

### บทที่ 3

#### วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

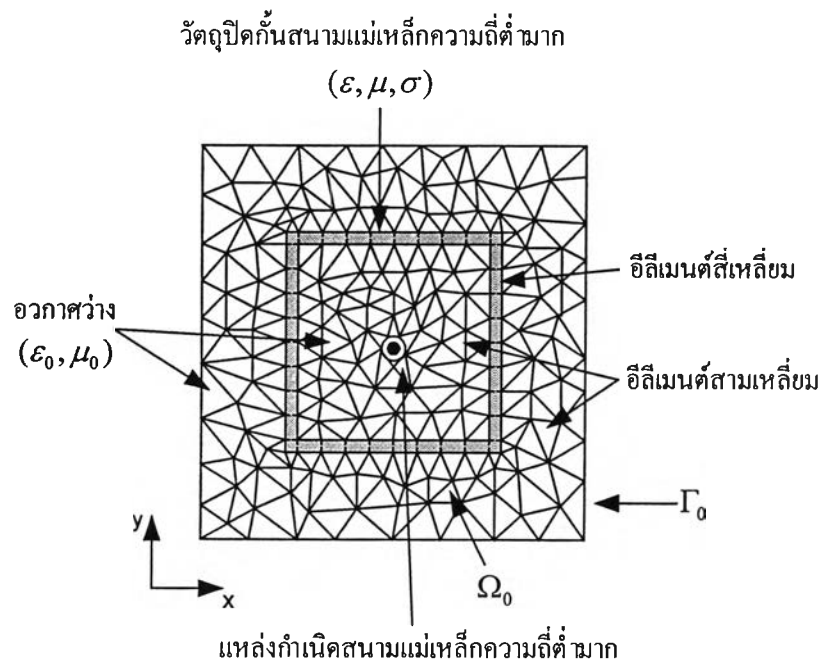
วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ (finite element method : FEM) เป็นวิธีเชิงตัวเลขหรือวิธีการหาคำตอบโดยประมาณที่มีประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยของปัญหาที่มีลักษณะรูปร่างใดๆ เนื่องจากการหาผลเฉลยตามวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์นั้น ต้องแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาทั้งหมดออกเป็นโดเมนย่อยๆ (subdomains) หรือที่เรียกว่า อีลีเมนต์ (elements) ก่อน แล้วจากนั้นจึงสร้างสมการของแต่ละอีลีเมนต์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้นๆ อีลีเมนต์ต่างๆ เหล่านี้จะเชื่อมต่อกันที่จุดโนด (node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะคำนวณค่าของตัวแปรตามที่ต้องการ ขณะเดียวกันเมื่อเทียบกับการหาผลเฉลยของปัญหาในลักษณะเดียวกันด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์นั้นจะกระทำได้ยาก และยังมีข้อจำกัดเกี่ยวกับรูปร่างปัญหาในการหาผลเฉลยอีกด้วย นอกจากนี้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะให้ผลเฉลยในระยะเวลาอันสั้น เนื่องจากเมทริกซ์สุดท้ายของระบบสมการจะเป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยศูนย์เป็นส่วนใหญ่ (sparse matrix) ขณะเดียวกันวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มีข้อด้อย คือ เมื่อนำมาใช้หาผลเฉลยที่บริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่งจะไม่สามารถทำได้ เนื่องจากไม่สามารถที่จะแบ่งอีลีเมนต์ถึงระยะอนันต์ตามขั้นตอนของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ได้และปัญหาหน่วยความจำ (memory) ไม่เพียงพอในการคำนวณ แต่กล่าวโดยรวมแล้ว วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มีความเหมาะสมที่จะนำมาใช้หาผลเฉลยปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมาก เนื่องจากมีความยืดหยุ่นในการประยุกต์ใช้งานกับวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่มีรูปร่างใดๆ ได้ดี

บทนี้นำเสนอ การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากรอบวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากผ่านเทอม  $A_z$  ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหาต่างๆ ดังนี้

- 3.1 การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์
- 3.2 อีลีเมนต์สามเหลี่ยม (triangular element)
- 3.3 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กแม่เหล็กความถี่ต่ำมากด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์
- 3.4 อีลีเมนต์สี่เหลี่ยม (rectangular element)
- 3.5 บทสรุป

### 3.1 การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดขึ้นตามสมการที่ (2.15) นั้น สามารถทำได้โดยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ตามขั้นตอนอันดับแรกของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ คือ การแบ่งบริเวณโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาทั้งหมดออกเป็นโดเมนย่อยๆ (subdomains) หรือที่เรียกว่าอีลีเมนต์ (element) ก่อน ซึ่งอีลีเมนต์เหล่านี้จะมีลักษณะเป็นเส้น พื้นที่ หรือปริมาตร ขึ้นอยู่กับปัญหาที่พิจารณาเป็นหนึ่งมิติ สองมิติ หรือสามมิติ สำหรับวิทยานิพนธ์นี้จะแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องรอบวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากทั้งหมด รวมทั้งแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยมเล็กๆ ซึ่งบริเวณดังกล่าว คือ บริเวณอวกาศว่าง (free space) และบริเวณเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากจะถูกแบ่งออกเป็นอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ ตามที่กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 1.3 ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ลักษณะการแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆ

เมื่อแบ่งบริเวณ  $\Omega_0$  ของโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆเรียบร้อยแล้ว จากนั้นตามขั้นตอนของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ คือ การประมาณผลเฉลยคำตอบภายในแต่ละอีลีเมนต์ หรือที่เรียกว่า ฟังก์ชันทดลอง (trial function) ขึ้น ซึ่งจะถูกสร้างขึ้นในรูปของฟังก์ชันอย่างง่าย เช่น ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ที่ประกอบด้วยฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) หรือฟังก์ชัน

ฐาน (basis function) กับตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (unknown parameter) ของแต่ละอีลีเมนต์ ดังสมการที่ (3.1)

$$A_z^e = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x, y) A_{zi} \quad (3.1)$$

โดยที่  $\Phi_i(x, y)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) หรือฟังก์ชันฐาน (basis function)

โดยฟังก์ชันดังกล่าวแปรตามพิกัด  $xy$

$A_{zi}$  คือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (unknown parameter) ที่มีอยู่ทั้งหมด  $n$  ตัว

การสร้างชุดสมการเพื่อหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ( $A_z$ ) สามารถทำได้โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual method) และเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักตามแบบวิธีกาลอกิน (galerkin method) กล่าวคือ

เศษตกค้าง คือ เศษที่เกิดจากการที่แทนฟังก์ชัน โดยประมาณลงในสมการปัญหาซึ่งปกติต้องไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นสมการที่ (2.15) เศษตกค้าง คือ

$$R = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + j\omega\sigma A_z - J_z \quad (3.2)$$

การถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง คือ การคูณกับเศษตกค้างด้วยฟังก์ชันที่เรียกว่า ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weighted function) และบังคับให้การอินทิเกรตผลคูณนั้นตลอด  $\Omega_0$  มีค่าเท่ากับศูนย์ ผลที่ได้คือ ชุดสมการที่มีจำนวนเท่ากับตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

$$\iint_{\Omega_0} \left[ -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + j\omega\sigma A_z - J_z \right] \Phi_j dx dy = 0 \quad (3.3)$$

โดยที่ฟังก์ชัน  $\Phi_j, (j = 1, 2, 3, \dots, N)$  เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก ซึ่งเป็นฟังก์ชันชนิดเดียวกับฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ทั้งนี้เป็นไปตามวิธีกาลอกิน

กำหนดให้  $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = \nabla^2 A_z$  และจากเอกลักษณ์เวกเตอร์  $\nabla^2 A = \nabla \cdot \nabla A$  ดังนั้นจัดสมการที่ (3.3) ได้ใหม่ ดังนี้

$$-\iint_{\Omega_0} \frac{1}{\mu} (\Phi_j \nabla \cdot \nabla A_z) dx dy + \iint_{\Omega_0} j \omega \sigma A_z \Phi_j dx dy = \iint_{\Omega_0} \Phi_j J_z dx dy \quad (3.4)$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์  $\nabla \cdot (a\vec{B}) = a\nabla \cdot \vec{B} + \vec{B} \nabla \cdot a$  เทียบเอกลักษณ์เวกเตอร์กับพจน์แรกของสมการที่ (3.4) ได้  $a = \Phi_j$  และ  $\vec{B} = \nabla A_z$  ดังนั้นจัดสมการที่ (3.4) ได้ดังนี้

$$-\iint_{\Omega_0} \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\Phi_j \nabla A_z) dx dy + \iint_{\Omega_0} \frac{1}{\mu} (\nabla A_z) \cdot (\nabla \Phi_j) dx dy + \iint_{\Omega_0} j \omega \sigma A_z \Phi_j dx dy = \iint_{\Omega_0} \Phi_j J_z dx dy \quad (3.5)$$

จากทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์บนระนาบ 2 มิติที่ว่า

$$\iint \nabla \cdot \vec{A} dx dy = \oint \vec{A} \cdot \vec{n} dl \quad (3.6)$$

ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์กับพจน์แรกของสมการที่ (3.5) ดังนี้

$$-\oint_{\Gamma} \left( \frac{1}{\mu} \Phi_j \nabla A_z \right) \cdot \vec{n} dl + \iint_{\Omega_0} \frac{1}{\mu} (\nabla A_z) \cdot (\nabla \Phi_j) dx dy + \iint_{\Omega_0} j \omega \sigma A_z \Phi_j dx dy = \iint_{\Omega_0} \Phi_j J_z dx dy \quad (3.7)$$

โดยที่  $n$  คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศพุ่งออกและตั้งฉากกับผิวที่บริเวณขอบ

พิจารณาเทอม  $(\Phi_j \nabla A_z) \cdot \vec{n}$  ซึ่งก็คือ  $(\vec{n} \cdot \nabla A_z) \Phi_j$  ดังนั้น

$$(\vec{n} \cdot \nabla A_z) \Phi_j = \Phi_j \frac{\partial A_z}{\partial n} \quad (3.8)$$

แทนสมการที่ (3.8) และสมการที่ (3.1) ลงในสมการที่ (3.7) จะได้ความสัมพันธ์ของสมการดังนี้

$$\sum_{i=1}^n \left[ \iint_{\Omega_0} \frac{1}{\mu} (\nabla \Phi_i) \cdot (\nabla \Phi_j) dx dy + j \omega \sigma \iint_{\Omega_0} \Phi_i \Phi_j dx dy \right] A_{zi} - \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma} \left( \frac{1}{\mu} \Phi_j \frac{\partial A_z}{\partial n} \right) dl = \iint_{\Omega_0} \Phi_j J_z dx dy \quad (3.9)$$

จากการที่แบ่งโดเมน  $\Omega_0$  ออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆ ดังนั้นการอินทิเกรตตลอดโดเมน  $\Omega_0$  จะเท่ากับผลรวมของการอินทิเกรตในแต่ละอีลีเมนต์ นั่นคือ

$$\sum_{e=1}^{Ne} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \iint_{\Omega_0} \frac{1}{\mu} (\nabla \Phi_i) \cdot (\nabla \Phi_j) dx dy + j\omega\sigma \iint_{\Omega_0} \Phi_i \Phi_j dx dy \right] A_{zi} - \sum_{i=1}^n \left( \oint_{\Gamma} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial n} \right) \Phi_j dl \right\} = \iint_e \Phi_j J_z dx dy \quad (3.10)$$

หรือในรูปสมการเมทริกซ์

$$([S] + [T])[A_z] + [D] \left[ \frac{\partial A_z}{\partial n} \right] = J_z [B] \quad (3.11)$$

$$\text{โดยที่ } S_{ij} = \frac{1}{\mu} \iint_{\Omega_0} (\nabla \Phi_i) \cdot (\nabla \Phi_j) dx dy$$

$$T_{ij} = j\omega\sigma \iint_{\Omega_0} \Phi_i \Phi_j dx dy$$

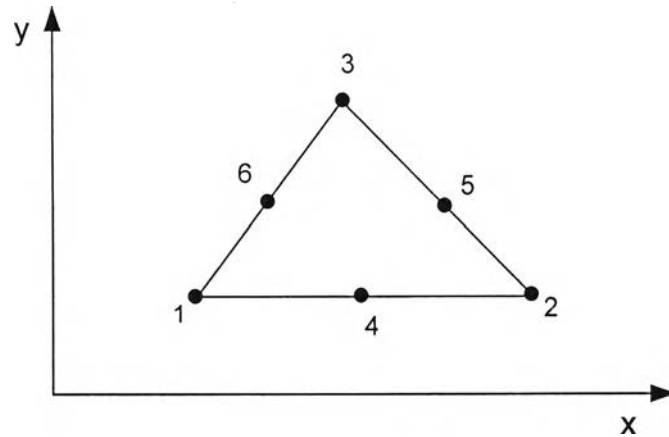
$$D_{ij} = -\frac{1}{\mu} \oint_{\Gamma} \Phi_j dl$$

$$B_{ij} = \iint_e \Phi_j dx dy \quad (3.12)$$

สมการที่ (3.11) และสมการที่ (3.12) ก็คือสมการที่ (2.17) และสมการที่ (2.18) ในบทที่ 2. ตามลำดับ สำหรับลำดับต่อไปจะกล่าวถึงอีลีเมนต์สามเหลี่ยมและอีลีเมนต์สี่เหลี่ยม ซึ่งเป็นอีลีเมนต์ที่นำมาใช้หาผลเฉลยในวิชานีพนธ์นี้

### 3.2 อีลีเมนต์สามเหลี่ยม (triangular element)

การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ จะต้องแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาทั้งหมดออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆ ลักษณะของอีลีเมนต์ที่แบ่งบริเวณรอบวัตถุปิดกันสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากในวิชานีพนธ์นี้จะเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยมเล็กๆ ดังรูปที่ 3.2 (Jin, 1988)



รูปที่ 3.2 อีลีเมนต์สามเหลี่ยมและตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

จากรูปที่ 3.2 แสดงลักษณะอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ประกอบด้วยตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (unknown parameter) ในหนึ่งอีลีเมนต์สามเหลี่ยมจำนวนทั้งสิ้น 6 ตัวแปร ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเหล่านี้จะถูกประมาณที่ตำแหน่งจุดโนดต่างๆ ดังรูปที่ 3.2 โดยหมายเลขโนดที่ 1,2,3 อยู่ที่จุดยอดของสามเหลี่ยม และหมายเลขโนดที่ 4,5,6 จะอยู่ที่จุดกึ่งกลางของแต่ละด้านสามเหลี่ยม ลักษณะอีลีเมนต์สามเหลี่ยมดังกล่าวนี้จะเป็นการประมาณตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในลักษณะ “ฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง” (quadratic element) ค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเหล่านี้จะถูกประมาณได้ดังนี้

$$\phi^e = a^e + b^e x + c^e y + d^e x^2 + e^e xy + f^e y^2 \quad (3.13)$$

ค่าสัมประสิทธิ์  $a^e, b^e, \dots, f^e$  สามารถหาได้จากโนดทั้งหกและเมื่อแทนสมการ (3.13) ลงในสมการที่ (3.1) จะประมาณ  $A_z^e(x, y)$  ได้ดังนี้

$$A_z^e(x, y) = \sum_{i=1}^6 \Phi_i(x, y) A_{zi} \quad (3.14)$$

ในที่นี้  $\Phi_i(x, y)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองในรูปฟังก์ชันสเกลาร์ โดยฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองทั้งหมดในรูปฟังก์ชันสเกลาร์ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\Phi_1 = L_1(2L_1 - 1)$$

$$\Phi_2 = L_2(2L_2 - 1)$$

$$\Phi_3 = L_3(2L_3 - 1)$$

$$\Phi_4 = 4L_1L_2$$

$$\begin{aligned}\Phi_5 &= 4L_2L_3 \\ \Phi_6 &= 4L_3L_1\end{aligned}\quad (3.15)$$

ซึ่ง  $L_1, L_2, L_3$  คือ พิกัดเชิงพื้นที่ (area coordinate) ซึ่งมีค่าดังนี้

$$L_k(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (a_k^e + b_k^e x + c_k^e y) \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.16)$$

และ  $a_k = x_l y_m - x_m y_l$  (3.17)

$$b_k = y_l - y_m \quad (3.18)$$

$$c_k = x_m - x_l \quad (3.19)$$

โดยที่  $(k, l, m)$  จะมีลักษณะการเรียงลำดับแบบโมดูลุโ 3 คือ  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  และ  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  คือ พิกัดของโนด 1, 2 และ 3 ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม และ  $\Delta^e$  คือพื้นที่ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม สามารถหาได้จากการหาดีเทอร์มิแนนต์ของพิกัดที่โนดทั้งสามของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ดังนี้

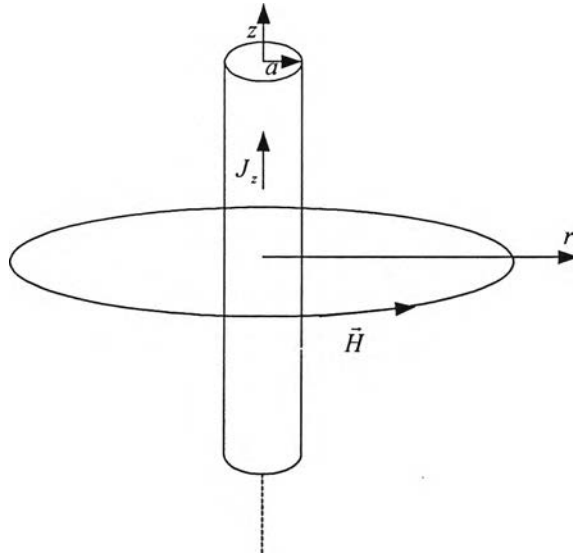
$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

### 3.3 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กแม่เหล็กความถี่ต่ำมากด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

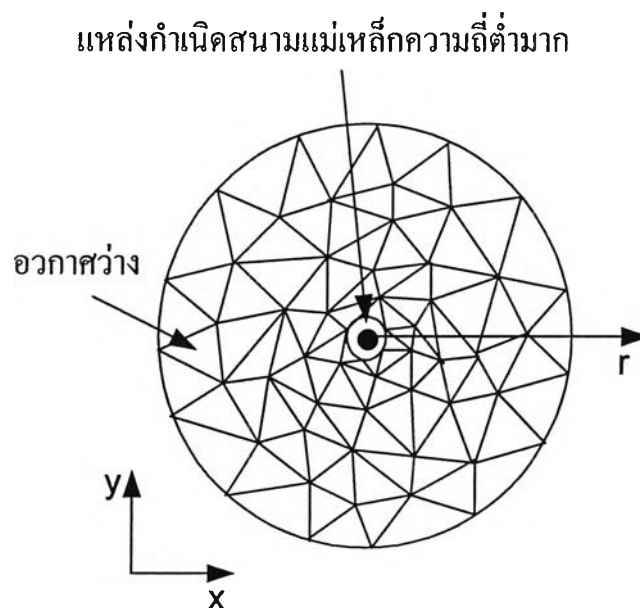
กรณีศึกษาตัวอย่างผลการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากในอวกาศว่าง (free space) ที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ (line source)

จุดประสงค์ตัวอย่างนี้จะเป็นการทดสอบความถูกต้องของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในการนำมาหาผลเฉลยความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดขึ้น โดยเทียบกับผลเฉลยจากวิธีเชิงวิเคราะห์ คือ กฎของแอมป์แปร์ (ampere's law)

ลักษณะแบบจำลองคณิตศาสตร์ในการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากใน อวกาศว่างที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์แสดงได้ดังรูปที่ 3.3 กำหนดให้แหล่งกำเนิด สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากวางอยู่ในทิศทางตามแนวแกน  $z$  มีขนาดเท่ากับ  $1 \text{ A/m}^2$ , รัศมี  $a$  เท่ากับ  $0.05$  เมตร, รัศมี  $r$  เท่ากับ  $50$  เมตร และจำนวนอีลีเมนต์ที่แบ่งเท่ากับ  $1216$  อีลีเมนต์ ดังรูปที่ 3.4

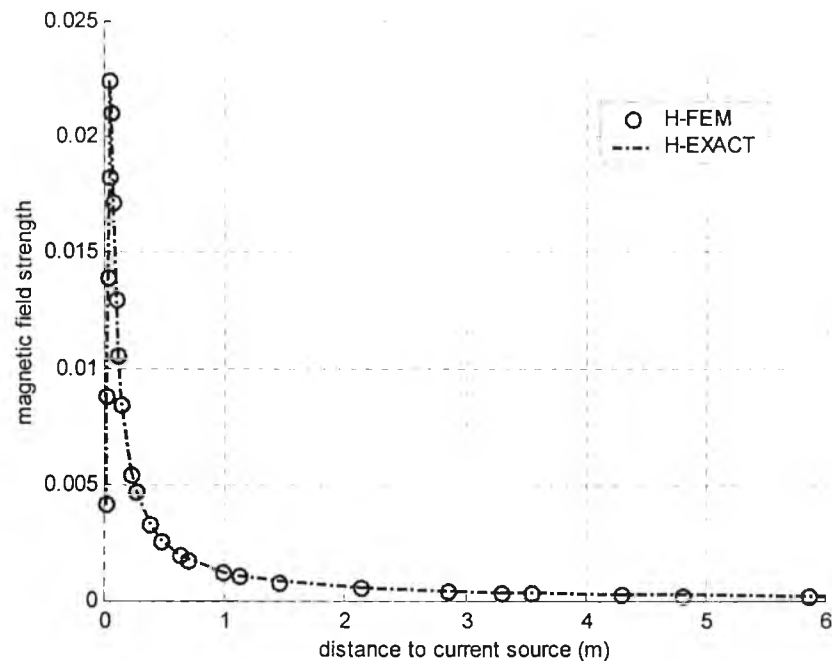


รูปที่ 3.3 การคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์



รูปที่ 3.4 ตัวอย่างการแบ่งโดเมนการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมาก ที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม





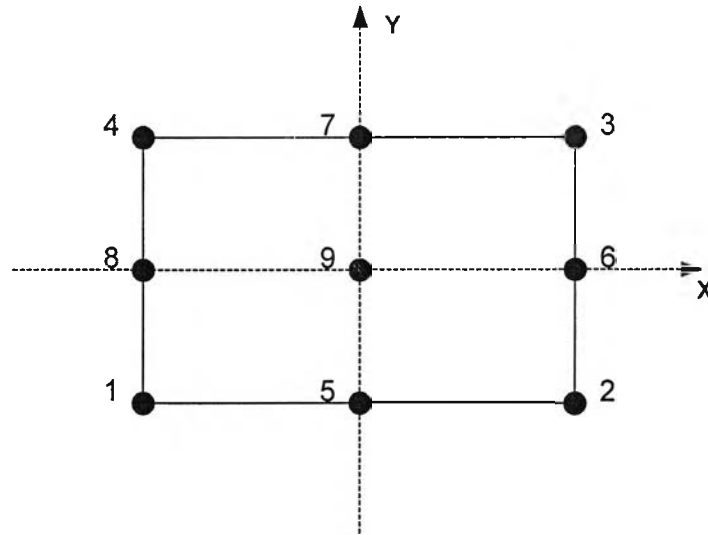
รูปที่ 3.5 เปรียบเทียบผลเฉลยความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ระหว่างวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์

จากรูปที่ 3.5 เป็นผลการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ โดยเทียบผลการคำนวณระหว่างวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ ความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่คำนวณจากวิธีทั้งสองจะมีค่าตรงกัน ความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่คำนวณได้จะมีลักษณะ ดังนี้ ความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากในตอนเริ่มต้นจะมีค่าเพิ่มมากขึ้นจนกระทั่งมีค่าสูงสุดที่ 0.05 เมตร ซึ่งบริเวณนี้ คือ แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมาก หลังจากนั้นความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่คำนวณได้จะมีค่าลดลง เมื่อห่างจากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากมากขึ้น และพบว่าความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่คำนวณได้ ตั้งแต่ 2 เมตรขึ้นไปจะมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก จนถือได้ว่าคงที่

### 3.4 อีลิเมนต์สี่เหลี่ยม (rectangular element)

การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ โดยการแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องในเนื้อวัสดุปิดกันสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่มีลักษณะผิวบางออกเป็นอีลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเล็กๆ ยังผลให้อีลิเมนต์โดยรอบวัตถุปิดกันสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากและในเนื้อวัสดุปิดกัน

สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากมีขนาดเล็กและมีจำนวนมาก ดังนั้นวิทยานิพนธ์จึงเสนอการแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องในเนื้อวัสดุปิดกันสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากออกเป็นอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ (Rectangular element) แทนอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ลักษณะของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสามารถที่จะแสดงได้ดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 อีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าและตัวแปรที่ไม่ทราบ

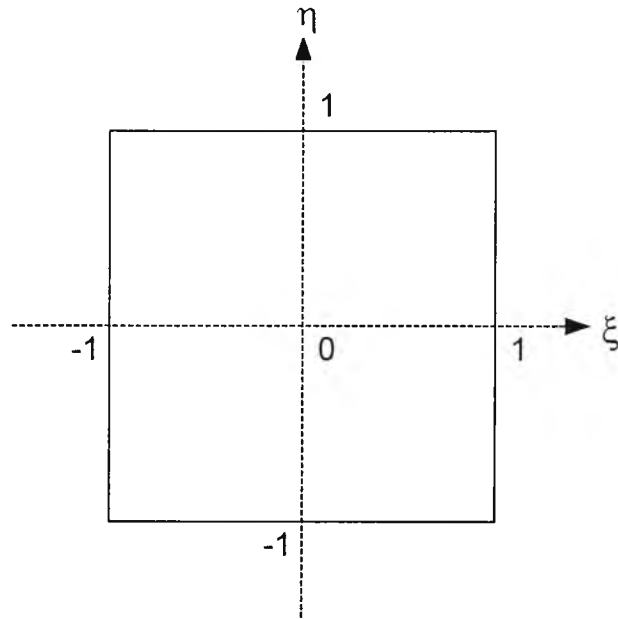
จากรูปที่ 3.6 แสดงลักษณะอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้า ประกอบด้วยตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในหนึ่งอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าจำนวนทั้งสิ้น 9 ตัวแปร ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเหล่านี้จะถูกประมาณที่ตำแหน่งโนดต่างๆบนอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยหมายเลข โนดที่ 1, 2, 3, 4 จะอยู่ที่มุมของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าและหมายเลข โนดที่ 5, 6, 7, 8 จะอยู่ที่จุดกึ่งกลางของแต่ละด้านของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยม ส่วนหมายเลข โนดที่ 9 จะอยู่ที่จุดกึ่งกลางของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ 3.6 สำหรับการประมาณผลเฉลยคำตอบภายในแต่ละอีลีเมนต์ จะถูกประมาณได้ดังนี้

$$A_z^e(x, y) = \sum_{i=1}^9 \Phi_i(\xi, \eta) A_{zi} \quad (3.21)$$

โดยที่  $\Phi_i(\xi, \eta)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัด  $(\xi, \eta)$

$A_{zi}$  คือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่มีอยู่ 9 ตัว

และ พิกัด  $\xi, \eta$  มีค่าอยู่ในช่วงระหว่าง  $-1 < \xi < 1$  และ  $-1 < \eta < 1$  ดังนั้นลักษณะอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัด  $(\xi, \eta)$  แสดงได้ดังนี้



รูปที่ 3.7 อีลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัด  $(\xi, \eta)$

ฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัด  $(\xi, \eta)$  ในสมการที่ (3.21) สามารถที่จะหาได้จากฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์ (lagrange polynomials) ดังนี้ (Zienkiewicz and Taylor, 1989)

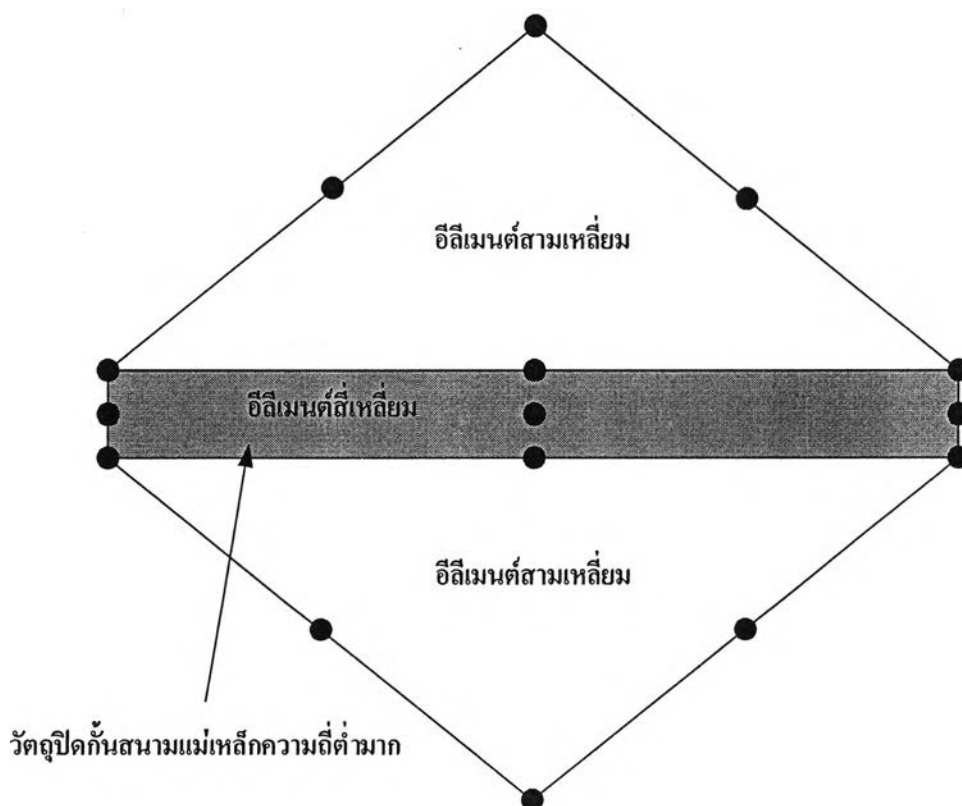
$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1) (\eta - 1) \\
 \Phi_2 &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1) (\eta - 1) \\
 \Phi_3 &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1) (\eta + 1) \\
 \Phi_4 &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1) (\eta + 1) \\
 \Phi_5 &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (\eta - 1) \\
 \Phi_6 &= \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) (1 - \eta^2) \\
 \Phi_7 &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (\eta + 1) \\
 \Phi_8 &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) (1 - \eta^2) \\
 \Phi_9 &= (1 - \xi^2) (1 - \eta^2)
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

โดยที่ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าตามสมการที่ (3.22) จะมีคุณสมบัติสอดคล้องกับ

$$\Phi_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.23)$$

### 3.5 บทสรุป

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพและเหมาะสมที่จะนำมาใช้หาผลเฉลยปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมาก ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างการทดสอบความถูกต้องการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ในหัวข้อที่ 3.3 และปัญหาการแบ่งอีลีเมนต์เป็นจำนวนมากในเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากสามารถที่จะแทนได้ด้วยอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้า เนื่องจากลักษณะของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีด้านยาวยาวกว่าด้านกว้างมาก จึงทำให้ฐานอีลีเมนต์จะยาวและยังผลให้อีลีเมนต์สามเหลี่ยมที่อยู่ติดโดยรอบกับอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีขนาดใหญ่ตามไปด้วยดังรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 ลักษณะของการใช้อีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าร่วมกับอีลีเมนต์สามเหลี่ยม

ขณะเดียวกันวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ก็มีข้อดีอยู่ในการหาผลเฉลยที่บริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิด-  
โล่งตามที่ได้กล่าวไว้ตอนต้น วิทยานิพนธ์นี้จึงเสนอวิธีบาวนด์อีลิเมนต์ในการหาผลเฉลยสนามแม่-  
เหล็กความถี่ต่ำมากบริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่ง ทั้งนี้เพื่อที่จะทราบผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่  
ต่ำมากที่เกิดขึ้นได้ตลอดโดเมนปัญหา ซึ่งวิธีบาวนด์อีลิเมนต์จะถูกนำเสนอไว้ในบทที่ 4