บทที่ 3

การโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

บทนี้กล่าวถึงทฤษฎีซึ่งเกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์นี้ เนื้อหาทั้งหมดเป็นทฤษฎีการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยสามารถแบ่งเป็น 4 ส่วนคือ ส่วนแรกเป็นทฤษฎีพื้นฐานของโครงสร้างแผ่นบางแสดงสมการครอบคลุม (governing equation) สำหรับการหาค่าภาระการโก่งงอโดยวิธีวิเคราะห์แบบเชิงเส้น ส่วนที่สองเป็นการนำสมการครอบคลุมที่ได้มาคำนวณหาค่าภาระการโก่งงอตามเงื่อนไขขอบเขต ขนาดและคุณสมบัติทางกลของวัสดุของโครงสร้างที่ศึกษา ส่วนที่สามคือการหาโหมดรูปแบบของการโก่งงอเพื่อนำมาเขียนกราฟการเคลื่อนที่นอกระนาบของโครงสร้าง ส่วนสุดท้ายกล่าวถึงการหาค่าภาระการโก่งงอจากกราฟพฤติกรรมของโครงสร้างแผ่นบางเมื่อมีภาระกระทำในแนวระนาบ วิธีที่กล่าวถึงมีทั้งหมด 4 แบบคือ 1) การวิเคราะห์จากกราฟของความสัมพันธ์ระหว่าง P - w 2) การวิเคราะห์จากกราฟของความสัมพันธ์ระหว่าง P - δ 3) การวิเคราะห์จากกราฟของความสัมพันธ์ระหว่าง P - $\Delta\varepsilon$ 4) การวิเคราะห์จากกราฟของความสัมพันธ์ระหว่าง w/P - w หรือเรียกว่าวิธี Southwell plot

3.1 ทฤษฎีพื้นฐานสำหรับโครงสร้างแผ่นบาง

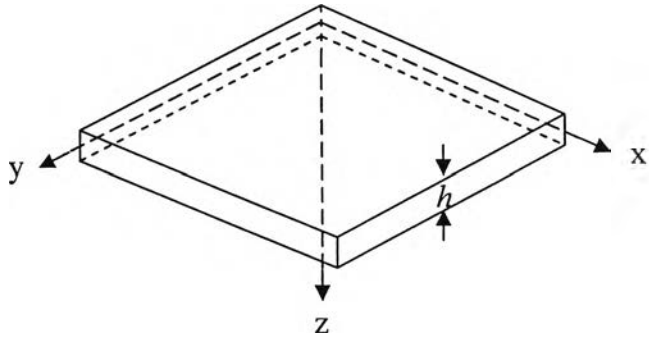
3.1.1 นิยามและสมมติฐาน

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาการหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้าง โดยเป็นโครงสร้างแผ่นบางซึ่งรับแรงกดในแนวระนาบและมีเงื่อนไขขอบเขตแบบ simple support การคำนวณเพื่อหาค่าภาระการโดยทฤษฎีแบบเชิงเส้นมีสมมติฐานต่อไปนี้ [12]

สมมติฐานเบื้องต้น

1. โครงสร้างแผ่นบางที่ศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้เป็นแผ่นวัสดุไอโซโทรปิคซึ่งมีการกำหนดพิกัดฉากดังรูปที่ 3.1 โดยระนาบ x-y อยู่กึ่งกลางความหนาของชิ้นงาน
2. สมมติให้ความหนาของแผ่นทดสอบ h มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาว a และความกว้าง b ของแผ่นทดสอบ
3. ระยะการเคลื่อนที่ของแผ่นทดสอบในทิศ x-y-z เมื่อได้รับภาระกระทำคือ u, v, w ตามลำดับ และระยะ u, v, w มีขนาดน้อยมากเมื่อเทียบกับความหนา h

4. องค์ประกอบความเครียดบนระนาบ x-y ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$) มีค่าน้อยกว่า 1 มาก
5. ไม่คำนึงถึงความเครียดในทิศทาง z (ε_z) (ความหนาไม่เปลี่ยนแปลงขณะเกิดการโก่งงอ)
6. ไม่คำนึงถึงความเครียดเฉือนนอกระนาบของแผ่นทดสอบ γ_{xz} และ γ_{yz} ซึ่งค่าทั้งสองมีค่าน้อยมาก
7. การเคลื่อนที่ u, v เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นกับระยะในทิศทาง z
8. ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดเป็นแบบเชิงเส้นตามกฎของฮุค
9. ไม่มีความเค้นเฉือน τ_{xz} และ τ_{yz} ที่ตำแหน่งกึ่งกลางความหนาของแผ่นบาง $z = \pm h/2$



รูปที่ 3.1 ระบบพิกัดฉากของโครงสร้างแผ่นบาง

จากสมมติฐานข้อ 5 และ 7 การกระจัด u, v, w ที่ตำแหน่งใด ๆ บนโครงสร้างแผ่นบางสามารถเขียนได้ดังสมการต่อไปนี้ โดยที่ $F_1(x,y)$ และ $F_2(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y

$$u(x,y,z) = zF_1(x,y) \qquad (3.1\ \text{ก})$$

$$v(x,y,z) = zF_2(x,y) \qquad (3.1\ \text{ข})$$

$$w(x,y,z) = w(x,y) \qquad (3.1\ \text{ค})$$

โดย $w(x,y)$ คือระยะการเคลื่อนที่ในทิศทาง z ของระนาบกลางของแผ่นทดสอบซึ่งค่าของ $w(x,y)$ จะไม่ขึ้นกับระยะ z ตามสมมติฐานข้อที่ 5 ดังนั้นจึงสามารถเขียนระยะการเคลื่อนที่ในแนวนอกระนาบ $w(x,y,z)$ ในรูปของ $w(x,y)$ ได้

จากสมมติฐานข้อ 6 และสมการที่ 3.1 สามารถหา $F_1(x,y)$ และ $F_2(x,y)$ ได้จากสมการดังนี้

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = F_1(x,y) + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad (3.2\text{ ก})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = F_2(x,y) + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad (3.2\text{ ข})$$

ซึ่งจะได้ว่า $F_1(x,y) = -\frac{\partial w}{\partial x}$ และ $F_2(x,y) = -\frac{\partial w}{\partial y}$ (3.3)

เมื่อแทนค่า $F_1(x,y)$ และ $F_2(x,y)$ จากสมการที่ 3.3 ลงในสมการที่ 3.1 และหาความเครียดที่ตำแหน่งใด ๆ จากระยะการเคลื่อนที่ u, v และ w ได้ดังต่อไปนี้

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (3.4\text{ ก})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (3.4\text{ ข})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (3.4\text{ ค})$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของโครงสร้างแผ่นบางได้ดังนี้

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \qquad (3.5\text{ ก})$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \qquad (3.5\text{ ข})$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \qquad (3.5\text{ ค})$$

โดยค่า ν คือ ค่าอัตราส่วนปัวร์ซง (Poisson'ratio) และค่า E คือ โมดูลัสความยืดหยุ่น (Young's modulus) ดังนั้นค่าความเค้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระยะเคลื่อนที่ในทิศทาง z ได้ดังนี้

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (3.6\text{ ก})$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (3.6\text{ ข})$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (3.6\text{ ค})$$

โดยแรงและโมเมนต์ที่กระทำกับแผ่นทดสอบดังรูปที่ 3.2 สามารถเขียนในพจน์ของความเค้นได้ดังนี้

$$\left(N_x, N_y, N_{xy}\right) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\right) dz \qquad (3.7\text{ ก})$$

$$\left(M_x, M_y, M_{xy}\right) = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\right) z dz \qquad (3.7\text{ ข})$$

เมื่อ h = ความหนาของแผ่นทดสอบ

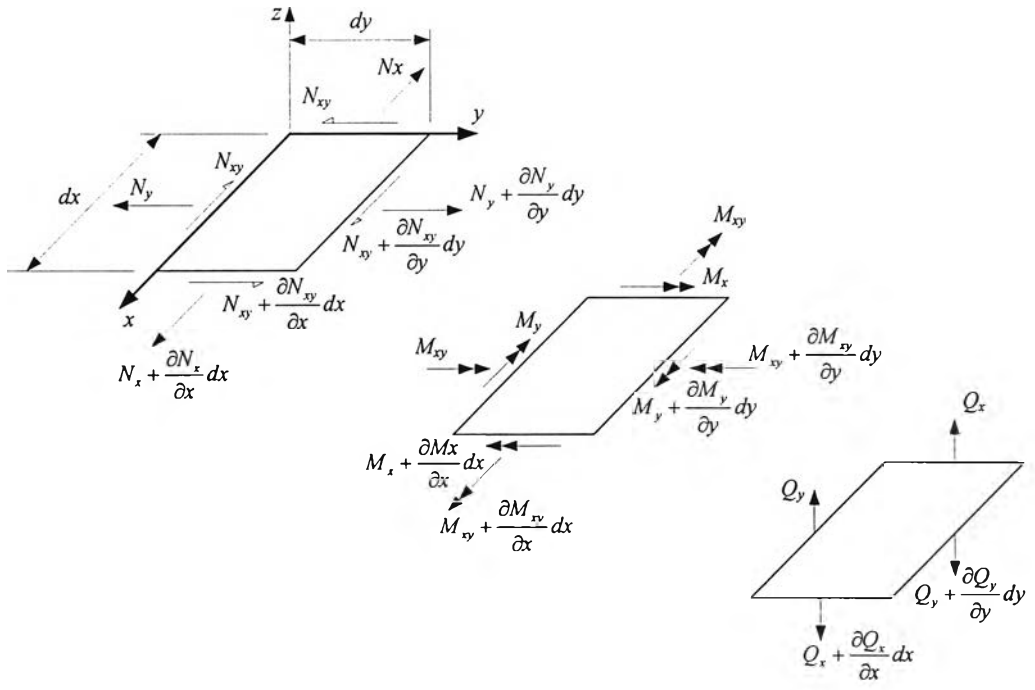
$\left(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\right)$ = องค์ประกอบความเค้น

$\left(N_x, N_y, N_{xy}\right)$ = แรงในแนวระนาบต่อหน่วยความยาว

$\left(M_x, M_y, M_{xy}\right)$ = โมเมนต์ต่อหน่วยความยาว

3.1.2 <u>สมการครอบคลุมสำหรับปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบาง</u>

สมการครอบคลุมของปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางภายใต้ภาระในแนวระนาบ [13] สามารถสร้างขึ้นได้จากสมการสมดุลของแรงและโมเมนต์ จากนั้นจึงเขียนสมการขึ้นใหม่ในพจน์ขององค์ประกอบความเค้นโดยใช้สมการที่ 3.7 สุดท้ายเป็นการแทนสมการที่ 3.6 ลงไปก็จะได้สมการครอบคลุมในพจน์ของระยะเคลื่อนที่นอกระนาบกึ่งกลางความหนา รายละเอียดของขั้นตอนที่กล่าวไปมีดังนี้



รูปที่ 3.2 องค์ประกอบของแรงและโมเมนต์ที่กระทำกับ differential element

จากรูปที่ 3.2 จะได้สมการสมดุลของแรงตามแนวแกน x คือ

$$N_x dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} dxdy + N_{xy} dx + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dxdy - N_x dy - N_{xy} dx = 0$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad (3.8)$$

สมการสมดุลของแรงตามแนวแกน y คือ

$$N_y dx + \frac{\partial N_y}{\partial y} dxdy + N_{xy} dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dxdy - N_y dx - N_{xy} dy = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \qquad (3.9)$$

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สมการสมดุลของแรงในแนวแกน z คือ

$$Q_x dy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dxdy + Q_y dx + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dxdy - Q_x dy - Q_y dx = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \qquad (3.10)$$

สมการของโมเมนต์รอบแกน x และแกน y จะนำไปสู่ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \qquad (3.11 \text{ ก})$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \qquad (3.11 \text{ ข})$$

แทน Q_y และ Q_x จากสมการที่ 3.11 ลงในสมการที่ 3.10 จะได้สมการสมดุลของแรงในแกน z ในรูป

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = 0 \qquad (3.12)$$

สมการสมดุลของแรงในแนวระนาบตามแนวแกน z ขณะที่แผ่นบางเกิดการโก่งงอโดยพิจารณาแบบมีการโก่งงอเล็กน้อย (small deflection) และไม่คำนึงถึงแรง N_{xy} [13] คือ

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad (3.13)$$

เมื่อรวมผลของแรงในแนวระนาบเมื่อชิ้นงานโก่งงอ (สมการที่ 3.13) เข้ากับผลของแรงในแนวนอกระนาบ (สมการที่ 3.12) จะได้สมการผลรวมของแรงในทิศทาง z ดังนี้

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad (3.14)$$

โมเมนต์ที่เกิดขึ้นทั้งหมดจากสมการที่ 3.7 สามารถแสดงในรูปของความโค้ง (curvature) ตามสมการที่ 3.6 ได้ดังนี้

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (3.15\ \text{ก})$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (3.15\ \text{ข})$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (3.15\ \text{ค})$$

โดย $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

แทนองค์ประกอบของโมเมนต์ทั้งหมดในสมการที่ 3.14 สามารถจัดรูปสมการครอบคลุมสำหรับปัญหาการโก่งงอใหม่ได้ดังนี้

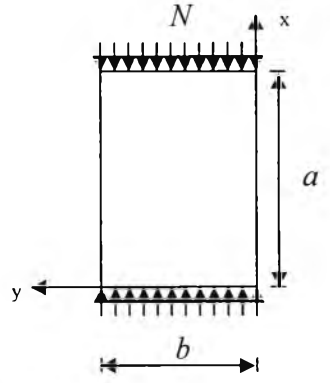
$$D\nabla^4 w = N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (3.16)$$

เมื่อ

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

3.2 การหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

สำหรับปัญหานี้กำหนดให้แผ่นทดสอบมีความกว้างเท่ากับ b และมีความยาวเท่ากับ a ได้รับแรงกดในทิศทาง x เป็นแรงกระจาย N ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ชิ้นงานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารับแรงกดในทิศทางเดียว

สมการครอบคลุมสำหรับปัญหาการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางจะเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=-\frac{N}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (3.17)$$

เงื่อนไขขอบเขตแบบ simple support คือ

ในแนว $x = 0, x = a$ ค่า $w = 0$ และ $M_x = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = 0$

ในแนว $y = 0, y = b$ ค่า $w = 0$ และ $M_y = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = 0$

สมมติสมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้างแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในทิศทาง z (w) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตในรูปของ

$$w(x,y) = W_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (3.18)$$

โดยค่า W_{mn} คือปริมาณการเคลื่อนที่นอกระนาบ ส่วนค่า m และ n คือจำนวนเต็มบวกแสดงถึงคลื่นรูปซายน์ครึ่งรูป (half sine wave) ในแกน x และ y ตามลำดับ เมื่อแทนค่า $w(x,y)$ ลงในสมการที่ 3.17 จะได้

$$W_{mn}\left(m^4\pi^4+2R^2m^2n^2\pi^4+R^4n^4\pi^4-\frac{Na^2}{D}m^2\pi^2\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=0 \qquad (3.19)$$

โดย $R = a/b$ หรือเรียกว่าสัดส่วนรูปร่าง (aspect ratio) เป็นสัดส่วนความสูงต่อความกว้างของชิ้นงาน

สมการที่ 3.19 จะเป็นจริงเมื่อพจน์ในวงเล็บมีค่าเท่ากับศูนย์ดังนั้นภาระ N ที่ทำให้สมการที่ 3.19 เป็นจริงดังนี้

$$N=\frac{D\pi^2}{a^2}\left(m^2+2R^2n^2+R^4\frac{n^4}{m^2}\right) \qquad (3.20)$$

หรือจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$N = \frac{D\pi^2}{b^2}\left(\frac{m}{R} + \frac{n^2}{m}R\right)^2 \qquad (3.21)$$

ค่าภาระที่ได้จากสมการที่ 3.20 หรือ 3.21 จะเป็นค่าภาระการโก่งงอก็ต่อเมื่อค่าที่คำนวณได้มีค่าน้อยที่สุด โดยการแทนค่า m และ n ตั้งแต่ 1, 2, 3,... จะได้ว่า N มีค่าน้อยที่สุดเมื่อค่า n เท่ากับ 1 สำหรับ m ค่าใด ๆ ค่าหนึ่ง โดยค่า m ที่ทำให้ค่าภาระน้อยที่สุดนั้นเป็นสิ่งที่กำหนดรูปร่างของโครงสร้างแผ่นบางเมื่อเกิดการโก่งงอในทางทฤษฎีซึ่งเรียกว่าโหมดการโก่งงอ

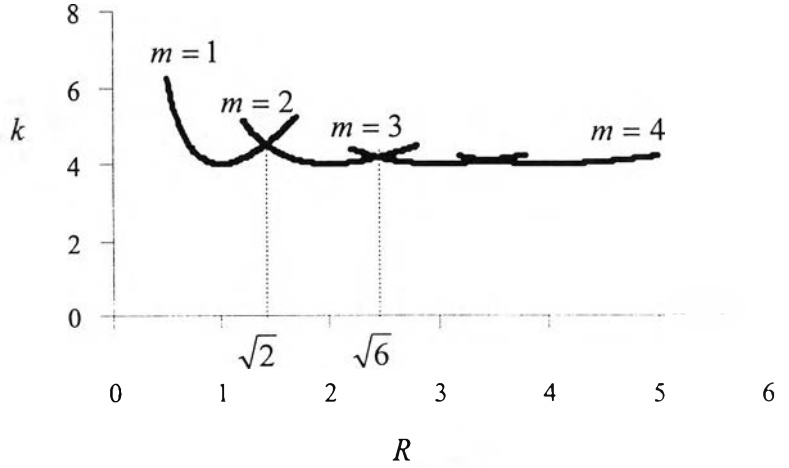
สมการที่ 3.21 สามารถจัดรูปได้ใหม่เป็น

$$N = kD\pi^2/b^2 \qquad (3.22)$$

โดย

$$k = \left(m/R + n^2R/m\right)^2 \qquad (3.23)$$

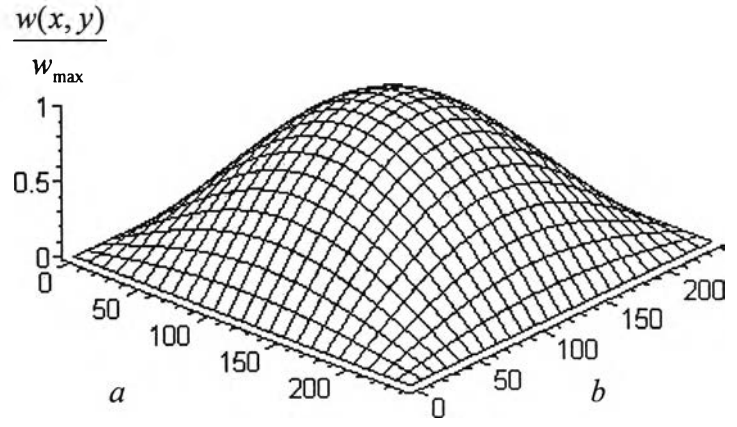
สมการที่ 3.22 แสดงให้เห็นว่าสำหรับโครงสร้างแผ่นบางชิ้นหนึ่งค่าภาระการโก่งงอขึ้นอยู่กับสัมประสิทธิ์การโก่งงอ k โดยสัมประสิทธิ์การโก่งงอแปรผันตามสัดส่วนรูปร่าง R เมื่อเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์การโก่งงอ k กับสัดส่วนรูปร่าง R ที่ค่า m มีค่าตั้งแต่ 1, 2, 3,.. ซึ่งค่า n เท่ากับ 1 จะได้กราฟดังรูปที่ 3.4 จากกราฟจะเห็นว่าที่ R น้อยกว่า 1 k จะขึ้นอย่างมากกับค่า R แต่ขณะที่ R มากกว่าหรือเท่ากับ 4 k แทบจะไม่ขึ้นกับค่า R นอกจากนี้จุดตัดกันของกราฟที่ m เท่ากับ 1 และ 2 ที่ m เท่ากับ 2 และ 3 และที่ m เท่ากับ 3 และ 4 จะเป็นตำแหน่งที่อาจเกิดการโก่งงอในโหมดการโก่งงอที่อยู่ติดกันได้ในทางทฤษฎี เนื่องจากค่า k มีค่าเท่ากันสำหรับโหมดการโก่งงอที่ติดกัน



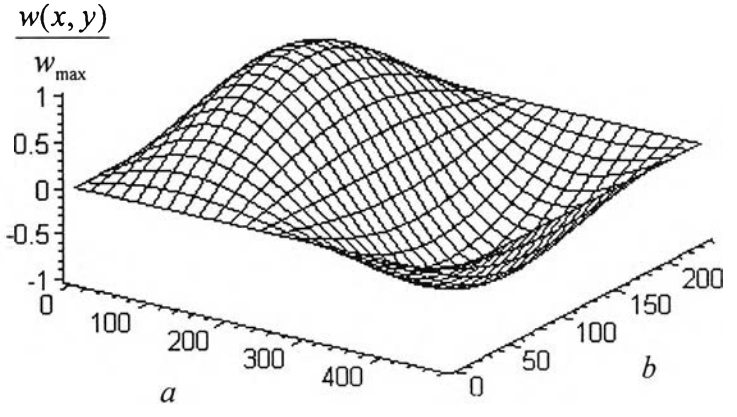
รูปที่ 3.4 การแปรผันของสัมประสิทธิ์การโก่งงอ k ต่ออัตราส่วน R

3.3 การหาโหมดการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบาง

การหาโหมดการโก่งงอของชิ้นงานทำได้โดยการแทนค่า m และ n ที่ทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การโก่งงอ k มีค่าน้อยสุด ในกรณีนี้ค่า n จะเท่ากับหนึ่งเสมอส่วนค่า m ที่ทำให้ k มีค่าต่ำสุดจะขึ้นอยู่กับสัดส่วนของชิ้นงาน โดยสามารถหาค่าได้จากการเขียนกราฟลักษณะเดียวกับรูปที่ 3.4 เมื่อทราบค่า m และ n แล้วจะสามารถหาสมการการเคลื่อนที่นอกระนาบได้จากสมการที่ 3.18 สมมติค่า m เท่ากับ 1 หรือ 2 ชิ้นงานจะเกิดการโก่งงอในโหมด 1 และโหมด 2 ตามลำดับ จากการคำนวณเพื่อหาค่าภาระการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางนั้น โครงสร้างแผ่นบางที่มีขนาดความยาวเท่ากับความกว้างจะเกิดการโก่งงอแบบโหมด 1 ส่วนโครงสร้างแผ่นบางที่มีขนาดความยาวเป็นสองเท่าของความกว้างจะเกิดการโก่งงอแบบโหมด 2 ดังแสดงในรูปที่ 3.5 และ 3.6 ตามลำดับ



รูปที่ 3.5 การเคลื่อนที่นอกระนาบของแผ่นบางแบบโหมด 1 (m และ n = 1 ซึ่ง a/b = 1)



รูปที่ 3.6 การเคลื่อนที่นอกระนาบของแผ่นบางแบบโหมด 2 (m = 2 และ n = 1 ซึ่ง a/b = 2)

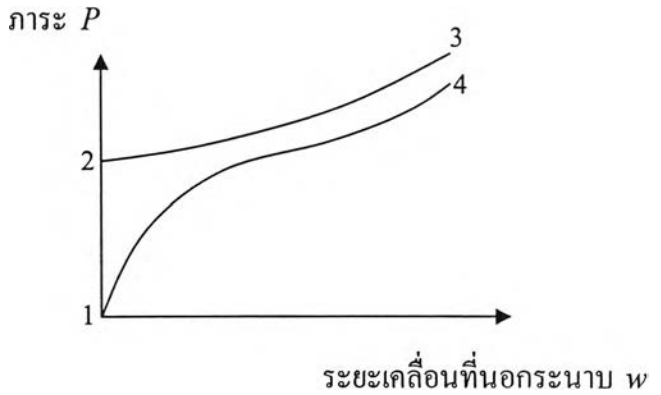
3.4 การหาค่าภาระการโก่งงอโดยการทดลอง

ในทางทฤษฎีการหาค่าภาระการโก่งงอสามารถสังเกตจากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างภาระในแนวระนาบกับระยะเคลื่อนที่นอกระนาบดังรูปที่ 1.1 ได้โดยง่าย จากรูปที่ 1.1 เมื่อภาระเพิ่มขึ้นในตอนต้นจะยังไม่มีระยะโก่งงอหรือระยะเคลื่อนที่นอกระนาบเกิดขึ้น จนกระทั่งภาระถึงค่าภาระวิกฤตระยะเคลื่อนที่นอกระนาบจึงเริ่มปรากฏให้เห็น ดังนั้นการระบุค่าภาระการโก่งงอจากกราฟจึงทำโดยง่ายถ้าพฤติกรรมการโก่งงอเป็นแบบอุดมคติ อย่างไรก็ตามพฤติกรรมการโก่งงอที่เกิดขึ้นจริงจากการทดลองไม่เป็นเช่นนั้นเนื่องจากชิ้นงานและเงื่อนไขขอบเขตของชิ้นงานมีความไม่สมบูรณ์ทำให้กราฟความสัมพันธ์ระหว่างภาระและระยะเคลื่อนที่นอกระนาบมีลักษณะแตกต่างจากทฤษฎี ดังนั้นการระบุจุดที่เกิดการโก่งงอจึงทำได้ยาก ที่ผ่านมามีการเสนอวิธีต่าง ๆ สำหรับหาตำแหน่งที่เกิดโก่งงอ วิธีหาค่าภาระการโก่งงอในการทดลองถูกรวบรวมไว้ในหนังสือของ Singer และคณะ [5] โดยวิธีส่วนใหญ่ที่กล่าวไว้เป็นการสังเกตแนวโน้มของพารามิเตอร์ต่าง ๆ เช่น ระยะเคลื่อนที่นอกระนาบหรือความเครียดที่ผิวหน้าเมื่อโครงสร้างถูกภาระกระทำ พารามิเตอร์เหล่านี้เป็นพารามิเตอร์เดียวกับที่ใช้ในการคำนวณเพื่อทำนายพฤติกรรมการโก่งงอทางด้านทฤษฎีแบบไม่เชิงเส้น วิทยานิพนธ์นี้ได้เปรียบเทียบวิธีการหาค่าภาระการโก่งงอจากกราฟพฤติกรรมการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางทั้งหมด 4 วิธีคือ 1. วิธีระยะเคลื่อนที่นอกระนาบ 2. วิธี end-shortening 3. วิธีผลต่างความเครียดและ 4. วิธี Southwell plot สำหรับการหาโหมดการโก่งงอจากการทดลองนั้นมีหลายวิธี วิธีหนึ่งที่ทำให้สามารถเห็นลักษณะการโก่งงอของชิ้นงานคือวิธี Moiré Method [4] โดยเป็นวิธีการที่ใช้หลักการซ้อนทับของแสงซึ่งอธิบายไว้ในส่วนท้ายของบทนี้

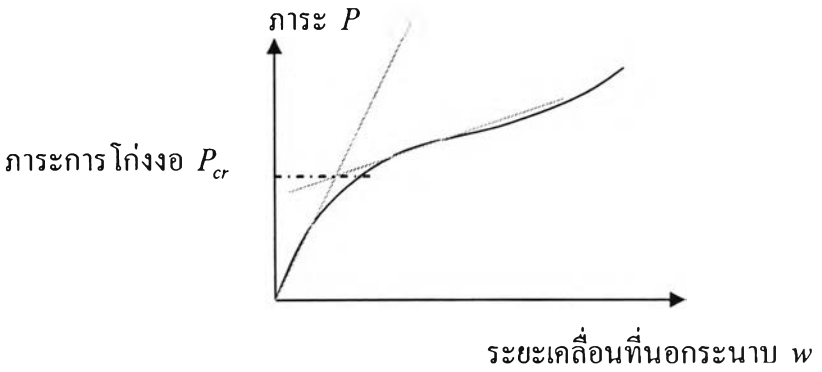
3.4.1 <u>วิธีระยะเคลื่อนที่นอกระนาบ</u>

วิธีนี้ระบุค่าภาระการโก่งงอจากกราฟของความสัมพันธ์ระหว่างภาระในแนวระนาบกับระยะเคลื่อนที่นอกระนาบของแผ่นทดสอบ ณ บริเวณที่เกิดการเคลื่อนที่ในทิศทาง z สูงสุด กราฟของความสัมพันธ์ระหว่างภาระในแนวระนาบกับระยะเคลื่อนที่นอกระนาบทางอุดมคติจะมีลักษณะตามเส้นทาง 1-2-3 ในรูปที่ 3.7 กล่าวคือช่วงแรกเมื่อมีการเพิ่มภาระในแนวระนาบบนโครงสร้างแผ่นบางจะยังไม่เกิดระยะเคลื่อนที่นอกระนาบ เมื่อภาระเพิ่มถึงค่าภาระวิกฤตหรือภาระการโก่งงอ (จุด 2) โครงสร้างแผ่นบางจึงเริ่มเกิดการโก่งงอหรือเริ่มเกิดระยะเคลื่อนที่นอกระนาบ แต่ในทางปฏิบัติการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบางจะปรากฏตั้งแต่ให้ภาระกับโครงสร้างแผ่นบางดังรูปที่ 3.7 ในเส้นทางจุด 1 ไปยังจุด 4 การระบุค่าภาระการโก่งงอวิธีนี้ใช้จุดตัดของเส้นตรงที่มีความชันสอดคล้องกับพฤติกรรมช่วงก่อนเกิดการโก่งงอและช่วงหลังเกิดการโก่งงอดังรูปที่ 3.8 งานวิจัยที่ผ่านมาและหนังสือของ Singer และคณะ [5] กล่าวว่าวิธีนี้เป็นวิธีซึ่งให้ผลค่อนข้างใกล้เคียงกับค่าจากการคำนวณมากแต่วิธีนี้ต้องการแผ่น

ทดสอบที่เรียบและมีความสมบูรณ์สูงเพื่อให้ได้กราฟซึ่งมีลักษณะใกล้อุดมคติ (1-2-3 รูปที่ 3.7) มากที่สุด



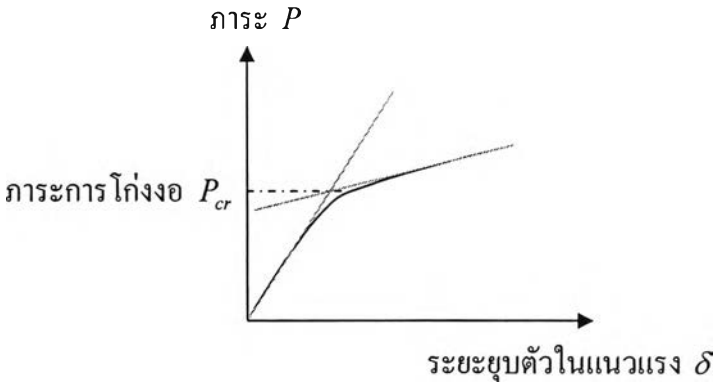
รูปที่ 3.7 พฤติกรรมการโก่งงอของโครงสร้างแผ่นบาง



รูปที่ 3.8 การหาค่าภาระการโก่งงอโดยวิธีระยะเคลื่อนที่นอกระนาบ

3.4.2 <u>วิธี end-shortening</u>

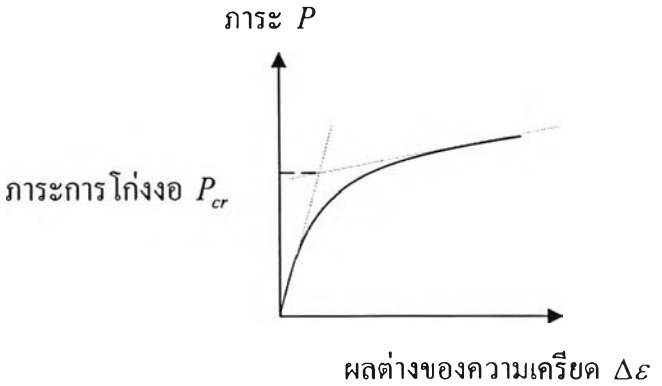
วิธีนี้วัดค่าภาระในแนวระนาบกับระยะยุบตัวในทิศทาง x ของแผ่นทดสอบ แล้วนำข้อมูลทั้งสองมาเขียนกราฟดังรูปที่ 3.9 จากกราฟจะสามารถสร้างเส้นสัมผัสพฤติกรรมช่วงก่อนและช่วงหลังการโก่งงอได้ ภาระ ณ จุดตัดของเส้นตรงทั้งสองคือภาระการโก่งงอ



รูปที่ 3.9 การหาค่าภาระการโก่งงอโดยวิธี end-shortening

3.4.3 วิธีผลต่างความเครียด

วิธีนี้หาค่าภาระการโก่งงอจากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างภาระในแนวระนาบกับผลต่างของความเครียดบนผิวทั้งสองด้านของแผ่นทดสอบ ณ ตำแหน่งที่มีการเคลื่อนที่ในทิศทาง z สูงสุด ความเครียดบนผิวด้านหนึ่งของแผ่นทดสอบจะมีค่าเป็นลบตลอดเวลาเมื่อแรงกดเพิ่มขึ้น ส่วนอีกด้านหนึ่งนั้นความเครียดจะมีค่าเป็นลบขณะเริ่มต้นรับภาระเช่นกันแต่จะมีค่าค่อย ๆ เพิ่มขึ้นจนมีค่าเป็นบวก เมื่อนำความเครียดทั้งสองมาหาผลต่างและนำมาพล็อตกับภาระในแนวระนาบ จะได้เส้นกราฟที่มีลักษณะดังรูปที่ 3.10 โดยที่ค่า $\Delta\varepsilon$ คือผลต่างของค่าความเครียดที่ผิวด้านที่เกิดความเครียดกดตลอดกับค่าความเครียดที่ผิวด้านที่เกิดทั้งความเครียดกดและความเครียดดึง จากกราฟสามารถสร้างเส้นตรงสัมผัสกับพฤติกรรมในช่วงก่อนและช่วงหลังการโก่งงอได้และจุดตัดของเส้นตรงทั้งสองคือจุดที่เกิดการโก่งงอ ภาระ ณ จุดตัดนี้คือค่าภาระการโก่งงอ



รูปที่ 3.10 การหาค่าภาระการโก่งงอโดยวิธีผลต่างความเครียด

3.4.4 วิธี Southwell plot

วิธีนี้วัดค่าภาระในแนวระนาบกับระยะเคลื่อนที่ของแผ่นทดสอบในทิศทาง z บริเวณที่มีการเคลื่อนที่สูงสุดเหมือนกับวิธีระยะเคลื่อนที่นอกระนาบ แต่เป็นการนำข้อมูลทั้งสองมาเขียนกราฟของความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนของการเคลื่อนที่ในทิศทาง z ต่อภาระขณะนั้น ๆ กับการเคลื่อนที่ในทิศทาง z ความชันของกราฟจะแทนส่วนกลับของค่าภาระการโก่งงอ วิธีนี้เป็นวิธีที่ใช้กันบ้างสำหรับการหาค่าภาระการโก่งงอของเสาและโครงสร้างแผ่นบาง เพราะว่ามีที่มาจากการจัดรูปของสมการทางเสถียรภาพ [5] ของเสาเมื่อได้รับแรงกดในแนวแกน P สำหรับเสามีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น E และโมเมนต์ความเฉื่อย I จะได้สมการครอบคลุมคือ

$$w^{iv} + \frac{P}{EI} w'' = -\frac{P}{EI} w_0'' \qquad (3.24)$$

โดย w คือ ระยะเคลื่อนที่นอกระนาบ

w_0 คือ ระยะเคลื่อนที่นอกระนาบเริ่มต้นเนื่องจากความไม่สมบูรณ์

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตแบบ simple support จะได้ว่าระยะเคลื่อนที่นอกระนาบและโมเมนต์บิดที่ปลายทั้งสองด้านของเสาเท่ากับศูนย์ หรือ $w(0) = w''(0) = w(L) = w''(L) = 0$ ระยะเคลื่อนที่นอกระนาบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (3.25)$$

$$w_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (3.26)$$

เมื่อแทนค่าระยะเคลื่อนที่นอกระนาบและระยะเคลื่อนที่นอกระนาบเริ่มต้นลงในสมการที่ 3.24 จะได้ว่า

$$W_n = W_{0n}\left[\left(\frac{n^2\pi^2 EI}{PL^2}\right) - 1\right]^{-1} = W_{0n}\left[\left(\frac{n^2 P_E}{P}\right) - 1\right]^{-1} \quad ; \quad P_E = \left(\pi^2 EI/L^2\right) \qquad (3.27)$$

ซึ่งเรียกพจน์ P_E ว่า Euler load หรือค่าภาระการโก่งงอตามทฤษฎีเชิงเส้นของโครงสร้างในอุดมคติ ระยะเคลื่อนที่นอกระนาบสูงสุด (W) เกิดขึ้นที่ $x = L/2$ ซึ่งจะทำให้ค่าระยะเคลื่อนที่นอกระนาบในสมการที่ 3.25 เป็น

$$W(L/2) = W_1 - W_3 + W_5 - \ldots$$

หรือจากสมการที่ 3.27 ประมาณได้ว่า

$$W \cong W_1 = W_{01}\left[\left(\frac{P_E}{P}\right)-1\right]^{-1} \qquad (3.28)$$

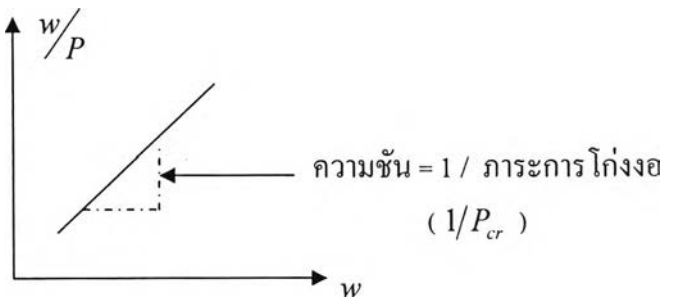
ในที่นี้ค่าของ W_{01} คือค่าสมมติของความไม่เรียบหรือเป็นค่าประมาณของระยะการโก่งงอเริ่มต้น (W_0) ที่ส่งผลต่อรูปแบบของการโก่งงอ ดังนั้นสมการที่ 3.28 จะอยู่ในรูป

$$W = P_E \frac{W}{P} - W_0 \qquad (3.29)$$

และเมื่อพิจารณาสมการที่ 3.29 แบบไม่มีพจน์ของระยะการโก่งงอเริ่มต้นหรือเสามีความสมบูรณ์โดย สมการที่ 3.29 จัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{W}{P} = \left(1/P_E\right)W \qquad (3.30)$$

จากสมการที่ 3.30 มีลักษณะเป็นสมการเชิงเส้นเมื่อพิจารณาพจน์ W/P เป็นพารามิเตอร์ในแนวแกนตั้งและพจน์ W เป็นพารามิเตอร์ในแนวแกนนอนโดยที่สมการเชิงเส้นดังกล่าวมีความชันเท่ากับ $1/P_E$ ของสมการและมีลักษณะกราฟเป็นดังรูปที่ 3.11 วิธีนี้มีข้อจำกัดตรงที่ระยะเคลื่อนที่นอกระนาบของแผ่นทดสอบในทิศทาง z ต้องมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความหนาของแผ่นทดสอบและแผ่นทดสอบควรมีความเรียบสมบูรณ์สูงมาก

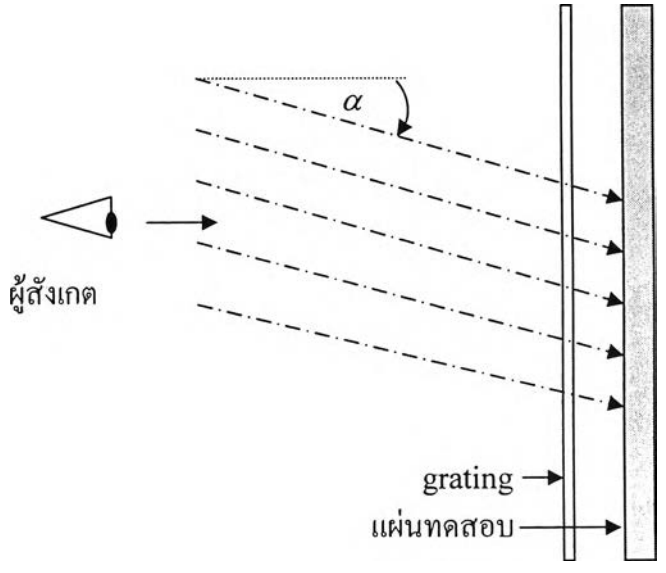


รูปที่ 3.11 การหาค่าภาระการโก่งงอโดยวิธี Southwell plot

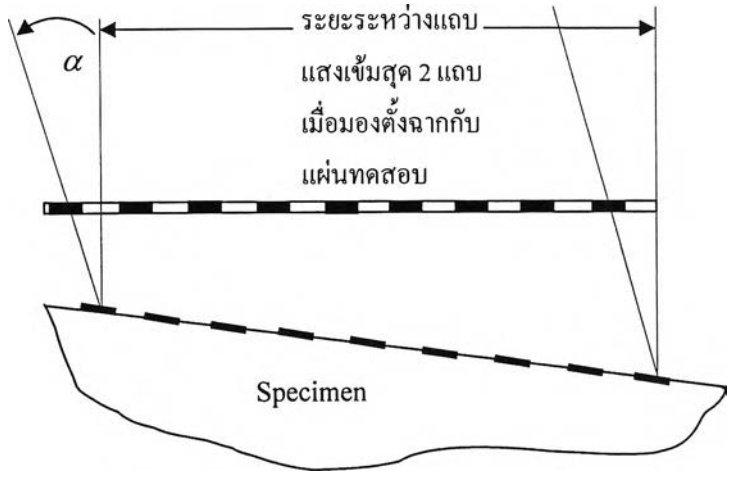
3.4.5 <u>การวัดโหมดการโก่งงอ</u>

เนื่องจากไม่สามารถสังเกตโหมดการโก่งงอของแผ่นทดสอบได้ด้วยตาเปล่าเนื่องมาจากการเคลื่อนที่ในทิศทาง z ของแผ่นทดสอบมีค่าน้อย จึงจำเป็นต้องมีการตรวจสอบรูปแบบการโก่งงอหรือโหมดการโก่งงออย่างคร่าว ๆ และอาจใช้สำหรับกำหนดตำแหน่งในการวัดค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ เพื่อเขียนกราฟพฤติกรรมการโก่งงอ วิทยานิพนธ์นี้ใช้วิธี Moiré Method [4] ในการสังเกตรูปแบบการโก่งงอ

วิธีนี้ใช้ reference grating ซึ่งมีลักษณะเป็นแผ่นบางมีแถบใสและทึบที่วางขนานและสลับกันไปมามีความละเอียดระหว่าง 50 ถึง 1000 เส้นต่อความยาว 1 นิ้ว grating จะยอมให้แสงผ่านได้ในแถบใสและแสงจะไม่ผ่านในช่องทึบแสง ปรากฏการณ์จะนี้เกิดขึ้นเมื่อแสงขนานสีขาวส่องทำมุมใด ๆ ผ่าน grating แล้วไปกระทบวัตถุที่มีผิวไม่ขนานกับ grating ดังรูปที่ 3.12 และ 3.13

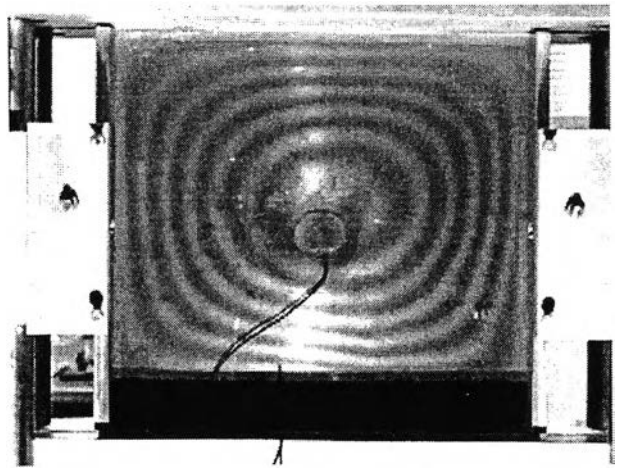


รูปที่ 3.12 แสงขนานตกกระทบทำมุมกับ grating

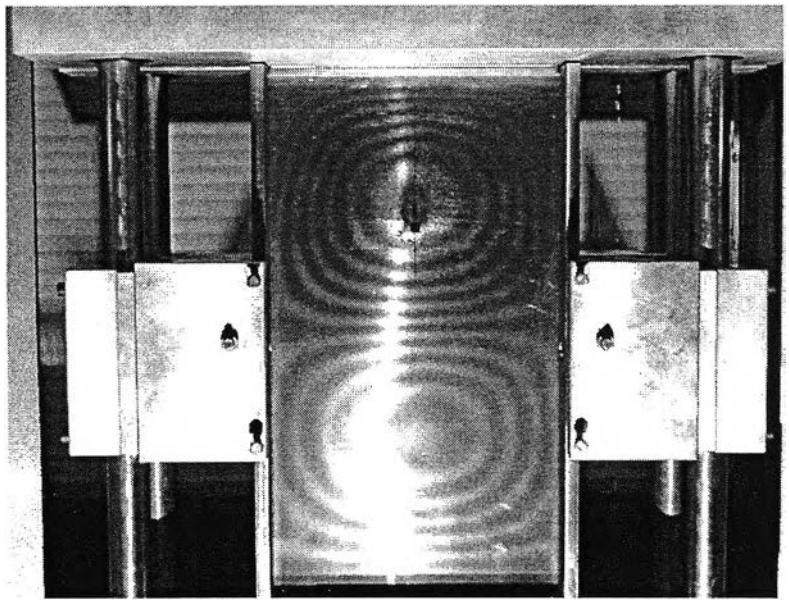


รูปที่ 3.13 การเหลื่อมล้ำระหว่างแถบสีและเงา

เมื่อมองในทิศที่ตั้งฉากกับเส้นอ้างอิงก็จะเห็นการซ้อนทับกันแบบไม่สนิทของแถบสว่างและมืดจำนวนมาก ส่งผลให้เกิดแถบแสงที่มีความเข้มต่างๆกันออกไปโดยเห็นเป็นแถบแสงสีขาวและเข้มขึ้นไปเรื่อย ๆ จนเป็นสีดำ บริเวณที่มีการเคลื่อนที่ในทิศทาง z เท่ากันแสดงให้เห็นในรูปของความเข้มที่เท่ากันเช่นในรูปที่ 3.14 และรูปที่ 3.15 แสดงถึงแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ได้รับแรงกดในแนวระนาบ ซึ่งในรูปดังกล่าวโหมดการโก่งงอคือโหมด 1 และโหมด 2 ตามลำดับ



รูปที่ 3.14 รูปแบบการโก่งงอในโหมดที่ 1 วัดโดยวิธี Moiré Method [4]



รูปที่ 3.15 รูปแบบการโก่งงอในโหมดที่ 2 วัดโดยวิธี Moiré Method [4]