# บทที่ 2

# ทฤษฎีและแนวคิด

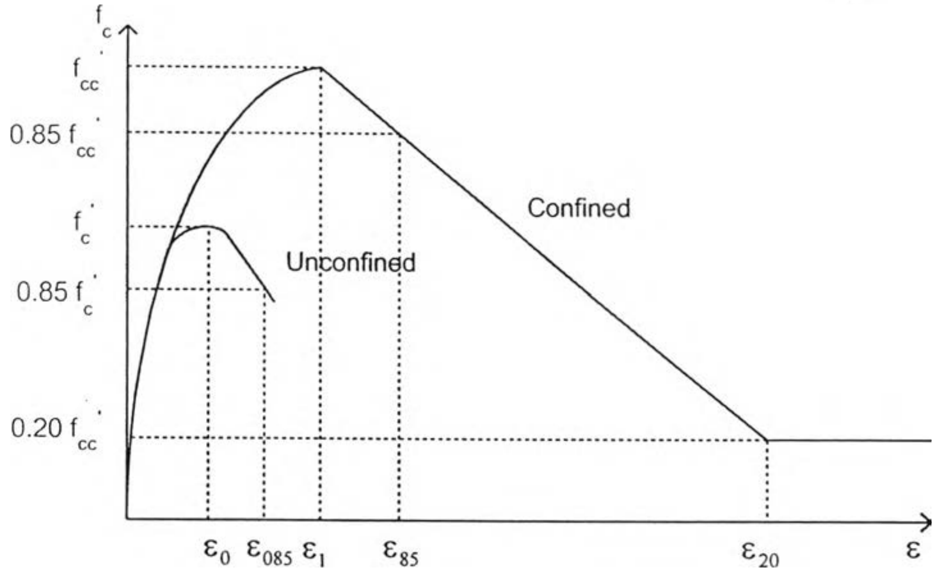
## ความนำ

ในงานวิจัยนี้ได้เสนอวิธีการวิเคราะห์โครงข้อแข็งคอนกรีตเสริมเหล็ก เพื่อคำนวณความสามารถในการรับน้ำหนักบรรทุกสูงสุดของโครงข้อแข็งในระนาบที่ทราบขนาดของหน้าตัด และปริมาณเหล็กเสริมโดยได้แบ่งการวิเคราะห์ออกเป็น 3 ขั้นตอนหลัก

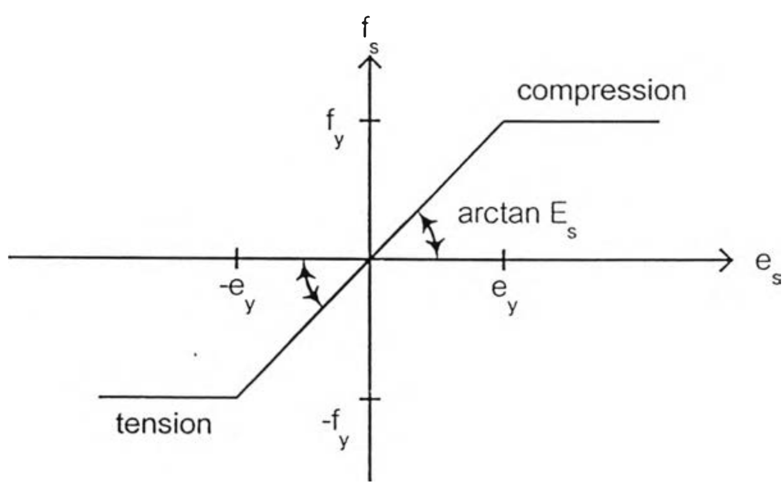
- การวิเคราะห์อิลาสติกอันดับที่สอง เพื่อพิจารณาถึงความไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต
- การวิเคราะห์หน้าตัดเพื่อพิจารณาถึงผลของความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของวัสดุที่ไม่คงที่หรือเรียกว่าความไม่เชิงเส้นทางวัสดุ
- ปรับแก้ค่าสติฟเนสของโครงสร้างอันเนื่องมาจากผลของการแตกร้าวของคอนกรีต แล้วนำค่าไปวิเคราะห์โครงสร้างในรอบการคำนวณต่อไป (ในงานวิจัยเรียกวิธีนี้ว่าการวิเคราะห์อินอิลาสติก)

## สมมติฐานที่ใช้

1. ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงอัดและความเครียดของคอนกรีต ดังแสดงในรูปที่ 2.1 โดยที่ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นคอนกรีต เนื่องจากหน่วยแรงดึงเท่ากับหน่วยแรงอัด (Saatcioglu, M., Salamat, A.S., and Razvi, S.R. , 1995)
2. ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็กเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติกโดยสมบูรณ์ (Elastic - Perfectly Plastic) ดังแสดงในรูปที่ 2.2
3. ความเครียดมีค่าเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะจากแนวแกนสะเทิน นั่นคือระนาบของหน้าตัดชิ้นส่วนจะยังคงเป็นระนาบและตั้งฉากกับแนวแกนของชิ้นส่วนทั้งก่อนและหลังการแตกร้าว
4. คำนึงถึงผลของการแตกร้าว เมื่อโมเมนต์ดัดเกินกว่าโมเมนต์การแตกร้าว กำหนดให้ดรรชนีของการดัดเป็นแบบพาราโบล่า ดังแสดงในรูปที่ ก.1



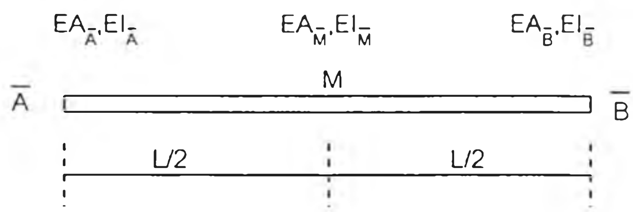

รูปที่ 2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีต




รูปที่ 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของเหล็กเสริม

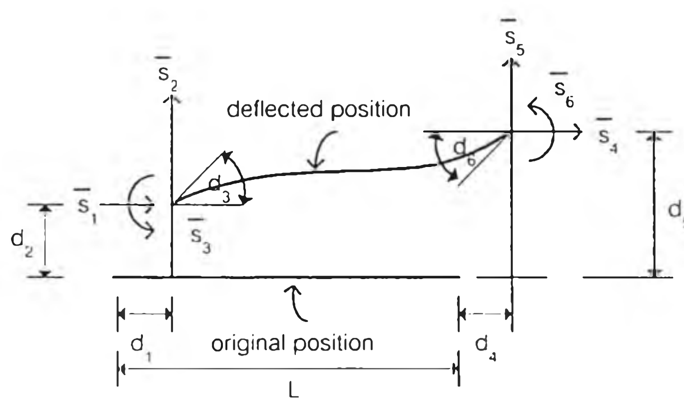
สติฟเนสขององค์อาคารในกรณีที่องค์อาคารมีพฤติกรรมแบบอิลาสติก

พิจารณาชิ้นส่วนโครงสร้างที่มีพื้นที่หน้าตัด ณ ตำแหน่งข้อต่อ $\overline{A}$ , $\overline{B}$ และที่กึ่งกลาง ความยาวของชิ้นส่วนเท่ากับ $A_{\overline{A}}$ , $A_{\overline{B}}$ และ $A_{\overline{M}}$ ตามลำดับ โมเมนต์ความเฉื่อย ณ ตำแหน่ง ข้อต่อ $\overline{A}$ , $\overline{B}$ และ ที่กึ่งกลางความยาวของชิ้นส่วนเท่ากับ $I_{\overline{A}}$ , $I_{\overline{B}}$ และ $I_{\overline{M}}$ ตามลำดับ และ ความยาว L ดังรูปที่ 2.3




รูปที่ 2.3 คุณสมบัติขององค์อาคาร

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับองค์อาคารที่มีแรงกระทำที่ปลาย $\overline{S}_1$ ถึง $\overline{S}_6$ และ $d_1$ ถึง $d_6$ เป็นค่าการกระจัดที่สอดคล้องกับแรงกระทำที่ปลาย $\overline{S}_1$ ถึง $\overline{S}_6$ ตามลำดับ ดังรูปที่ 2.4 และมีคุณสมบัติตามที่กำหนดข้างต้น สามารถเริ่มต้นจากสมการพลังงานศักย์รวม ( Total Potential Energy , $\pi$ ) ดังนี้




รูปที่ 2.4 องค์อาคารภายใต้แรงกระทำและการกระจัด( Chen and Lui ,1991 )

$$\pi = U + V \tag{2.1}$$

เมื่อ U เป็นพลังงานความเครียด ( Strain Energy )

ดังนั้น $$U = \int_{V_e} \int \sigma d\varepsilon dV_e = \int_0^L \int_A \int (\sigma d\varepsilon) dA dx \tag{2.2}$$

โดยที่ $\sigma$ = ความเค้นในแนวแกน

$\varepsilon$ = ความเครียดในแนวแกน

$V_e$ = ปริมาตรขององค์อาคาร

A = พื้นที่หน้าตัด

L = ความยาว

ขณะที่ V คือ พลังงานศักย์ ( Potential Energy )

ดังนั้น $$V = - \sum_{i=1}^{6} \overline{S}_i d_i = -[d]\{\overline{S}\} \tag{2.3}$$

โดยที่ $\overline{S}_i$ = แรงกระทำที่ปลาย

$d_i$ = การกระจัดที่ปลาย

จากกฎของฮุค ( Hooke 's Law ) : $\sigma = E\varepsilon$ (2.4)

เมื่อ E เป็นโมดูลัสยืดหยุ่น

แทน (2.4) ลงไปใน (2.2) และอินทิเกรต จะได้

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_A \varepsilon^2 dA dx \tag{2.5}$$

ในการวิเคราะห์ความไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต สามารถเขียนความสัมพันธ์ของความเครียดและการกระจัด ( Strain - Displacement Relationship ) ได้ดังนี้

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2v}{dx^2} \tag{2.6}$$

โดยที่ u และ v คือ การกระจัดในแนวแกนและด้านข้างขององค์อาคารตามลำดับ

สามพจน์แรกของสมการ (2.6) สอดคล้องกับเทนเซอร์ความเครียดของกรีน (Green 's strain tensor) และพจน์สุดท้าย คือความเครียดในแนวแกนเนื่องจากการดัด

เนื่องจากว่าการกระจัดในแนวแกนมีค่าน้อย ดังนั้นจึงสามารถละทิ้งพจน์ที่สองได้ และสามารถเขียนความสัมพันธ์ใหม่ได้ดังนี้

$$\varepsilon \cong \frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2v}{dx^2} \tag{2.7}$$

แทน (2.7) ลงใน (2.5) และอินทิเกรตพื้นที่หน้าตัด แล้วจะได้

$$U=\frac{E}{2}\int_0^L\left[A_e\left(\frac{du}{dx}\right)^2+I(x)\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2+A_e\frac{du}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\frac{A_e}{4}\left(\frac{dv}{dx}\right)^4\right]dx \tag{2.8}$$

โดยที่

$$I(x)=\int_A y^2dA$$

$$A_e=\int_A dA \quad = \quad \frac{1}{6}\left[A_{\bar{A}}+4A_{\bar{M}}+A_{\bar{B}}\right]$$

$$\int_A ydA=0$$

เมื่อพิจารณาปัญหาที่การกระจัดมีค่าน้อย ( Small Displacement ) เมื่อเทียบกับขนาดของโครงสร้าง ดังนั้นพจน์สุดท้ายของสมการ(2.8) ซึ่งมีค่าน้อยจึงสามารถละทิ้งได้ และกำหนดให้

$$P=EA_e\frac{du}{dx} \tag{2.9}$$

ดังนั้นสมการ(2.8) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$U=\frac{E}{2}\int_0^L\left[A_e\left(\frac{du}{dx}\right)^2+I(x)\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2\right]dx+\frac{1}{2}\int_0^L P\left(\frac{dv}{dx}\right)^2dx \tag{2.10}$$

เพื่อที่จะสามารถสร้างเมตริกซ์สติฟเนสได้ จำเป็นต้องทำการสมมุติลักษณะการกระจายของค่าการกระจัด u และ v ก่อนดังนี้

$$u=a_0+a_1x \tag{2.11}$$

$$v=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3 \tag{2.12}$$

จากเงื่อนไขที่จุดต่อคือ

$$u\big|_{x=0}=d_1,\quad u\big|_{x=L}=d_4 \tag{2.13}$$

$$v\big|_{x=0}=d_2,\quad \frac{dv}{dx}\bigg|_{x=0}=d_3,\quad v\bigg|_{x=L}=d_5,\quad \frac{dv}{dx}\bigg|_{x=L}=d_6 \tag{2.14}$$

จากนั้นจึงสามารถเขียนสมการลักษณะการกระจายของค่าการกระจัด u และ v ให้อยู่ในรูปแบบของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$u(x)=\begin{bmatrix}(1-\frac{x}{L}) & \frac{x}{L}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_1\\ d_4\end{Bmatrix} \tag{2.15}$$

$$v(x)=\begin{bmatrix}(1-\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3}) & (x-\frac{2x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}) & (\frac{3x^2}{L^2}-\frac{2x^3}{L^3}) & (-\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2})\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_2\\ d_3\\ d_5\\ d_6\end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

สามารถเขียนในรูปของสัญลักษณ์เมตริกซ์ได้เป็น

$$u(x)=[N_u]\{d_u\} \tag{2.17}$$

$$v(x)=[N_v]\{d_v\} \tag{2.18}$$

โดยที่ $N_u$ และ $N_v$ แทนฟังก์ชันรูปร่าง(Shape function)

แทนค่า (2.10) และ (2.3) ลงใน (2.1) เราจะได้

$$\pi=\frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{du}{dx}\right)EA_c\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)EI(x)\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^L P\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx-\sum_{i=1}^{6}\overline{S}_i d_i \tag{2.19}$$

โดยที่

$$\frac{du}{dx} = \left[\frac{dN_u}{dx}\right]_{1\times4}\{d_u\}_{4\times1} = [d_u]_{1\times4}\left\{\frac{dN_u}{dx}\right\}_{4\times1}$$

$$\frac{dv}{dx} = \left[\frac{dN_v}{dx}\right]_{1\times4}\{d_v\}_{4\times1} = [d_v]_{1\times4}\left\{\frac{dN_v}{dx}\right\}_{4\times1}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \left[\frac{d^2N_v}{dx^2}\right]_{1\times4}\{d_v\}_{4\times1} = [d_v]_{1\times4}\left\{\frac{d^2N_v}{dx^2}\right\}_{4\times1}$$

ดังนั้น

$$\pi=\frac{1}{2}\int_0^L[d_u]\left\{\frac{dN_u}{dx}\right\}EA_e\left[\frac{dN_u}{dx}\right]\{d_u\}dx+\frac{1}{2}\int_0^L[d_v]\left\{\frac{d^2N_v}{dx^2}\right\}EI(x)\left[\frac{d^2N_v}{dx^2}\right]\{d_v\}dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^L[d_v]\left\{\frac{dN_v}{dx}\right\}P\left[\frac{dN_v}{dx}\right]\{d_v\}dx-[d]\{\bar{S}\} \qquad (2.20)$$

จากหลักการของค่าหยุดนิ่งของพลังงานศักย์รวม ( Principle of Stationary Total potential Energy ) สภาวะสมดุลเกิดจากการแปรเปลี่ยนอันดับแรกของพลังงานศักย์รวม ( $\pi$ ) เท่ากับศูนย์

$$\delta\pi=0 \qquad (2.21)$$

นั่นคือ

$$\int_0^L\left\{\frac{dN_u}{dx}\right\}EA_e\left[\frac{dN_u}{dx}\right]dx\{d_u\}+\int_0^L\left\{\frac{d^2N_v}{dx^2}\right\}EI(x)\left[\frac{d^2N_v}{dx^2}\right]dx\{d_v\}$$
$$+\int_0^L\left\{\frac{dN_v}{dx}\right\}P\left[\frac{dN_v}{dx}\right]dx\{d_v\}-\{\bar{S}\} = 0 \qquad (2.22)$$

$$([k_m]+[k_G])\{d\} = \{\bar{S}\} \qquad (2.23)$$

โดยที่ $[k_m]$ = เมตริกซ์สติฟเนสเชิงเส้นดัดแปร ( Modified Linear Stiffness )

$$= [k^a]+[k^b]$$

$$= \int_0^L\left\{\frac{dN_u}{dx}\right\}EA_e\left[\frac{dN_u}{dx}\right]dx+\int_0^L\left\{\frac{d^2N_v}{dx^2}\right\}EI(x)\left[\frac{d^2N_v}{dx^2}\right]dx \qquad (2.24)$$

สามารถเขียนเมตริกซ์สติฟเนสเชิงเส้นดัดแปรที่สัมพันธ์กับการกระจัดที่ปลาย $\{d\} = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6]^T$ ดังนี้

$$[k_m] = \begin{bmatrix} a & h & h & -a & h & h \\ & b & c & h & -b & e \\ & & d & h & -c & f \\ & & & a & h & h \\ & \text{SYM.} & & & b & -e \\ & & & & & g \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

ค่าคงที่ a,b,c,d,e,f,g และ h สำหรับองค์อาคารมีค่าดังนี้

$$\begin{aligned} a &= EA_e / L \\ b &= (12A_1/L^3 + 6A_2/L^2 + 24A_3/5L) \\ c &= (6A_1/L^2 + 2A_2/L + 7A_3/5) \\ d &= (4A_1/L + A_2 + 8A_3L/15) \\ e &= (6A_1/L^2 + 4A_2/L + 17A_3/5) \\ f &= (2A_1/L + A_2 + 13A_3L/15) \\ g &= (4A_1/L + 3A_2 + 38A_3L/15) \\ h &= 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

โดยที่

$E$ = โมดูลัสยืดหยุ่น

$I$ = โมเมนต์ความเฉื่อย

$L$ = ความยาวขององค์อาคาร

$A_e = \frac{1}{6}[A_{\bar{A}} + 4A_{\bar{M}} + A_{\bar{B}}]$ คือ พื้นที่หน้าตัดประสิทธิผล( Effective Area )

$A_1 = EI_{\bar{A}}$

$A_2 = (E/L)[-3I_{\bar{A}} + 4I_{\bar{M}} - I_{\bar{B}}]$

$A_3 = (2E/L^2)[I_{\bar{A}} - 2I_{\bar{M}} + I_{\bar{B}}]$

$[k_G]$ = เมตริกซ์สติฟเนสไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต ( Geometric Stiffness Matrix )

$$= \int_0^L \left\{\frac{dN_v}{dx}\right\} P \left[\frac{dN_v}{dx}\right] dx \qquad (2.27)$$

สามารถเขียนเมตริกซ์สติฟเนสไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต ที่สัมพันธ์กับการกระจัดที่ปลาย $\{d\} = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6]^T$ ดังนี้

$$[k_G] = \frac{P}{30L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ & & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{SYM.} & & & 36 & -3L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

P เป็น + เมื่อเป็นแรงดึง ( Tensile axial force )

รายละเอียดของการหาความสัมพันธ์ตามสมการ (2.28) แสดงในภาคผนวก ก

เพราะฉะนั้นเมตริกซ์สติฟเนสขององค์อาคาร เมื่อรวมผลของสติฟเนสเชิงเส้นดัดแปรเข้ากับเมตริกซ์สติฟเนสไม่เชิงเส้นทางเรขาคณิต เราจะได้

$$[k(d)] = [k_m] + [k_G] \qquad (2.29)$$

โดยสามารถเขียนเมตริกซ์สติฟเนสขององค์อาคารที่สัมพันธ์กับการกระจัดที่ปลาย $\{d\} = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6]^T$ ได้ดังนี้

$$[k(d)]\{d\} = \{\bar{S}\} \qquad (2.30)$$

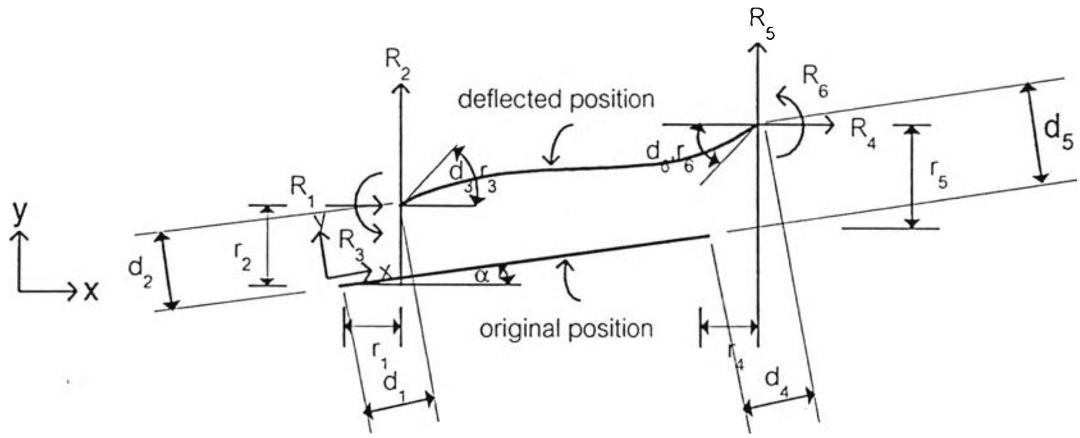
เมื่อ $[k(d)]$ เป็นเมตริกซ์สติฟเนสขององค์อาคาร

$\{d\}$ เป็นเวคเตอร์ของการกระจัด

$\{\bar{S}\}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงกระทำ

<u>การรวมสติฟเนส</u>

ในกรณีที่องค์อาคารไม่ได้วางอยู่ในแกนราบหรือระบบพิกัดเฉพาะที่(Local Coordinate ) ไม่ได้วางแกนอยู่ตรงกับแกนของระบบพิกัดวงกว้าง(Global Coordinate) จำเป็นต้องมีการหมุนเพื่อเปลี่ยนการกระจัดและแรงกระทำที่กำหนดอยู่ในระบบพิกัดเฉพาะที่ให้อยู่ในระบบพิกัดวงกว้างก่อน การหมุนพิกัดกระทำได้โดยการพิจารณาองค์อาคาร i อยู่ในระนาบ ดังรูปที่ 2.5




รูปที่ 2.5 องค์อาคารวางในระบบพิกัดในวงกว้าง( Chen and Lui , 1991 )

จากรูปพิกัดในวงกว้างเป็น XY และพิกัดประจำตัวเป็น xy ถ้าพิจารณาการกระจัดของจุด A ความสัมพันธ์ของการกระจัดในระบบพิกัดในวงกว้างกับระบบพิกัดเฉพาะที่เป็น

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} \qquad (2.31)$$

เมื่อ

$d_i$ เป็นเวคเตอร์ของการกระจัดในระบบพิกัดเฉพาะที่

$r_i$ เป็นเวคเตอร์ของการกระจัดในระบบพิกัดในวงกว้าง

$\alpha$ เป็นมุมระหว่างแกนแนวราบในระบบพิกัดเฉพาะที่กับแกนแนวราบในระบบพิกัดในวงกว้าง

หรือเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\{d\} = [a]\{r\} \tag{2.32}$$

สมการ ( 2.32 ) เป็นความสัมพันธ์ของการกระจัดในระบบพิกัดเฉพาะที่กับการกระจัดในระบบพิกัดในวงกว้าง ดังนั้นจะหาความสัมพันธ์ของแรงกระทำในระบบพิกัดเฉพาะที่กับแรงกระทำในระบบพิกัดในวงกว้างได้เป็น

$$\{R\} = [a]^T \{S\} \tag{2.33}$$

เมื่อ $\{S\}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงในระบบพิกัดเฉพาะที่

$\{R\}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงในระบบพิกัดในวงกว้าง

ดังนั้นจะสามารถหาความสัมพันธ์ของแรงกระทำกับการกระจัดในระบบพิกัดในวงกว้างขององค์อาคาร i ได้เป็น

$$\{R\} = [a]^T [k(d)][a]\{r\} \quad \text{หรือ} \quad \{R\} = [K_{global}]^i \{r\} \tag{2.34}$$

เมื่อ $[K_{global}]^i$ เป็นเมตริกซ์สติฟเนสขององค์อาคาร i ในระบบพิกัดในวงกว้าง

ถ้าพิจารณาองค์อาคารทั้งหมด n ชิ้นส่วนในโครงสร้างจะได้

$$\{R\} = \left( \sum_{i=1}^{n} [K_{global}]^i \right) \{r\}$$

เมื่อให้ $[K] = \left( \sum_{i=1}^{n} [K_{global}] \right)$ โดยที่ $[K]$ เป็นเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง

จะได้

$$\{R\} = [K]\{r\} \tag{2.35}$$

เมตริกซ์ $[K]$ ในสมการ ( 2.35 ) จะเป็นเมตริกซ์เอกฐาน(Singular Matrix) เนื่องจากมีการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง( Rigid Body Motion )อยู่ จึงจำเป็นจะต้องใส่เงื่อนไขขอบเขต( Boundary Conditions ) ให้เพียงพอที่จะไม่ให้เกิดการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็ง แล้วจะได้เป็นเมตริกซ์ไม่เอกฐาน( Non-Singular Matrix ) ซึ่งสามารถแก้สมการได้โดยการกำจัดแบบเกาส์(Gauss Elimination)

การวิเคราะห์แบบไม่เชิงเส้น(Non-Linear Analysis)

ในการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบไม่เชิงเส้น(Non-Linear Finite Element Analysis) จะประยุกต์การเพิ่มน้ำหนักบรรทุกทีละขั้นตอนและแก้ปัญหาความไม่เชิงเส้นโดยการใช้ทฤษฎีเชิงเส้น(Linearized Steps)ในแต่ละขั้นตอนนั้นๆ ความสมดุลย์และความสัมพันธ์ทางจลศาสตร์ถูกกำหนดด้วยคุณสมบัติล่าสุดของชิ้นส่วน(Element) เมตริกซ์สติฟเนส(The Stiffness Matrix)ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่เพิ่มทีละขั้น(The Incremental Force) กับการกระจัดที่เพิ่มทีละขั้น(The Incremental Displacement) จะถูกเรียกว่าเมตริกซ์สติฟเนสเพิ่มทีละขั้น(The Incremental Stiffness Matrix)ซึ่งสามารถหาได้ด้วยปฏิบัติการเพิ่มทีละขั้น(Incremental Operator)ที่สมการสมดุลย์(2.35) (Chen and Lui ,1991 )

ส่วนการวิเคราะห์ความไม่เป็นเชิงเส้นทางวัสดุอันเนื่องมาจากชิ้นส่วนโครงสร้างเป็นโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็ก(ซึ่งจะเกิดการแตกร้าวขึ้นเมื่อคอนกรีตรับแรงหรือโมเมนต์เกินกำลังที่จะรับได้)จะประยุกต์ใช้วิธีวิเคราะห์หน้าตัด(Section Analysis) เพื่อหาสภาวะที่แรงและโมเมนต์ที่เท่ากับแรงและโมเมนต์ที่ได้จากการวิเคราะห์ แล้วประยุกต์ใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง(Central Difference)เพื่อหาค่า EA และ EI เนื่องจากความไม่เชิงเส้นทางวัสดุ แล้วนำค่าที่ได้ไปปรับแก้เมตริกซ์สติฟเนสให้มีความถูกต้องตามพฤติกรรมของโครงสร้างต่อไป

วิธีเพิ่มทีละขั้น(Incremental Method)

ในสภาวะสมดุลย์และความสัมพันธ์ทางจลศาสตร์ของโครงสร้างที่ขั้นตอนน้ำหนักบรรทุกกระทำ i-1 ((i-1)–th load step) ถูกสมมุติว่ารู้ค่าแล้ว และใช้ค่าเหล่านี้เป็นพื้นฐานในการคำนวณหาสภาวะของโครงสร้างที่ขั้นตอนน้ำหนักบรรทุกกระทำ i (i–th load step) ต่อไป โดยเขียนความสัมพันธ์ของสติฟเนสเพิ่มทีละขั้น (The incremental stiffness) ได้เป็น

$$K_i^{j-1}\Delta r_i^j = \Delta R_i^j + Q_i^j \quad (2.36)$$

โดยที่ $K_i^{j-1}$ คือ เมตริกซ์สติฟเนสสำหรับขั้นตอนน้ำหนักบรรทุกกระทำ i ที่สร้างขึ้นจากรอบการคำนวณซ้ำที่ j-1 ( (j-1)-th iteration )

$\Delta r_i^j$ คือ การกระจัดที่เพิ่มขึ้นทีละขั้น(The incremental displacement)ที่รอบการกระทำซ้ำ j ของขั้นตอนน้ำหนักบรรทุกกระทำ i

$\Delta R_i^j$ คือ น้ำหนักบรรทุกที่เพิ่มขึ้นทีละขั้น(The load increment)ที่รอบการกระทำซ้ำ j ของขั้นตอนน้ำหนักบรรทุกกระทำ i

$Q_i^j$ คือ แรงคงค้าง(The unbalance force)ที่รอบการกระทำซ้ำ j ของขั้นตอนน้ำหนักบรรทุกกระทำ i (มีค่าเท่ากับผลต่างระหว่างแรงภายนอกกับแรงภายในของโครงสร้าง)

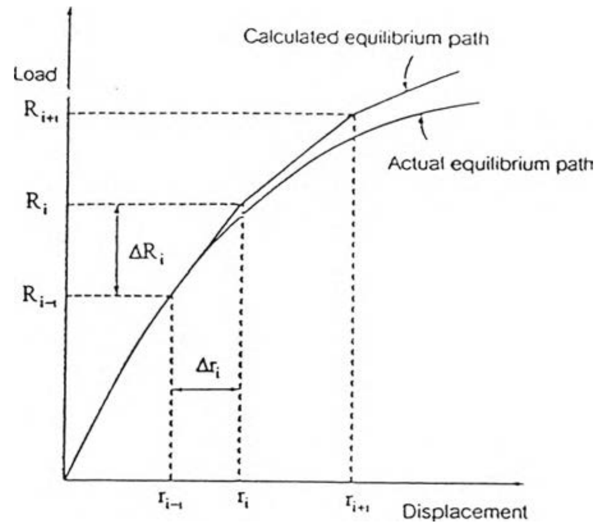
ถ้าการลู่เข้าหาคำตอบที่ต้องการมีการคำนวณทั้งหมด n รอบ ก็จะได้น้ำหนักบรรทุกและการกระจัดสุดท้ายในขั้นตอนน้ำหนักบรรทุกกระทำ i เท่ากับ

$$R_i = R_{i-1} + \sum_{j=1}^{n} \Delta R_i^j \quad (2.37)$$

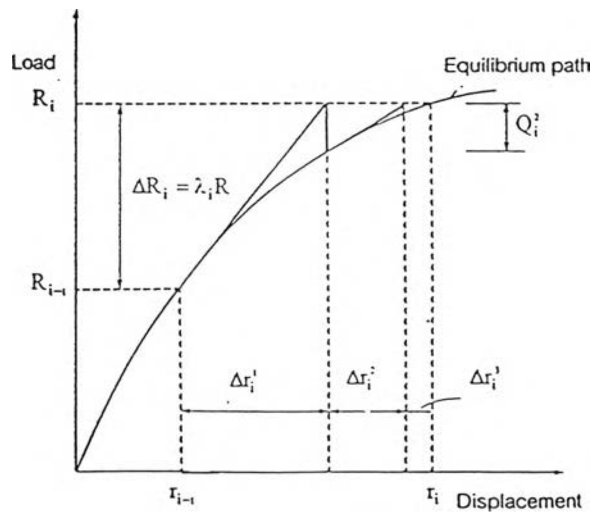
$$r_i = r_{i-1} + \sum_{j=1}^{n} \Delta r_i^j \quad (2.38)$$

ซึ่งเมตริกซ์สติฟเนสจะปรับปรุงค่าทุกครั้งก่อนการคำนวณในขั้นตอนน้ำหนักบรรทุกถัดไป

เนื่องจากวิธีการเพิ่มทีละขั้นแบบธรรมดา(Simple incremental method)จะให้ผลการคำนวณผิดพลาดสะสมขึ้นเรื่อยๆเมื่อมีการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกขึ้นทีละขั้นๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.6 ทั้งนี้เนื่องจากโครงสร้างจะยังคงมีแรงคงค้างเหลืออยู่ทุกครั้งที่มีการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกขึ้นทีละขั้น เพื่อที่จะลดความผิดพลาดจากสาเหตุนี้จะต้องทำการกำจัดแรงคงค้างให้เหลืออยู่น้อยที่สุดในระดับที่ยอมรับได้โดยใช้วิธีของนิวตัน-ราฟสัน(Load Control Newton-Raphson method) ดังแสดงในรูปที่ 2.7




รูปที่ 2.6 วิธีเพิ่มทีละขั้นแบบธรรมดา(Simple incremental method)




รูปที่ 2.7 วิธีนิวตัน-ราฟสัน(Load Control Newton-Raphson method)

เมื่อพิจารณาการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกขั้นที่ i สำหรับรอบการคำนวณซ้ำรอบแรก (j=1) ใช้หน่วยแรงคงค้างเป็นศูนย์ สมการ(2.36) เขียนใหม่ได้ดังสมการ(2.39)

$$K_i^0 \Delta r_i^1 = \Delta R_i^1 \tag{2.39}$$

$\Delta R_i$ คือน้ำหนักบรรทุกที่เพิ่มละขั้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบน้ำหนักบรรทุกรวมทั้งหมดได้ด้วยการคูณตัวประกอบน้ำหนัก ดังนี้

$$\Delta R_i = \lambda_i R \tag{2.40}$$

ดังนั้นจัดรูปสมการ(2.39) ใหม่ได้ดังสมการ(2.41)

$$K_i^0 \Delta r_i^1 = \lambda_i^1 R \tag{2.41}$$

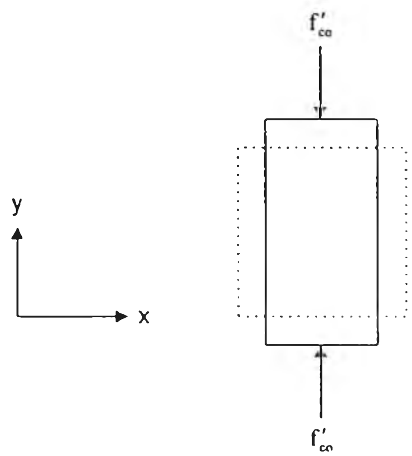
$\Delta r_i^1$ สามารถหาได้จากสมการข้างบนแล้วนำไปบวกเพิ่มกับการกระจัดของโครงสร้างที่มีก่อนหน้านี้แล้ว หลังจากนั้นก็สามารถจัดรูปแบบเมตริกซ์สติฟเนสใหม่ให้แก่โครงสร้างจากค่าที่ได้เหล่านี้ เพื่อนำไปใช้ในรอบการคำนวณต่อไป ถ้าใช้วิธีเพิ่มทีละขั้นธรรมดาก็ไปคำนวณที่น้ำหนักบรรทุกขั้นตอน i+1 ต่อไป แต่ถ้าต้องการความถูกต้องจะต้องกำจัดแรงคงค้างในรอบการคำนวณซ้ำรอบต่อไปอีก (j>1) โดยแทนค่าแรงคงค้างที่คำนวณได้ลงในสมการ(2.36) แล้วจะได้สมการใหม่ ดังสมการ(2.42)

$$K_i^{j-1} \Delta r_i^j = Q_i^j \tag{2.42}$$

ทำการแก้สมการหาค่า $\Delta r_i^j$ ได้จากสมการข้างบน แล้วทำการปรับปรุงเมตริกซ์สติฟเนส แล้วทำขั้นตอนการคำนวณซ้ำรอบต่อไปเรื่อยๆจนกระทั่งค่าแรงคงค้าง $Q_i^j$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ดังแสดงในรูปที่ 2.7

การโอบรัดคอนกรีตของเหล็กปลอก

เมื่อมีแรงอัดในแนวแกนกระทำต่อเสาคอนกรีตเสริมเหล็กแล้ว จะทำให้เหล็กปลอกออกแรงดันต้านทานการขยายออกทางด้านข้างของแกนกลางเสาคอนกรีตอันเนื่องจากผลของปัวซอง (Poisson's effect) โดยเหล็กปลอกที่มีความแข็งแรงเพียงพอก็จะพยายามต้านทานการขยายออกทางด้านข้างนี้ ทำให้เกิดแรงดึงขึ้นในเหล็กปลอก ซึ่งหากมีการบีบรัดคอนกรีตได้อย่างสม่ำเสมอแล้วจะทำให้ความสามารถในการรับแรงในแนวดิ่งมีค่ามากขึ้น โดยความสัมพันธ์ระหว่างกำลังของเสาคอนกรีตที่พิจารณาผลของการโอบรัด( $f'_{cc}$ ) และแรงดันในการโอบรัดของเหล็กปลอก( $f'_l$ ) สามารถหาได้ดังนี้




รูปที่ 2.8 ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของคอนกรีตเมื่อรับแรงอัดในแนวแกน

จากรูปที่ 2.8 เมื่อเสาคอนกรีตรับแรงอัดในแนวแกนแล้วจะทำให้คอนกรีตเกิดการหดตัวในแนวแกน y เท่ากับ $\Delta Y$ และการขยายตัวในแนวแกน x เท่ากับ $\Delta X$ ดังนั้นหน่วยการยืดหดตัวทางด้านข้างของคอนกรีตเนื่องจากแรงอัดในแนวแกน( $\varepsilon_{ul}$ ) ทางเดียว สามารถหาได้ดังนี้

$$\varepsilon_{ul} = \left(\frac{\Delta Y}{-\Delta X}\right)\frac{f'_{co}}{E} = -\mu\frac{f'_{co}}{E} \qquad (2.43)$$

โดยที่ $\mu$ = อัตราส่วนปัวซอง(Poisson's ratio)

$f'_{co}$ = กำลังของเสาคอนกรีตเมื่อไม่พิจารณาผลของการโอบรัดของเหล็กปลอก

หากว่าคอนกรีตได้รับแรงอัดทางด้านข้างด้วย ก็จะทำให้การวิบัติอันเกิดจากการขยายตัวทางด้านข้างเกิดขึ้นช้าลงด้วย เนื่องจากจะเกิดการหักล้างกันระหว่างแรงดึงกับแรงอัดทางด้านข้าง ซึ่งการเสริมเหล็กปลอกโอบรัดคอนกรีตก็จะเป็นการเพิ่มแรงอัดทางด้านข้างนั้นเอง

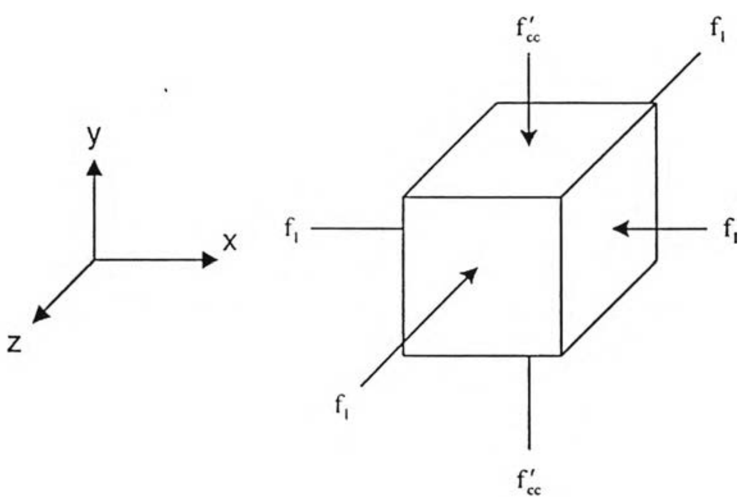
รูปที่ 2.9 แสดงหน่วยแรงที่กระทำแบบสามแกน คือแรงอัดในแนวดิ่ง และแรงอัดทางด้านข้างสองแนว จุดที่คอนกรีตเกิดการวิบัติหาได้จากความสัมพันธ์ดังสมการ(2.44)

$$\varepsilon_{tl} = -\mu\frac{f'_{cc}}{E} - \mu\frac{f_l}{E} + \frac{f_l}{E} \tag{2.44}$$

โดยที่ $\varepsilon_{tl}$ = หน่วยการยืดหดตัวทางด้านข้างเนื่องจากแรงอัดในแนวดิ่งโดยมีการโอบรัดด้วย

$f_l$ = แรงดันเนื่องจากการโอบรัดทางด้านข้าง, กิโลกรัมต่อตารางเซนติเมตร

$f'_{cc}$ = กำลังของเสาคอนกรีตที่พิจารณาผลของการโอบรัด, กิโลกรัมต่อตารางเซนติเมตร




รูปที่ 2.9 หน่วยแรงที่กระทำแบบสามแกน

สมมุติว่าการวิบัติเกิดภายใต้แรงอัดในแนวดิ่งทางเดียวและแรงอัดในแนวดิ่งที่คิดผลของการโอบรัดด้วย จะเกิดขึ้นที่หน่วยการยืดหดตัวทางด้านข้างที่ค่าเดียวกัน , $\varepsilon_{ul} = \varepsilon_{tl}$

$$-\mu\frac{f'_{co}}{E} = -\mu\frac{f'_{cc}}{E} - \mu\frac{f_l}{E} + \frac{f_l}{E} \tag{2.45}$$

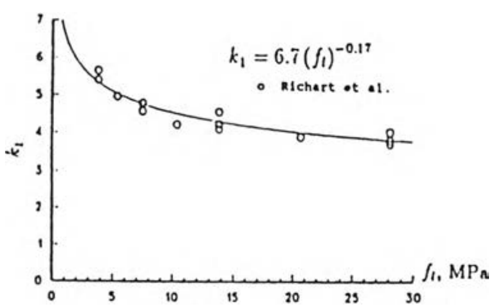
ดังนั้น

$$f'_{cc} = f'_{co} + k_1 f_l \tag{2.46}$$

โดยที่ $k_1 = \frac{(1-\mu)}{\mu}$ (2.47)

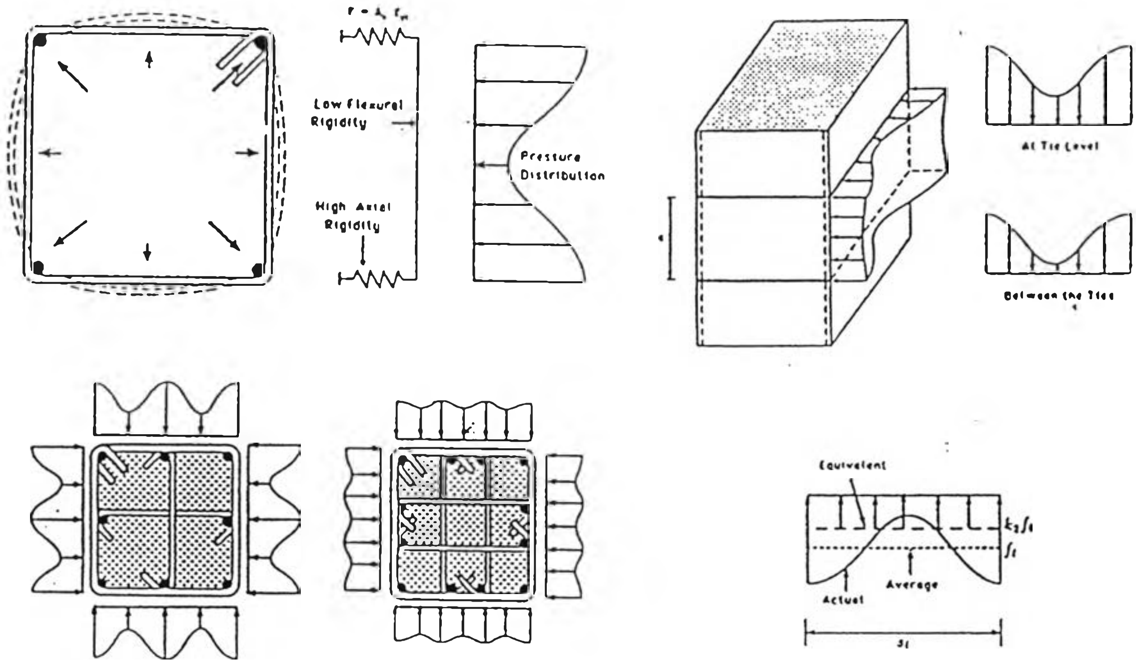
ในส่วนของกำลังของคอนกรีตที่เพิ่มขึ้นเมื่อพิจารณาผลของการโอบรัดนั้น จะมีค่าเพิ่มขึ้นเป็น $k_1$ เท่าของแรงดันที่เกิดจากการโอบรัดทางด้านข้างเนื่องจากผลของเหล็กปลอก ซึ่งสำหรับคอนกรีตจะมีค่าประมาณ 4 เนื่องจากอัตราส่วนปัวซองของคอนกรีตมีค่าประมาณ 0.2

Richart และคณะ(1982) ได้ทำการทดสอบเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ $k_1$ กับแรงดันด้านข้าง $f_l$ ได้ผลดังแสดงด้วยกราฟในรูป 2.10 $k_1 = 6.7(f_l)^{-0.17}$ เมื่อ $f_l$ มีหน่วยเป็น MPa




รูปที่ 2.10 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ $k_1$ กับแรงดันด้านข้าง $f_l$

ในกรณีของเสาคอนกรีตที่ใช้เหล็กปลอกสี่เหลี่ยมนั้น ค่าแรงดันในการโอบรัดจะมีค่ามากในบริเวณมุมของเหล็กปลอกและบริเวณที่เป็นของอเท่านั้น ในขณะที่แรงดันในการโอบรัดบริเวณส่วนกลางของเหล็กปลอกจะเกิดจากกำลังต้านทานแรงดัดของเหล็กปลอกเองซึ่งจะมีค่าน้อยมาก ดังแสดงในรูป 2.11 เพราะเหล็กปลอกในส่วนนี้วางตัวตั้งฉากกับแนวแรงที่กระทำ ทำให้การโอบรัดของเหล็กปลอกในส่วนนี้ไม่มีประสิทธิภาพเต็มที่ ดังนั้นในเสาคอนกรีตที่ใช้เหล็กปลอกสี่เหลี่ยมจึงมีส่วนของคอนกรีตที่ไม่ได้รับการโอบรัดอย่างเต็มที่อยู่ ซึ่งเกิดเนื่องจากผลของระยะห่างระหว่างเหล็กปลอกและลักษณะของเหล็กปลอก ฉะนั้นจึงต้องทำการคูณสัมประสิทธิ์ เพื่อลดความสามารถในการโอบรัดแกนกลางคอนกรีตของเหล็กปลอก($k_2$) และเรียกแรงดันที่ได้ว่าแรงดันด้านข้างเฉลี่ยเทียบเท่าเนื่องจากการโอบรัด กำหนดด้วยสัญลักษณ์ $f_{lc}$




รูปที่ 2.11 การกระจายแรงดันด้านข้างของเสาสี่เหลี่ยมจัตุรัสเนื่องจากการโอบรัด

เมื่อ
$$f_l = \frac{\sum A_{st} f_{yt} \sin\alpha}{s b_c} \tag{2.48}$$

$$k_2 = 0.26\sqrt{\left(\frac{b_c}{s}\right)\left(\frac{bc}{s_l}\right)\left(\frac{1}{f_l}\right)} \leq 1.0 \quad ; \; f_l \text{ มีหน่วยเป็น MPa} \tag{2.49}$$

$$f_{le} = k_2 f_l \tag{2.50}$$

สมการ(2.46) เขียนใหม่ด้วยการแทน $f_l$ ด้วย $f_{le}$ ได้ดังสมการ(2.51)

$$f'_{cc} = f'_{co} + k_1 f_{le} \tag{2.51}$$

ในกรณีที่หน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า หา $f_{le}$ ได้ดังนี้

$$f_{le} = \frac{f_{lex} b_{cx} + f_{ley} b_{cy}}{b_{cx} + b_{cy}} \tag{2.52}$$

<u>การวิเคราะห์ความไม่เป็นเชิงเส้นทางวัสดุโดยวิธีวิเคราะห์หน้าตัด</u>

เมื่อเสร็จการวิเคราะห์โครงสร้างในแต่ละรอบของการเพิ่มแรงกระทำ (Load Increment) นำค่าโมเมนต์ดัดและแรงในแนวแกนจากทุกหน้าตัดของชิ้นส่วนโครงสร้างที่แบ่งย่อย (Discretized Element) มาทำการวิเคราะห์ความไม่เป็นเชิงเส้นทางวัสดุ ตามขั้นตอนดังนี้

1. คำนวณค่าความเครียดของแรงภายในบนหน้าตัดโดยลองเพิ่ม ค่าความเครียดที่ผิวบนสุดของหน้าตัดด้านรับแรงอัด( $A_{st}$) พร้อมไปกับระยะจากจุดนี้ถึงแกนสะเทิน( kd )ทีละขั้น เพื่อสมมุติการกระจายความเครียดเนื่องจากโมเมนต์ดัดและแรงในแนวแกน จากนั้นหาแรงภายใน ซึ่งเกิดจากการสมมุติการกระจายความเครียดในแต่ละขั้น จนแรงภายในของหน้าตัดอยู่ในภาวะสมดุล ซึ่งแรงภายในของหน้าตัดได้แก่

1.1 แรงภายในเนื่องจากคอนกรีต มีสมการดังนี้

$$C = \frac{b.kd}{\varepsilon_{ct}} \int f_c . d\varepsilon \qquad (2.53)$$

โดยที่ b คือ ความกว้างของหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ε คือ ความเครียดที่จุดใดใดของหน้าตัด

ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตเป็นแบบที่คิดผลของเหล็กปลอกรัดรอบที่โอบรัดคอนกรีตแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular Hoops) ที่เสนอโดย Murat และคณะ โดยมีสมการดังต่อไปนี้

1.1.1 หน่วยแรงและแรงอัดของคอนกรีต

หน่วยแรงอัด

$$f_c = f'_{cc}\left[\frac{2\varepsilon}{\varepsilon_1} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)^2\right]^{\left(\frac{1}{(1+2K)}\right)} \quad ; \quad 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1$$

$$f_c = f'_{cc}\left[1 + Z_1(\varepsilon - \varepsilon_1)\right] \quad ; \quad \varepsilon_1 \le \varepsilon \le \varepsilon_{20} \qquad (2.54)$$

$$f_c = 0.20 f'_{cc} \quad ; \quad \varepsilon > \varepsilon_{20}$$

เมื่อ

$$f'_{cc} = f'_{co} + k_1 f_{le}$$

$$k_1 = 9.9424(f_{le})^{-0.17}$$

$$f_{lc} = k_2 f_l \qquad \text{; สำหรับหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส}$$

$$f_{lc} = \frac{f_{lex} b_{cx} + f_{lcy} b_{cy}}{\left(b_{cx} + b_{cy}\right)} \qquad \text{; สำหรับหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า}$$

$$f_l = \frac{\sum A_{st} f_{yt} \sin\alpha}{s b_c}$$

$$k_2 = 0.83\sqrt{\left(\frac{b_c}{s}\right)\left(\frac{b_c}{s_l}\right)\left(\frac{1}{f_l}\right)} \quad \leq 1.0$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_o(1+5K) \;\; ; \;\; K = \frac{k_1 f_{le}}{f'_{co}}$$

$$\varepsilon_{85} = 260\rho\varepsilon_1 + \varepsilon_{o85} \;\; ; \;\; \rho = \frac{\sum A_s}{s\left(b_{cx} + b_{cy}\right)} \;\; ; \;\; \varepsilon_{o85} \approx 0.0038$$

$$\varepsilon_{20} = \varepsilon_1 - \frac{0.80}{Z_1} \qquad ; \;\; Z_1 = -\frac{0.15}{\left(\varepsilon_{85} - \varepsilon_1\right)} \qquad (2.55)$$

หมายเหตุ : ความหมายของเทอมต่างๆ ข้างต้นนิยามไว้ในหน้าสัญลักษณ์

1.1.2 หน่วยแรงและแรงดึงของคอนกรีต

หน่วยแรงดึง $f_c = E_c.\varepsilon \qquad \varepsilon_r \leq \varepsilon \leq 0$ (2.56)

จากสมมุติฐานที่กำหนดให้ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของหน่วยแรงดึงเท่ากับหน่วยแรงอัด และให้คอนกรีตสามารถรับแรงดึงได้ไม่เกินหน่วยแรงดึงที่ยอมให้ของคอนกรีตตาม ACI Committee 318 ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f_r = 1.98\sqrt{f'_c}$

ดังนั้นความเครียดสูงสุดที่ยอมให้ของคอนกรีตเนื่องจากแรงดึง มีค่าเท่ากับ $\varepsilon_r = -\frac{f_r}{E_c}$

จากหน่วยแรงดึงข้างต้น สามารถเขียนเป็นสมการของแรงดึงของคอนกรีต ดังนี้

$$C_t = -\frac{b.E_c.\varepsilon_t^2}{2\phi} \qquad \varepsilon_r \leq \varepsilon_t \leq 0$$

$$= 0 \qquad \varepsilon_t \leq \varepsilon_r \qquad (2.57)$$

$$\phi = \frac{\varepsilon_c}{kd} \tag{2.58}$$

โดยที่ $\varepsilon_c$ คือ ความเครียดที่ผิวรับแรงอัดของคอนกรีต

$\varepsilon_t$ คือ ความเครียดที่ผิวรับแรงดึงของคอนกรีต

1.2 แรงภายในเนื่องจากเหล็กเสริม

ความสัมพันธ์ระหว่างแรงและความเครียดของเหล็กเสริมเป็นแบบอิลาสติก-พลาสติกสมบูรณ์ กำหนดให้

1.2.1 หน่วยแรงและแรงอัดของเหล็กเสริม

หน่วยแรงอัด
$$\begin{aligned} f_s &= E_s.\varepsilon_s && 0 \le \varepsilon_s \le \varepsilon_y \\ f_s &= f_y && \varepsilon_s \ge \varepsilon_y \end{aligned} \tag{2.59}$$

จากหน่วยแรงข้างต้น สามารถเขียนเป็นสมการของแรงอัดของเหล็กเสริม ดังนี้

$$\begin{aligned} S_c &= A_{sc}.E_s.\varepsilon_s && 0 \le \varepsilon_s \le \varepsilon_y \\ S_c &= A_{sc}.f_y && \varepsilon_s \ge \varepsilon_y \end{aligned} \tag{2.60}$$

โดยที่ $\varepsilon_s$ คือ ความเครียดของเหล็กเสริม

$\varepsilon_y$ คือ ความเครียดคลากของเหล็กเสริม

$A_{sc}$ คือ พื้นที่หน้าตัดของเหล็กเสริมรับแรงอัด

2.2.2 หน่วยแรงและแรงดึงของเหล็กเสริม

หน่วยแรงดึง

$$\begin{aligned} f_s &= -E_s.\varepsilon_s && -\varepsilon_y \le \varepsilon_s \le 0 \\ f_s &= -f_y && \varepsilon_s \le -\varepsilon_y \end{aligned} \tag{2.61}$$

จากหน่วยแรงข้างต้น สามารถเขียนเป็นสมการของแรงดึงของเหล็กเสริม ดังนี้

$$S_t = A_{st}.E_s.\varepsilon_s \qquad -\varepsilon_y \le \varepsilon_s \le 0$$

$$S_t = A_{st}.f_y \qquad -\varepsilon_y \ge \varepsilon_s \qquad (2.62)$$

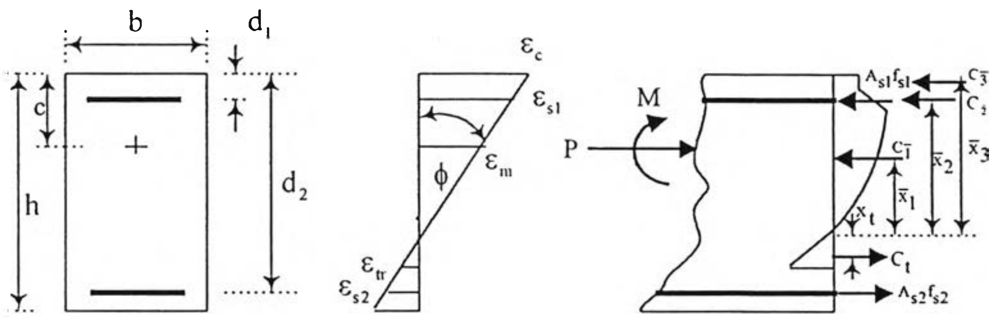
$A_{st}$ คือ พื้นที่หน้าตัดของเหล็กเสริมรับแรงดึง

สมการสมดุลของแรงภายในเนื่องจากวัสดุและแรงในแนวแกน มีดังนี้

$$C_c + C_t + S_c + S_t + P = 0 \qquad (2.63)$$

คำนวณโมเมนต์จากแรงภายในที่สมดุล ที่ตำแหน่ง h/2 โดยมีสมมุติฐานว่าแรงในแนวแกนบนหน้าตัดกระทำผ่านตำแหน่ง h/2 เพื่อเปรียบเทียบกับโมเมนต์ดัดที่ได้จากการวิเคราะห์โครงสร้าง

ถ้าโมเมนต์ที่ได้จากการคำนวณนี้มีค่าต่างจากโมเมนต์ที่ได้จากการวิเคราะห์อยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ให้ทำในขั้นตอนต่อไป ถ้าไม่ได้ต้องเริ่มขั้นตอนนี้ใหม่โดยปรับค่าความเครียดที่ผิวบนสุด




รูปที่ 2.12 การกระจายความเครียด-การกระจายหน่วยแรงของหน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็ก

2. ปรับปรุงสติฟเนสหลังจากหน้าตัดเกิดการแตกร้าว เมื่อหน่วยแรงบนหน้าตัดมีค่าเกินหน่วยแรงดึงที่ยอมให้ของคอนกรีต ทำให้หน้าตัดเกิดการแตกร้าวซึ่งเป็นผลให้เกิดการเปลี่ยน-

แปลงสติฟเนส โดยอาศัยหลักการของผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง(Central difference)คำนวณค่าสติฟเนสสัมผัสเนื่องจากแรงในแนวแกน และสติฟเนสสัมผัสเนื่องจากโมเมนต์ดัด ตามลำดับ ดังนี้

$$EA = \Delta P / \Delta\varepsilon = (P_2 - P_1)/\Delta\varepsilon \tag{2.64}$$

$$EI = \Delta M / \Delta\phi = (M_2 - M_1)/\Delta\phi \tag{2.65}$$

โดยที่ $P_1$ และ $P_2$ คือ แรงในแนวแกนที่สอดคล้องกับความเครียด $[\varepsilon_m - (1/2)\Delta\varepsilon]$ และ $[\varepsilon_m + (1/2)\Delta\varepsilon]$

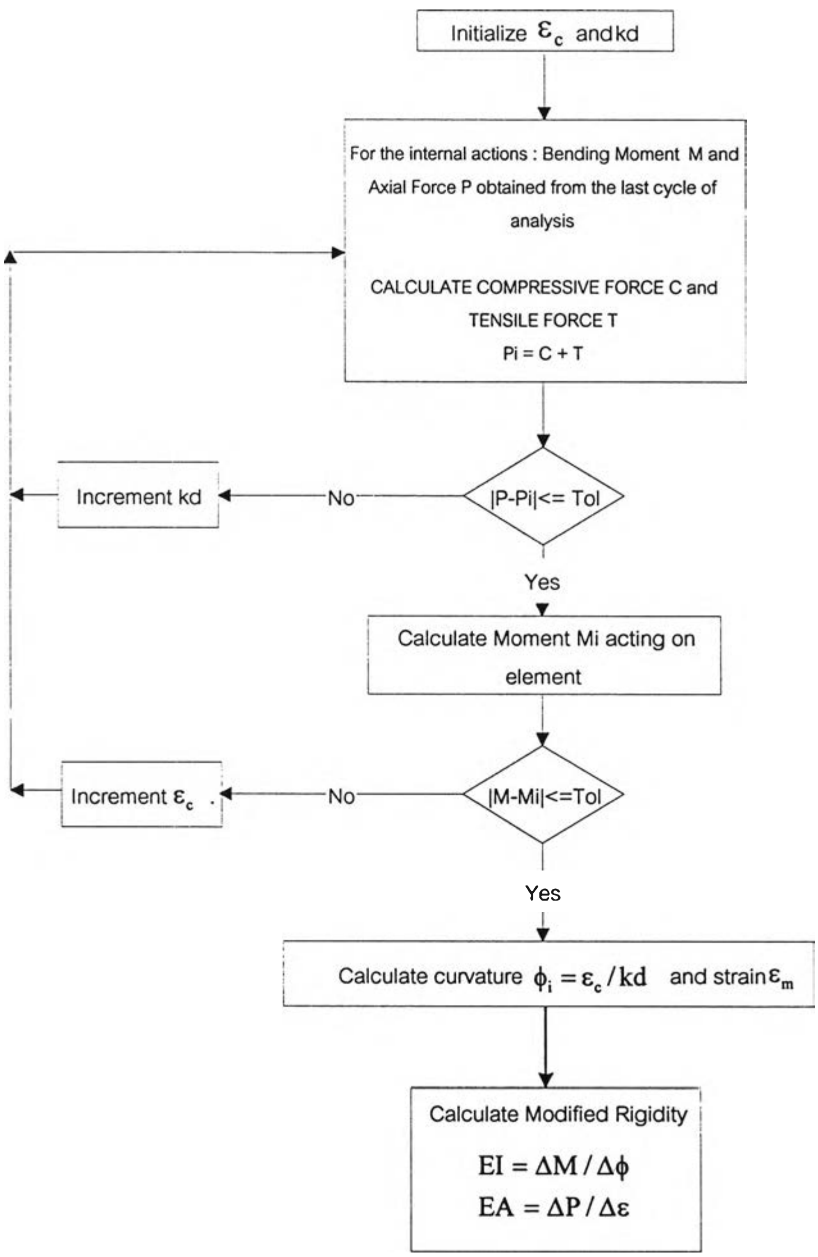
$\varepsilon_m$ คือ ความเครียดเนื่องจากแรงในแนวแกน ที่ตำแหน่งศูนย์กลางพลาสติก

$\Delta\varepsilon$ คือ ผลต่างของความเครียดโดยกำหนดให้มีค่าน้อยๆเช่น $1\times10^{-6}$

$M_1$ และ $M_2$ คือ โมเมนต์ดัดที่สอดคล้องกับค่าความโค้ง $[\phi - (1/2)\Delta\phi]$ และ $[\phi + (1/2)\Delta\phi]$ ขณะที่ แรงในแนวแกน มีค่าคงที่

$\phi$ คือ ค่าความโค้งเนื่องจากโมเมนต์ดัด

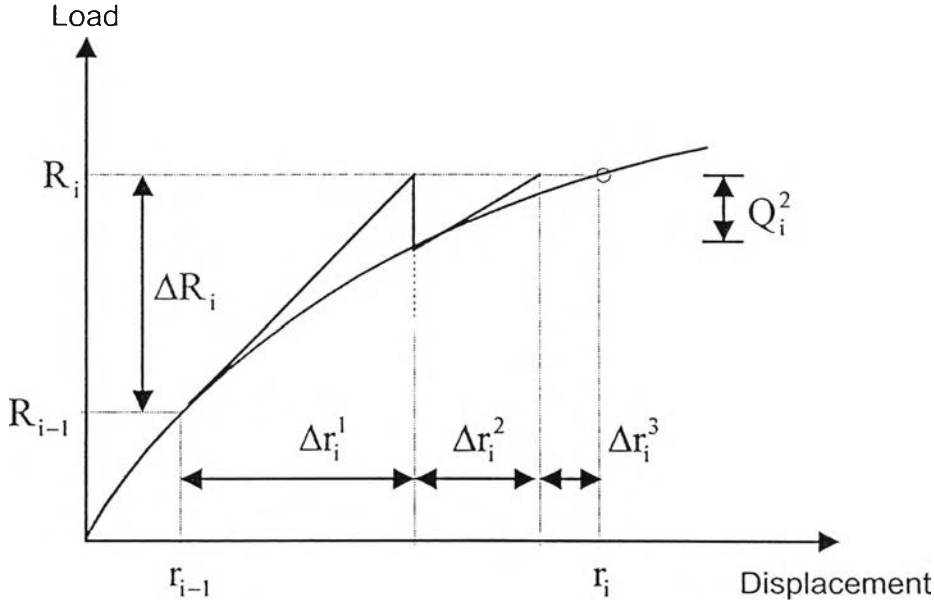
$\Delta\phi$ คือ ผลต่างของค่าความโค้งโดยกำหนดให้มีค่าน้อยๆเช่น $1\times10^{-6}$




รูปที่ 2.13 แผนผังแสดงขั้นตอนการวิเคราะห์ความไม่เป็นเชิงเส้นทางวัสดุโดยวิธีวิเคราะห์หน้าตัด

<u>สรุปขั้นตอนการวิเคราะห์อินอิลาสติกอันดับที่สองของโครงข้อแข็งคอนกรีตเสริมเหล็กโดยคำนึงถึงผลของการโอบรัด</u>

การวิเคราะห์อินอิลาสติกอันดับสองกระทำโดยการรวมขั้นตอนการวิเคราะห์หน้าตัดและการวิเคราะห์อิลาสติกอันดับสองโดยมีการปรับปรุงสติฟเนสเนื่องจากการแตกร้าวของคอนกรีต ไปพร้อมๆกัน ขั้นตอนการวิเคราะห์มีดังนี้




รูปที่ 2.14 การวิเคราะห์อันดับที่สอง(Chen and Lui , 1991)

1. ที่ขั้นตอนใดๆที่ตัวประกอบน้ำหนักมีค่าเป็น $R_{i-1}$ หาแรงภายในของชิ้นส่วนทุกชิ้นส่วนทีละชิ้นส่วน
2. นำผลของแรงภายในที่ได้ไปปรับปรุงค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนตามลำดับ
3. ทำการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างโดยวิธีการรวมสติฟเนสโดยตรง

4. เพิ่มน้ำหนักบรรทุกเป็น $R_i$
5. ทำการวิเคราะห์โดยการกำจัดแบบเกาส์ เพื่อหาการกระจัดและแรงภายใน แล้วหาผลต่างระหว่างแรงภายในขั้นตอนที่ i-1 และขั้นตอนที่ i จะได้เวคเตอร์ของแรงคงค้างในการทำซ้ำรอบแรก
6. คำนวณค่ายูคลิเดียนนอร์มของเวคเตอร์ของแรงคงค้าง (Unbalanced force vector) โดยคำนวณได้จากสมการ ( Bathe and Wilson, 1976 )

$$\| Q \|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2} \tag{2.66}$$

เมื่อ $\| Q \|_e$ = ยูคลิเดียนนอร์มของเวคเตอร์ของแรงคงค้าง $\{Q\}$

$q_i$ = สมาชิกของเวคเตอร์ของแรงคงค้าง $\{Q\}$

n = จำนวนของระดับขั้นความเสรี

7. เปรียบเทียบค่ายูคลิเดียนนอร์มของแรงคงค้าง กับยูคลิเดียนนอร์มของแรงเริ่มต้นโดยงานวิจัยนี้ใช้เงื่อนไขการลู่เข้าหาคำตอบดังนี้ ( Zienkiewicz and Taylor, 1991 )

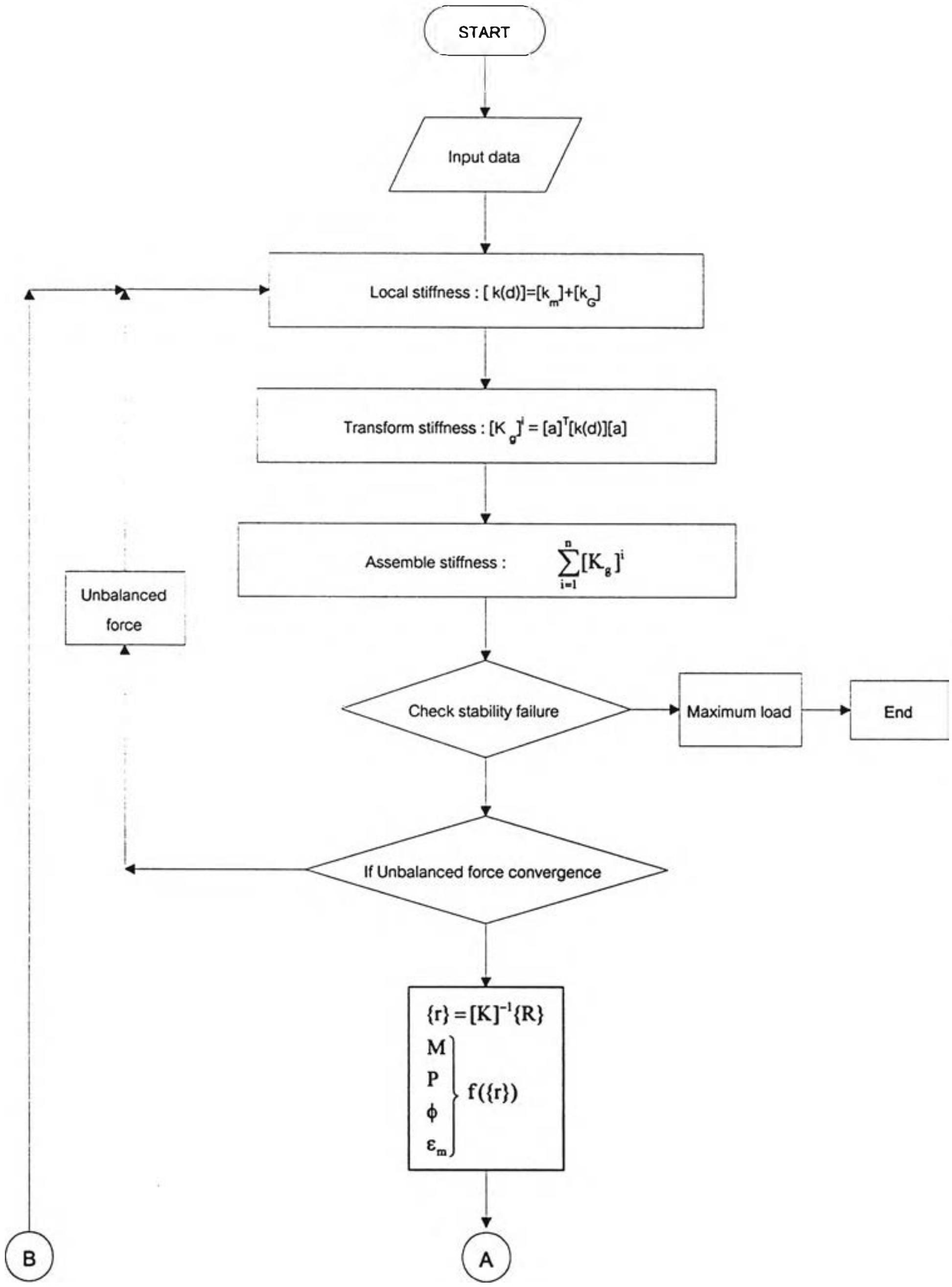
$$\| Q \|_e \leq \frac{0.1}{100} \| \Delta R \|_e \tag{2.67}$$

หากค่ายูคลิเดียนนอร์มของแรงคงค้างเป็นไปตามเงื่อนไขสมการ (2.67) ก็จะทำใน ขั้นตอนที่ 8 ต่อไป แต่ถ้าหากค่ายูคลิเดียนนอร์มไม่เป็นไปตามเงื่อนไขสมการ(2.67) จะต้องกระทำในขั้นตอนที่ 1 ถึง 7 ใหม่โดยให้เวคเตอร์ของแรงกระทำคือเวคเตอร์ของ แรงคงค้าง

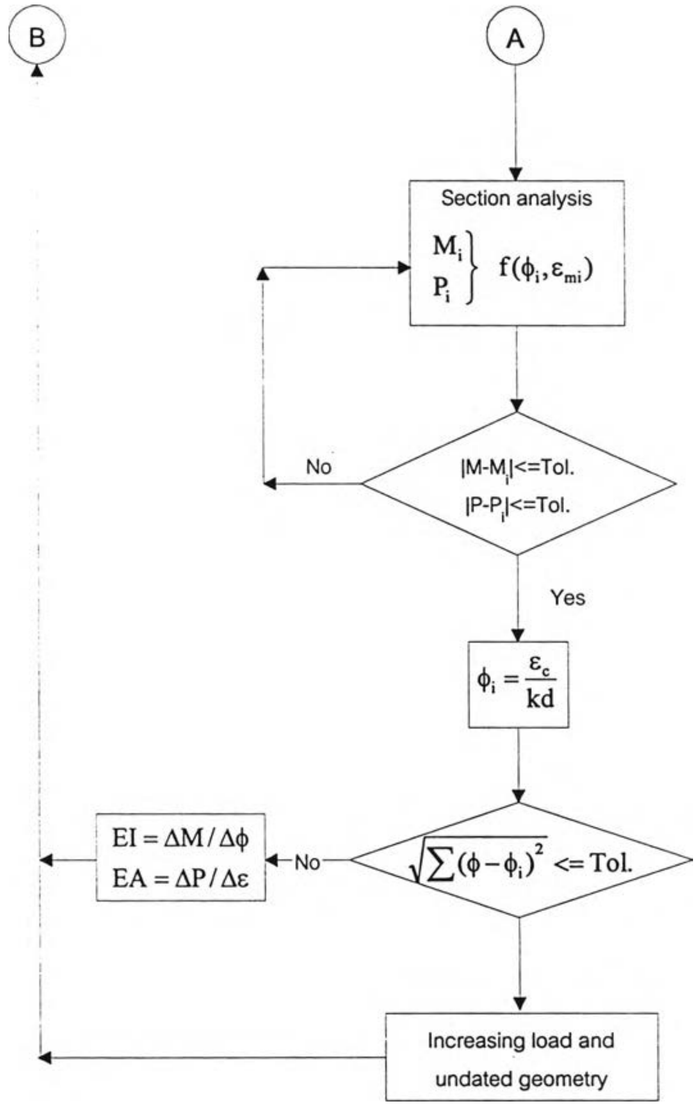
8. จากวิธีการวิเคราะห์หน้าตัด คำนวณหาค่าความโค้ง(Curvature)ในแต่ละหน้าตัด ที่ทำให้ค่าแรงในแนวแกนและโมเมนต์สอดคล้องกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์อินอิลาสติกอันดับสอง แล้วเปรียบเทียบกับค่าความโค้งที่ได้กับรอบการคำนวณที่แล้ว ถ้าเท่ากันก็ทำในขั้นตอนที่ 9 ต่อไป แต่ถ้าไม่เท่ากันจะต้องปรับปรุงค่าสติฟเนสทางแนวแกนและค่าสติฟเนสทางแรงดัดใหม่ ดังสมการที่(2.64) และ (2.65) ตามลำดับ จากนั้นกับไปทำขั้นตอนที่ 1 ถึง 8 ใหม่

9. คำนวณหาตำแหน่งจุดต่อที่เปลี่ยนไปของโครงสร้าง เพื่อเป็นตำแหน่งอ้างอิงทางเรขาคณิตของโครงสร้างใหม่ แล้วทำการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกเป็น $R_{i+1}$ เป็นขั้นตอนถัดไป
10. หลังจากทำการกำจัดแบบเกาส์ของส่วนเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างแต่ละครั้ง จะต้องทำการตรวจสอบเสถียรภาพของโครงสร้างด้วย โดยการตรวจสอบค่าของสมาชิกแต่ละตัวตามแนวทะแยง(Diagonal elements)ของเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง ถ้าโครงสร้าง มีเสถียรภาพแล้ว ค่าของสมาชิกตามแนวทะแยงของเมตริกซ์สติฟเนสทุกตัวจะมีค่ามากกว่าศูนย์ แต่ถ้าหากสมาชิกตามแนวทะแยงของเมตริกซ์สติฟเนสตัวใดตัวหนึ่งหรือหลายตัวมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์แล้ว โครงสร้างนี้จะมีการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง ( Rigid body motion ) เสถียรภาพของโครงสร้างก็จะหมดไป

รูปที่ 2.15 แผนภูมิสายงานของการวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้




รูปที่ 2.15 แผนภูมิสายงานของการวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้




รูปที่ 2.15(ต่อ) แผนภูมิสายงานของการวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้