือ $-\beta + 1$

ดังนั้น min(z_1) = min(z_2) = $-\beta+1$

แทนค่าใน (4.1)

จะได้

$$\begin{aligned} \|z_1z_0\| &= (-\beta+1)\beta + (-\beta+1) \\ &= -\beta^2 + \beta - \beta + 1 \\ &= -\beta^2 + 1 \\ &> -\beta^2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $-\beta^2 < \min(\|z_1z_0\|)$

<u>ส่วนที่ 2</u> แสดงให้เห็นว่า $\min(\|z_2z_1z_0\|) < -\beta^2$

แทน X ด้วย $z_2z_1z_0$ ใน $\|X\| = \sum_{i=n}^{-\infty} x_i\beta^i$

จะได้

$$\|z_2z_1z_0\| = z_2\beta^2 + z_1\beta + z_0 \qquad (4.2)$$

ดิจิตที่มีค่าต่ำสุดใน D คือ $-\beta+1$

ดังนั้น min(z_2) = min(z_1) = min(z_0) = $-\beta+1$

แทนค่าใน (4.2)

จะได้

$$\begin{aligned} \|z_2z_1z_0\| &= (-\beta+1)\beta^2 + (-\beta+1)\beta + (-\beta+1) \\ &= -\beta^3 + \beta^2 - \beta^2 + \beta - \beta + 1 \\ &= -\beta^3 + 1 \\ &< -\beta^2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\min(\|z_2z_1z_0\|) < -\beta^2$

เมื่อนำส่วนที่ 1 และ ส่วนที่ 2 มารวมกัน จะได้ $\min(\|z_2z_1z_0\|) < -\beta^2 < \min(\|z_1z_0\|)$

<u>กรณีที่ 2</u> คือ แสดงให้เห็นว่า $\max(\|z_1z_0\|) < \beta^2 < \max(\|z_2z_1z_0\|)$

ต่อจากนี้จะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ส่วน

<u>ส่วนที่ 1</u> แสดงให้เห็นว่า $\max(\|z_1z_0\|) < \beta^2$

แทน X ด้วย z_1z_0 ใน $\|X\| = \sum_{i=n}^{-\infty} x_i\beta^i$

จะได้

$$\|z_1z_0\| = z_1\beta + z_0 \qquad (4.3)$$

ดิจิตที่มีค่าสูงสุดใน D คือ $\beta - 1$

ดังนั้น $\max(z_1) = \max(z_2) = \beta - 1$

แทนค่าใน (4.3)

จะได้

$$\begin{aligned}\|z_1z_0\| &= (\beta-1)\beta + (\beta-1)\\ &= \beta^2 - \beta + \beta - 1\\ &= \beta^2 - 1\\ &< \beta^2\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\max(\|z_1z_0\|) < \beta^2$

<u>ส่วนที่ 2</u> แสดงให้เห็นว่า $\beta^2 < \max(\|z_2z_1z_0\|)$

แทน X ด้วย $z_2z_1z_0$ ใน $\|X\| = \sum_{i=n}^{-\infty} x_i\beta^i$

จะได้

$$\|z_2z_1z_0\| = z_2\beta^2 + z_1\beta + z_0 \qquad (4.4)$$

ดิจิตที่มีค่าสูงสุดใน D คือ $\beta - 1$

ดังนั้น $\max(z_2) = \max(z_1) = \max(z_0) = \beta - 1$

แทนค่าใน (4.4)

จะได้

$$\begin{aligned}\|z_2z_1z_0\| &= (\beta-1)\beta^2 + (\beta-1)\beta + (\beta-1)\\ &= \beta^3 - \beta^2 + \beta^2 - \beta + \beta - 1\\ &= \beta^3 - 1\\ &> \beta^2\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\beta^2 < \max(\|z_2z_1z_0\|)$

เมื่อนำส่วนที่ 1 และ ส่วนที่ 2 มารวมกัน จะได้ $\max(\|z_1z_0\|) < \beta^2 < \max(\|z_2z_1z_0\|)$

เมื่อรวมทั้งสองกรณีเข้าด้วยกัน

จะได้ว่า $\min(\|z_2z_1z_0\|) < -\beta^2$

และ $\beta^2 < \max(\|z_2z_1z_0\|)$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ในการแทนค่า $x_i\beta + c_{i-1}$ จำเป็นต้องใช้จำนวนดิจิต 3 ดิจิต คือ $z_2z_1z_0$

สิ้นสุดการพิสูจน์ ■

ทฤษฎีบทที่ 4.1 *กำหนดให้มีรูปแบบการแทนจำนวน* $X = x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}...x_0$ *บนเลขฐาน* $\beta \geq 2$ *ที่ซึ่ง* x_i *อยู่ในชุดตัวเลข* $D = \{0, \pm 1,\ldots, \pm(\beta - 1)\}$ *ให้* $d_i \in D$ *เมื่อ* $0 \leq i$ *และ* ε *เป็นจำนวนเต็มใดๆ อาศัยอัลกอริทึมการสร้างตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์ โดยที่ผลลัพธ์ในตารางกำหนดให้แทนด้วย* $Z_i = z_2z_1z_0$ *เมื่อ* $0 \leq i$ *ผลลัพธ์* $Y = y_ny_{n-1}y_{n-2}...y_0$ *เป็นรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด และ* $||X|| = ||Y||$

บทพิสูจน์ การพิสูจน์แบ่งออกเป็นสองส่วน ส่วนที่หนึ่งแสดงให้เห็นว่าค่าเชิงตัวเลขของ X และ Y เท่ากัน ส่วนที่สองแสดงให้เห็นว่า Y มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

<u>ส่วนที่ 1</u> พิสูจน์ว่า $||X|| = ||Y||$

ต้องแสดงให้เห็นว่า
$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i \beta^i = \sum_{i=0}^{n} y_i \beta^i$$

การพิสูจน์นี้เป็นการพิสูจน์สำหรับรูปทั่วไป ดังนั้นจึงคล้ายกับการพิสูจน์ในบทที่ 3

จากฟังก์ชันการแพร่ตัวทดที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

$$\sigma(x_1, c_0) = c_1$$

เนื่องจาก $c_0 = x_0$, ดังนั้น $\sigma(x_1, x_0) = c_1$

เมื่อแทนในสมการฟังก์ชันการทำให้เป็นบรรทัดฐาน

จะได้ว่า

$$x_1\beta + x_0 = c_1\beta + y_0 \tag{4.5}$$

เนื่องจาก $\alpha(x_2, c_1) = \alpha(x_2, \sigma(x_1, x_0)) = y_1$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x_2\beta + c_1 &= c_2\beta + y_1 \\ c_1 &= c_2\beta + y_1 - x_2\beta \end{aligned} \tag{4.6}$$

แทนค่า (4.6) ใน (4.5) จะได้

$$\begin{aligned} x_1\beta + x_0 &= (c_2\beta + y_1 - x_2\beta)\beta + y_0 \\ x_1\beta + x_0 &= c_2\beta^2 + y_1\beta - x_2\beta^2 + y_0 \\ x_2\beta^2 + x_1\beta + x_0 &= c_2\beta^2 + y_1\beta + y_0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

โดยวิธีการเดียวกัน จะได้

$$\begin{aligned} \sigma(x_2, c_1) &= \sigma(x_2, \sigma(x_1, x_0)) = c_2 \\ \alpha(x_3, c_2) &= \alpha(x_3, \sigma(x_2, \sigma(x_1, x_0))) = y_2 \end{aligned}$$

แล้ว $$x_3\beta + c_2 = c_3\beta + y_2$$

นั่นคือ $$c_2 = c_3\beta + y_2 - x_3\beta \tag{4.8}$$

แทนค่า (4.8) ใน (4.7) จะได้

$$x_2\beta^2 + x_1\beta + x_0 = (c_3\beta + y_2 - x_3\beta)\beta^2 + y_1\beta + y_0$$
$$x_2\beta^2 + x_1\beta + x_0 = c_3\beta^3 + y_2\beta^2 - x_3\beta^3 + y_1\beta + y_0$$
$$x_3\beta^3 + x_2\beta^2 + x_1\beta + x_0 = c_3\beta^3 + y_2\beta^2 + y_1\beta + y_0$$
$$\ldots$$

ดังนั้น

$$x_{n-1}\beta^{n-1} + x_{n-2}\beta^{n-2} + \ldots + x_0 = c_{n-1}\beta^{n-1} + y_{n-2}\beta^{n-2} + \ldots + y_0 \qquad (4.9)$$

จากสมการฟังก์ชันการทำให้เป็นบรรทัดฐาน

$$x_n\beta + c_{n-1} = c_n\beta + y_{n-1}$$

และ $x_n = 0$ จะได้ว่า

$$c_{n-1} = c_n\beta + y_{n-1} \qquad (4.10)$$

เนื่องจาก c_{n-1} สามารถเขียนแทนได้ด้วย 2 ดิจิต

ดังนั้นเพื่อทำให้สมการ (4.10) สมดุลกัน ค่าของ c_n และ y_{n-1} ที่มีนัยสำคัญสูงสุดจำเป็นต้องแทนด้วย 1 ดิจิต

จะได้ว่า

$$c_n \text{ และ } y_{n-1} \in [-\beta + 1, \beta - 1]$$

ดังนั้น $y_n = c_n$ แล้ว (4.10) สามารถเขียนได้เป็น $c_{n-1} = y_n\beta + y_{n-1}$

แทนค่า $c_{n-1} = y_n\beta + y_{n-1}$ ใน (4.9) จะได้ว่า

$$x_{n-1}\beta^{n-1} + x_{n-2}\beta^{n-2} + \ldots + x_0 = (y_n\beta + y_{n-1})\beta^{n-1} + y_{n-2}\beta^{n-2} + \ldots + y_0$$
$$x_{n-1}\beta^{n-1} + x_{n-2}\beta^{n-2} + \ldots + x_0 = y_n\beta^n + y_{n-1}\beta^{n-1} + y_{n-2}\beta^{n-2} + \ldots + y_0$$

ดังนั้น

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i\beta^i = \sum_{i=0}^{n} y_i\beta^i$$

<u>ส่วนที่ 2</u> พิสูจน์ว่า Y เป็นรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

ต้องแสดงให้เห็นว่า Y ผ่านข้อกำหนดในนิยามที่ 2.4 ซึ่งมีกฎอยู่สองข้อคือ

1. กฎผลบวกจำกัด (limited sum rule) กล่าวคือ $|b_{i+1} + b_i| < \beta$ สำหรับทุกๆ i
2. กฎการลดลงของดิจิต (digit decreasing rule) กล่าวคือ $|b_i| < |b_{i+1}|$ เมื่อ $b_{i+1}b_i < 0$

โดยที่ $|b|$ คือค่าสัมบูรณ์ของ b

จากสมการฟังก์ชันการทำให้เป็นบรรทัดฐาน

$$x_{i+1}\beta + c_i = c_{i+1}\beta + y_i$$

จะได้ว่า $b_{i+1} = y_{i+1} = z_1$ และ $b_i = y_i = z_0$

แนวทางในการพิสูจน์ต้องแบ่งออกเป็น 5 ช่วง ตามอัลกอริทึมการสร้างตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์

ช่วงที่ 1: $Z_i \in [-\beta^2, -\beta^2 + \beta - 1]$, then $z_2 = \bar{1}$, $z_1 = 0$, $z_0 = \beta + c_{i-1}$
เนื่องจาก $z_2z_1 = c_i$ และ $z_0 = y_{i-1}$
ดังนั้น $c_i = \bar{1}0$ และ $y_{i-1} = \beta + c_i$
ต่อไปหาค่า y_i จากสมการฟังก์ชันการทำให้เป็นบรรทัดฐาน $x_i\beta + c_{i-1} = c_i\beta + y_{i-1}$
เมื่อแทนค่าตัวห้อยที่สอดคล้องแล้วจะได้เป็น $x_{i+1}\beta + c_i = c_{i+1}\beta + y_i$
เราทราบแล้วว่า $x_{i+1}\beta + c_i = z_2z_1z_0$
เมื่อนำ $x_{i+1}\beta$ มาบวกกับ c_i ผลลัพท์ที่ได้ในตำแหน่ง z_0 ต้องขึ้นอยู่กับดิจิตที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุดของ c_i ซึ่งมีค่าเป็น 0 เพราะว่า $c_i = \bar{1}0$
ดังนั้น $y_i = z_0 = 0$
เนื่องจาก $-\beta \le c_{i-1} < 0$ ดังนั้นเมื่อนำค่า c_{i-1} ไปแทนใน $y_{i-1} = \beta + c_{i-1}$ เพื่อหาค่า y_{i-1}
จะได้ $0 \le y_{i-1} < \beta$
เราสามารถเห็นได้ว่า $y_i = 0$ เสมอ เพราะฉะนั้น $y_iy_{i-1} \ge 0$
เนื่องจาก $y_i = 0$ และ $0 \le y_{i-1} < \beta$
ดังนั้น $|y_i + y_{i-1}| < \beta$
ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ผลลัพท์ที่ได้ในช่วงที่ 1 นี้ เป็นที่ยอมรับโดยกฎผลบวกจำกัด

ช่วงที่ 2: $Z_i \in [-\beta^2 + \beta, -\beta]$, then $z_2 = 0$, $x_i\beta + c_{i-1} = z_1\beta + z_0$ and $z_0 = z_1 - \varepsilon$
where $2z_1 < \varepsilon < 2z_1 + \beta$
เนื่องจากช่วงที่ 2 นี้ z_1 เป็นลบ และ z_0 เป็นจำนวนเต็ม
ดังนั้น การพิสูจน์จึงต้องแบ่งออกเป็นสองกรณี

<u>กรณีที่ 1</u> เมื่อ $z_1 < 0$ และ $z_0 \le 0$ ต้องแสดงให้เห็นว่า $|z_1 + z_0| < \beta$ เพราะ $z_1z_0 \ge 0$
ในการหาค่า ε เราจำเป็นต้องทราบค่าของ z_1
เนื่องจาก $-\beta + 1 \le z_1 < 0$
ดังนั้นค่าของ $z_1 = \{-\beta + 1, -\beta + 2, -\beta + 3, \dots, -\beta + n, \dots, -1\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ
แทนค่า z_1 ใน $2z_1 < \varepsilon < 2z_1 + \beta$
จะได้

เมื่อ $z_1 = -\beta + 1$, $-2\beta + 2 < \varepsilon < -\beta + 2$ จะได้ $-1 < z_0 \leq 0$

เมื่อ $z_1 = -\beta + 2$, $-2\beta + 4 < \varepsilon < -\beta + 4$ จะได้ $-2 < z_0 \leq 0$

เมื่อ $z_1 = -\beta + 3$, $-2\beta + 6 < \varepsilon < -\beta + 6$ จะได้ $-3 < z_0 \leq 0$

$\ldots$

เมื่อ $z_1 = -\beta + n$, $-2\beta + 2n < \varepsilon < -\beta + 2n$ จะได้ $-n < z_0 \leq 0$

เขียนใหม่ได้เป็น

เมื่อ $z_1 = -\beta + n$, $-2\beta + 2n < \varepsilon < -\beta + 2n$ จะได้ $-n + 1 \leq z_0 \leq 0$

สำหรับค่าต่ำสุดของ z_0 จะเห็นว่า $|(-\beta + n) + (-n + 1)| < \beta$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $|z_1 + z_0| < \beta$ เมื่อ $z_1z_0 \geq 0$

เขียนใหม่ได้ว่า $|y_{i+1} + y_i| < \beta$ เมื่อ $y_{i+1}y_i \geq 0$ เป็นที่ยอมรับโดยกฎผลบวกจำกัด

<u>กรณีที่ 2</u> เมื่อ $z_1 < 0$ และ $z_0 > 0$ ต้องแสดงให้เห็นว่า $|z_0| < |z_1|$ เพราะ $z_1z_0 < 0$

ในการหาค่า ε เราจำเป็นต้องทราบค่าของ z_1

เนื่องจาก $-\beta + 1 \leq z_1 < 0$

ดังนั้นค่าของ $z_1 = \{-\beta + 1, -\beta + 2, -\beta + 3, \ldots, -\beta + n, \ldots, -1\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

แทนค่า z_1 ใน $2z_1 < \varepsilon < 2z_1 + \beta$

จะได้

เมื่อ $z_1 = -\beta + 1$, $-2\beta + 2 < \varepsilon < -\beta + 2$ จะได้ $0 < z_0 < \beta - 1$

เมื่อ $z_1 = -\beta + 2$, $-2\beta + 4 < \varepsilon < -\beta + 4$ จะได้ $0 < z_0 < \beta - 2$

เมื่อ $z_1 = -\beta + 3$, $-2\beta + 6 < \varepsilon < -\beta + 6$ จะได้ $0 < z_0 < \beta - 3$

$\ldots$

เมื่อ $z_1 = -\beta + n$, $-2\beta + 2n < \varepsilon < -\beta + 2n$ จะได้ $0 < z_0 < \beta - n$

เขียนใหม่ได้เป็น

เมื่อ $z_1 = -\beta + n$, $-2\beta + 2n < \varepsilon < -\beta + 2n$ จะได้ $0 < z_0 \leq \beta - n - 1$

สำหรับค่าสูงสุดของ z_0 จะเห็นว่า $|\beta - n - 1| < |-\beta + n|$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $|z_0| < |z_1|$ เมื่อ $z_1z_0 < 0$

เขียนใหม่ได้ว่า $|y_i| < |y_{i+1}|$ เมื่อ $y_{i+1}y_i < 0$ เป็นที่ยอมรับโดยกฎการลดลงของดิจิต

ช่วงที่ 3: $Z_i \in [-\beta + 1, \beta - 1]$, then $z_2 = 0$, $z_1 = 0$, $z_0 = c_{i-1}$

เนื่องจาก $z_2z_1 = c_i$ และ $z_0 = y_{i-1}$

ดังนั้น $c_i = 00$ และ $y_{i-1} = c_{i-1}$

ต่อไปหาค่า y_i จากสมการฟังก์ชันการทำให้เป็นบรรทัดฐาน $x_i\beta + c_{i-1} = c_i\beta + y_{i-1}$

เมื่อแทนค่าตัวห้อยที่สอดคล้องแล้วจะได้เป็น $x_{i+1}\beta + c_i = c_{i+1}\beta + y_i$

เราทราบแล้วว่า $x_{i+1}\beta + c_i = z_2z_1z_0$

เมื่อนำ $x_{i+1}\beta$ มาบวกกับ c_i ผลลัพท์ที่ได้ในตำแหน่ง z_0 ต้องขึ้นอยู่กับดิจิตที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุดของ c_i ซึ่งมีค่าเป็น 0 เพราะว่า $c_i = 00$

ดังนั้น $y_i = z_0 = 0$

เนื่องจาก $-\beta + 1 \le c_{i-1} \le \beta - 1$ ดังนั้นเมื่อนำค่า c_{i-1} ไปแทนใน $y_{i-1} = c_{i-1}$ เพื่อหาค่า y_{i-1}

จะได้ $-\beta + 1 \le y_{i-1} \le \beta - 1$

เราสามารถเห็นได้ว่า $y_i = 0$ เสมอ เพราะฉะนั้น $y_iy_{i-1} \ge 0$

เนื่องจาก $y_i = 0$ และ $-\beta + 1 \le y_{i-1} \le \beta - 1$

ดังนั้น $|y_i + y_{i-1}| < \beta$

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ผลลัพท์ที่ได้ในช่วงที่ 3 นี้ เป็นที่ยอมรับโดยกฎผลบวกจำกัด

ช่วงที่ 4: $Z_i \in [\beta, \beta^2 - \beta]$, then $z_2 = 0$, $x_i\beta + c_{i-1} = z_1\beta + z_0$ and $z_0 = z_1 - \varepsilon$

where $2z_1 - \beta < \varepsilon < 2z_1$

เนื่องจากช่วงที่ 4 นี้ z_1 เป็นบวก และ z_0 เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น การพิสูจน์จึงต้องแบ่งออกเป็นสองกรณี

กรณีที่ 1 เมื่อ $z_1 > 0$ และ $z_0 < 0$ ต้องแสดงให้เห็นว่า $|z_0| < |z_1|$ เพราะ $z_1z_0 < 0$

ในการหาค่า ε เราจำเป็นต้องทราบค่าของ z_1

เนื่องจาก $0 < z_1 \le \beta - 1$

ดังนั้นค่าของ $z_1 = \{1,\ldots, \beta - \text{n},\ldots, \beta - 3, \beta - 2, \beta - 1\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

แทนค่า z_1 ใน $2z_1 - \beta < \varepsilon < 2z_1$

จะได้

เมื่อ $z_1 = \beta - 1$, $\beta - 2 < \varepsilon < 2\beta - 2$ จะได้ $-\beta + 1 < z_0 < 0$

เมื่อ $z_1 = \beta - 2$, $\beta - 4 < \varepsilon < 2\beta - 4$ จะได้ $-\beta + 2 < z_0 < 0$

เมื่อ $z_1 = \beta - 3$, $\beta - 6 < \varepsilon < 2\beta - 6$ จะได้ $-\beta + 3 < z_0 < 0$

$\ldots$

เมื่อ $z_1 = \beta - n$, $\beta - 2n < \varepsilon < 2\beta - 2n$ จะได้ $-\beta + n < z_0 < 0$

เขียนใหม่ได้เป็น

เมื่อ $z_1 = \beta - n$, $\beta - 2n < \varepsilon < 2\beta - 2n$ จะได้ $-\beta + n + 1 \le z_0 < 0$

สำหรับค่าต่ำสุดของ z_0 จะเห็นว่า $|-\beta + n + 1| < |\beta - n|$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $|z_0| < |z_1|$ เมื่อ $z_1z_0 < 0$

เขียนใหม่ได้ว่า $|y_i| < |y_{i+1}|$ เมื่อ $y_{i+1}\, y_i < 0$ เป็นที่ยอมรับโดยกฎการลดลงของดิจิต

<u>กรณีที่ 2</u> เมื่อ $z_1 > 0$ และ $z_0 \geq 0$ ต้องแสดงให้เห็นว่า $|z_1 + z_0| < \beta$ เพราะ $z_1z_0 \geq 0$

ในการหาค่า ε เราจำเป็นต้องทราบค่าของ z_1

เนื่องจาก $0 < z_1 \leq \beta - 1$

ดังนั้นค่าของ $z_1 = \{1,\ldots, \beta - n,\ldots, \beta - 3, \beta - 2, \beta - 1\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

แทนค่า z_1 ใน $2z_1 - \beta < \varepsilon < 2z_1$

จะได้

เมื่อ $z_1 = \beta - 1, \beta - 2 < \varepsilon < 2\beta - 2$ จะได้ $0 \leq z_0 < 1$

เมื่อ $z_1 = \beta - 2, \beta - 4 < \varepsilon < 2\beta - 4$ จะได้ $0 \leq z_0 < 2$

เมื่อ $z_1 = \beta - 3, \beta - 6 < \varepsilon < 2\beta - 6$ จะได้ $0 \leq z_0 < 3$

$\ldots$

เมื่อ $z_1 = \beta - n, \beta - 2n < \varepsilon < 2\beta - 2n$ จะได้ $0 \leq z_0 < n$

เขียนใหม่ได้เป็น

เมื่อ $z_1 = \beta - n, \beta - 2n < \varepsilon < 2\beta - 2n$ จะได้ $0 \leq z_0 \leq n - 1$

สำหรับค่าสูงสุดของ z_0 จะเห็นว่า $|(\beta - n) + (n - 1)| < \beta$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $|z_1 + z_0| < \beta$ เมื่อ $z_1z_0 \geq 0$

เขียนใหม่ได้ว่า $|y_{i+1} + y_i| < \beta$ เมื่อ $y_{i+1}y_i \geq 0$ เป็นที่ยอมรับโดยกฎผลบวกจำกัด

ช่วงที่ 5: $Z_i \in [\beta^2 - \beta + 1, \beta^2]$, then $z_2 = 1, z_1 = 0, z_0 = -\beta + c_{i-1}$

เนื่องจาก $z_2z_1 = c_i$ และ $z_0 = y_{i-1}$

ดังนั้น $c_i = 10$ และ $y_{i-1} = -\beta + c_{i-1}$

ต่อไปหาค่า y_i จากสมการฟังก์ชันการทำให้เป็นบรรทัดฐาน $x_i\beta + c_{i-1} = c_i\beta + y_{i-1}$

เมื่อแทนค่าตัวห้อยที่สอดคล้องแล้วจะได้เป็น $x_{i+1}\beta + c_i = c_{i+1}\beta + y_i$

เราทราบแล้วว่า $x_{i+1}\beta + c_i = z_2z_1z_0$

เมื่อนำ $x_{i+1}\beta$ มาบวกกับ c_i ผลลัพท์ที่ได้ในตำแหน่ง z_0 ต้องขึ้นอยู่กับดิจิตที่มีนัยสำคัญน้อยที่สุดของ c_i ซึ่งมีค่าเป็น 0 เพราะว่า $c_i = 10$

ดังนั้น $y_i = z_0 = 0$

เนื่องจาก $0 < c_{i-1} \leq \beta$ ดังนั้นเมื่อนำค่า c_{i-1} ไปแทนใน $y_{i-1} = -\beta + c_{i-1}$ เพื่อหาค่า y_{i-1}

จะได้ $-\beta < y_{i-1} \leq 0$

เราสามารถเห็นได้ว่า $y_i = 0$ เสมอ เพราะฉะนั้น $y_i y_{i-1} \geq 0$

เนื่องจาก $y_i = 0$ และ $-\beta < y_{i-1} \leq 0$

ดังนั้น $|y_i + y_{i-1}| < \beta$

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ผลลัพท์ที่ได้ในช่วงที่ 5 นี้ เป็นที่ยอมรับโดยกฎผลบวกจำกัด

จากบทพิสูจน์ทั้ง 5 ช่วง สามารถสรุปได้ว่า Y เป็นรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด
สิ้นสุดการพิสูจน์ ■

ตัวอย่างที่ 4.1 *การสร้างตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์บนเลขฐาน 4 และชุดตัวเลข* $D = \{\bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2, 3\}$

วิธีทำ จากอัลกอริทึมการสร้างตารางการทำให้เป็นบรรทัดฐานจะได้ $C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ การคำนวณหาค่าในตารางแบ่งออกเป็น 5 ช่วง ดังต่อไปนี้

ช่วงที่ 1: $Z_i \in [-\beta^2, -\beta^2 + \beta - 1]$, then $z_2 = \bar{1}$, $z_1 = 0$, $z_0 = \beta + c_{i-1}$

ซึ่งก็คือช่วง $[-16, -13]$

เมื่อค่า $c_{i-1} = -4$, $z_0 = \beta - 4 = 0$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น $\bar{1}00$

เมื่อค่า $c_{i-1} = -3$, $z_0 = \beta - 3 = 1$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น $\bar{1}01$

เมื่อค่า $c_{i-1} = -2$, $z_0 = \beta - 2 = 2$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น $\bar{1}02$

เมื่อค่า $c_{i-1} = -1$, $z_0 = \beta - 1 = 3$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น $\bar{1}03$

ช่วงที่ 2: $Z_i \in [-\beta^2 + \beta, -\beta]$, then $z_2 = 0$, $x_i\beta + c_{i-1} = z_1\beta + z_0$ and $z_0 = z_1 - \varepsilon$

where $2z_1 < \varepsilon < 2z_1 + \beta$

ซึ่งก็คือช่วง $[-12, -4]$

เมื่อค่า $c_{i-1} = 0$, ให้เลือก $z_1 = \bar{3}$ ลองแทนในสมการเนื่องจาก $x_i = \bar{3}$

แทนค่า $z_1 = \bar{3}$ ใน $2z_1 < \varepsilon < 2z_1 + \beta$

จะได้ $-6 < \varepsilon < -2$ หรือ $\varepsilon = \{-5, -4, -3\}$

เมื่อแทนค่า $z_1 = \bar{3}$, $x_i = \bar{3}$ และ $c_{i-1} = 0$ ใน

$$x_i\beta + c_{i-1} = z_1\beta + z_1 - \varepsilon$$

จะได้

$$\begin{aligned} (-3)4 + 0 &= (-3)4 + (-3) - \varepsilon \\ -12 &= -12 - 3 - \varepsilon \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \varepsilon = -3 \text{ ซึ่งอยู่ใน } \{-5, -4, -3\}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่า $z_1 = -3$ และ $\varepsilon = -3$ ใน $z_0 = z_1 - \varepsilon$

จะได้ $z_0 = -3 - (-3) = 0$

ผลลัพธ์ในตารางเป็น $0\bar{3}0$

เมื่อค่า $c_{i-1} = 1$, ให้เลือก $z_1 = \bar{3}$ ลองแทนในสมการเนื่องจาก $x_i = \bar{3}$

แทนค่า $z_1 = \bar{3}$ ใน $2z_1 < \varepsilon < 2z_1 + \beta$

จะได้ $-6 < \varepsilon < -2$ หรือ $\varepsilon = \{-5, -4, -3\}$

เมื่อแทนค่า $z_1 = \bar{3}$, $x_i = \bar{3}$ และ $c_{i-1} = 1$ ใน

$$x_i\beta + c_{i-1} = z_1\beta + z_1 - \varepsilon$$

จะได้

$$\begin{aligned} (-3)4 + 1 &= (-3)4 + (-3) - \varepsilon \\ -12 + 1 &= -12 - 3 - \varepsilon \\ \therefore \quad \varepsilon &= -4 \text{ ซึ่งอยู่ใน } \{-5, -4, -3\} \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่า $z_1 = -3$ และ $\varepsilon = -4$ ใน $z_0 = z_1 - \varepsilon$

จะได้ $z_0 = -3 - (-4) = 1$

ผลลัพธ์ในตารางเป็น $0\bar{3}1$

เมื่อค่า $c_{i-1} = 2$, ให้เลือก $z_1 = \bar{3}$ ลองแทนในสมการเนื่องจาก $x_i = \bar{3}$

แทนค่า $z_1 = \bar{3}$ ใน $2z_1 < \varepsilon < 2z_1 + \beta$

จะได้ $-6 < \varepsilon < -2$ หรือ $\varepsilon = \{-5, -4, -3\}$

เมื่อแทนค่า $z_1 = \bar{3}$, $x_i = \bar{3}$ และ $c_{i-1} = 2$ ใน

$$x_i\beta + c_{i-1} = z_1\beta + z_1 - \varepsilon$$

จะได้

$$\begin{aligned} (-3)4 + 2 &= (-3)4 + (-3) - \varepsilon \\ -12 + 2 &= -12 - 3 - \varepsilon \\ \therefore \quad \varepsilon &= -5 \text{ ซึ่งอยู่ใน } \{-5, -4, -3\} \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่า $z_1 = -3$ และ $\varepsilon = -5$ ใน $z_0 = z_1 - \varepsilon$

จะได้ $z_0 = -3 - (-4) = 2$

ผลลัพธ์ในตารางเป็น $0\bar{3}2$

เมื่อค่า $c_{i-1} = 3$, ให้เลือก $z_1 = \bar{3}$ ลองแทนในสมการเนื่องจาก $x_i = \bar{3}$

แทนค่า $z_1 = \bar{3}$ ใน $2z_1 < \varepsilon < 2z_1 + \beta$

จะได้ $-6 < \varepsilon < -2$ หรือ $\varepsilon = \{-5, -4, -3\}$

เมื่อแทนค่า $z_1 = \bar{3}$, $x_i = \bar{3}$ และ $c_{i-1} = 3$ ใน

$$x_i\beta + c_{i-1} = z_1\beta + z_1 - \varepsilon$$

จะได้

$$\begin{aligned} (-3)4 + 3 &= (-3)4 + (-3) - \varepsilon \\ -12 + 3 &= -12 - 3 - \varepsilon \\ \therefore \quad \varepsilon &= -6 \text{ ซึ่งไม่อยู่ใน } \{-5, -4, -3\} \end{aligned}$$

ดังนั้นจึงต้องเลือกค่า z_1 มาใหม่อีกหนึ่งค่า โดยอาจเลือก $\bar{4}$ หรือ $\bar{2}$ ก็ได้

แต่เนื่องจาก $\bar{4} \notin D$ ดังนั้นเราจึงเลือก $z_1 = \bar{2}$

แทนค่า $z_1 = \bar{2}$ ใน $2z_1 < \varepsilon < 2z_1 + \beta$

จะได้ $-4 < \varepsilon < 0$ หรือ $\varepsilon = \{-3, -2, -1\}$

เมื่อแทนค่า $z_1 = \bar{2}$, $x_i = \bar{3}$ และ $c_{i-1} = 3$ ใน

$$x_i\beta + c_{i-1} = z_1\beta + z_1 - \varepsilon$$

จะได้

$$\begin{aligned} (-3)4 + 3 &= (-2)4 + (-2) - \varepsilon \\ -12 + 3 &= -8 - 2 - \varepsilon \\ \therefore \quad \varepsilon &= -1 \text{ ซึ่งอยู่ใน } \{-3, -2, -1\} \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่า $z_1 = -2$ และ $\varepsilon = -1$ ใน $z_0 = z_1 - \varepsilon$

จะได้ $z_0 = -2 - (-1) = -1$

ผลลัพธ์ในตารางเป็น $0\bar{2}\,\bar{1}$

คำนวณค่าในตารางแบบนี้ไปเรื่อยๆจนได้ผลลัพธ์ทั้งหมดของช่วงที่ 2

ช่วงที่ 3: $Z_i \in [-\beta + 1, \beta - 1]$, then $z_2 = 0$, $z_1 = 0$, $z_0 = c_{i-1}$

ซึ่งก็คือช่วง [-3, 3]

เมื่อค่า $c_{i-1} = -3$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น $00\bar{3}$

เมื่อค่า $c_{i-1} = -2$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น $00\bar{2}$

เมื่อค่า $c_{i-1} = -1$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น $00\bar{1}$

เมื่อค่า $c_{i-1} = 0$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น 000

เมื่อค่า $c_{i-1} = 1$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น 001

เมื่อค่า $c_{i-1} = 2$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น 002

เมื่อค่า $c_{i-1} = 3$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น 003

ช่วงที่ 4: $Z_i \in [\beta, \beta^2 - \beta]$, then $z_2 = 0$, $x_i\beta + c_{i\text{-}1} = z_1\beta + z_0$ and $z_0 = z_1 - \varepsilon$

where $2z_1 - \beta < \varepsilon < 2z_1$

ซึ่งก็คือช่วง [4, 12]

เมื่อค่า $c_{i\text{-}1} = 4$, ให้เลือก $z_1 = 0$ ลองแทนในสมการเนื่องจาก $x_i = 0$

แทนค่า $z_1 = 0$ ใน $2z_1 - \beta < \varepsilon < 2z_1$

จะได้ $-4 < \varepsilon < 0$ หรือ $\varepsilon = \{-3, -2, -1\}$

เมื่อแทนค่า $z_1 = 0$, $x_i = 0$ และ $c_{i\text{-}1} = 4$ ใน

$$x_i\beta + c_{i\text{-}1} = z_1\beta + z_1 - \varepsilon$$

จะได้

$$\begin{aligned} (0)4 + 4 &= (0)4 + (0) - \varepsilon \\ 4 &= 0 - 0 - \varepsilon \\ \therefore\ \varepsilon &= -4 \text{ ซึ่งไม่อยู่ใน } \{-3, -2, -1\} \end{aligned}$$

ดังนั้นจึงต้องเลือกค่า z_1 มาใหม่อีกหนึ่งค่า โดยอาจเลือก $\bar{1}$ หรือ 1 ก็ได้

แต่เนื่องจากถ้าเลือก $\bar{1}$ จะส่งผลให้ค่า $x_i\beta + c_{i\text{-}1}$ เป็นลบ ซึ่งไม่อยู่ในช่วงที่ 4

ดังนั้นเราจึงเลือก $z_1 = 1$

แทนค่า $z_1 = 1$ ใน $2z_1 - \beta < \varepsilon < 2z_1$

จะได้ $-2 < \varepsilon < 2$ หรือ $\varepsilon = \{-1, 0, 1\}$

เมื่อแทนค่า $z_1 = 1$, $x_i = 0$ และ $c_{i\text{-}1} = 4$ ใน

$$x_i\beta + c_{i\text{-}1} = z_1\beta + z_1 - \varepsilon$$

จะได้

$$\begin{aligned} (0)4 + 4 &= (1)4 + (1) - \varepsilon \\ 4 &= 4 + 1 - \varepsilon \\ \therefore\ \varepsilon &= 1 \text{ ซึ่งอยู่ใน } \{-1, 0, 1\} \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่า $z_1 = 1$ และ $\varepsilon = 1$ ใน $z_0 = z_1 - \varepsilon$

จะได้ $z_0 = 1 - (1) = 0$

ผลลัพธ์ในตารางเป็น 010

คำนวณค่าในตารางแบบนี้ไปเรื่อยๆจนได้ผลลัพธ์ทั้งหมดของช่วงที่ 4

ช่วงที่ 5: $Z_i \in [\beta^2 - \beta + 1, \beta^2]$, then $z_2 = 1$, $z_1 = 0$, $z_0 = -\beta + c_{i\text{-}1}$

ซึ่งก็คือช่วง [13, 16]

เมื่อค่า $c_{i-1} = 1, z_0 = -\beta + 1 = \bar{3}$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น $10\bar{3}$

เมื่อค่า $c_{i-1} = 2, z_0 = -\beta + 2 = \bar{2}$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น $10\bar{2}$

เมื่อค่า $c_{i-1} = 3, z_0 = -\beta + 3 = \bar{1}$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น $10\bar{1}$

เมื่อค่า $c_{i-1} = 4, z_0 = -\beta + 4 = 0$ ผลลัพธ์ในตารางเป็น 100

จากการคำนวณหาผลลัพธ์ในตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์ทั้ง 5 ช่วง บนระบบจำนวนซ้ำซ้อนฐาน 4 สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 แสดงตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์บนเลขฐาน 4

$\sigma\alpha$		x_i						
		$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	0	1	2	3
c_{i-1}	-4	$\bar{1}00$	$0\bar{3}0$	$0\bar{2}0$	$0\bar{1}0$	000	010	020
	-3	$\bar{1}01$	$0\bar{3}1$	$0\bar{2}1$	$00\bar{3}$	001	011	021
	-2	$\bar{1}02$	$0\bar{3}2$	$0\bar{1}\bar{2}$	$00\bar{2}$	002	012	$03\bar{2}$
	-1	$\bar{1}03$	$0\bar{2}\bar{1}$	$0\bar{1}\bar{1}$	$00\bar{1}$	003	$02\bar{1}$	$03\bar{1}$
	0	$0\bar{3}0$	$0\bar{2}0$	$0\bar{1}0$	000	010	020	030
	1	$0\bar{3}1$	$0\bar{2}1$	$00\bar{3}$	001	011	021	$10\bar{3}$
	2	$0\bar{3}2$	$0\bar{1}\bar{2}$	$00\bar{2}$	002	012	$03\bar{2}$	$10\bar{2}$
	3	$0\bar{2}\bar{1}$	$0\bar{1}\bar{1}$	$00\bar{1}$	003	$02\bar{1}$	$03\bar{1}$	$10\bar{1}$
	4	$0\bar{2}0$	$0\bar{1}0$	000	010	020	030	100

□

ตัวอย่างที่ 4.2 *กำหนดให้* $D = \{\bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2, 3\}$ *เป็นชุดตัวเลขซ้ำซ้อนฐานสี่ ให้* X *เป็นรูปแบบการแทนจำนวนบนฐาน* $\beta = 4$ *ใน* D *และ* $X = 1\bar{2}3\bar{2}1\bar{3}21\bar{1}\,\bar{2}302\bar{3}\,\bar{2}3 = 706260043_{10}$ *ซึ่งมีค่าน้ำหนักเป็น 15 จากบทตั้งที่ 4.1 จะได้* $C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ *เป็นชุดตัวเลขตัวทด ดังนั้นการทำให้เป็นบรรทัดฐานที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดของ* $X \rightarrow Y$ *โดยอาศัยสถาปัตยกรรมการแปลงแบบทำควบคู่กันสามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้*

ตัวทดนำเข้าเริ่มต้น $c_0 = x_0 = 3$ นำไปคำนวณหาค่า c_i และ y_i ทั้งหมดโดยอาศัยฟังก์ชันการแพร่ตัวทด σ และฟังก์ชันการแปลงดิจิต α ที่ได้นิยามไว้แล้วในบทที่ 3 ซึ่งกล่าวว่า

$$\sigma: \quad D \times C \rightarrow C$$
$$\sigma(x_i, c_{i-1}) = c_i$$

และ
$$\alpha: \quad D \times C \rightarrow D$$
$$\alpha(x_i, c_{i-1}) = y_{i-1}$$

โดยที่ c_i และ c_{i-1} เป็นสมาชิกในชุดตัวเลข C จะได้ว่า

$$x_i\beta + c_{i-1} = c_i\beta + y_{i-1}$$

ดังนั้นค่า c_i จากสมการฟังก์ชันการแพร่ตัวทดเขียนได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
&c_0 = 3\\
&c_1 = \sigma_1\,(c_0) = \sigma_1(3) = -1\\
&c_2 = \sigma_2\,(c_1) = \sigma_2(-1) = -4\\
&c_3 = \sigma_3\,(c_2) = \sigma_3(-4) = 1\\
&c_4 = \sigma_4\,(c_3) = \sigma_4(1) = 0\\
&c_5 = \sigma_5\,(c_4) = \sigma_5(0) = 3\\
&c_6 = \sigma_6\,(c_5) = \sigma_6(3) = -1\\
&c_7 = \sigma_7\,(c_6) = \sigma_7(-1) = -1\\
&c_8 = \sigma_8\,(c_7) = \sigma_8(-1) = 0\\
&c_9 = \sigma_9\,(c_8) = \sigma_9(0) = 2\\
&c_{10} = \sigma_{10}\,(c_9) = \sigma_{10}(2) = -3\\
&c_{11} = \sigma_{11}\,(c_{10}) = \sigma_{11}(-3) = 0\\
&c_{12} = \sigma_{12}\,(c_{11}) = \sigma_{12}(0) = -2\\
&c_{13} = \sigma_{13}\,(c_{12}) = \sigma_{13}(-2) = 3\\
&c_{14} = \sigma_{14}\,(c_{13}) = \sigma_{14}(3) = -1\\
&c_{15} = \sigma_{15}\,(c_{14}) = \sigma_{15}(-1) = 0
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ c = (0\ -1\ 3\ -2\ 0\ -3\ 2\ 0\ -1\ -1\ 3\ 0\ 1\ -4\ -1\ 3)$$

และค่า y_i จากสมการฟังก์ชันการแปลงดิจิตเขียนได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
&y_0 = \alpha_0(c_0) = \alpha_0(3) = \bar{1}\\
&y_1 = \alpha_1(c_1) = \alpha_1(-1) = 3\\
&y_2 = \alpha_2(c_2) = \alpha_2(-4) = 0\\
&y_3 = \alpha_3(c_3) = \alpha_3(1) = 1\\
&y_4 = \alpha_4(c_4) = \alpha_4(0) = 0\\
&y_5 = \alpha_5(c_5) = \alpha_5(3) = \bar{1}\\
&y_6 = \alpha_6(c_6) = \alpha_6(-1) = \bar{1}\\
&y_7 = \alpha_7(c_7) = \alpha_7(-1) = 3\\
&y_8 = \alpha_8(c_0) = \alpha_8(0) = 0\\
&y_9 = \alpha_9(c_1) = \alpha_9(2) = 2\\
&y_{10} = \alpha_{10}(c_2) = \alpha_{10}(-3) = 1\\
&y_{11} = \alpha_{11}(c_3) = \alpha_{11}(0) = 0\\
&y_{12} = \alpha_{12}(c_4) = \alpha_{12}(-2) = \bar{2}\\
&y_{13} = \alpha_{13}(c_5) = \alpha_{13}(3) = \bar{1}\\
&y_{14} = \alpha_{14}(c_6) = \alpha_{14}(-1) = 3\\
&y_{15} = \alpha_{15}(c_7) = \alpha_{15}(0) = 0
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ Y = 03\bar{1}\,\bar{2}\,01203\bar{1}\bar{1}0103\bar{1}$$

เพราะฉะนั้น $X = 1\bar{2}3\bar{2}1\bar{3}21\bar{1}\bar{2}302\bar{3}\bar{2}3$ เมื่อ $x_i \in D$ จะถูกแปลงเป็น $Y = 03\bar{1}\bar{2}012031\bar{1}\bar{1}01031\bar{1}$ เมื่อ $y_i \in D$ โดยที่ $||X|| = ||Y|| = 706260043_{10}$

ต่อไปทดสอบว่าผลลัพธ์ Y ที่ได้ อยู่ในรูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด จากกฎผลบวกจำกัด และ กฎการลดลงของดิจิต จากนิยามที่ 2.4 เราสามารถสร้างเป็นตารางเปรียบเทียบ x_i กับ x_{i+1} ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.3 แสดงการเปรียบเทียบ x_i กับ x_{i+1} บนเลขฐาน 4

x_i	x_{i+1}
-3	0
-2	0, -1, 3
-1	0, -1, ±2, 3
0	0, ±1, ±2, ±3
1	0, 1, ±2, -3
2	0, 1, -3
3	0

ให้ตรวจสอบดิจิตทีละคู่ใน Y จะเห็นว่า Y เป็นจีนาฟ เนื่องจากดิจิตทุกคู่ผ่านข้อบังคับในตารางที่ 4.3 ดังนั้นรูปแบบการแทนจำนวน Y เป็นรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด ซึ่งมีค่าน้ำหนักเป็น 11 □

4.2 สรุป

ในบทนี้เราได้กล่าวถึงวิธีการทำให้เป็นบรรทัดฐานบนเลขฐานที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง โดยอาศัยสถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กัน โดยเสนออัลกอริทึมในการสร้างตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์เพื่อใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์ที่อยู่ในรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด และยังได้พิสูจน์ได้เห็นว่า การทำให้เป็นบรรทัดฐานนี้ทำงานได้อย่างถูกต้อง

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยชิ้นนี้ได้นำเสนอวิธีการแปลงจำนวนๆ หนึ่งบนระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมายมากที่สุดและมีคุณสมบัติสมมาตรให้อยู่ในรูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด โดยอาศัยสถาปัตยกรรมการแปลงแบบทำควบคู่กันซึ่งเป็นการแปลงชุดตัวเลขแบบขนาน ดังนั้นจึงส่งผลให้เวลาที่ใช้ในการแปลงจากเดิมที่เป็นเวลาเชิงเส้นคือ $\mathrm{O}(n)$ ไปเป็นเวลาลอการิทึม $\mathrm{O}(\log n)$ เมื่อ n คือขนาดของรูปแบบการแทนจำนวนที่ทำให้เป็นบรรทัดฐาน วิธีการแปลงนี้เราให้ชื่อว่า การทำให้เป็นบรรทัดฐาน โดยเสนอรูปทั่วไปในการสร้างตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์ซึ่งผลิตผลลัพธ์ 3 ดิจิตในแต่ละช่องของตาราง รูปแบบมาตราฐานในการสร้างตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์นี้จำเป็นต้องแบ่งออกเป็น 5 ช่วงเนื่องจากข้อจำกัดที่ว่า ผลลัพธ์ที่ได้ต้องมีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด ดังนั้นจึงต้องอาศัยกฎผลบวกจำกัดและกฎการลดลงของดิจิตในหัวข้อที่ 2.6 เพื่อให้เราสร้างตารางที่จะสามารถผลิตผลลัพธ์ให้อยู่ในรูปแบบที่เรียกว่าจีนาฟซึ่งเป็นรูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด และวิธีการทำให้เป็นบรรทัดฐานนี้สามารถช่วยให้การแปลงจำนวนทำได้กับทุกๆเลขฐานที่มากกว่าหรือเท่ากับสอง

ในงานวิจัยนี้ยังได้พิสูจน์ให้เห็นว่าการทำให้เป็นบรรทัดฐานนี้ทำงานได้ถูกต้องโดยแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นส่วนๆ กล่าวคือ พิสูจน์หาขนาดของตัวทดที่ใช้ พิสูจน์ว่าค่าในตารางมีขนาดจำกัด พิสูจน์ว่า 3 ดิจิตเพียงพอในการแทนค่าทั้งหมดในตารางฟังก์ชันการแปลงที่สมบูรณ์ พิสูจน์ว่าค่าเชิงตัวเลขของจำนวนนำเข้าและจำนวนนำออกมีค่าเท่ากัน และพิสูจน์ว่าผลลัพธ์ที่ได้เป็นรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด ทั้งนี้ก็เพื่อแสดงให้เห็นว่าการทำให้เป็นบรรทัดฐานนี้ทำงานได้อย่างถูกต้องตามขอบเขตที่กำหนดไว้ และได้แสดงวิธีการคำนวณโดยอาศัยตัวอย่างประกอบเพื่อให้เห็นการทำงานของการทำให้เป็นบรรทัดฐานอย่างชัดเจนยิ่งขึ้น

สำหรับในระดับของการทำให้เกิดผล เราไม่สามารถนับค่าน้ำหนักของดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์ว่ามีค่าน้ำหนักเป็นหนึ่งได้ทั้งหมด เนื่องจากการแทนค่าเป็นได้เพียงศูนย์และหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นสำหรับทุกๆ ดิจิต ต้องแทนค่าด้วยศูนย์และหนึ่งเท่านั้น ซึ่งก็คือในแต่ละดิจิต การแทนค่าของศูนย์และหนึ่งย่อมแตกต่างกันไป โดยที่ $\bar{1}$ แทนด้วย 10, 0 แทนด้วย 00 และ 1 แทนด้วย 01

ดังนั้นการแทนค่าของดิจิตสำหรับเลขฐานสี่จะเป็นดังตัวอย่างต่อไปนี้

$3 = 11$ แทนด้วย 0101 มีค่าน้ำหนักเป็น 2

$2 = 10$ แทนด้วย 0100 มีค่าน้ำหนักเป็น 1

$1 = 01$ แทนด้วย 0001 มีค่าน้ำหนักเป็น 1

$0 = 00$ แทนด้วย 0000 มีค่าน้ำหนักเป็น 0

$\bar{1} = 0\bar{1}$ แทนด้วย 0010 มีค่าน้ำหนักเป็น 1

$\bar{2} = \bar{1}0$ แทนด้วย 1000 มีค่าน้ำหนักเป็น 1

$\bar{3} = \bar{1}\bar{1}$ แทนด้วย 1010 มีค่าน้ำหนักเป็น 2

เป็นต้น

จะเห็นได้ว่าค่าน้ำหนักของรูปแบบการแทนจำนวนในระดับทฤษฎีกับระดับทำให้เกิดผลมีความแตกต่างกันขึ้นอยู่กับการออกแบบวงจรในการทำงาน ดังนั้นเพื่อให้ได้รูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดในระดับทำให้เกิดผลจำเป็นต้องมีการออกแบบวงจรเพิ่มเติม ซึ่งเป็นสิ่งที่น่าสนใจทำต่อไป

5.2 ข้อจำกัดของงานวิจัย

รูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดสำหรับระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมายนี้มีอยู่หลายรูปแบบ ในระบบเลขฐานสอง รูปแบบที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดคือต้องไม่มีดิจิตที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ติดกัน ดังนั้นจึงสามารถเขียนแทนได้หลายแบบ แต่สำหรับระบบเลขฐานที่มากกว่าสอง ในปัจจุบันเราสามารถหารูปแบบที่เป็นมาตราฐานได้เพียงรูปแบบเดียว ซึ่งก็คือรูปแบบที่เรียกว่าจีนาฟ ส่งผลให้จำนวนซ้ำซ้อนที่ใช้ต้องเป็นระบบจำนวนซ้ำซ้อนมากที่สุดและต้องมีคุณสมบัติสมมาตรด้วยหรือที่เรียกว่าชุดตัวเลขคาโนนิคอลแบบมีเครื่องหมาย เพราะสำหรับระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบอื่นยังไม่มีรูปแบบที่เป็นมาตราฐานในการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุด

5.3 ข้อเสนอแนะ

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่างานวิจัยนี้อ้างอิงระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมายมากที่สุดและต้องมีคุณสมบัติสมมาตรเท่านั้น เนื่องจากรูปแบบในการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดสำหรับเลขฐานที่มากกว่าหรือเท่ากับสองบนระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบอื่นๆ ยังไม่มีรูปแบบที่เป็นมาตราฐานรองรับที่ชัดเจน ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงจำเป็นต้องอาศัยรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่า

น้ำหนักน้อยที่สุดที่เป็นมาตราฐานและสามารถอ้างอิงได้ที่เรียกว่าจีนาฟดังนั้นการทำให้เป็นบรรทัดฐานสำหรับระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบอื่นๆ จะสามารถทำได้ก็ต่อเมื่อมีรูปแบบการแทนจำนวนที่มีค่าน้ำหนักน้อยที่สุดที่เป็นมาตราฐานรองรับแล้ว สิ่งที่เป็นประเด็นน่าสนใจในการวิจัยต่อไปคือการหารูปแบบที่เป็นมาตราฐานสำหรับระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบอื่นๆ เพื่อใช้อ้างอิงในการทำให้เป็นบรรทัดฐานต่อไป

รายการอ้างอิง

1. Avizienis, A. Signed-digit number representation for fast parallel arithmetic. IRE Transaction on electronic computer. (1961): 389-400.
2. Kornerup, P. Digit-Set Conversion: Generalization and Application. IEEE Transactions on Computers. 43 (1994): 622-629.
3. Phillips, B.; and Burgess, N. Minimal Weight Digit Set Conversions. IEEE Transactions on Computers. 53 (2004): 666-677.
4. Ercegovac, M. D.; and Trivedi, K. S. On line algorithms for division and multiplication IEEE Transactions on Computers. C-26 (1977): 681-687.
5. Surarerks, A. Digit Set Conversion by On-Line Finite Automata. Bull. Belg. Math. Society. 8 (2001): 337-358.
6. Frougny, C.; and Surarerks, A. On-line multiplication in real and complex base. Proceedings of the 16th IEEE Symposium on Computer Arithmetic. (2003).
7. Ercegovac, M. D.; and Lang, T. On-the-fly Conversion of Redundant into Conventional Representations. IEEE Transactions on Computers. (1985): 895-897.
8. Parhami, B. On Producing Exactly Rounded Results in Digit-Serial on-Line Arithmetic. IEEE Transactions on Computers. (2000): 889-893.
9. Ercegovac, M. D. Left-to-Right Carry-Free Scheme for Computing $ab + cd$. IEEE Transactions on Computers. (2000): 1330-1333.
10. Ercegovac, M. D. Left-to-Right Squarer with Overlapped LS and MS Parts. IEEE Transactions on Computers. (2003): 1451-1455.
11. Reitwiesner, G. W. Binary Arithmetic. Advances in computers. 1 (1960): 232-308.
12. Arno, S.; and Wheeler, F. S. Signed Digit Representations of Minimal Hamming Weight. IEEE Transactions on Computers. 42 (1993): 1007-1010.
13. Jedwab, J.; and Mitchell, C. J. Minimum Weight Modified Signed-Digit Representations and Fast Exponentiation. Electronics Letters. 25 (1989): 1171-1172.
14. Clark, W. E.; and Liang, J. J. On Arithmetic Weight for a General Radix Representation of Integers. IEEE Transactions on Computers. 19 (1973): 823-826.

15. Wu, H.; and Hasan, M. A. Closed-Form Expression for the Average Weight of Signed-Digit Representations. IEEE Transactions on Computers. 48 (1999): 848-851.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายนิธิชัย อนันตะเศรษฐกูล เกิดเมื่อวันที่ 4 มีนาคม 2523 เรียนจบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาที่โรงเรียน Epping Boys High School เมืองซิดนีย์ ประเทศออสเตรเลีย ในปี ค.ศ. 1998 สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ จากคณะวิทยาลัยนานาชาติ มหาวิทยาลัยมหิดล ในปีการศึกษา 2545 ด้วยเกียรตินิยมอันดับสอง และเข้าศึกษาในหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ที่ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2546