บทที่ 3

ขั้นตอนวิธีสำหรับแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติที่มีเงื่อนไขบังคับเกินจำเป็น

ในบทที่ผ่านมา ได้นำเสนอถึงวิธีการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติ โดยขั้นตอนวิธีของเมกิดโดและเอื้ออารีซึ่งขั้นตอนวิธีดังกล่าวมีประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาสำหรับปัญหาซึ่งทุกเงื่อนไขบังคับของปัญหาต้องเป็นส่วนหนึ่งในบริเวณที่เป็นไปได้ สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึงผลกระทบของเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็นต่อการแก้ปัญหาของเอื้ออารี พร้อมทั้งนำเสนอขั้นตอนวิธีที่ใช้แนวคิดของเอื้ออารีเป็นพื้นฐาน สำหรับการแก้ปัญหาที่มีเงื่อนไขบังคับเกินจำเป็น พร้อมกับตัวอย่างประกอบ

3.1 เงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็น

นิยาม (เงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็น)

เงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็น (Redundant constraints) คือเงื่อนไขบังคับที่เมื่อนำออกจากปัญหาแล้วไม่ทำให้บริเวณที่เป็นไปได้เปลี่ยนแปลง

ตัวอย่างของเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็นมีดังนี้

ตัวอย่าง 3.1

อธิบายลักษณะของบริเวณที่เป็นไปได้จากปัญหากำหนดการเชิงเส้น

สำหรับฟังก์ชันจุดประสงค์ $x+2y$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ 2 ชุดต่อไปนี้

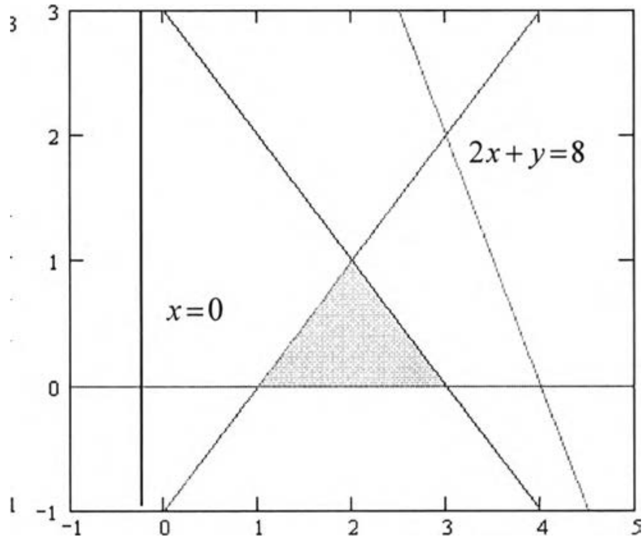
ชุดที่ 1 สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ

$$x-y\geq 1$$
$$x+y\leq 3$$
$$2x+y\leq 8$$
$$x\geq 0$$
$$y\geq 0$$

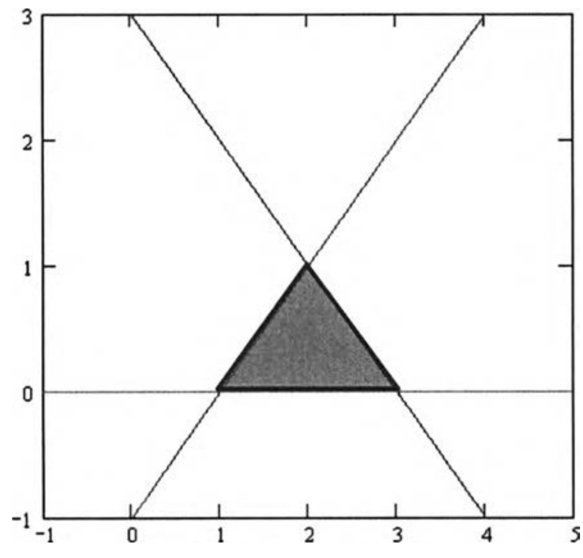
ชุดที่ 2 สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ

$$x - y \geq 1$$
$$x + y \leq 3$$
$$y \geq 0$$

หากแก้ปัญหาโดยวิธีกราฟ ให้ผลดังนี้



รูป 3.1 แสดงการหาคำตอบของเงื่อนไขชุดที่ 1



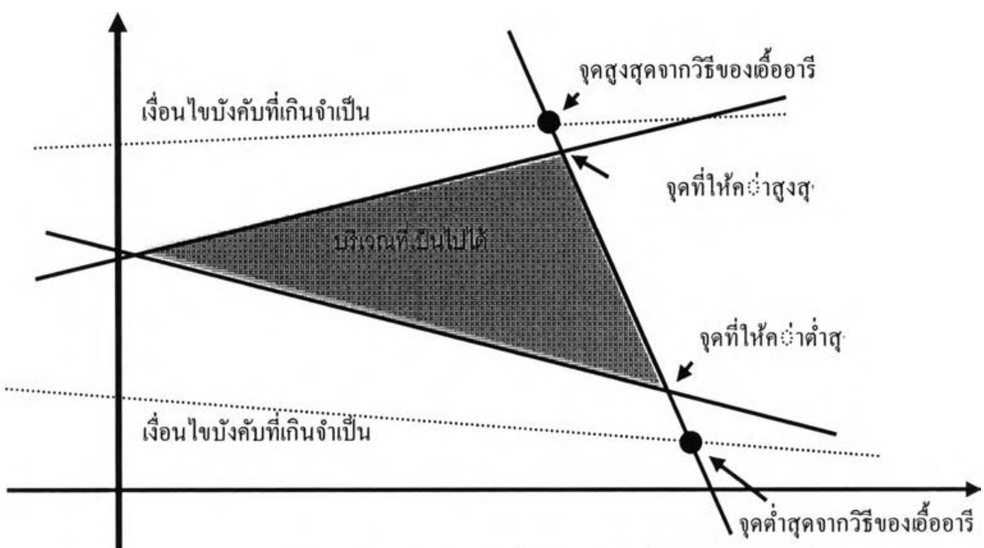
รูป 3.2 แสดงการหาคำตอบของเงื่อนไขชุดที่ 2

จากรูปที่ 3.1 และ 3.2 เห็นว่าทั้งสองรูป ต่างก็มีบริเวณที่เป็นไปได้เหมือนกัน ทำให้การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ได้ที่จุดเดียวกัน เพียงแต่ว่า ในรูปที่ 3.1 มีเงื่อนไขบังคับที่มากกว่ารูปที่ 3.2

และเงื่อนไขในรูปที่ 3.1 ที่ไม่เป็นส่วนหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม (เงื่อนไข $x \geq 0$ และเงื่อนไข $2x + y \leq 8$) หากนำออกจากปัญหา ก็ไม่ส่งผลกระทบต่อการหาค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ อีกทั้งเงื่อนไขทั้งสองไม่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการหาค่าเหมาะที่สุด เรียกเงื่อนไขบังคับดังกล่าวว่า เงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็น

3.2 ผลกระทบของเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็นต่อวิธีการของเอื้ออารี

ในวิธีการหาคำตอบของเอื้ออารี จุดที่เป็นผลเฉลยจะเกิดจากการตัดกันของสองเงื่อนไขบังคับ แต่ไม่มีการพิจารณาว่า วิธีการดังกล่าวสามารถใช้ได้กับปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีเงื่อนไขเกินจำเป็นได้หรือไม่ เพราะหากปัญหามีเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็นแล้ว จุดที่เป็นผลเฉลยด้วยวิธีการของเอื้ออารีอาจจะไม่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้



รูป 3.3 แสดงผลกระทบของเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็นต่อการหาคำตอบ

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.2 สำหรับการหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $x + y$

สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ

$$y \leq 0 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$2x + y \leq 2 \quad \ldots\ldots (2)$$
$$x + 2y \leq 2 \quad \ldots\ldots (3)$$
$$x + y \geq -2 \quad \ldots\ldots (4)$$

ไม่จำกัดค่าของ x,y

<u>วิธีทำ</u> โดยวิธีของเอื้ออารี กำหนดให้ $z = x + y, y = z - x$ แทนในปัญหาเริ่มต้นได้

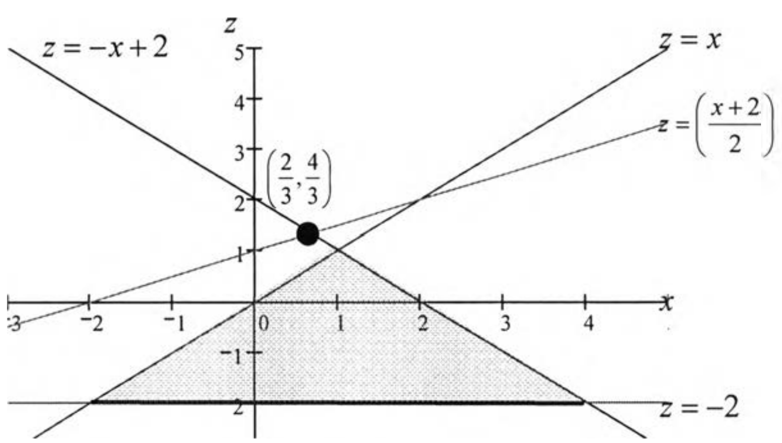
สำหรับการหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ z

สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ

$$z \le x \quad\ldots\ldots\ldots \in I_{21}$$
$$z \le -x+2 \quad\ldots\ldots\ldots \in I_{22}$$
$$z \le \left(\frac{x+2}{2}\right) \quad\ldots\ldots\ldots \in I_{21}$$
$$z \ge -2 \quad\ldots\ldots\ldots \in I_{11} \text{ หรือ } I_{12}$$

ได้ว่า ค่าต่ำสุดของปัญหานี้เท่ากับ -2 (จากเงื่อนไขสุดท้าย) และค่าสูงสุดจะเกิดจากการตัดกันของเงื่อนไขที่มีค่าความชันน้อยสุดในกลุ่ม I_{21} และกลุ่ม I_{22} นั่นคือ ค่าสูงสุดจะมาจากการตัดกันของเงื่อนไขที่ (2) กับ (3) ซึ่งเท่ากับ $\frac{4}{3}$ ที่จุด$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

จากตัวอย่างที่ 3.2 หากเขียนกราฟระหว่าง Z กับ X ได้ดังนี้



รูป 3.4 แสดงกราฟของตัวอย่างที่ 3.2

สำหรับการหาค่าต่ำสุด จะได้ว่า จุดที่ทำให้เกิดค่าต่ำสุดสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับของปัญหา แต่จุดที่เกิดค่าสูงสุด (จุด $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$)ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $z \le x$ (เพราะ $z=\frac{4}{3} \ge \frac{2}{3}=x$)และจุดดังกล่าวไม่ใช่จุดที่เหมาะสมที่สุด (ในตัวอย่างที่ 3.1จุดที่ให้ค่าสูงสุดคือจุด (1,1)) ซึ่งในหัวข้อต่อไปจะแสดงวิธีที่สามารถใช้วิธีของเอื้ออารี พร้อมทั้งหาผลเฉลยที่สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับต่อไป

3.3 **ขั้นตอนวิธีสำหรับแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติที่มีเงื่อนไขบังคับเกินจำเป็น** (Krung, Aua-aree & Nattapong method -KAN method)

จากบทที่ผ่านมา เราสามารถใช้วิธีการของเอื้ออารีในการแก้ปัญหาโดยจะต้องไม่มีเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็น ในหัวข้อนี้จะแสดงขั้นตอนวิธีที่สามารถใช้แก้ปัญหาได้เมื่อมีเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็นรวมอยู่ด้วย ในวิธีการของเอื้ออารี จุดที่เป็นผลเฉลยจะต้องมาจากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยที่สุด(หรือมากที่สุด)ตัดกัน 2 เงื่อนไข เงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็นนั้นจะมีค่าความชันน้อยที่สุด (หรือมากที่สุด) ซึ่งจะส่งผลกระทบต่อการหาผลเฉลย นั่นคือจุดที่ได้จะไม่ใช่จุดที่เหมาะสมที่สุด เพราะจะไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับบางเงื่อนไข ซึ่งขั้นตอนวิธีที่จะสามารถระบุว่า เงื่อนไขบังคับใดเป็นเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็น มีขั้นตอนดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1 (ขั้นตอนวิธีสำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติที่มีเงื่อนไขบังคับเกินจำเป็น)

สำหรับขั้นตอนวิธีเพื่อหาคำตอบมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ให้ p เป็นผลเฉลยซึ่งได้จากวิธีการหาคำตอบของเอื้ออารี

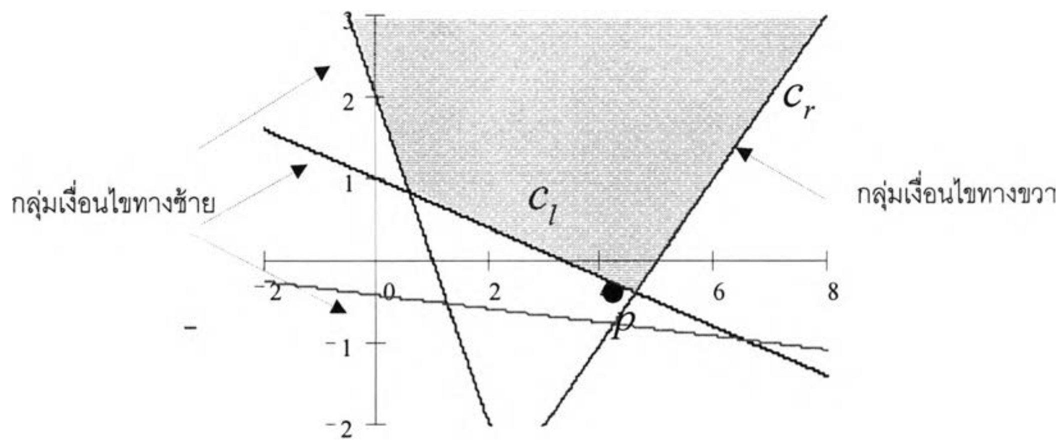
ขั้นที่ 2 กำหนดให้ c_l แทนเงื่อนไขบังคับที่ก่อให้เกิดจุด p และอยู่ทางซ้ายจากจุด p

c_r แทนเงื่อนไขบังคับที่ก่อให้เกิดจุด p และอยู่ทางขวาจากจุด p

ขั้นที่ 3 กำหนดกลุ่มเงื่อนไขทางซ้าย (left constraint group) และกลุ่มเงื่อนไขทางขวา (right constraint group) ดังนี้โดยที่ l แสดงกลุ่มเงื่อนไขบังคับทางซ้าย และ r แทนกลุ่มเงื่อนไขบังคับทางขวา

- กลุ่มเงื่อนไขทางซ้ายคือ กลุ่มเงื่อนไขที่มีเงื่อนไขบังคับ c_l อยู่ในกลุ่ม
- กลุ่มเงื่อนไขทางขวาคือ กลุ่มเงื่อนไขที่มีเงื่อนไขบังคับ c_r อยู่ในกลุ่ม

ซึ่งในปัญหาส่วนใหญ่จะมีกลุ่มเงื่อนไขบังคับ I_{11} หรือ I_{21} เป็นกลุ่มเงื่อนไขทางซ้าย ส่วนกลุ่มเงื่อนไขบังคับ I_{12} หรือ I_{22} จะจัดให้เป็นกลุ่มเงื่อนไขทางขวา

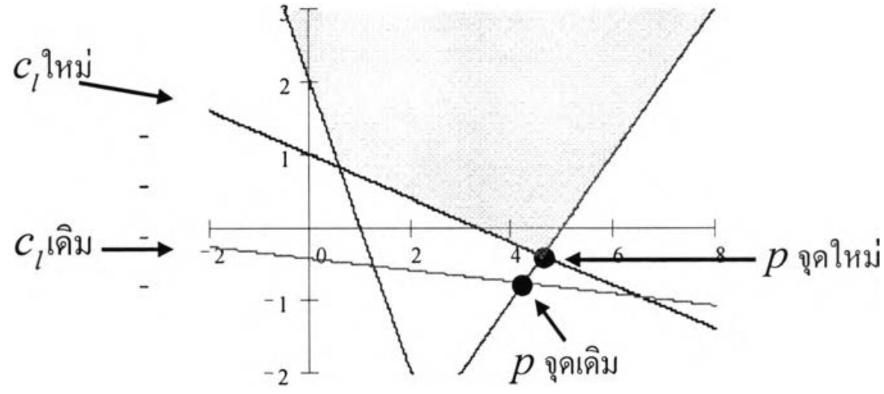


รูป 3.5 แสดงความหมายของจุด p, กลุ่มเงื่อนไขทางซ้าย, กลุ่มเงื่อนไขทางขวา
เงื่อนไข c_l และ c_r

ขั้นที่ 4 สำหรับกลุ่มเงื่อนไขบังคับทางซ้าย

หากจุด p ที่ได้จากการคำนวณจุดตัดของเงื่อนไขบังคับครั้งล่าสุด สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม แสดงว่าเงื่อนไข c_l นั้นเป็นเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยที่สุด สอดคล้องกับวิธีการหาคำตอบของเอื้ออารี ดังนั้นเราจะยังคงเงื่อนไข c_l ไว้ไม่ต้องเปลี่ยน

แต่ถ้าหากจุด p ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับบางเงื่อนไขของกลุ่ม แสดงว่าเงื่อนไขบังคับ c_l ปัจจุบันนั้นเป็นเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็น ต้องมีการเปลี่ยนเงื่อนไขบังคับใหม่ โดยที่เงื่อนไขบังคับใหม่ที่เลือกนั้นจะต้องเป็นเงื่อนไขบังคับที่ไม่สอดคล้องจากการแทนค่าจุด p ครั้งล่าสุด หากมีมากกว่า 1 เงื่อนไขบังคับ จะต้องเอาเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยที่สุด (หรือมากที่สุดตามแต่กรณี) จากนั้นคำนวณหาจุด p ใหม่ โดยคำนวณจากเงื่อนไข c_l ใหม่ กับเงื่อนไข c_r เดิม แล้วจึงทำต่อที่ขั้นที่ 5



รูป 3.6 แสดงการทำงานในขั้นตอนที่ 4

ขั้นที่ 5 ทำลักษณะเดียวกันกับขั้นตอนที่ 4 เพียงเปลี่ยนมาพิจารณากลุ่มเงื่อนไขทางขวาแทน นั่นคือ

หากจุด p ที่ได้จากการคำนวณครั้งล่าสุด สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขในกลุ่ม แสดงว่าเงื่อนไข c_r นั้นเป็นเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยที่สุด สอดคล้องกับวิธีการหาคำตอบของเอื้ออารี ดังนั้นเราจะยังคงเงื่อนไข c_r ไว้ไม่ต้องเปลี่ยน และไปที่ขั้นที่ 6

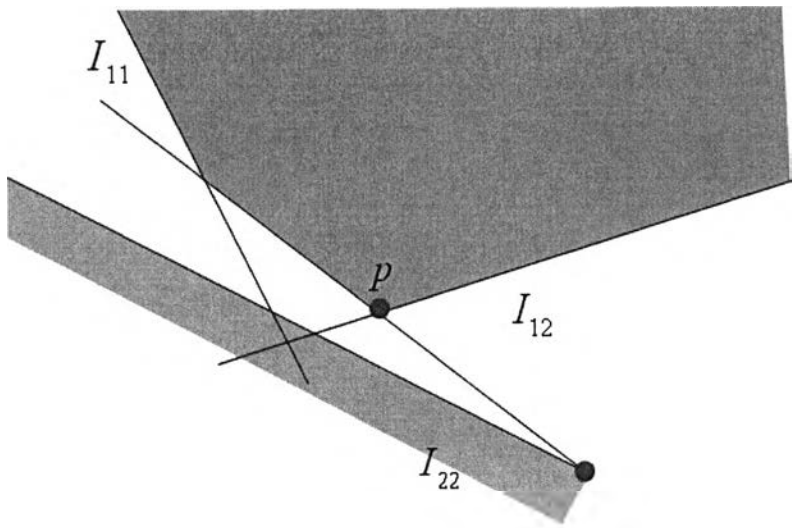
แต่ถ้าหากจุด p ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับบางเงื่อนไขของกลุ่ม แสดงว่าเงื่อนไข c_r ปัจจุบันนั้นเป็นเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็น ต้องมีการเปลี่ยนเงื่อนไขใหม่ โดยที่เงื่อนไขบังคับใหม่ที่เลือกนั้น จะต้องเป็นเงื่อนไขบังคับที่ไม่สอดคล้องจากการแทนค่าจุด p ครั้งล่าสุด หากมีมากกว่า 1 เงื่อนไขบังคับ จะต้องเอาเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยที่สุด (หรือมากที่สุดตามกรณี) จากนั้นคำนวณหาจุด p ใหม่ โดยคำนวณจากเงื่อนไข c_r ใหม่กับเงื่อนไข c_l เดิม แล้วจึงกลับไปทำที่ขั้นที่ 4

ขั้นที่ 6 สรุปคำตอบ พร้อมตรวจสอบความเป็นไปได้ของคำตอบ

เนื่องจากจุด p ที่อยู่ในขั้นล่าสุด เป็นจุดที่เกิดจากการตัดกันของเงื่อนไข 2 เงื่อนไขที่มีความชันน้อยที่สุด และสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับของปัญหาเริ่มต้น และสอดคล้องกับวิธีการหาคำตอบของเอื้ออารี ดังนั้น จุด p นี้เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด แต่ยังไม่ได้หมายความว่า จุดดังกล่าวจะสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขในปัญหา เนื่องจากขั้นตอนวิธีดังกล่าวได้ใช้เพียงแค่กลุ่มเงื่อนไขบังคับเพียงแค่สองกลุ่มเท่านั้น หากปัญหาที่พิจารณามีกลุ่มเงื่อนไขบังคับมากกว่าสองกลุ่มแล้ว เงื่อนไขที่ขั้นตอนวิธีนี้ไม่ได้พิจารณาอาจทำให้ปัญหาดังกล่าวไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ก็ได้

6.1 หากปัญหาเริ่มต้นสามารถจัดกลุ่มเงื่อนไขบังคับได้เพียง 2 กลุ่มเท่านั้น และเงื่อนไขบังคับทั้งสองกลุ่มถูกใช้ในขั้นตอนวิธีนี้ จะได้ว่า จุด p ในขั้นตอนนี้เป็นจุดที่เหมาะที่สุด

6.2 หากปัญหาเริ่มต้นสามารถจัดกลุ่มเงื่อนไขบังคับได้มากกว่า 2 กลุ่ม เนื่องจากจุดคำตอบจากขั้นตอนวิธีนี้จะรับประกันว่าสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับทุกเงื่อนไขเพียงแค่สองกลุ่มที่นำมาพิจารณาเท่านั้น หากจุด p สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขที่เหลืออยู่ในปัญหา (ในกลุ่มเงื่อนไขอื่นที่ไม่ได้นำมาพิจารณาโดยขั้นตอนวิธีนี้) จะได้ว่า จุดนี้เป็นจุดที่เหมาะสมที่สุดที่สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับ แต่ถ้าหากว่าไม่สอดคล้องกับบางเงื่อนไขแล้วให้พิจารณา โดยพิจารณาจุดตัดระหว่างเงื่อนไขบังคับที่ก่อให้เกิดจุด p กับเงื่อนไขบังคับที่ไม่สอดคล้องดังกล่าว หากจุดตัดนั้นสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่เหลือ ก็จะกล่าวได้ว่า จุดนั้นเป็นจุดที่เหมาะที่สุด แต่หากไม่สอดคล้องแล้ว ปัญหานั้นจะไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ (ดังแสดงในรูป 3.7)



รูป 3.7 แสดงปัญหาที่ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้

ต่อไป จะเป็นการอธิบายว่าขั้นตอนวิธีดังกล่าวสามารถรับประกันจุดเหมาะที่สุดหากปัญหานั้นมีจุดเหมาะที่สุด

ในการแสดงความเหมาะสมของจุดจากขั้นตอนวิธีดังกล่าว จะขอนิยามปัญหาเริ่มต้นดังนี้

หาค่าต่ำสุดของ y

สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ $y \geq m_i x_2 + b_i$, $1 \leq i \leq n$

ไม่จำกัดค่าของ x_2

ซึ่งก็คือปัญหา LPT นั่นเอง

โดยใช้เงื่อนไขเคเคทีในหัวข้อที่ 2.3 สร้างปัญหาคู่ควบได้เป็น

หาค่าสูงสุดของ $u_1 b_1 + u_2 b_2 + \dots\dots\dots + u_n b_n$

$u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n = 1$

สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ $-m_1 u_1 - m_2 u_2 - \dots\dots - m_n u_n = 0$

$u_i \geq 0$

เมื่อ u_i แทนตัวแปรคู่ควบที่สมนัยกับสมการที่ i ของปัญหาเริ่มต้น

เมื่อใช้เงื่อนไขที่ 3 ของเคเคที

$$u^T (Ax - b) = 0$$

สำหรับจุดตัด x ใดๆในปัญหาจะได้ว่า

$u_i = 0$ เมื่อเงื่อนไขบังคับนั้นไม่ทำให้เกิดจุด x

และ $(Ax - b) = 0$ เมื่อเงื่อนไขนั้นก่อให้เกิดจุด x

สำหรับปัญหาสองมิติ จุดตัดจะเกิดจากเงื่อนไขบังคับสองเงื่อนไข และจะเหลือเงื่อนไขจำนวนไม่เกิน $n-2$ เงื่อนไขที่ไม่เกี่ยวข้อง ดังนั้น จะมี u_i อย่างน้อย 2 ตัวที่ไม่เท่ากับศูนย์

โดยไม่เสียนัยสำคัญ ใน u_1 และ u_2 เป็นตัวแปรคู่ควบที่ก่อให้เกิด x และปัญหาคู่ควบจะลดเหลือเพียง

หาค่าสูงสุดของ $u_1b_1 + u_2b_2$

สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ
$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= 1 \\ -m_1u_1 - m_2u_2 &= 0 \\ u_1, u_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

พิจารณาจุดคำตอบจากวิธีการของเอื้ออารีจะพบว่า จุดคำตอบจะเกิดจากการตัดกันของสองเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันมีเครื่องหมายต่างกัน นั่นคือ m_1 และ m_2 จะมีเครื่องหมายต่างกัน

สมมติให้ $m_1 \leq 0, m_2 > 0$

$$-m_1u_1 - m_2u_2 = 0$$

$$u_2 = \frac{m_1u_1}{-m_2}$$

จาก

$$u_1 + \left(\frac{m_1u_1}{-m_2}\right) = 1$$

$$\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)u_1 = 1$$

$$\therefore u_1 = \frac{m_2}{m_2 - m_1}$$

แต่เนื่องจาก $m_1 \leq 0$ ดังนั้น

$$u_1 = \frac{m_2}{m_2 + |m_1|} \geq 0$$

และ

$$u_2 = \frac{|m_1|}{m_2}u_1 \geq 0$$

นั่นคือ สามารถหา u_i ที่สอดคล้องกับปัญหาคู่ควบได้

ดังนั้น ขั้นตอนวิธีนี้ทำให้เงื่อนไขเคเคที เป็นจริงแล้วถึง 2 เงื่อนไข (เงื่อนไขที่ 2 และ 3) ขั้นตอนถัดมาคือการเปลี่ยนจุดโดยที่ยังคงเงื่อนไขเคเคที เงื่อนไขที่ 2 และ 3 เป็นจริงเสมอ จนได้จุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเคเคทีทั้ง 3 เงื่อนไข (สมการที่ 12 จากบทที่ 2) และจุดดังกล่าวจะเป็นจุดที่เหมาะที่สุด

ตัวอย่างที่ 3.3 แสดงการทำงานของขั้นตอนวิธีใหม่

หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $2x_1 + x_2$

สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ

$$2x_1 + 3x_2 \geq 2 \qquad (1)$$

$$-x_1 - x_2 \leq \frac{-1}{2} \qquad (2)$$

$$12x_1 + 7x_2 \geq -9 \qquad (3)$$

$$2x_1 + \frac{x_2}{4} \geq -3 \qquad (4)$$

$$-4x_1 - x_2 \leq 14 \qquad (5)$$

วิธีทำ ขั้นที่ 1

โดยวิธีของเอื้ออารี กำหนดให้ $y = 2x_1 + x_2, x_1 = \frac{y - x_2}{2}$ แทนในปัญหาเริ่มต้นพร้อมจัดรูป จะได้ปัญหาที่จัดรูปแล้วเป็น

หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ y

สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ

$$y \geq 2 - 2x_2 \qquad (a)$$

$$y \geq 1 - x_2 \qquad (b)$$

$$y \geq \frac{-9 - x_2}{6} \qquad (c)$$

$$y \geq -3 + \frac{3x_2}{4} \qquad (d)$$

$$y \geq \frac{-14 + x_2}{2} \qquad (e)$$

จากการจัดกลุ่ม ทำให้ได้ว่า

$$I_{11} = \{a,b,c\},\ I_{12} = \{d,e\},\ I_{21} = \phi,\ I_{22} = \phi$$

ปัญหานี้ไม่มีค่าสูงสุด มีเฉพาะค่าต่ำสุด เนื่องจากกลุ่มเงื่อนไขที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดเป็นเซตว่างสำหรับการหาค่าต่ำสุดโดยวิธีของเอื้ออารี โดยบทแทรก 2.2 ปัญหานี้ได้ผลอยู่ในกลุ่มที่ 1 นั่นคือ กลุ่มเงื่อนไข I_{11} และ I_{12} ไม่เป็นเซตว่างทั้งคู่ ดังนั้นคำตอบ (จุด p) จะเกิดจากการตัดกันของเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันมากที่สุดใน

กลุ่ม I_{11} (เงื่อนไข c) กับเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยที่สุดของกลุ่ม I_{12} (เงื่อนไข e) นั่นคือจะได้ $(y,x_2)=\left(-2.88,\frac{33}{4}\right)$ ซึ่งก็คือจุด $(x_1,x_2)=\left(\frac{-89}{16},\frac{33}{4}\right)$ ในปัญหาเริ่มต้น

ขั้นที่ 2

กำหนดเงื่อนไขบังคับทางซ้าย และเงื่อนไขบังคับทางขวา จากจุด *p*

$c_l =$ เงื่อนไขบังคับ c

$c_r =$ เงื่อนไขบังคับ e

ขั้นที่ 3

กำหนดกลุ่มเงื่อนไขบังคับทางซ้าย และกลุ่มเงื่อนไขบังคับทางขวา

ในปัญหานี้ กลุ่มเงื่อนไขบังคับทางซ้ายคือกลุ่ม I_{11} และกลุ่มเงื่อนไขบังคับทางขวาคือกลุ่ม I_{12}

ขั้นที่ 4 สำหรับกลุ่มเงื่อนไขบังคับทางซ้าย

แทนค่าจุด *p* ในทุกเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_{11} จะเห็นว่าจุด *p* สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับในกลุ่มนี้ ดังนั้นยังคงเงื่อนไขบังคับ c_l เป็นเงื่อนไขบังคับ c เช่นเดิม

ขั้นที่ 5 สำหรับกลุ่มเงื่อนไขบังคับทางขวา

เมื่อแทนค่าจากจุด *p* ในทุกเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_{12} จะเห็นว่าจุด *p* สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ e แต่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ d นั่นคือเงื่อนไขบังคับ e คือเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็น ดังนั้นต้องทำการเปลี่ยนเงื่อนไขบังคับ c_r จากเดิมที่เป็นเงื่อนไขบังคับ e เป็นเงื่อนไขบังคับ d และทำการคำนวณหาค่าจุด *p* ใหม่ ซึ่งเกิดจากการตัดกันของเงื่อนไขบังคับ c และ d จะได้ $(x_2,y)=\left(\frac{18}{11},\frac{-39}{22}\right)$ ซึ่งคือจุด $(x_1,x_2)=(\frac{-75}{44},\frac{18}{11})$ ในปัญหาเริ่มต้น

(จะเห็นว่า ค่า y ได้มีการปรับปรุง จากเดิมที่ได้ค่า -2.88 แต่จุดดังกล่าวไม่สอดคล้องกับทุกเงื่อนไข เป็นค่าใหม่ที่มากกว่า -2.88 แต่พยายามที่จะให้สอดคล้องกับทุกเงื่อนไข ต้องตรวจสอบต่อไป)

โดยขั้นตอนวิธีได้ว่า ต้องกลับไปยังขั้นที่ 4 อีกครั้ง

ขั้นที่ 4 (ครั้งที่ 2)

จุด *p* ล่าสุด สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ a และ c I_{11} ในกลุ่ม แต่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ b นั่นคือเงื่อนไขบังคับ c เป็นเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็น จึงต้องเปลี่ยนเงื่อนไขบังคับ c_l จากเดิมคือเงื่อนไขบังคับ c

เป็นเงื่อนไขบังคับ b และคำนวณหาจุด p ใหม่ได้เป็น $(x_2, y) = \left(\frac{16}{7}, \frac{-9}{7}\right)$ ซึ่งคือจุด $(x_1, x_2) = (\frac{-25}{14}, \frac{16}{7})$ ในปัญหาเริ่มต้น และกลับไปยังขั้นที่ 5 อีกครั้ง

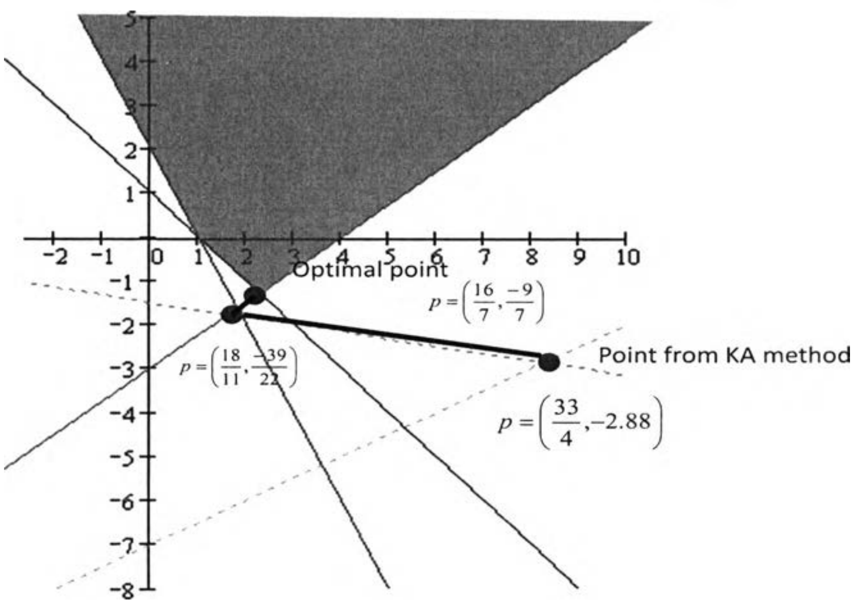
ขั้นที่ 5 (ครั้งที่ 2)

จุด p ล่าสุดนั้นสอดคล้องทั้งเงื่อนไขบังคับ d และ e ในกลุ่ม I_{12} ดังนั้นจะยังคงเงื่อนไขบังคับ c_r ไว้ และเนื่องจากไม่มีการเปลี่ยนเงื่อนไขในขั้นนี้ โดยขั้นตอนวิธีแล้ว จะไปยังขั้นที่ 6 ได้

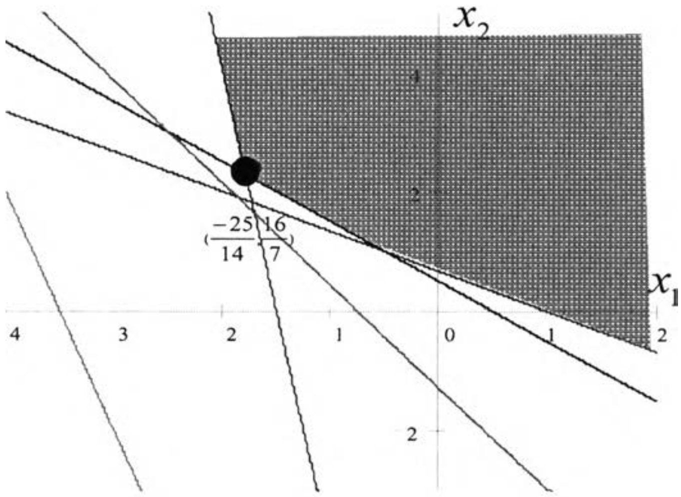
ขั้นที่ 6

เนื่องจากตัวอย่างนี้ ปัญหาสามารถจัดกลุ่มเงื่อนไขบังคับได้เพียงสองกลุ่มเท่านั้นคือกลุ่มเงื่อนไขบังคับ I_{11} และ I_{12} (ปัญหานี้มีบริเวณที่เป็นไปได้)สรุปว่าจุด $\left(\frac{-25}{14}, \frac{16}{7}\right)$ เป็นจุดที่เหมาะสมที่สุด และมีค่าต่ำสุดเป็น $\frac{-9}{7}$

ซึ่งหากวาดกราฟวิธีการทำงานของขั้นตอนวิธีนี้ได้ดังรูป 3.8 และวาดกราฟของปัญหาเริ่มต้นได้ดังรูป 3.9



รูป 3.8 แสดงภาพประกอบตัวอย่างที่ 3.3 พร้อมแสดงการทำงาน



รูป 3.9 แสดงกราฟของปัญหาเริ่มต้นของตัวอย่าง 3.3

ต่อไปจะแสดงว่า จุด$\left(\frac{-25}{14},\frac{16}{7}\right)$ เป็นจุดที่เหมาะที่สุดของตัวอย่างที่ 3.3 โดยใช้เงื่อนไขเหมาะที่สุดเคเคที

พิจารณาปัญหาที่แปลงตัวแปรจากตัวอย่าง 3.3 (เรียกว่าปัญหาเริ่มต้น)

หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ y

สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ

$$y \geq 2-2x_2$$
$$y \geq 1-x_2$$
$$y \geq \frac{-9-x_2}{6}$$
$$\geq -3+\frac{3x_2}{4}$$
$$y \geq \frac{-14+x_2}{2}$$

ซึ่งเขียนปัญหาคู่ควบได้ดังนี้

หาค่าสูงสุดของ $2u_1+u_2-\frac{9}{6}u_3-3u_4-7u_5$

สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=1$$
$$2u_1+u_2+\frac{1}{6}u_3-\frac{3}{4}u_4-\frac{1}{2}u_5=0$$
$$u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 \geq 0$$

ซึ่งผลเฉลยของปัญหานี้คือจุด $(x_2, y)=\left(\frac{16}{7}, \frac{-9}{7}\right)$ ซึ่งเกิดจากการตัดกันของเงื่อนไขบังคับที่ 2 และ 4

โดยเงื่อนไขที่สามของเคเคที ได้ว่า $u_1 = u_3 = u_5 = 0$

จะทำให้เหลือเงื่อนไขเพียง

$$u_2 + u_4 = 1$$
$$u_2 - \frac{3}{4}u_4 = 0$$
$$u_2, u_4 \geq 0$$

ทำการแก้ระบบสมการข้างต้นได้ผลเฉลยคือ $u_2 = \frac{3}{7}, u_4 = \frac{4}{7}$ ซึ่งแต่ละค่ามากกว่าศูนย์

ดังนั้น จุด $(x_2, y)=\left(\frac{16}{7}, \frac{-9}{7}\right)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขที่สองของเคเคที และ จุด $(x_2, y)=\left(\frac{16}{7}, \frac{-9}{7}\right)$ ยังสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขของปัญหาเริ่มต้น ดังนั้น จุดนี้จะสอดคล้องกับเงื่อนไขแรกของเคเคที

เพราะฉะนั้น จุด $(x_2, y)=\left(\frac{16}{7}, \frac{-9}{7}\right)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขเคเคที ทุกข้อ จุดนี้จึงเป็นจุดที่เหมาะที่สุดในปัญหาเริ่มต้น

โดยอาศัยทฤษฎีบทแทรก 2.1 (ข้อ 1)

จุด $\left(\frac{-25}{14}, \frac{16}{7}\right)$ จะเป็นจุดที่เหมาะที่สุดของปัญหา

หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $2x_1 + x_2$

สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ
$$2x_1 + 3x_2 \geq 2$$
$$-x_1 - x_2 \leq \frac{-1}{2}$$
$$12x_1 + 7x_2 \geq -9$$
$$2x_1 + \frac{x_2}{4} \geq -3$$
$$-4x_1 - x_2 \leq 14$$

เนื่องจากให้ $y = 2x_1 + x_2$ และจุด $(x_2, y)=\left(\frac{16}{7}, \frac{-9}{7}\right)$ เป็นจุดที่เหมาะที่สุด

$$\frac{-9}{7} = 2x_1 + \frac{16}{7}$$
$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{-9-16}{7}\right) = \frac{-25}{7}$$

จุดที่เหมาะที่สุดของตัวอย่าง 3.3 คือ $(x_1, x_2)=\left(\frac{-25}{16}, \frac{16}{7}\right)$