บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับหุ่นยนต์

ในการหาแบบจำลองพลวัตของ camera gimbal นั้น ในเบื้องต้นจะต้องมีพื้นฐานความรู้เกี่ยวกับหุ่นยนต์ก่อน ซึ่งเป็นสิ่งที่สำคัญ เนื่องจาก camera gimbal มีลักษณะโครงสร้างและการทำงานคล้ายกับหุ่นยนต์นั่นเอง กล่าวคือจะประกอบด้วยข้อต่อ (joint) และ link ซึ่งเป็นส่วนที่เคลื่อนไหวของหุ่นยนต์ ดังนั้นในที่นี้จะขอกล่าวถึงทฤษฎีเบื้องต้น ตลอดจนการทำงาน ซึ่งจะทำให้เข้าใจและเป็นพื้นฐานในการหาแบบจำลองพลวัตของระบบดังกล่าวต่อไป

2.1 ทฤษฎีพื้นฐาน

โครงสร้างของหุ่นยนต์

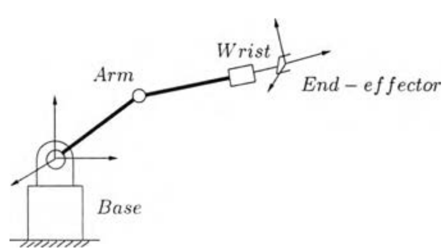
โดยทั่วไปแล้วโครงสร้างทางกลศาสตร์ของหุ่นยนต์ จะพิจารณาโครงสร้างที่คงรูป (links) และส่วนที่เชื่อมต่อกัน (joints) ซึ่งทั้ง 2 ส่วนนี้รวมกันจะเรียกว่าแขนกล (arm) และมีส่วนที่หมุนหรือหัน (wrist) ของ end-effector ดังรูปที่ 2.1

รูปแบบของข้อต่อ

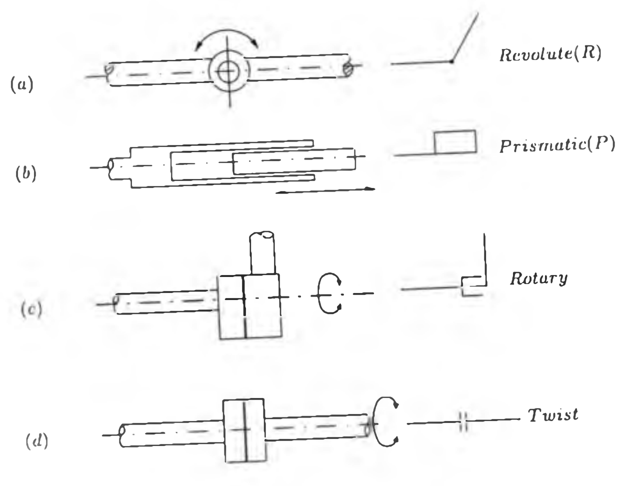
ชนิดของข้อต่อระหว่าง link 2 อัน ที่พบในอุตสาหกรรมหุ่นยนต์ คือ ข้อต่อแบบหมุน (revolute joint (R)) และข้อต่อแบบเลื่อน (prismatic joint (P)) ดังรูปที่ 2.2

องศาของความเสรี (DOF)

จำนวนการเคลื่อนไหวที่อิสระของวัตถุใน 3 มิติ เรียกว่า องศาของความเสรี (degree of freedom) หรือ (DOF) ดังนั้น โครงสร้างคงรูปที่มี 6 DOF แสดงว่าประกอบด้วยตำแหน่งที่เคลื่อนที่ 3 ตำแหน่ง และทิศทาง

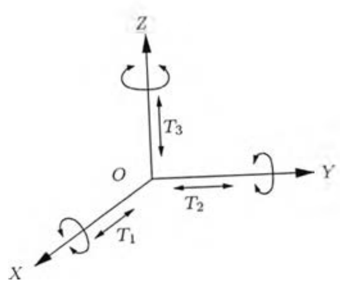


รูปที่ 2.1: โครงสร้างทางกลศาสตร์ของหุ่นยนต์



รูปที่ 2.2: ลักษณะของข้อต่อแบบต่างๆ

ในการหมุน 3 ทิศทางในการหมุน พิจารณารูปที่ 2.3 พบว่ามีการเลื่อนตามแกนทั้ง 3 แกน (T_1, T_2, T_3) และการหมุนรอบแกน (R_1, R_2, R_3)



รูปที่ 2.3: 6 DOF

การแปลงเอกพันธ์ (Homogeneous Transform)

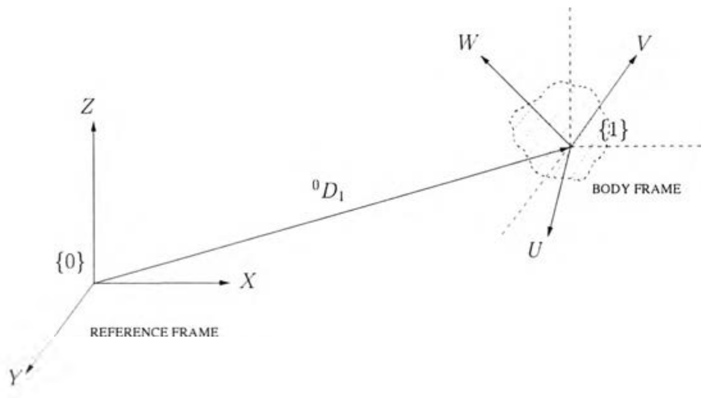
นิยามให้ T คือการแปลงเอกพันธ์โดยที่

$$T = \left[\begin{array}{c|c} \text{Rotation matrix} & \text{Translation vector} \\ (3 \times 3) & (3 \times 1) \\ \hline \text{Perspective transformation matrix} & \text{Scale factor} \\ (1 \times 3) & (1 \times 1) \end{array}\right]$$

และความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งและทิศทางของกรอบอ้างอิง และกรอบที่มีองศาของความเสรีเท่ากับ n (n-DOF) หาได้จาก

$$^{0}T_{n} = {^{0}T_{1}}(q_{1}){^{1}T_{2}}(q_{2})...{^{n-1}T_{n}}(q_{n}) \qquad (2.1)$$

โดยที่ $^{i-1}T_i(q_i)$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., n$ คือการแปลงเอกพันธ์ระหว่างกรอบ $i-1$ และกรอบ i ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4: การแปลงเอกพันธ์

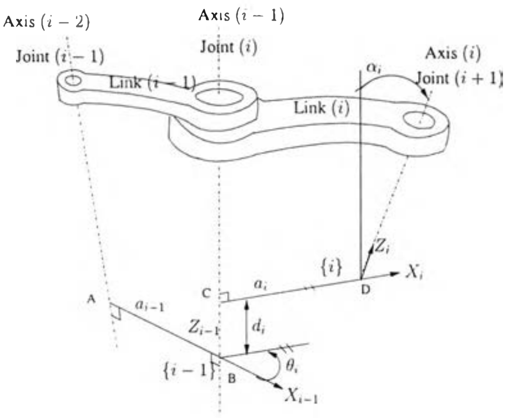
Denavit-Hartenberg Notation

พิจารณาแขนกลที่มี 4 ท่อน จะกำหนดโดยกรอบพิกัดเชิงตั้งฉากขวา (right-handed orthonormal coordinate frame) จาก link หนึ่งไป link อื่นโดย kinematic chain ซึ่งเสนอโดย Denavit และ Hartenberg ในปี 1995 เรียกว่า Denavit-Hartenberg notation จากรูปที่ 2.5 พิจารณาท่อน $i-1$ กับท่อน i ที่มีข้อต่อ $i-1, i, i+1$ เส้นตรง AB ลากจากแกน $i-2$ ไปแกน $i-1$และเส้นตรง CD ลากจากแกน $i-1$ ไปแกน i สำหรับกรอบ i จะกำหนดโดย

- แกน z_i อยู่แกนเดียวกับแกน i ในทิศทางที่ต้องการโดยเราจะเลือกทิศทางที่ทำให้ θ_i เป็นบวก
- แกน x_i ตั้งฉากกับแกน z_{i-1} และ z_i
- จุดกำเนิดของกรอบพิกัดที่กรอบ i จะอยู่ที่จุดตัดของแกน i กับ CD
- จะได้แกน y_i โดยใช้กรอบพิกัดเชิงตั้งฉากขวา

จากรูปที่ 2.5 พิจารณากรอบ $i-1$ และกรอบ i สำหรับ DH โดยนิยามให้พารามิเตอร์เป็นดังนี้

- a_i คือระยะที่วัดตามแนวแกน x_i จากจุดตัดของแกน x_i กับแกน z_{i-1} ไปจุดกำเนิดของกรอบ i (ระยะ CD)

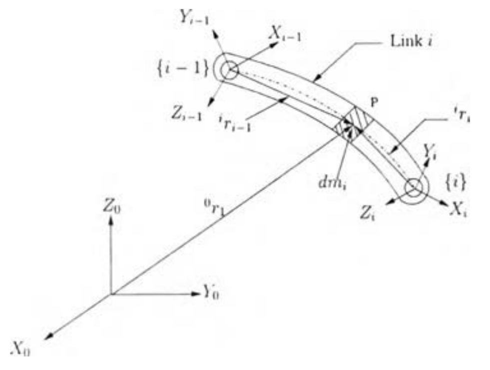


รูปที่ 2.5: สัญนิยม DH

- d_i คือระยะที่วัดตามแนวแกน z_{i-1} จากจุดกำเนิดของกรอบ $i-1$ ไปจุดตัดของแกน x_i กับแกน z_{i-1} (ระยะ BC)
- θ_i คือมุมที่หมุนรอบแกน z_i
- α_i คือมุมที่หมุนรอบแกน x_i
- $T_{z,d}$ คือการแปลงเอกพันธ์เมื่อเลื่อนขนาน (translate) ในแนวแกน z เป็นระยะทาง d
- $T_{z,\theta}$ คือการแปลงเอกพันธ์เมื่อหมุนรอบแกน z เป็นมุม θ
- $T_{x,a}$ คือการแปลงเอกพันธ์เมื่อเลื่อนในแนวแกน x เป็นระยะทาง a
- $T_{a,\alpha}$ คือการแปลงเอกพันธ์เมื่อหมุนรอบแกน a เป็นมุม α

จาก (2.1) จะได้การแปลงเอกพันธ์จากกรอบ i ไปยังกรอบ $i-1$ โดย D-H ดังนี้

$$
\begin{aligned}
{}^{i-1}T_i &= T_{z,d}T_{z,\theta}T_{x,a}T_{x,\alpha} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i} & 0 & 0 \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha_i} & -S_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^{i-1}T_i &= \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i}C_{\alpha_i} & S_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iC_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i}C_{\alpha_i} & -C_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iS_{\theta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$



รูปที่ 2.6: ความเร็วของตำแหน่งบนข้อต่อของ manipulator

ความเร็วที่ตำแหน่งบน link ของ manipulator

จากรูปที่ 2.6 พิจารณาที่จุด P บนท่อน i แสดงถึงพิกัดของกรอบอ้างอิง $0, i, i-1$ โดยจะนิยามให้

$$ {}^{i}r_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix}^T \tag{2.3}$$

และจะได้ว่า

$$ {}^{0}r_i = {}^{0}T_i {}^{i}r_i = ({}^{0}T_1 {}^{1}T_2 \ldots {}^{i-1}T_i){}^{i}r_i \tag{2.4}$$

ดังนั้น

$$ {}^{0}v_i \equiv v_i = {}^{0}\dot{r}_i = [\sum_{j=1}^{i} \frac{\partial {}^{0}T_i}{\partial q_j}\dot{q}_j]{}^{i}r_i \tag{2.5}$$

จาก (2.5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^{i-1}T_i}{\partial \theta_i} &= \begin{bmatrix} -S_{\theta_i} & -C_{\theta_i}C_{\alpha_i} & C_{\theta_i}S_{\alpha_i} & -a_iS_{\theta_i} \\ C_{\theta_i} & -S_{\theta_i}C_{\alpha_i} & S_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iC_{\theta_i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= Q_i {}^{i-1}T_i \end{aligned}$$

โดยที่ Q_i สำหรับข้อต่อแบบหมุน คือ

$$ Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

และ Q_i สำหรับข้อต่อแบบเลื่อน คือ

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., n$

$$\frac{\partial^0 T_i}{\partial \theta_j} = \begin{cases} {}^0T_{j-1} Q_j^{j-1} T_i & \text{for } j \leq i \\ 0 & \text{for } j > i \end{cases} \tag{2.6}$$

เมื่อแทนค่า (2.6) ใน (2.5) จะได้ว่า

$$v_i = \sum_{j=1}^{i} {}^0T_{j-1} Q_j{}^{j-1} T_i \dot{q}_j{}^i r_i \tag{2.7}$$

เทนเซอร์โมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of Inertia Tensor)

เนื่องจากมวลของแต่ละท่อนที่เคลื่อนที่จะมีการกระจายของความเฉื่อย ดังนั้นเทนเซอร์โมเมนต์ความเฉื่อยจะหาได้จากการหมุนเทียบกับจุดกำเนิดของกรอบที่สนใจ ให้

$$I_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm_i & \int x_i y_i dm_i & \int x_i z_i dm_i & \int x_i dm_i \\ \int x_i y_i dm_i & \int y_i^2 dm_i & \int y_i z_i dm_i & \int y_i dm_i \\ \int x_i z_i dm_i & \int y_i z_i dm_i & \int z_i^2 dm_i & \int z_i dm_i \\ \int x_i dm_i & \int y_i dm_i & \int z_i dm_i & \int dm_i \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

โดยที่ dm_i คือมวลเชิงอนุพันธ์ (differential mass) ของแต่ละท่อน i ที่ตำแหน่งของ ${}^ir_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix}^T$ เมื่อพิจารณารูปที่ 2.6 โดยการใช้ผลคูณไขว้ (cross product) ซึ่งจะได้ว่า

$$I_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) & I_{xy} & I_{xz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{xy} & \frac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) & I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}) & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

เมื่อ m_i คือมวลที่ท่อน i และ ${}^i\bar{r}_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_i & \bar{y}_i & \bar{z}_i & 1 \end{bmatrix}^T$ คือจุดศูนย์กลางมวล

2.2 วิธีลากรองจ์-ออยเลอร์

ในที่นี้จะนำเสนอวิธีการหาแบบจำลองพลวัตของ Gimbal system โดยใช้วิธีของวิธีลากรองจ์-ออยเลอร์ ซึ่งจะอธิบายโดยการใช้สมการของลากรองเจียน ซึ่งเป็นรูปแบบที่ใช้ในการอธิบายแบบจำลองพลวัตของ n-DOF manipulator ซึ่งจะมีตัวแปร $q = \begin{bmatrix} q_1, ..., q_n \end{bmatrix}^T$ นิยามลากรองเจียน

$$L = K - P \tag{2.10}$$

โดยที่ K และ P คือพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ตามลำดับ จะได้สมการลากรองเจียนของระบบคือ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2.11}$$

พลังงานจลน์

พลังงานจลน์ของมวลเชิงอนุพันธุ์ dm_i บน link i ($i = 1, 2, ...n$) ที่ตำแหน่ง ${}^0r_i$ ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว ${}^0v_i(= v_i)$ เทียบกับกรอบอ้างอิง 0 คือ

$$dK_i = \frac{1}{2}dm_i(v_i)^2 \tag{2.12}$$

โดยที่

$$v_i^2 = v_i.v_i = {}^0\dot{r}_i.{}^0\dot{r}_i = Tr({}^0\dot{r}_i.{}^0\dot{r}_i^T) = Tr(v_i.v_i^T) \tag{2.13}$$

แทนค่า (2.13) ใน (2.12) จะได้ว่า

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} Tr[({}^0T_{j-1}Q_j{}^{j-1}T_i)I_i({}^0T_{k-1}Q_k{}^{k-1}T_i)^T]\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{2.14}$$

พลังงานศักย์

พลังงานศักย์ของท่อน i คือ

$$P_i = -m_ig({}^0\bar{r}_i) = -m_ig{}^0T_i{}^i\bar{r}_i \tag{2.15}$$

โดยที่

${}^0\bar{r}_i$ คือเวกเตอร์ของจุดศูนย์กลางมวลของท่อน i เมื่อพิจารณาที่กรอบ 0

${}^i\bar{r}_i$ คือเวกเตอร์ของจุดศูนย์กลางมวลของท่อน i เมื่อพิจารณาที่กรอบ i

$g = \begin{bmatrix} g_x & g_y & g_z & 0 \end{bmatrix}^T$

ดังนั้นพลังงานศักย์ทั้งหมดหาได้จากผลรวมของพลังงานศักย์ในแต่ละท่อน และจะได้ว่า

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = -\sum_{i=1}^{n} m_ig{}^0T_i{}^i\bar{r}_i \tag{2.16}$$

สมการการเคลื่อนที่ (Equation of Motion)

แทน (2.14) และ (2.16) ใน (2.10) จะได้ว่า

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} Tr[({}^0T_{j-1}Q_j{}^{j-1}T_i)I_i({}^0T_{k-1}Q_k{}^{k-1}T_i)^T]\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{i=1}^{n} m_ig{}^0T_i{}^i\bar{r}_i \tag{2.17}$$

สำหรับสมการลากรองจ์-ออยเลอร์ จะนิยามให้แรงบิด τ_i คือตัวขับเร้าที่ข้อต่อ i จะได้ว่า

$$\tau_i = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{2.18}$$

และจะได้แบบจำลองพลวัตคือ

$$\tau_i = \sum_{i=1}^{n} M_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k + G_i \tag{2.19}$$

เมื่อ $i = 1, 2, ..., n$ โดยที่

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sum_{p=max(i,j)}^{n} Tr[d_{pj}I_p d_{pi}^T] \\ h_{ijk} &= \sum_{p=max(i,j,k)}^{n} Tr[\frac{\partial(d_{pk})}{\partial q_p} I_p d_{pi}^T] \\ G_i &= -\sum_{p=i}^{n} m_p g d_{pi}{}^p\bar{r}_p \end{aligned} \tag{2.20}$$

และ

$$d_{ij} = \begin{cases} {}^0T_{j-1}Q_j^{j-1}T_i & \text{for } j \le i \\ 0 & \text{for } j > i \end{cases} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} = \begin{cases} {}^0T_{j-1}Q_j^{j-1}T_{k-1}Q_k^{k-1}T_i & \text{for } i \ge k \ge j \\ {}^0T_{k-1}Q_k^{k-1}T_{j-1}Q_j^{j-1}T_i & \text{for } i \ge j \ge k \\ 0 & \text{for } i < j \text{ or } i < k \end{cases}$$

2.3 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงทฤษฎีเบื้องต้นเกี่ยวกับหุ่นยนต์ ซึ่งเป็นสิ่งที่มีความสำคัญสำหรับเป็นพื้นฐานในการศึกษาทฤษฎีขั้นสูงต่อไป ซึ่งเนื้อหาได้อธิบายถึงความหมาย นิยาม และโครงสร้างของหุ่นยนต์ ทำให้ทราบถึงหลักในการทำงาน รวมทั้งการหาสมการการเคลื่อนที่ โดยวิธีของ ลากรองจ์-ออยเลอร์ ซึ่งเป็นวิธีที่อธิบายเกี่ยวกับพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ ซึ่งในการหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์นั้นอาจจะใช้วิธีอื่นก็ได้ เช่นวิธีของนิวตัน-ออยเลอร์ (Newton-Euler Formulation) สำหรับขั้นตอนในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะได้กล่าวในบทต่อไป