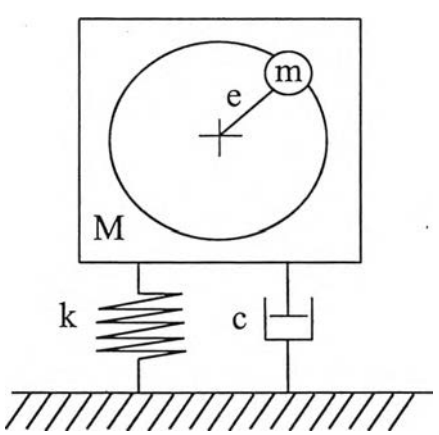
บทที่ 4
ผลตอบสนองสภาวะคงตัวของระบบภายใต้ภาระกระทำจากการหมุนที่ไม่สมดุล

ในบทนี้จะทำการวิเคราะห์ผลตอบสนองของโครงสร้างอาคารภายใต้ภาระกระทำแบบฮาร์โมนิคเนื่องจากการหมุนที่ไม่สมดุลของเครื่องจักรในสภาวะคงตัว (Steady state response) ว่ามีปัจจัยใดบ้างที่ทำให้ผลตอบสนองสภาวะคงตัวของการสั่นสะเทือนมีค่าสูงมาก แนวทางในการลดปัญหาการสั่นสะเทือนด้วยวิธีแยกการสั่นสะเทือน (Vibration isolation) โดยเริ่มจากปัญหาที่มีระดับขั้นความเสรีเป็นหนึ่ง แล้วขยายผลไปสู่ปัญหาที่มีหลายระดับขั้นความเสรี

4.1 ผลตอบสนองสภาวะคงตัวภายใต้ภาระกระทำจากการหมุนที่ไม่สมดุล

ปัญหาการสั่นสะเทือนในโครงสร้างอาคารที่เกิดจากแรงไม่สมดุลของเครื่องจักร ส่วนใหญ่เกิดจากเครื่องจักรแบบหมุนที่มีมวลไม่สมดุล พิจารณาแบบจำลองของระบบการสั่นสะเทือนแบบบังคับที่มีระดับขั้นความเสรีเป็น 1 ดังรูป มวลขนาด M ยึดติดกับสปริงและตัวหน่วงที่มีค่านิจของสปริงและค่าความหน่วงเป็น k และ c ตามลำดับ ตัวมวล M มีส่วนที่หมุนติดอยู่และหมุนด้วยความเร็ว เชิงมุม ω และมีมวลเยื้องศูนย์ m อยู่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะ e ดังรูปที่ 4-1



รูปที่ 4-1 แบบจำลองการสั่นสะเทือนของระบบที่มี 1 ระดับขั้นความเสรี

สมการที่ใช้สำหรับระบบในรูปที่ 4-1 นี้ คือ

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \sin\omega t \qquad (4\text{-}1)$$

และผลเฉลยของสมการอยู่ในรูปแบบคือ

$$x = x_h + x_p \qquad (4\text{-}2)$$

โดยที่ x_h คือ คำตอบสภาวะชั่วขณะ (transient response) และ

x_p คือ คำตอบสภาวะคงตัว (steady-state response)

สำหรับคำตอบในสภาวะชั่วขณะจะค่อย ๆ ลดลงไปจนเป็นศูนย์ เมื่อเวลาผ่านไปชั่วระยะหนึ่ง ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงสนใจแต่เพียงผลเฉลยสภาวะคงตัวเท่านั้น ซึ่งผลเฉลยดังกล่าวนี้มีรูปแบบคือ

$$x_p = X\sin(\omega t - \phi) \qquad (4\text{-}3)$$

โดยที่ $X = \dfrac{me\omega^2}{\sqrt{\left(k - M\omega^2\right)^2 + (c\omega)^2}}$ คือ ขนาดของผลตอบสนองสูงสุด และ

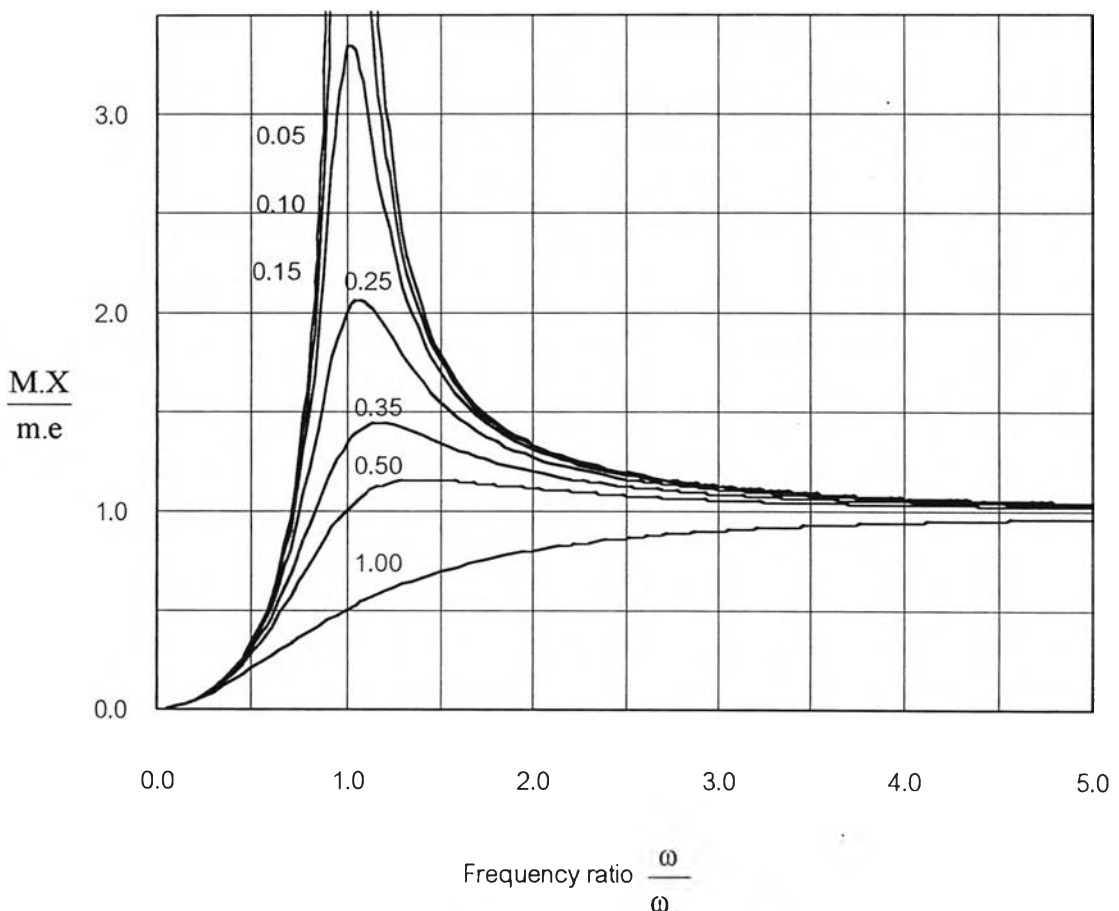
ϕ คือ มุมเฟสระหว่างแรงกระทำกับผลตอบสนอง

ในการใช้งานจริงสำหรับการสั่นสะเทือนของโครงสร้างอาคารจะพิจารณาเฉพาะขนาดของผลตอบสนองสูงสุด (X) ซึ่งมีค่าขึ้นอยู่กับความถี่ของชุดแยกการสั่นสะเทือนและความถี่ของแรงกระทำหรือความถี่จากการหมุนของเครื่องจักรและสัมประสิทธิ์ของความหน่วงเท่านั้น เขียนสมการในเทอมของตัวแปรไร้มิติ ได้ดังนี้

$$\frac{MX}{me} = \frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \qquad (4\text{-}4)$$

โดยที่ $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ คือค่าความถี่ธรรมชาติของระบบ

เมื่อนำมาพล็อตกราฟได้ความสัมพันธ์ดังแสดงในรูปที่ 4-2



รูปที่ 4-2 ขนาดของการสั่นสะเทือนจากการหมุนที่ไม่สมดุล

จากกราฟพบว่าลักษณะที่สำคัญของผลตอบสนองสภาวะคงตัว มีดังนี้คือ

1. เมื่อค่าอัตราส่วนของความถี่น้อยมาก ๆ ขนาดของผลตอบสนองสูงสุดจะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์
2. เมื่อค่าอัตราส่วนของความถี่เข้าใกล้ 1 และค่าอัตราส่วนของความหน่วงมีค่าน้อย จะทำให้ผลตอบสนองสูงสุดมีค่าสูงมาก
3. เมื่อค่าอัตราส่วนของความถี่มีค่าสูงมาก เทอมไร้มิติทางซ้ายมือจะมีค่าเข้าใกล้ 1
4. อัตราส่วนของความหน่วงมีอิทธิพลกับผลตอบสนองสูงสุดมาก เมื่อค่าอัตราส่วนของความถี่เข้าใกล้ 1 แต่จะมีผลน้อยมากเมื่อค่าอัตราส่วนของความถี่มีค่าต่ำมาก และมีค่าเข้าใกล้ 1 เมื่อค่าอัตราส่วนของความถี่มีค่าสูงมาก

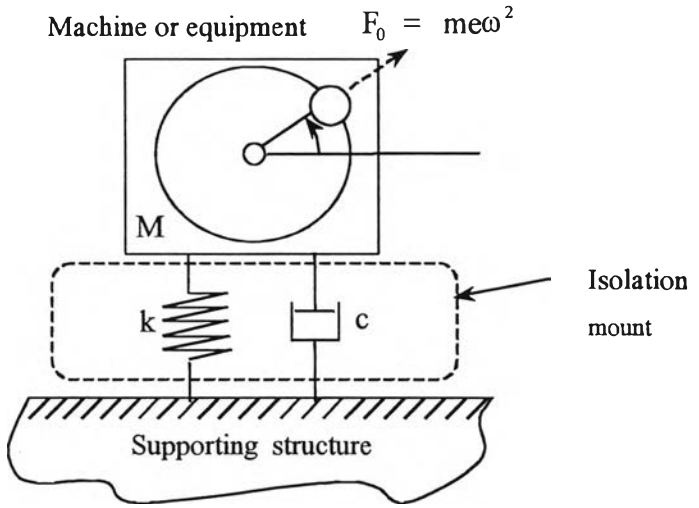
สมการที่ (4-4) ให้ค่าผลตอบสนองสูงสุดของระบบที่มี 1 ระดับขั้นความเสรี ซึ่งในบทที่ 2 ได้กล่าวถึงค่าการขจัดสูงสุดของแต่ละสมการ ในระบบสมการที่ (2-30) ในทางปฏิบัติแทนที่จะแก้สมการโดยใช้หาผลตอบสนองจริงของแต่ละพิกัดหลักของโครงสร้าง เปลี่ยนมาใช้ผลตอบสนองสูงสุดแทนเพื่อความสะดวกในการคำนวณ พิจารณาสมการที่ (2-31) อีกครั้งดังนี้

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{Bmatrix}_{\max} = \delta_1 \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ . \\ \phi_n \end{Bmatrix}_1 + \delta_2 \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ . \\ \phi_n \end{Bmatrix}_2 + \ldots + \delta_n \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ . \\ \phi_n \end{Bmatrix}_n \qquad (4\text{-}5)$$

จากสมการนี้พบว่าผลตอบสนองของระบบสมการในพิกัดทั่วไป (จากวิธีการแปลงพิกัดด้วยเมตริกซ์โมแดล) ประกอบด้วยผลตอบสนองในแต่ละเทอมของพิกัดหลัก รวมกับโหมดเชพที่แต่ละความถี่แบบเชิงเส้น เมื่อพิจารณาที่แต่ละเทอมของ δ_i ซึ่งล้วนแต่หาคำตอบได้จากสมการที่ (4-3) และ (4-4) โดยคำตอบเฉพาะจะมีลักษณะเป็นขนาดของผลตอบสนองสูงสุดคูณกับฟังก์ชันฮาร์โมนิค แต่ในทางปฏิบัติเพื่อตัดปัญหาความสับสนที่อาจจะเกิดขึ้นจากการรวมผลตอบสนองของโครงสร้างหรือคำตอบของระบบสมการที่มีฟังก์ชันฮาร์โมนิครวมอยู่มากกว่า 1 ความถี่ขึ้นไปแบบซูเปอร์โพสิชั่น ดังนั้นในการคำนวณออกแบบจึงพิจารณาเฉพาะขนาดของผลตอบสูงสุดเท่านั้น (ไม่คิดฟังก์ชันฮาร์โมนิค) โดยพิจารณาแยกกันในแต่ละเทอมของพิกัดหลัก หลังจากนั้นนำคำตอบในเทอมของพิกัดหลักแปลงกลับมาเป็นเทอมของพิกัดทั่วไปโดยใช้เมตริกซ์โมแดล

4.2 การแยกการสั่นสะเทือน (Vibration isolation)

วัตถุประสงค์ของการแยกการสั่นสะเทือนคือเพื่อลดการสั่นสะเทือนที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนภายในเครื่องจักร ถ่ายทอดต่อไปยังโครงสร้างของอาคารเป็นผลให้อาคารทั้งหมดสั่นสะเทือน หรือลดการสั่นสะเทือนจากโครงสร้างอาคารถ่ายทอดไปสู่อุปกรณ์ที่ติดตั้งอยู่ภายในวัสดุโดยทั่วไปที่นำมาใช้แยกการสั่นสะเทือนอย่างง่าย ๆ ได้แก่ แผ่นยางหรือแผ่นนีโอเพรน เป็นต้น ซึ่งสามารถพิจารณาเป็นระบบสปริงที่มีค่าความหน่วงภายในได้ ดังรูป



รูปที่ 4–3 แสดงแบบจำลองของการแยกการสั่นสะเทือน

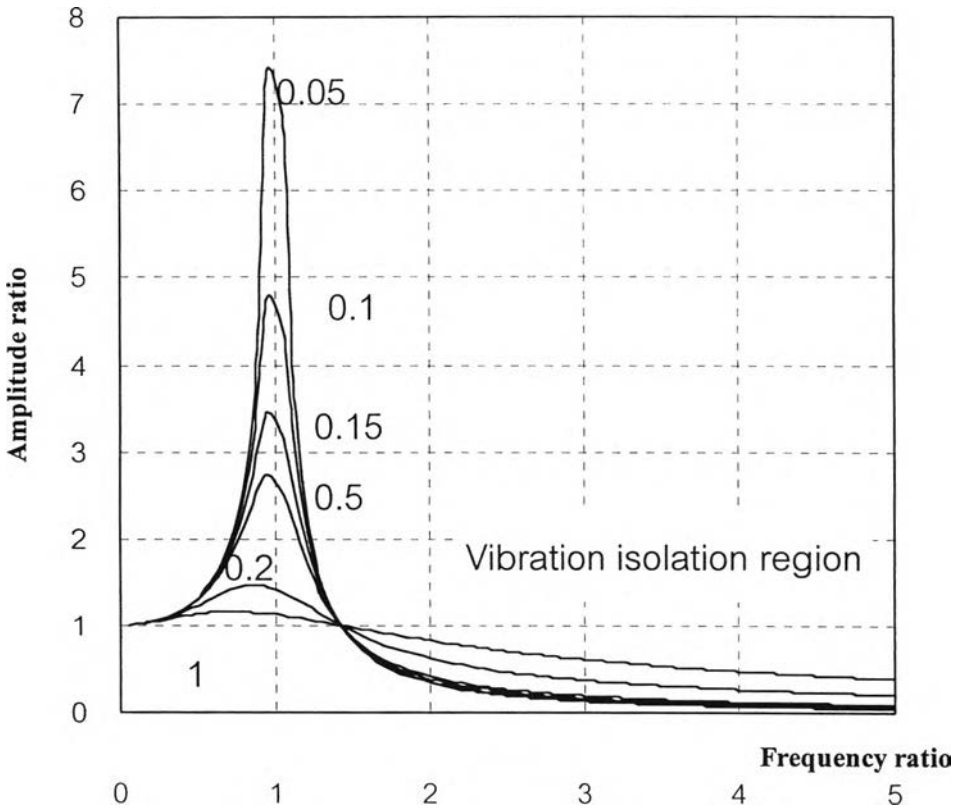
ค่าที่ใช้ในการวัดการส่งผ่านการสั่นสะเทือนจากเครื่องจักรผ่านตัวแยกการสั่นสะเทือนไปสู่ฐานหรืออาคาร ได้แก่ ค่าอัตราการส่งผ่านแรง (Transmissibility) โดยที่ถ้าสมมติให้การเคลื่อนที่ของฐานที่รองรับมีค่าเป็นศูนย์ แล้วจะได้แรงส่งผ่านมีค่าเป็น

$$F_T = kx + c\dot{x} \qquad (4\text{-}6)$$

โดยที่ x คือ ผลตอบสนองสภาวะคงตัวหรือการขจัดของเครื่องจักร หาได้จากจากสมการที่ (4-3) และ $\dot{x}$ คือ ความเร็วของเครื่องจักร เมื่อแทนค่าทั้งสองลงไปในสมการที่ (4-6) แล้วนำไปหารด้วยขนาดของแรงกระทำสูงสุด F_0 สามารถเขียนสมการของค่าอัตราการส่งผ่านแรงได้ ดังนี้

$$TR = \left| \frac{F_T}{F_0} \right| = \frac{\sqrt{1+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \qquad (4\text{-}7)$$

นำไปพล็อตกราฟ ได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้



รูปที่ 4-4 แสดงอัตราส่วนการส่งผ่านแรงของตัวแยกการสันสะเทือน

จากรูปที่ 4–4 สามารถสรุปหลักการเบื้องต้นสำหรับวิธีแยกการสั่นสะเทือน ได้ดังนี้

1. บริเวณที่เหมาะสมสำหรับใช้แยกการสั่นสะเทือน ได้แก่บริเวณที่มีอัตราส่วนของความถี่ตั้งแต่ $\sqrt{2}$ เป็นต้นไป เพราะค่าอัตราส่วนการส่งผ่านแรงภายในบริเวณนี้ มีค่าน้อยกว่า 1 โดยทั่วไปการแยกการสั่นสะเทือนมักจะทำได้โดยการเลือกใช้สปริงที่ให้ค่าความแข็งเกร็งที่เหมาะสม แต่ก็มีบางโอกาสที่แยกการสั่นสะเทือน โดยเพิ่มมวลของฐานรองเครื่องจักร ซึ่งใช้เมื่อความถี่ของแรงกระตุ้นมีค่าน้อยมาก
2. ภายในบริเวณแยกการสั่นสะเทือน (Vibration isolation region) ในรูปที่ 4-4 การใช้สปริงที่มีความแข็งเกร็งน้อยจะทำให้ประสิทธิภาพของการแยกการสั่นสะเทือนดีขึ้น และพบว่าการใช้ตัวหน่วงที่มีค่าความหน่วงสูงมีแนวโน้มที่จะเพิ่มอัตราส่วนการส่งผ่านแรงโดยเฉพาะเมื่ออัตราส่วนของความถี่มีค่าสูง แต่

I 18600918

จะลดค่าอัตราการส่งผ่านแรงของระบบ ในกรณีที่เครื่องจักรหรืออุปกรณ์เริ่มต้นการทำงาน ซึ่งความถี่ของแรงกระตุ้นจะต้องผ่านบริเวณความถี่ธรรมชาติ

3. ในบริเวณที่อัตราส่วนของความถี่มีค่าสูงตั้งแต่ 3 ขึ้นไปเมื่อสัมประสิทธิ์ของความหน่วงมีค่าน้อยกว่า 0.20 พบว่าการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงแทบจะไม่มีผลต่อค่าอัตราการส่งผ่านแรง

จากข้อ 3. แสดงให้เห็นว่าที่บริเวณดังกล่าว ค่าอัตราการส่งผ่านแรงของระบบเป็นอิสระกับค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง (ที่สัมประสิทธิ์มีค่าน้อยกว่า 0.20) ดังนั้นเมื่อนำสมการ (4-7) มาเขียนเป็นสมการสำหรับบริเวณนี้ได้

$$TR = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1} \qquad (4\text{-}8)$$

กำหนดให้ค่าการลดลงของอัตราการส่งผ่านแรง (Reduction in trasmissibility) มีค่าเป็น R โดยที่

$$R = 1 - TR \qquad (4\text{-}9)$$

เมื่อนำไปแทนค่าในสมการที่ (4-8) เขียนสมการได้ใหม่ในรูป

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{\frac{2-R}{1-R}} \qquad (4\text{-}10)$$

สมการนี้ใช้ในการออกแบบซึ่งมีค่าอัตราส่วนความถี่ตั้งแต่ 3 และมีสัมประสิทธิ์ความหน่วงน้อยกว่า 0.20 โดยการหาค่าความแข็งเกร็งของระบบที่ทำให้ค่าการลดลงของการส่งผ่านแรงมีค่าอยู่ในระดับที่ยอมรับได้ แต่ในทางปฏิบัติจะแทนตัวแปรต่าง ๆ ในหน่วยที่สะดวกในการใช้งาน แล้วเขียนสมการที่ (4-10) ใหม่ได้ดังนี้

$$N = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g(2-R)}{\delta_S(1-R)}} \qquad (4\text{-}11)$$

โดยที่ N คือความเร็วรอบของเครื่องจักรหรือแรงไม่สมดุล มีหน่วยเป็นรอบต่อนาที (rpm , cpm) g คือความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกมีค่า 386 นิ้วต่อวินาทีกำลังสอง (in./s.^{2}) หรือ 9810 มิลลิเมตรต่อวินาทีกำลังสอง (mm./s.^{2}) δ_s คือค่าการยุบตัวสถิตย์ (Static deflection) ของชุดแยกการสั่นสะเทือน มีหน่วยเป็นนิ้วหรือมิลลิเมตร

สำหรับระบบที่แรงไม่สมดุลมีค่าความถี่ต่ำ การแก้ปัญหาโดยวิธีแยกการสั่นสะเทือนทำได้ลำบากเนื่องจากที่ความถี่ใช้งานต่ำต้องใช้ระบบแยกการสั่นสะเทือนที่ทำให้ค่าระยะการหดตัวของสปริงทางสถิตมีค่าสูงมาก ดังนั้นระบบที่แรงกระตุ้นมีค่าความถี่ค่อนข้างต่ำมักใช้วิธีแยกการสั่นสะเทือนโดยการเพิ่มมวลที่ชุดแยกการสั่นสะเทือนให้มีขนาดมากขึ้น และสำหรับระบบที่แรงกระตุ้นมีความถี่มากกว่า 1 ความถี่ นั้นให้นำค่าความถี่ที่ต่ำที่สุดเป็นความถี่ที่ใช้ในการออกแบบ เนื่องจากความถี่ยิ่งมีค่าสูงการสั่นสะเทือนของระบบจะยิ่งมีค่าต่ำลง (อัตราส่วนของความถี่เพิ่มมากขึ้น)